Álgebra

Un enfoque moderno

PETERS \ SCHAAF

EDITORIAL REVERTÉ

ALGEBRA

un enfoque moderno

Max Peters

William L. Schaaf.

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
ALGEBRA
a modern approach

Edición original en lengua inglesa publicada por
D. Van Nostrand Company Inc.
450 West 33rd Street, New York, N. Y.

Versión española por
Ing. Roberto Treviño González
Profesor en la Universidad Regiomontana
Monterrey, N. L. Méx.

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1972
ISBN: 978-84-291-5105-3

Edición e book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2012
ISBN: 978-84-291-9672-6

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Prefacio

Esta obra, ALGEBRA, UN ENFOQUE MODERNO, basada en la filosofía del S. M. S. G. (*Grupo para el estudio de las matemáticas*), es una presentación al día de los conceptos básicos de Algebra. En ella, los autores dan el énfasis adecuado a los sistemas numéricos, a las estructuras algebraicas, a la racionalización lógicas de las operaciones y procedimientos matemáticos y a la precisión del idioma.

El objetivo principal es que el estudiante comprenda perfectamente los conceptos fundamentales por su propio descubrimiento y generalización, así como que adquiera la habilidad necesaria para manejarles fácilmente. En realidad, según la experiencia de los autores, los conceptos y las habilidades se adquieren simultáneamente. De acuerdo con este enfoque se proporciona en este libro mucho material práctico, tanto para ilustrar los conceptos como para dar al alumno un firme dominio sobre su habilidad.

Durante los últimos diez años, los estudios de matemáticas en los grados elemental y superior han experimentado cambios dinámicos pero se han introducido estos cambios en forma poco sistemática. Como resultado, los estudiantes llegan a los últimos grados con una gran diversidad de conocimientos fundamentales de matemáticas. Ello ha sido reconsiderado al preparar la primera edición de *Algebra, un enfoque moderno.*

Con grupos de alumnos más uniformemente preparados es posible dar mayor énfasis al desarrollo axiomático del sistema de los números reales.

Desde el punto de vista matemático se han tenido presentes los principios siguientes:

1o. No omitir ni tratar superficialmente, ningún tópico que deba conocer un estudiante del grado medio.

2o. La estructura del Algebra. No solamente se han establecido claramente las leyes algebraicas, sino que son usadas en forma coherente.

3o. Dar en forma clara y precisa las definiciones y axiomas y la demostración de los teoremas importantes.

4o. Usar de la teoría de conjuntos como un elemento unificador a través de todo el texto.

6o. Poner, dentro del desarrollo, las propiedades de las desigualdades y el concepto de valor absoluto en su lugar adecuado.

6o. Usar con todo rigor el lenguaje algebraico, la terminología usada es la de la matemática moderna. Cuando el alumno continúe hasta estudios más avanzados, tendrá poco que aprender sobre vocabulario matemático.

Desde el punto de vista pedagógico, se ha puesto especial atención a los hechos siguientes:

1o. El estilo es informal y el lenguaje es simple. El alumno tendrá poca dificultad en leer y entender el texto.

2o. La organización y exposición están hechas de manera que pueda servir al autodidacta, no en forma mecánica como el material "programado", sino de un modo reflexivo y que se entienda lo estudiado.

3o. Los ejemplos ilustrativos se han hecho con explicaciones paso a paso, para que el alumno pueda trabajar sobre ellos.

4o. El gran número de ejercicios, además de los de Repaso y los Acumulativos, dan suficiente material para obtener la destreza necesaria.

Por último, se ha puesto atención para cuidar de las diferencias individuales:

1o. Por principio de cuentas el alumno promedio del primer año, debe ser capaz para adquirir en primer lugar, maestría en el manejo del material presentado. Los párrafos "Opcionales" pueden omitirse para los alumnos con menor preparación sin perder la secuencia del libro.

2o. Los "Temas Extraordinarios" están escritos para los estudiantes sobresalientes que pueden trabajar por sí mismos o que tienen una aptitud matemática especial. Se incluyen al final de cada capítulo como unidades independientes, en forma breve, y relacionados o no con el tema del capítulo. Después de una exposición corta de los principios, se dan unos cuantos ejercicios para incitar la apetencia intelectual del alumno. La capacidad matemática se adquirirá solamente por la aplicación de los conceptos encontrados inicialmente.

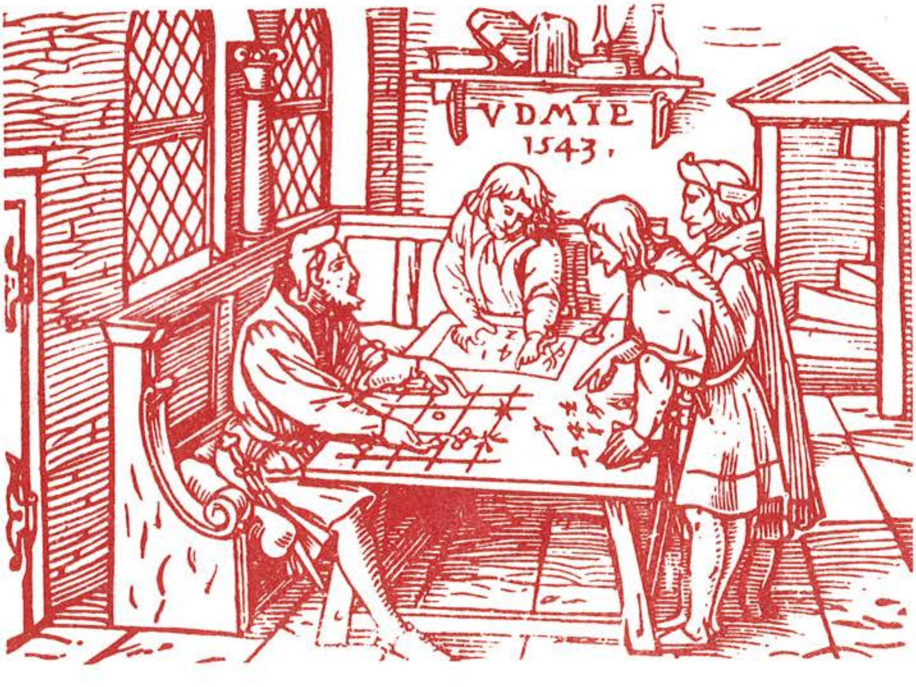
3o. Se da la Bibliografía para los estudiantes que tengan un interés serio en las matemáticas, aun cuando les falte la capacidad creadora de los matemáticos potenciales. El campo de los temas e ideas se varía con toda intención. Las referencias bibliográficas son específicas y dan un rango amplio de fuentes de lectura para exploración y enriquecimiento de conocimientos. Se debe animar a los alumnos a exponer oralmente resúmenes o trabajos breves de los temas sugeridos. Obviamente el material es muy flexible y puede permitir al maestro, descubrir talentos latentes. Puede servir también como motivación, incremento de conocimientos y apreciación de cualidades.

En conclusión, los autores expresan su deuda con muchas fuentes, incluyendo las sugerencias de muchos colegas, así como el material que se ha publicado debido a varios grupos profesionales y experimentales.

Peters y Schaaf

Contenido

Instrucciones en el arte del cálculo en 1543. Es enseñanza para el uso de los barcos.



¿Qué son los Números?

Los números son como las ideas; no puedes verlos ni manejarlos. Solamente existen en nuestra mente. Los símbolos que escribimos son numerales; son representantes de la idea de número. No son los números.

El concepto moderno de número es fundamental en la matemática. Sin él la matemática no existiría. Durante siglos se ha ido extendiendo el uso de los números y ha sido una parte básica de nuestra cultura. A medida que la matemática ha venido a ser una herramienta más útil a la ciencia y a la tecnología ha sido indispensable entender el papel de los números en la civilización moderna.

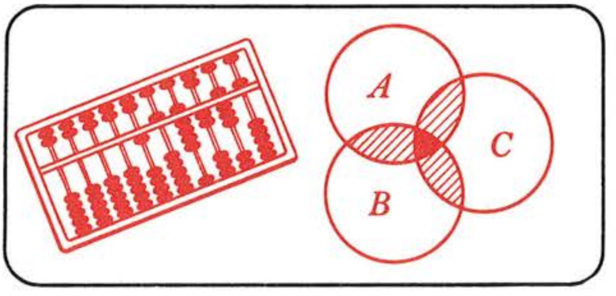
No siempre se ha entendido con toda claridad el concepto de número. En la antigüedad se creyó que los números tenían una cualidad misteriosa. Fue un trabajo muy arduo desarrollar los primeros sistemas de numerales. Se construyeron dispositivos mecánicos, como el ábaco, para computación. De repente salió un sistema de fácil manejo. Escasamente hace 600 años que nuestro sistema actual de numerales indoarábigos se estableció en Europa.

Ideas básicas relacionadas con el concepto de número son las de sucesión y correspondencia. Estas ideas son fundamentales en la matemática moderna. No solo son ideas muy útiles, sino que también fáciles de entender. Sabemos que al "contar", todo número es seguido inmediatamente por otro que es "una unidad mayor" que el precedente. Aún niños de muy tierna edad muestran un conocimiento práctico de correspondencia cuando reparten una bolsa de canicas o una caja de dulces diciendo: "una para mí, y otra para tí", etc.

Sin embargo fue solo al final del último siglo cuando los matemáticos comenzaron a explorar las grandes posibilidades de estas ideas tan "simples". Muchos de los primeros trabajos sobre esto se debieron al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918). Veremos algo sobre estas ideas en el primer capítulo.

1

Conjuntos y Relaciones



GENERALIDADES

1.1 IDEA DE CONJUNTO

En nuestra conversación diaria hablamos frecuentemente de colecciones de objetos. Usamos a menudo frases como una manada de caballos, un manojo de lápices, un grupo de niños, un paquete de cartas, o una flotilla de barcos. En matemáticas usamos la palabra conjunto para designar a una colección de objetos. Un conjunto debe ser descrito en tal forma que no haya duda acerca de los objetos que forman parte del conjunto; en este caso decimos que el conjunto está bien definido. Como ejemplos de conjuntos tenemos:

(a) El conjunto de tus libros escolares.
(b) El conjunto de los equipos de beisbol de liga mayor.
(c) El conjunto de los 50 Estados que forman la Unión Americana.
(d) El conjunto de los meses del año.
(e) El conjunto de los nombres que aparecen en un directorio telefónico.

Decimos que los objetos que forman parte de una colección pertenecen al conjunto. Los llamados miembros o elementos del conjunto. Los elementos de un conjunto pueden ser cosas de muy diferentes clases: objetos, gentes, nombres, lugares, letras del alfabeto, números, puntos, figuras geométricas. Por ejemplo, hablamos del conjunto de los números impares; el conjunto de los números divisibles por 5; el conjunto de círculos; etc.

En las próximas secciones aprenderemos cómo usar los conjuntos. A medida que avancemos en el estudio del Algebra, hallaremos que el conocimiento de los conjuntos es una herramienta muy útil.

1.2 FORMAS DE DESIGNAR A LOS CONJUNTOS

Un conjunto debe ser descrito en tal forma que no haya duda acerca de los elementos que lo componen. Esto puede hacerse en cualquiera de las tres formas siguientes:

(1) Haciendo una lista completa de todos los elementos.
(2) Mediante una frase apropiada.
(3) Especificando una propiedad común a todos los elementos del conjunto.

Cuando se usa la primera forma, se escribe la lista de los elementos entre llaves, y al conjunto se le designa por una letra mayúscula. Por ejemplo:
$A = \{$ lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo $\}$, en donde A designa al conjunto de los días de la semana.

$$P = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

en donde P designa al conjunto de números impares menores que 10. Al conjunto de los números que usamos al contar se le llama el conjunto de los números naturales. Se representa por N es decir, $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$..

En el conjunto P, "7" es uno de sus elementos. Esto se puede escribir en forma más simple como sigue:

$7 \in P$ (se lee "7 es un elemento de P" o bien "7 pertenece a P")

En el mismo ejemplo, "2" no es un elemento de P. Se escribe

$2 \notin P$ (se lee "2 no es un elemento de P" o "2 no pertenece a P")

En la segunda forma, describimos los elementos del conjunto en forma verbal usando una frase apropiada. **Ejemplos:**

$E =$ conjunto de los maestros de inglés en tu escuela.
$D =$ conjunto de vasijas en tu gabinete de cocina.
$R =$ conjunto de todas las muchachas pelirrojas de tu clase.
$N =$ conjunto de números naturales entre 5 y 12.

A veces es más conveniente describir un conjunto verbalmente que hacer una lista completa de sus elementos. Esto es especialmente cierto cuando un conjunto tiene un gran número de elementos. En estos casos se abreviará la escritura. Por ejemplo,

$$S = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 100\},$$

es el conjunto de todos los números de 5 a 100 inclusive, que son múltiplos de 5. Recordemos que un múltiplo de 5 es el producto de cualquier número natural, por 5.

Si deseamos representar un conjunto que consta de infinitos elementos usamos tres puntos suspensivos y escribimos:

$$Q = \{2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

Q es el conjunto de todos los números pares.

Cuando usamos el tercer método, debemos llamar la atención sobre una propiedad que sea común a todos los elementos del conjunto y usamos la siguiente anotación:

$$A = \{x | x \text{ es un número par menor que } 10\}.$$

Esto puede leerse "A es igual al conjunto de números x, tales que x es un número par menor que 10".

Esta notación llamada "constructor de conjuntos", será expuesta con mayor detalle en la sección 1.17.

Algunas veces un conjunto carece de elementos. Por ejemplo:

V = conjunto de los Senadores de Estados Unidos que tienen 15 años de adad.
C = conjunto de números naturales entre 5 y 6.
B = conjunto de bates de acero para beisbol.
M = conjunto de meses de 32 días.

Un conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, o conjunto nulo. El símbolo ϕ es el que se usa para designar al conjunto vacío. También podemos usar $\{\quad\}$

Ejercicio 1-1

1. Dar un ejemplo de un conjunto en que los elementos son:

(a) edificios **(b)** lagos **(c)** números **(d)** letras del alfabeto
(e) estudiantes de tu clase.

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están bien definidos?

(a) Los elementos del equipo de basquetbol de tu escuela en este período escolar.
(b) manzanas.
(c) Los pasajeros en un vuelo particular en un día dado, de Chicago a Los Angeles.

(d) Las muchachas bonitas de tu escuela.
(e) Todos los ciudadanos que viven en el Estado de Pensylvania.
(f) Los jardineros estrellas del equipo de beisbol de los Dodgers.

3. (a) Dar dos ejemplos de conjuntos que se puedan describir en forma conveniente haciendo la lista de todos sus elementos.
(b) Dar dos ejemplos de conjuntos que puedan describirse en forma conveniente usando una frase.

4. Cada una de las oraciones siguientes describe un conjunto. Escribir los nombres de los elementos de cada conjunto dentro de llaves.

(a) El conjunto de tus maestros de este año.
(b) El conjunto de los números naturales menores que 6.
(c) El conjunto de meses de año cuyos nombres comiencen con "M".
(d) El conjunto de números naturales menores que 50 que son divisibles por 7.
(e) El conjunto de números naturales entre 1 y 15.
(f) El conjunto de días festivos legales en el mes de julio.

5. En cada uno de los ejercicios siguientes, se han enlistado dentro de llaves todos los elementos de un conjunto. Describir cada conjunto mediante una frase. Dicha descripción puede hacerse de diferentes formas.

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\}$
(b) {primavera, estío, otoño, invierno}
(c) {un centavo, una moneda de 5 centavos, una de 10 centavos, una de 25 y una de medio dolar}
(d) $\{a, e, i, o, u\}$
(e) $\{5, 10, 15, 20, 25,\}$
(f) {delantero derecho, delantero izquierdo, centro, defensa derecha, defensa izquierda}

6. Determinar cuáles de los conjuntos que se dan a continuación es el conjunto vacío. Escribir los elementos de aquellos conjuntos que no son el vacío dentro de llaves.

(a) El conjunto de directores de la escuela.
(b) El conjunto de estados que limitan tanto con el Océano Atlántico como con el Pacífico.
(c) El conjunto de números impares naturales divisibles por 2.
(d) El conjunto de colores de la bandera nacional.
(e) El conjunto de números naturales menores que 1.
(f) El conjunto de miembros de una familia.

7. Dados los conjuntos:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

Completar lo siguiente: *(no se escriba en el libro)*

(a) $5 \in$ ______ **(c)** $10 \in$ ______ **(e)** $11 \notin$ ______
(b) $7 \notin$ ______ **(d)** $49 \in$ ______ **(f)** $9 \in$ ______

8. Escribir dentro de llaves los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de números naturales pares entre 40 y 52. (Recuérdese que "entre" indica que los extremos no están incluidos).
(b) El conjunto de números naturales impares del 21 a 23 inclusive.
(c) El conjunto de todas las combinaciones posibles de una de las tres letras A, B y C con uno de los tres números 1, 2, 3, sin tomar en cuenta el orden; esto es "$A1$" es la misma combinación que "$1A$".

9. Enlistar dentro de llaves los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) Los múltiplos de 7, comenzando con 14 y terminando con 84.
(b) El conjunto de los cuadrados de números naturales entre 1 y 12.
(c) El conjunto de cantidades de dinero que pueden obtenerse combinando dos monedas cualesquiera de los Estados Unidos, es decir, una de centavo, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos.
(d) Los cuadrados de los primeros cuatro números naturales.

10. **(a)** Escribir los elementos del conjunto de todos los números naturales de 3 a 30 inclusive, que son divisibles por 3.
(b) Escribir los elementos del conjunto de todos los números naturales de 3 a 30 inclusive, en que la suma de los dígitos es divisible por 3.
(c) ¿Cuál es la relación que existe entre el conjunto del ejercicio **(b)** y y el conjunto del ejercicio **(a)**?

11. Un número primo es cualquier número natural que no tiene como factor a ningún otro número primo exceptuando 1 y sí mismo. (El número 1 no se considera como número primo). Escribir el conjunto de números primos entre 1 y 30.

12. Describir en palabras cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{x, y, z\}$
(b) $B = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$

(c) $C = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$
(d) $D = \{10, 100, 1{,}000, 10{,}000\}$
(e) $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
(f) $F = \{1952, 1956, 1960, 1964\}$

1.3 SUBCONJUNTOS

Cierta orquesta escolar consta de 40 elementos en total: 15 violines, 4 violas, 4 chelos, 4 clarinetes, 3 flautas, 2 oboes, un contrabajo, tres cornos, 2 trompetas, 2 tambores. Podemos considerar el conjunto de los 15 violines como un conjunto separado dentro del conjunto total de los 40 instrumentos. A este le llamamos un subconjunto del conjunto entero. De una manera semejante el conjunto de los 4 clarinetes constituye otro subconjunto, así mismo lo es el de las 3 flautas, el de los 3 cornos, o el de las 2 trompetas. Aún un conjunto de un solo elemento como el del contrabajo es un subconjunto. Podemos también considerar de los 23 instrumentos de cuerda como un subconjunto; o los 10 de viento; o los 5 de latón o los 2 tambores; o la orquesta completa.

Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen al conjunto B, decimos que A es un subconjunto de B.

La notación "$A \subset B$" se lee "A es un subconjunto de B".

Ejemplo 1. Consideremos los conjuntos siguientes:

$$X = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$
$$Y = \{5, 7, 11\}$$

Puesto que cada elemento del conjunto Y es también un elemento del conjunto X, entonces $Y \subset X$.

Ejemplo 2. Consideremos los conjuntos siguientes:

$P =$ al conjunto de elementos de un equipo de beisbol.
$Q =$ el conjunto de jardineros de este equipo.

Puesto que cada elemento del conjunto Q es también un elemento del conjunto P, entonces $Q \subset P$.

¿Puedes nombrar otros subconjuntos del conjunto P?

Ejemplo 3. Consideremos el conjunto siguiente:

$$M = \{\text{Guillermo, Juan Paco, Carlos}\}$$

¿Podemos decir que M es un subconjunto de sí mismo? ¿Corresponde esto a la definición de subconjunto? (Recordemos que la definición de un subconjunto nos dice que cualquier elemento de un subconjunto debe ser elemento del conjunto original. Por lo tanto en conexión con esto, "sub"no necesariamente significa "menor que" o "más pequeño").

Ejemplo 4. Podemos disponer de tres profesores para formar un comité escolar: El Sr. García, el Sr. Martínez, y el Sr. Rodríguez. ¿Cuántos comités diferentes son posibles? En otras palabras, ¿cuántos subconjuntos podemos hacer del conjunto $C = \{$García, Martínez, Rodríguez$\}$?

Comité I	=	García, Martínez. Rodríguez
Comité II	=	García, Martínez,
Comité III	=	García, Rodríguez
Comité IV	=	Martínez, Rodríguez
Comité V	=	García
Comité VI	=	Martínez
Comité VII	=	Rodríguez
Comité VIII	=	ϕ

No es muy común tener un "comité de uno solo", como todos lo sabemos. Pero también parece muy raro llamar a VIII un comité, puesto que es el conjunto vacío. Se ha convenido entre los matemáticos considerar al conjunto vacío como un subconjunto. Todo elemento de ϕ es un elemento del conjunto C, puesto que ϕ no tiene elementos. En este sentido ϕ está "contenido" en cualquier otro conjunto. En otras palabras, el conjunto vacío es un subconjunto de otro cualquiera.

(1) Cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo.
(2) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro.

Ejercicio 1-2

1. Si $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ escribir con esta misma notación:

(a) El subconjunto de B que contiene sus números pares.
(b) El subconjunto de B que contiene sus números impares.
(c) El subconjunto de B que contiene sus cuadrados perfectos.

2. Si $R = \{a, b, c\}$

(a) Escribir todos los subconjuntos de R que tienen un solo elemento.
(b) Escribir todos los subconjuntos de R que tienen dos elementos.
(c) Escribir los otros dos subconjuntos de R.

3. Si $A = \{$Juanita, Eduardo$\}$, escribir todos los subconjuntos de A. (Se tienen cuatro subconjuntos).

4. Escribir un conjunto C del cual son subconjuntos los siguientes conjuntos: $A = \{b, d, f\}$ y $B = \{k, l, s, t\}$. ¿Cuál es el número mínimo de elementos de C?

5. Enlistar el conjunto cuyos elementos son:

(a) Todos los números naturales impares del 1 al 15 inclusive; después de esto escribir el subconjunto que contiene los números de dicho conjunto que son divisibles por 3.

(b) Todos los números naturales del 1 al 10 inclusive, que son cuadrados de números naturales; después de esto enlistar el subconjunto formado por los números impares de dicho conjunto.

(c) Todos los números naturales del 1 al 10 inclusive, que son raíces cuadradas de números naturales impares; escribir el subconjunto que contiene los números primos que pertenezcan a aquel conjunto. (Recordar que raíz cuadrada de un número es uno de los dos factores iguales cuyo producto es ese número. Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$.)

(d) Todos los números naturales de 2 cifras, cuya cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades; después escribir el subconjunto que contiene los números de dicho conjunto que son divisibles por 3.

6. Enlistar el conjunto cuyos elementos son:

(a) Los números naturales menores que 20 que son cuadrados de números naturales; después escribir el subconjunto de números tales que contengan números pares.

(b) Todos los múltiplos de 6, de 12 a 48, inclusive; escribir después el subconjunto de números que son divisibles por 4.

(c) Todos los números naturales mayores que 20 y menores que 30; escribir después el subconjunto formado por los números pertenecientes a dicho conjunto que sean divisibles por 3.

(d) Los cuadrados de todos los números naturales menores que 10; escribir después el subconjunto de números tales que sean números pares.

7. Formar un subconjunto, de tres elementos, de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de maestros de cierta escuela.

(b) El conjunto de los días de semana.

(c) $\{u, v, x, y, z\}$

8. Dado $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

(**a**) ¿Cuál es el subconjunto de números primos en S?
(**b**) ¿Cuál es el subconjunto de números divisibles por 2 en S?
(**c**) ¿Cuál es el subconjunto de S formado por números divisibles por 3?
(**d**) ¿Cuál es el subconjunto de S formado por números divisibles por 5?

9. Dado $P = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$, ¿cuáles de los siguientes son subconjuntos de P?

(**a**) El conjunto de números naturales de 1 al 10 inclusive.
(**b**) $\{1, 2, 3, 25\}$
(**c**) $\{1, 2, 3, 20\}$
(**d**) $\{0\}$
(**e**) $\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$
(**f**) El conjunto de todos los múltiplos de 4 que son menores que 20.

10. Explicar la diferencia en significado, si la hay, de cada uno de los siguientes:

(**a**) ϕ y $\{0\}$
(**b**) ϕ y $\{\ \}$
(**c**) $\{0\}$ y $\{\ \}$

11. Dado $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{1, 4, 9, 16\}$.

(**a**) Formar el conjunto P que contenga a todos los elementos que están tanto en Q como en R.
(**b**) ¿Es 2 un elemento de P?
(**c**) ¿Es P un subconjunto de Q, o es Q un subconjunto de P? Explicar por qué.

12. ¿Cuáles de los siguientes son el conjunto vacío?

(**a**) El conjunto de números naturales menores que 2.
(**b**) El conjunto de números pares cuyos cuadrados son números pares.
(**c**) El conjunto de números impares cuyos cuadrados son números pares.
(**d**) El conjunto de todos los números primos que sean pares.
(**e**) El conjunto de todos los ángulos rectos que tengan menos de 90 grados.

1.4 SUBCONJUNTOS PROPIOS

Hemos aprendido: (1) cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo y (2) el conjunto vacío es un subconjunto de otro cualquiera. Si hacemos una lista de todos los posibles subconjuntos de un conjunto dado y excluimos, de esta lista, al conjunto mismo, entonces los subconjuntos restantes (incluyendo el conjunto vacío) son llamados subconjuntos propios.

Un subconjunto propio de un conjunto S es cualquier subconjunto de S que no contenga *todos* los elementos de S.

Ejercicio 1-3

1. Escribir todos los posibles subconjuntos de cada uno de los siguientes conjuntos. No olvidar el conjunto vacío. ¿Cuáles de éstos son subconjuntos propios?

(a) $\{5, 6\}$
(b) $\{x, y, z\}$
(c) {Juan, Pedro, Guillermo}
(d) $\{a, b, c, d\}$

2. Copiar y completar la tabla:

Conjunto	Número de subconjuntos posibles
(a) $\{k\}$	
(b) $\{m, n\}$	
(c) $\{x, y, z\}$	
(d) $\{r, s, t, u\}$	

3. Si un conjunto tiene 5 elementos, ¿puedes decir el número de subconjuntos que se puedan formar?

***4.** ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto que tenga n elementos?

***5.** Un conjunto A tiene 6 elementos. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar? ¿Cuántos subconjuntos propios tiene?

***6.** ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden obtener seleccionando una o más monedas de 1 centavo, una de a 5, una de 10, una de 25 y una de 50?

***7.** ¿Cuál es el número total de posibles comités que pueden formarse seleccionando una o más personas de un grupo de 6?

***8.** **(a)** ¿Es el conjunto vacío, un subconjunto de sí mismo?
(b) ¿Es el conjunto vacío un subconjunto propio de sí mismo? ¿Por qué?

1.5 CONJUNTOS EQUIVALENTES

Los conjuntos podemos compararlos con dos propósitos: (1) para ver si tienen exactamente los mismos elementos o (2) para ver si tienen el mismo número de elementos.

Consideremos $R = \{1, 5, 7\}$ y $S = \{5, 1\ 7\}$, que tienen *exactamente los mismos elementos*. Decimos que estos dos conjuntos son iguales, y escribimos $R = S$. El hecho de que los elementos de R aparezcan en diferente orden de los elementos de S no tiene importancia. Cuando decimos que $R = S$, simplemente decimos que "R" y "S" son dos nombres diferentes para el mismo conjunto.

Consideremos ahora el conjunto $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $Q = \{u, v, w, x, y, z\}$. Los elementos del conjunto P no son los mismos que los elementos del conjunto Q, los dos conjuntos no son iguales. Sin embargo es fácil ver, que cada uno de los conjuntos tiene el mismo número de elementos, porque cada elemento del conjunto P puede hacerse corresponder con un elemento del conjunto Q, y cada elemento del conjunto Q puede hacerse corresponder con un elemento del conjunto P como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{lcccccc}
P: \{ & a & b & c & d & e & f\,\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
Q: \{ & u & v & w & x & y & z\,\}
\end{array}$$

Este apareamiento que hicimos con estos dos conjuntos muestra que existe una correspondencia de uno a uno entre los dos conjuntos. Cuando los elementos de 2 conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, o sea de uno a uno, decimos que los conjuntos tienen el mismo número cardinal; tales conjuntos son llamados conjuntos equivalentes. Escribimos entonces $P \leftrightarrow Q$, que se lee "el conjunto P es equivalente al conjunto Q".

Debe notarse que los elementos de dos conjuntos equivalentes pueden ser puestos en correspondencia biunívoca en más de una forma diferente. Por ejemplo, los elementos de P y Q podemos también ponerlos en correspondencia como sigue:

$$\begin{array}{lcccccc}
P: \{ & a & b & c & d & e & f\,\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
Q: \{ & w & x & u & z & y & v\,\}
\end{array}$$

Ejercicio 1-4

1. Demostrar que cada uno de los ejemplos siguientes ilustra la idea de correspondencia biunívoca. Puede usarse un diagrama.
   (a) El conjunto de Estados de la Unión Americana y el conjunto de las Capitales de Estados de la misma.

(**b**) El conjunto de automóviles que existen en nuestra ciudad y el conjunto de números de placas en él.
(**c**) El conjunto de letras del alfabeto y el conjunto de números naturales del 1 al 26 inclusive.
(**d**) El conjunto de equipos de liga mayor de beisbol y el conjunto de gerentes de equipos de liga mayor de beisbol.

2. ¿Cuáles de las siguientes parejas de conjuntos son iguales? ¿Cuáles parejas son equivalentes?

(**a**) $\{a, e, i, o, u\}$ y $\{e, u, a, o, i\}$
(**b**) {Juan, Enrique, María, Guillermo} y {Enrique, Guillermo, Juan, Eduardo}
(**c**) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(**d**) $\{1, 5, 7, 9\}$ y el conjunto de números naturales pares menores que 10.
(**e**) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el conjunto de números primos menores que 17. (Recordar que 1 no es un número primo.
(**f**) $\{1, 2, 3, 4\}$ y {lunes, martes, miércoles, jueves}

3. ¿Cuáles de las siguientes parejas de conjuntos son equivalentes?

(**a**) $\{95, 96, 97, 98, 99, 100\}$ y $\{a, e, i, o, u\}$
(**b**) {Francisco, Eduardo, Guillermo} y {María, Adelina, Juanita}
(**c**) El conjunto de números impares menores de 14, y el conjunto de números menores de 14.
(**d**) El conjunto de números naturales pares menores que 19, y el conjunto de números naturales impares menores que 18.

4. ¿Qué significa cada una de las siguientes proposiciones?: ¿Son ciertas? Dar un ejemplo para ilustrar cada una de ellas. Cada letra mayúscula representa un conjunto. (Recordar que la doble flecha, $\leftrightarrow$, significa "equivalente".)

(**a**) Si $A \leftrightarrow B$, entonces $B \leftrightarrow A$
(**b**) Si $A \leftrightarrow B$, y $B \leftrightarrow C$, entonces $A \leftrightarrow C$
(**c**) $A \leftrightarrow A$

5. (**a**) Si dos conjuntos son iguales, ¿son necesariamente equivalentes? Da un ejemplo para ilustrar tu respuesta.
(**b**) Si dos conjuntos son equivalentes, ¿necesariamente son iguales? Da un ejemplo para ilustrar tu respuesta.

6. Demostrar que hay exactamente 6 formas diferentes de establecer una correspondencia biunívoca de los elementos $\{A,B,C\}$ con los elementos de $\{1,2,3\}$.

7. Mostrar cómo los elementos del conjunto de fracciones unitarias $\{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ pueden ser puestos en correspondencia con los elementos del conjunto de los números naturales.

***8.** Demostrar como los elementos del conjunto infinito de números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto infinito de números naturales $\{1,2,3,4,5,6, \ldots\}$.

***9.** **(a)** Si dos conjuntos son equivalentes y cada uno de ellos tienen 5 elementos, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ponerse en correspondencia biunívoca los dos conjuntos?

(b) Si dos conjuntos son equivalentes y cada conjunto tiene 10 elementos, ¿de cuántas formas diferentes podemos poner en correspondencia "uno a uno" los elementos de los dos conjuntos?

(c) Si tenemos dos conjuntos equivalentes cada uno de ellos con n elementos (n es cualquier número natural), ¿en cuántas formas diferentes podemos poner en correspondencia biunívoca los elementos de los dos conjuntos?

1.6 CONJUNTOS FINITOS Y CONJUNTOS INFINITOS

Un conjunto puede tener muchos elementos. Por ejemplo, las letras de alfabeto forman un conjunto; pero no es cómodo escribirlas todas; escribimos entonces $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, donde los puntos suspensivos indican que las letras de d hasta w están incluidas en el conjunto, pero no han sido escritas.

Sabemos cuántos números naturales hay entre 1 y 50 ó de 1 a 100, ó de 1 a 1000, etc. Se pueden contar y la cuenta tiene fin. En otras palabras el conjunto de números naturales de 1 a 1000 ó de 1 a 1 000 000 tiene un primer y un último elemento. Consideramos el conjunto de gente que vive en una Nación en un momento particular. ¿Pueden contarse el número de elementos de este conjunto? Desde luego, aunque no sea una cosa fácil. En efecto, los elementos de este conjunto se cuentan aproximadamente cada 10 años por los Departamentos de censo.

Decimos que un conjunto es un conjunto finito, si podemos contar los elementos que lo componen, o si es el conjunto vacío. Cuando no es este caso, decimos que el conjunto es un conjunto infinito. Podemos decir o decimos que un conjunto infinito tiene un número infinito de elementos.

Los elementos de un conjunto finito pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto finito de los números naturales.

Ejemplo 1. El conjunto de meses del año puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de los primeros 12 números naturales, como sigue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.

Ejemplo 2. El conjunto de 30 filas de asientos de un cinematógrafo puede

ponerse en correspondencia biunívoca, con el conjunto de números naturales como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
A & B & C & \cdots & Z & AA & BB & CC & DD
\end{array}$$

Consideremos ahora el conjunto de los números naturales pares. ¿Podemos contar el número de elementos? Si tratamos de contar todos los números pares, ¿podemos terminar alguna vez de contar? Este es un ejemplo de un conjunto infinito. Podemos escribirlo como $\{2, 4, 6, \ldots\}$. Vemos algunos otros ejemplos de conjuntos infinitos:

(1) El conjunto de números impares.
(2) El conjunto de múltiplos de 3.
(3) El conjunto de los cuadrados de los números naturales.
(4) El conjunto de fracciones cuyo numerador es 1.

Ejercicio 1.5

1. ¿Cuáles de los siguientes son conjuntos infinitos?

(a) Todos los estudiantes de nuestra escuela.
(b) Todos los árboles en el parque nacional Yellowstone.
(c) Todos los números naturales mayores que 100.
(d) Toda la gente que vive en Asia.
(e) El conjunto de números naturales divisibles por 17.
(f) El conjunto de moléculas en los gases de la atmósfera que rodean la Tierra.
(g) El conjunto de líneas que puedan pasar por un punto dado.

2. Clasificar como finito e infinito cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) Todos los números pares entre 0 y 2 000 000.
(b) Los cuadrados de todos los números naturales.
(c) Todos los números naturales mayores que 100 billones.
(d) Todos los números naturales menores que 100 billones.
(e) La población total de la tierra en 1962.

3. Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como finito o infinito. Expresar todos aquellos cuyos elementos se puedan escribir entre llaves, usando puntos suspensivos cuando sea necesario:

(a) Todos los múltiplos de 5.
(b) Todos los números naturales que no son múltiplos de 5.

(c) Todos los múltiplos de 5 que son menores que 75.
(d) Todos los números naturales que son menores que 6.
(e) Las edades de los alumnos de tu clase, con aproximaciones al año.
(f) Los números de las gavetas en tu gimnasio.
(g) Los granos de una mazorca de maíz.

4. Demostrar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los Estados de los Estados Unidos ordenados alfabéticamente y los primeros 50 números naturales.

***5.** Explicar cómo se pueden poner en correspondencia "uno a uno" el conjunto de números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ con el conjunto de todos los números naturales

(a) ¿Son infinitos los dos conjuntos?
(b) ¿Son equivalentes los dos conjuntos?
(c) Explicar por qué la proposición siguiente puede usarse como una definición de un conjunto infinito.

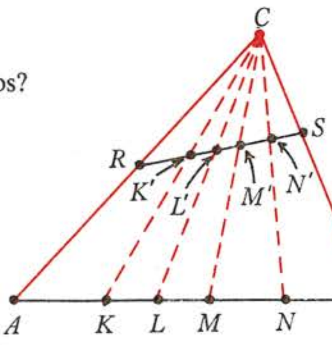
> *"Un conjunto infinito es aquel cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto propio de sí mismo."*

(d) Usar la definición anterior para demostrar que el conjunto de los números naturales impares es un conjunto infinito.

***6.** Demostrar como podemos poner en correspondencia biunívoca el conjunto C de números naturales con el conjunto M de los múltiplos de 5.

(a) ¿Es M subconjunto de C?
(b) ¿Es M un subconjunto propio de C?
(c) ¿Son C y M conjuntos finitos o infinitos?

***7.** Demostrar que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos en la base $\overline{AB}$ del triángulo ABC y el conjunto de puntos en el segmento $\overline{RS}$, con sus extremos en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$



***8.** Explicar e ilustrar la proposición:

"Un conjun o infinito no deja de serlo si se suprimen un número finito de elementos."

Resumen

Veamos lo que hemos aprendido acerca de los conjuntos:

(1) Un conjunto es una colección bien definida de objetos.
(2) Los objetos que pertenecen a un conjunto se llaman elementos o miembros del conjunto.
(3) Un conjunto puede tener cualquier número de elementos.
(4) Un conjunto que no tiene elementos se denomina el conjunto vacío; los símbolos para el conjunto vacío son $\{\quad\}$ y $\varnothing$.
(5) El conjunto vacío $\{\quad\}$, no debe ser confundido con el conjunto $\{0\}$, que es un conjunto que tiene un solo elemento, el número 0.
(6) Si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B, entonces A es un subconjunto de B, o $A \subset B$.
(7) Cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo.
(8) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.
(9) Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.
(10) Dos conjuntos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo número de elementos.
(11) Dos conjuntos pueden ser equivalentes sin ser iguales; pero si dos conjuntos son iguales, son también equivalentes.
(12) Un subconjunto propio de un conjunto S es cualquier subconjunto de S que no contiene todos los elementos de S.

FAMILIARIZANDONOS CON LOS NUMEROS

1.7 LOS NUMEROS NATURALES

Otro nombre para el conjunto formado por los números que sirven para contar es el conjunto de números naturales. Podemos agregar siempre 1 a cualquier número natural y se obtiene el siguiente, o sea, el número que lo sigue inmediatamente.

Si escribimos los números naturales en su orden usual, a cada número le sigue otro. Al 7 le sigue el 8; al 369 el 370; al 1000 el 1001, etc. A todo número natural le sigue otro. Piensa ahora en el mayor número natural que puedas nombrar. ¿Puedes pensar en otro número mayor que ese? ¿Cuál le sigue? ¿Te das cuenta que el conjunto de números naturales no tiene fin? Siempre hay un número natural mayor que otro, es decir, ninguno es el más grande. Los matemáticos expresan esta idea diciendo que hay un número infinito de números naturales. Otra forma de expresar la idea es decir que la sucesión de números naturales "continúa indefinidamente".

1.8 NUMEROS Y NUMERALES

Desde el punto de vista histórico sabemos que los números pueden ser representados de muchas formas diferentes. Cuando contamos los votos en una elección en el salón de clases, se escribe generalmente $\cancel{||||}\ ||$; o sea una raya por cada voto; el símbolo anterior es un modo de representar el 7. Los antiguos egipcios usaban figuras para representar números. Por ejemplo, ∩ (el hueso de talón) representaba diez y 𓍢 (una cuerda enrollada) representaba 100. A continuación ponemos diferentes formas de representar el "5":

5	*V*	$\cancel{||||}$	fünf	(4+1)
$\frac{10}{2}$	cinq	$\begin{matrix}|||\\||\end{matrix}$		(3+2)

Podemos ver que una marca sobre un papel (8, XV, ∩ , ||||, etc.) no es un número, puesto que un número es una idea. Es meramente un diseño para representar o simbolizar un número. En este sentido "5" no es un número, sino un símbolo para la idea del 5. Así la idea del 5 puede tener varios símbolos tales como V, (4 + 1), 15/3, etc., en la misma forma que a un muchacho puede llamársele "Guillermo", "Memo", "Pelirrojo", "chaparro", etc. Al nombre para un número se le llama numeral.

(1) Un numeral es un símbolo o un nombre que se usa para designar a un número; es lo que *escribimos*. (2) Un número es un concepto abstracto; es lo que *pensamos*.

1.9 LOS NUMEROS CARDINALES

Hemos visto que el conjunto de números que sirven para contar {1,2,3,4, . . . , 98,99,100, . . . }, que contiene un número infinito de elementos, forma el conjunto de los números naturales.

El número (0) es muy útil en matemáticas. Al escribir el numeral 307, el "0" nos dice que el número está expresado sin decenas. ¿Se considera al 0 un número para contar? Al contar los estudiantes en un salón de clases, se señala al primer estudiante diciendo: "este es el estudiante cero"? Desde luego que no contamos en esta forma. El 0 no es un número para contar, y por lo tanto el 0 no pertenece al conjunto de números naturales, tal como lo definimos. Al conjunto formado por el 0 y los números naturales lo llamamos el conjunto de los números cardinales. De aquí en adelante, cuando digamos "número cardinal", queremos significar el 0 ó cualquier otro número natural.

(N del E) No existe uniformidad sobre este término. Otros autores llaman al conjunto de los números para contar más el cero, *"conjunto de los números enteros no negativos"*.

En México, con la aprobación de la Secretaría de Educación *el cero forma parte del conjunto de los números naturales.*

El conjunto de números cardinales $= \{0,1,2,3, \ldots\}$.

Ejercicio 1-6

1. ¿Cual es el número natural que sigue al 99? ¿y al 909? ¿y al 1 003? ¿y al 1 000 020?

2. El número natural que sigue al 3 es $3 + 1$. Si representamos por n a un número natural cualquiera, ¿cómo podríamos representar al inmediato siguiente? ¿Cuál es el que sigue al $n + 10$? ¿y al $a + 2$?

3. Decir cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas y cuáles son falsas. Razonar las respuestas.

(**a**) El conjunto de números naturales contiene un número infinito de elementos.
(**b**) El conjunto de números cardinales es un subconjunto del conjunto de números naturales.
(**c**) Cualquier número puede ser representado exactamente por un numeral.
(**d**) El único número del conjunto de números cardinales que no tiene siguiente es 0.
(**e**) Un numeral es un símbolo y un número es una idea.
(**f**) 0 es el menor de los números naturales.
(**g**) El conjunto de números para contar y el conjunto de números naturales son conjuntos iguales.
(**h**) El conjunto de números cardinales es un conjunto finito.
(**i**) El que sigue a cualquier número cardinal es un número natural.
(**j**) El conunto de números naturales y el conjunto de números cardinales son conjuntos equivalentes pero no son iguales.
(**k**) El inmediato siguiente a cualquier número natural es un número cardinal.

1.10 LA RECTA NUMERICA Y GRAFICAS DE CONJUNTOS

Cuando pensamos en números, encontramos útil asociarlos con puntos en una recta. Primero, dibujemos una recta y pensemos en ella como un conjunto infinito de puntos. Como la recta "continúa indefinidamente", tanto a la izquierda como a la derecha, lo sugerimos poniendo una flecha en cada extremo. De esta manera indicamos que no hay ni "un primer punto" ni un "último punto".

Asociar dos cosas significa hacerlas corresponder, o aparearlas una a la otra.

Podemos asociar algunos de estos puntos con números en la forma siguiente. Escogemos dos puntos convenientes sobre la recta y le ponemos al punto de la izquierda el número 0 y al punto de la derecha el número 1 (ver el diagrama siguiente):

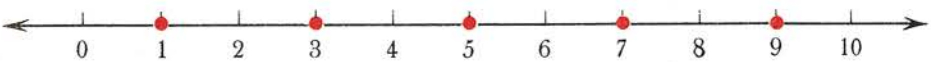
Usamos la distancia entre 0 y 1 como unidad de medida y marcamos esta unidad en forma repetida a la derecha del punto que hemos designado "1" para localizar otros puntos a los que llamaremos 2, 3, 4, etc. Ahora la recta queda así:

Puesto que esta recta podemos extenderla hacia la derecha sin límite, hay un número infinito de puntos que podemos asociar con los números cardinales. Claramente vemos que todo número cardinal puede ser asociado ahora con algún punto sobre la recta. Una recta cuyos puntos los hemos asociado con números se llama recta numérica o escala numérica. En una recta numérica, al número asociado con un punto particular se le llama coordenada de dicho punto. Al punto asociado con un número se le llama gráfica de ese número.

Sobre una recta numérica, podemos comparar (mayor o menor) dos números. Por ejemplo, todos los números asociados con puntos a la *izquierda* de 3 son menores que 3; todos los números asociados con puntos a la *derecha* de 3 son mayores que 3. Esto ilustra el hecho de que el conjunto de números cardinales es un conjunto ordenado. Esto es, podemos ordenar los elementos del conjunto de números cardinales en orden de magnitud.

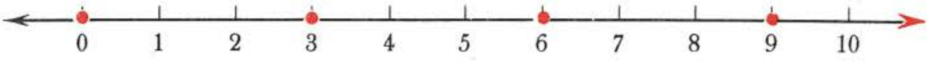
Recordemos que todo número cardinal puede asociarse con un punto de una recta numérica. Esto nos permite localizar elementos del conjunto de números cardinales sobre una recta numérica. El conjunto de puntos asociados con los elementos de un conjunto de números forma la gráfica del conjunto. Los ejemplos siguientes ilustrarán el método de dibujar la gráfica de un conjunto de números dados.

Ejemplo 1. Dado $A = \{1,3,5,7,9,\}$, dibujar la gráfica de A. Dibujamos una escala numérica.



Sobre la recta numérica localizamos los elementos del conjunto y marcamos los puntos localizados en esta forma. Nótese que solamente marcamos los puntos asociados con elementos del conjunto.

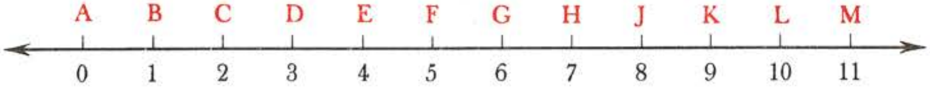
Ejemplo 2. Dado $V = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$, dibujar la gráfica de V. Dibujamos una escala numérica.



En esta recta, localizamos algunos de los elementos del conjunto y marcamos los puntos localizados en esta forma. La flecha roja indica que esto podemos continuarlo indefinidamente.

Ejercicio 1-7

1. Dar las coordenadas de los puntos siguientes:



(a) F **(b)** J **(c)** A **(d)** B **(e)** G **(f)** D

2. Dar las coordenadas de los puntos descritos abajo. Usar la gráfica del problema 1.

(a) El punto medio entre E y G.
(b) El punto que está a la tercera parte entre B y H.
(c) El punto que está a dos terceras partes del camino entre D y K.
(d) El punto que está al doble de distancia de C que de M.

3. Dar las coordenadas de los conjuntos de puntos descritos abajo. **Usese la** gráfica del problema 1.

(a) Los números cardinales a la izquierda de D.
(b) Los números naturales de E a J, inclusive.
(c) Los números naturales entre B y L que son múltiplos de 4.
(d) Los números naturales entre B y L que son múltiplos de 3.

4. Dibujar las gráficas de los conjuntos

(a) $P = \{0, 4, 7, 8\}$
(b) $Q = \{1, 5, 6\}$
(c) $R = \{0, 3, 5, 9\}$
(d) El conjunto de números naturales menores que 10 que son cuadrados

de números naturales.

(e) El conjunto de números naturales pares menores que 12.

(f) $W = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(g) $S = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$

5. Sea C= el conjunto de números naturales menores que 6 y D = el conjunto de números cardinales menores que 6. Dibujar las gráficas de los conjuntos C y D, cada una en recta numérica separada. ¿Cómo están relacionados los conjuntos C y D?

6. Sea $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(a) Escribir un subconjunto de G que contenga 4 elementos. Dibujar la gráfica de este subconjunto.

(b) Escribir un subconjunto de G que contenga todos los múltiplos de 3. Dibujar la gráfica de este subconjunto.

(c) Escribir un subconjunto de G que contenga los elementos que sean menores que 5. Dibujar la gráfica de este subconjunto.

7. Dados los conjuntos $R = \{0, 1, 5, 7\}$ y $S = \{0, 2, 5, 6, 8\}$.

(a) Encontrar el conjunto P que es el conjunto de todos los números que pertenezcan tanto a R como a S.

(b) Hallar el conjunto Q, que es el conjunto de todos los números que pertenecen a R o pertenecen a S o a ambos.

(c) Dibujar 4 rectas numéricas, y sobre ellas dibujar las gráficas de los conjuntos R, S, P y Q, respectivamente.

Resumen

Veamos lo que hemos aprendido con respecto a números.

(1) Otro nombre para el conjunto de números para contar es el conjunto de números naturales, es decir $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

(2) Los números naturales se presentan en un orden dado, de tal modo que al agregar uno a cualquier número natural obtenemos su inmediato siguiente.

(3) No hay "último" o mayor número natural; hay un número infinito de números naturales.

(4) Un número es una idea abstracta; un numeral es un símbolo o palabra que se usa para designar a un número.

(5) El 0 no es un número natural. Cuando consideramos el 0 *junto con* los números naturales, llamamos a este conjunto el de los números cardinales, es decir, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(6) Podemos asociar números con puntos sobre una recta.

(7) Todo número cardinal puede estar asociado con un punto de una recta numérica.

(8) Al número asociado con un punto de una recta numérica se le llama su coordenada.

(9) El conjunto de números cardinales es ordenado; en una recta numérica cualquier número cardinal es menor que otro si su punto correspondiente está a la izquierda del otro, y mayor que él si está a su derecha.

(10) El conjunto de puntos de una recta numérica asociado con los elementos del conjunto de números naturales recibe el nombre de gráfica de ese conjunto de números.

FRASES Y PROPOSICIONES

1.11 EXPRESIONES O FRASES NUMERICAS

Expresiones tales como "$3 + 2$," "5×7", "$6(4 + 5)$", son ejemplos de expresiones numéricas o frases numéricas. Cada una de ellas es un numeral formado combinando otros numerales. Es importante entender que una expresión o frase numérica puede ser el nombre de un número.

A menudo usamos un par de paréntesis como símbolo de agrupación. Por ejemplo, en la expresión "$6 \times (4 + 5)$", el paréntesis nos sirve para agrupar el "$4 + 5$", y el significado de la expresión queda "6×9". Usualmente, se omite el símbolo de multiplicación y se escribe "$6(4 + 5)$". Recordar que la expresión entre paréntesis se debe considerar como un número.

Para efectuar la serie de operaciones indicadas en una expresión numérica:

(1) Simplificamos primero la operación indicada del paréntesis;

(2) Efectuamos las operaciones de multiplicación y división de izquierda a derecha.

(3) Hacemos después las operaciones de adición y sustracción de izquierda a derecha.

Ejemplo 1. Hallar el número representado por la siguiente frase numérica:

$$3 \times 4 + 5(2 + 7)$$

Solución. Primero, simplificamos la expresión dentro del paréntesis:

$$3 \times 4 + 5(9)$$

En seguida, efectuamos la operación de multiplicación antes de la adición:

$$12 + 45$$

Finalmente efectuamos la suma. El resultado es 57.

Ejemplo 2. Hallar el número que representa la siguiente frase numérica:

$$(9 \cdot 4) - (6 \div 2)$$

Nota. El punto entre 9 y 4 es un símbolo de multiplicación.

Solución. Efectuamos las operaciones de multiplicación y división antes de la sustracción, en orden, de izquierda a derecha. Obtenemos $36 - 3$. Hacemos ahora la resta y tenemos el resultado que es 33.

Ejemplo 3. Hallar el número representado por la siguiente expresión numérica

$$9(3 + 5) - 48 \div (7 - 4) + 6 \cdot 2$$

Solución. Quitamos primero los paréntesis efectuando la operación indicada dentro de ellos

$$9 \times 8 - 48 \div 3 + 6 \cdot 2$$

A continuación, hacemos las operaciones de multiplicación y división de izquierda a derecha

$$72 - 16 + 12$$

Por último, efectuamos las operaciones de suma y resta de izquierda a derecha:

$$56 + 12 = 68$$

Ejercicio Oral 1-8

Calcular el número que representa cada una de las expresiones numéricas siguientes:

1. $7 \times 2 + 5$
2. $6 + 5 \cdot 2$
3. $(3 + 7) + 6 \times 1$
4. $8 - 4 \div 2$
5. $9 \cdot 3 - 2 \cdot 6$
6. $8 + (2 + 1)$
7. $6 \times 5 - 3 \times 7$
8. $15 - (3 + 8)$
9. $8 + 1 \times 7$
10. $15 - 3 \times 4$

Ejercicio 1-9

Calcular cada una de las frases numéricas siguientes:

1. $8 \times 7 + 6 \times 3$

2. $6(9 + 5) \div (4 + 3)$

3. $15 + 7(8 + 1) - 4 \cdot 6$

4. $\dfrac{6 \times 5 + 18}{5 + 1}$

5. $12 \div 2 + 64 \div 4$

6. $96 \div 8 \times 2 - 6$

7. $8 + 17 - (9 - 2)$

8. $\dfrac{24 \div 3 + 7 \times 6}{2(4 + 1)}$

9. $8(6 + 9) - 5 \times 7$

10. $7(9 - 3) - 8 \div 2$

11. $12 \div 2 \times 9 \div 3$

12. $7 \times 12 - 3 \times 4 \div 2$

1.12 PROPOSICIONES QUE EXPRESAN IGUALDAD

Sabemos que un número tiene diferentes nombres o numerales. Por ejemplo, el número 10 puede ser designado: 9×1, 5×2, $2(4 + 1)$, $80 \div 8$, $7 + 3$. Para indicar que dos expresiones numéricas designan el mismo número usamos el símbolo "=". Por ejemplo, $3 + 1 = 20 \div 5$. A toda proposición de igualdad a veces se le llama también ecuación. Para indicar que dos expresiones numéricas *no* designan el mismo número usamos el símbolo "$\neq$" que se lee "no igual a". Por ejemplo, $5 + 7 \neq 4 \times 6$. Una proposición que indica que dos expresiones numéricas no representan al mismo número se le llama una desigualdad.*

Las ecuaciones y desigualdades son ejemplos de proposiciones matemáticas. A menudo nos interesa saber si una proposición matemática es verdadera o falsa. Por ejemplo:

$8 + 3(1 + 5) = 20$ es una proposición falsa
$7 + 9 \neq 5 + 6$ es una proposición verdadera

Ejercicio Oral 1-10

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas y cuáles son falsas?

1. $3 + 6 = 4 + 5$

2. $9 \times 7 = 57 + 6$

3. $5 \cdot 8 = 4 \cdot 9$

4. $3(4 + 2) = 10 + 4$

5. $8 \times 4 \neq 25 + 7$

6. $15 = 8 + (4 + 3)$

7. $7 \cdot 5 \neq 5 \cdot 7$

8. $7 + 9 = 5 + 10$

* (N. del R.) Se suele reservar la palabra *ecuación* para igualdades condicionales.
La palabra desigualdad generalmente se refiere a proposiciones que expresan relaciones de orden.

9. $4 + 9 \neq 8 + 2$

10. $6 + 0 = 3 \times 2$

11. $18 - 2 \neq 24 \div 3 \times 2$

12. $6 + 5 + 9 = 2 \times 3 \times 4$

Ejercicio 1-11

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas y cuáles son falsas?

1. $8 + 4 \cdot 7 = 12 \times 7$

2. $3(5 + 4) \neq 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$

3. $9 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 19 + 5 \cdot 4$

4. $48 \div 2 \times 3 = 6(9 + 3)$

5. $16 \times 5 \div 4 = 3 \times 6 - 2$

6. $15 - 4 - 3 \neq 2(1 + 3)$

7. $8 \times (2 \times 6) = 8 + 2 + 6$

8. $35 \div 7 - 4 = 12 \div 12$

9. $5(9 - 3) \neq 6 + 3 \cdot 8$

10. $19 - (7 - 2) = 2 + 3 \cdot 4$

11. $3 + 2 \cdot 9 \neq 25 - 4 \cdot 1$

12. $20 - (3 + 5) = 3(1 + 3)$

1.13 PROPOSICIONES QUE EXPRESAN RELACIONES DE ORDEN

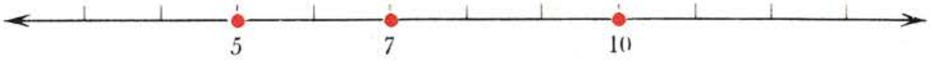
Cuando comparamos dos números, pueden ser iguales o desiguales. Si no son iguales, uno es mayor que el otro. Se usan los siguientes símbolos para comparar números:

$>$ significa "es mayor que"
$5 > 3$ se lee "5 es mayor que 3"
$<$ significa "es menor que"
$4 < 7$ se lee "4 es menor que 7"

Una manera de recordar estos signos es que, en una proposición cierta, tal como $9 > 6$ ó $6 < 9$, el vértice del símbolo se dirige siempre al número más pequeño.

Así como el símbolo "$\neq$" significa "no es igual a", el símbolo "$\ngtr$" significa "no es mayor que" y el símbolo "$\nless$" siginifica "no es menor que".

Si decimos "7 es mayor que 5" ó "7 es menor que 10", podemos estar pensando ¿"cuánto"? Pero también podemos estar pensando en las posiciones relativas de estos números en la recta numérica.



Así, $5 < 7$ significa que 5 está a la izquierda de 7.
$7 < 10$ significa que 7 está a la izquierda de 10.
$10 > 7$ significa que 10 está a la derecha de 7.

Así como en el caso de igualdades y desigualdades en donde no expresábamos una relación de orden, nos interesa si una proposición con los símbolos "$>$" o "$<$" (desigualdades) es cierta o falsa.

Ejemplos.

$6 + 4 < 10$ es una proposición *falsa*
$6 + 4 > 10$ es una proposición *falsa*
$6 + 4 > 7$ es una proposición *cierta*
$6 + 4 \not< 8$ es una proposición *cierta*

Hay veces que deseamos ordenar tres números tales como 3, 7, 9. En vez de escribir $3 < 7$, y $7 < 9$, podemos combinar las desigualdades para hacer una sola: $3 < 7 < 9$. Leemos esta proposición como "3 es menor que 7 *y* 7 es menor que 9"; ó "7 está *entre* 3 y 9". En forma semejante $8 > 5 > 2$ lo leemos como "8 es mayor que 5 y 5 es mayor que 2", ó, "5 está entre 8 y 2".

Ejercicio Oral 1-12

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

1. $5 + 2 = 3 + 4$
2. $7 + 5 > 3 + 9$
3. $2 + 4 \not< 2 + 5$
4. $5 + 1 > 4 + 2$
5. $7(3 + 2) > 35 + 2$
6. $11 > 5 > 1$
7. $3 + 4 \cdot 2 \not> 10$
8. $7 \cdot 3 < 6 + 4 \cdot 9$
9. $6 < 8 < 3$
10. $8 \div 2 \times 6 > 2(3 + 1)$
11. $7 < 15 < 20$
12. $15 - 4 \div 2 > 3 + 4 \cdot 1$
13. $0 < 4 < 2$
14. $9 > 7 > 5$
15. $8 - 3 \cdot 2 > 5$
16. $6(4 + 2) > 6 \cdot 4 + 2$
17. $15 \div 3 + 2 \not> 4$
18. $10 + 6 \div 2 - 3 \times 4 \not> 10$

Ejercicio 1-13

Poner un numeral en vez del símbolo $\square$ de tal modo que la proposición, en cada caso, sea cierta:

1. $\square + 1 = 3$
2. $\square \times 4 = 20$
3. $\square + 2 = 7$
4. $\square - 5 \neq 2$
5. $3 \times \square = 12$
6. $8 < \square < 12$
7. $2 + \square < 7$
8. $\square + 3 > 5$
9. $\square + 7 < 12$
10. $9 > \square > 4$
11. $2 \times \square - 1 = 11$
12. $2 \times \square + 6 > 16$
13. $\square \div 3 = 4$
14. $\square \div 5 > 2$
15. $18 \div \square < 3$
16. $3 \times \square \div 2 = 6$
17. $\square\,(1 + 4) > 15$
18. $3 \times \square + 2 = 14$
19. $0 < 3 < \square$
20. $\square > 7 > 2$

Resumen

¿Qué hemos aprendido sobre frases y proposiciones?

(1) Una expresión o frase numérica es una expresión simbólica que designa a un número por medio de numerales, paréntesis y signos de operación. La frase no es ni cierta ni falsa. Simplemente nombra a un número.

(2) Para efectuar una serie de operaciones indicadas en una frase numérica:

- **(a)** primero simplificamos las expresiones dentro de los paréntesis;
- **(b)** después efectuamos las operaciones de multiplicación y división de izquierda a derecha;
- **(c)** finalmente se ejecutan las operaciones de adición y sustracción de izquierda a derecha.

(3) Una igualdad es el enunciado de que dos expresiones numéricas designan el mismo número.

(4) A una igualdad se le llama también una ecuación.

(5) Una desigualdad es el enunciado de que dos expresiones numéricas no designan al mismo número, o bien la representación de una relación de orden.

(6) Una proposición matemática es el enunciado en símbolos de la relación entre números o frases numéricas.

(7) Una proposición matemática puede expresar una igualdad, una desigualdad, o una relación de orden.

(8) Un número es menor que ($<$) otro si en la recta numérica está a la izquierda del segundo. Un número es mayor que ($>$) otro si está a la derecha del segundo número.

FAMILIARIZACION CON VARIABLES

1.14 PROPOSICIONES ABIERTAS

Considerar las siguientes proposiciones:

(a) ―――――― es una estación del año.
(b) ―――――― es un senador por su estado en los Estados Unidos.
(c) ―――――― es un mes del año.

Los anteriores son ejemplos de proposiciones abiertas. Se les llama así porque no está expresado completamente el pensamiento hasta que se sustituye la "――――――" por un nombre. Además, cada una de estas proposiciones abiertas es cierta si la "――――――" se reemplaza por un elemento de un conjunto particular. El conjunto de elementos que hace que una proposición sea un enunciado verdadero se le llama conjunto solución o conjunto de soluciones.

En el ejemplo (**a**) el conjunto solución es {primavera, verano, otoño, invierno}. ¿Cuáles son los conjuntos solución de los ejemplos (**b**) y (**c**)?

1.15 PROPOSICIONES ABIERTAS Y VARIABLES

Consideremos el siguiente ejemplo: ———— > 2. En vez de usar "————", los matemáticos hacen uso de una letra. Si usamos la letra n, la proposición abierta viene siendo: $n > 2$.

Si convenimos en que n va a ser sustituída por un elemento del conjunto de los números naturales, entonces cualquier elemento del subconjunto infinito {3, 4, 5, 6, . . .} del conjunto de los números naturales hará que la proposición sea cierta. Así pues el conjunto solución de la proposición $n > 2$ es el conjunto {3, 4, 5 6, . . .}.

En este caso n representa realmente cualquiera de los números naturales 3, 4, 5, 6, . . . La letra *"n"*, cuando se usa en esta forma, se denomina una variable, y el conjunto del cual podemos seleccionar un elemento para que la proposición abierta sea verdadera se llama conjunto de sustitución o dominio de la variable. Comúnmente usamos para símbolos de las variables, las últimas letras del alfabeto.

Estudiemos los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. $n < 10$; el dominio de la variable, o conjunto de sustitución, es el conjunto de los números naturales. ¿El conjunto solución de esta proposición abierta es el siguiente subconjunto de los números naturales:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

Ejemplo 2. $x \neq 2$; el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales. ¿El conjunto solución de esta proposición abierta es:

$$\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}?$$

Ejemplo 3. $n + 4 = 7$; el conjunto de sustitución de la variable es el conjunto de los números naturales. ¿El conjunto solución de esta proposición abierta es el conjunto {3}, que contiene solamente un elemento?

Ejemplo 4. $x + 2 = 6$; el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales impares. ¿El conjunto solución de esta proposición abierta es el conjunto vacío?

Hemos introducido ideas nuevas muy importantes en las dos últimas secciones. Vamos a definir cuidadosamente los nuevos términos.

Una variable es un símbolo que colocamos en lugar del nombre de cualquier elemento de un conjunto de sustitución.

Una proposición abierta es una proposición que contiene una o más variables.

Un conjunto cuyos elementos usamos como sustitutos para una variable se llama conjunto de sustitución de la variable. Este conjunto también recibe el nombre de dominio de la variable.

El conjunto solución de una proposición abierta es el subconjunto del dominio de la variable que hace cierta la proposición.

Ejercicio Oral 1-14

1. En cada uno de los ejemplos siguientes se da una proposición abierta y el dominio de la variable. Hallar el conjunto solución de cada una de las proposiciones abiertas:

(a) $x + 2 = 8$; $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(b) $x - 3 = 1$; $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(c) $2x = 6$; $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(d) $2x + 7 = 15$; $\{2, 4, 6, 8\}$

2. Hallar los conjuntos solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas. En cada uno de los casos el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $x + 3 = 7$
(b) $x + 5 = 5$
(c) $2x + 1 = 11$
(d) $3x - 1 = 5$
(e) $2x - 3 = 5$
(f) $4x = 24$
(g) $4x + 1 = 29$
(h) $x + 1 = x + 2$

3. En cada una de las proposiciones abiertas que siguen, reemplácese la variable por el número indicado y véase si el resultado es una proposición cierta o falsa.

(a) $x + 6 = 10$; para x es 4
(b) $x + 6 \neq 10$; para x es 4
(c) $y + 9 = 12$; para y es 8
(d) $y + 9 \neq 12$; para y es 8
(e) $x + 4 < 7$; para x es 5
(f) $y + 3 \ngtr 10$; para $y = 8$
(g) $2(x + 1) = 12$; para $x = 5$
(h) $2(y + 3) < 20$; para $y = 7$
(i) $15 < n + 2$; para $n = 10$
(j) $24 \nless 3n + 5$; para $n = 6$

Ejercicio 1-15

1. Determinar el conjunto de soluciones de cada una de las proposiciones abiertas siguientes:

(a) $n > 2$; dominio, el conjunto de números naturales.
(b) $y \neq 5$; dominio, el conjunto de números naturales impares.
(c) $y < 4$; dominio, el conjunto de los números cardinales.
(d) $1 + x < 8$; dominio, el conjunto de números cardinales.
(e) $3n + 5 = 10$; dominio, el conjunto de números naturales.
(f) $2(y - 1) = 12$; dominio, el conjunto de números cardinales.
(g) $3(2n + 1) = 9$; dominio, el conjunto de números naturales impares.
(h) $3 + 2y < 7$; dominio, el conjunto de números cardinales.

2. Hallar los conjuntos solución de las siguientes proposiciones abiertas; para todas ellas el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $x + 3 = 10$
(b) $12 - n = 10$
(c) $x + 4 = x + 3$
(d) $p + 3 > p + 2$
(e) $x + 12 = 2x + 6$
(f) $7 + n = n + 7$
(g) $x + 2 < 13$
(h) $4 + k < 12$
(i) $3x = 5 + x$
(j) $3x + 5 > 17$

3. Traducir cada una de las proposiciones abiertas siguientes en una oración verbal:

Ejemplo 1.

$$3x + 2 = x + 10$$

Solución. Si al triple de un número se le suma 2, el resultado es igual al número más 10.

Ejemplo 2.

$$4(y + 5) = 17$$

Solución. El producto de 4 por un número más 5 es igual a 17.

(a) $x + 3x = 28$
(b) $10 - x = 4x$
(c) $2y + 3 = y + 12$
(d) $3(y + 2) = 18$
(e) $5x - 2 = 3x + 8$
(f) $16 = 2(x + 3)$

4. Si un número natural N, se divide entre 4, el resultado es otro número natural k.

(a) Escribir la oración verbal anterior como proposición abierta.
(b) Escribir tres parejas de números que al sustituir N y k por ellas la proposición resulta cierta.

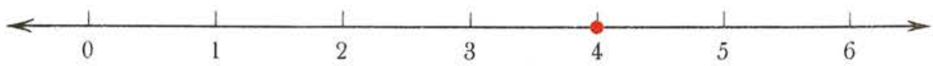
5. Si a un número natural N se le suma 1 y después se divide por 5, el resultado es otro número natural, k.

(a) Escribir esta oración como una proposición abierta.
(b) Encontrar tres parejas de números que al sustituir N y k por ellas la proposición resulta verdadera.

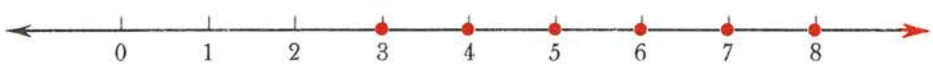
1.16 GRAFICAS DE CONJUNTOS DE SOLUCIONES

En una sección anterior hemos visto la forma de construir la gráfica de un conjunto de números. En esta sección veremos un método usado para el dibujo de las gráficas del conjunto solución de proposiciones abiertas. Veamos algunos ejemplos:

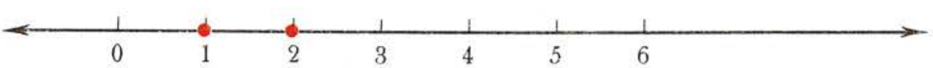
Ejemplo 1. Consideremos la proposición abierta $y = 4$ siendo el dominio el conjunto de los números naturales. Vemos que el conjunto solución de esta proposición abierta es $\{4\}$. Para dibujar la gráfica de este conjunto solución trazamos una recta numérica y localizamos en ella el número 4, como se ve en la figura:



Ejemplo 2. Consideremos la proposición abierta $x > 2$ (dominio el conjunto de los números cardinales). El conjunto solución de esta proposición abierta consiste de todos los números cardinales mayores que 2. La gráfica es



Ejemplo 3. Consideremos la proposición abierta $2 + y < 5$ siendo el dominio de la variable el conjunto de los números naturales. El conjunto solución de esta proposición abierta es el conjunto de todos los números naturales menores que 3, o sea, $\{1, 2\}$. La gráfica es



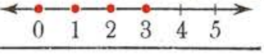
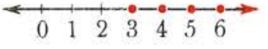
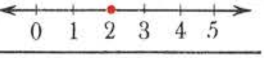
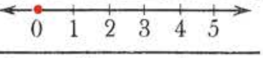
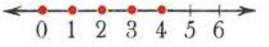
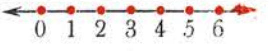
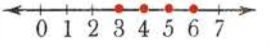
Con estos ejemplos podemos dar la siguiente definición:

La gráfica del conjunto solución de una proposición abierta que contiene una variable es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica cuyas coordenadas son los números que hacen cierta la proposición.

En esta sección tendremos ocasión de usar los símbolos "$\geq$" y "$\leq$". $x \geq 5$ significa "x es mayor que o igual a 5". Si el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales entonces el conjunto solución de la proposición es $\{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

$y \leq 3$ significa "y es menor que o igual a 3". Si el dominio de esta proposición es el conjunto de los números cardinales, entonces el conjunto solución de la proposición es $\{0, 1, 2, 3\}$.

Estudiaremos ahora otros ejemplos ilustrativos. En todos los casos, el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

Proposición	Conjunto solución	Gráfica
(4) $x < 4$	$\{0, 1, 2, 3\}$	
(5) $x \geq 3$	Todos los números cardinales mayores que o iguales a 3.	
(6) $x + 3 = 5$	$\{2\}$	
(7) $y + 2 = 2$	$\{0\}$	
(8) $2y + 1 = 2(y + 1)$	$\varnothing$	La gráfica no tiene puntos en la recta numérica.
(9) $y \leq 4$	Todos los números cardinales menores que o iguales a 4.	
(10) $x + 2 = 2 + x$	Todos los números cardinales.	
(11) $2 < y < 7$	Todos los números cardinales entre 2 y 7.	

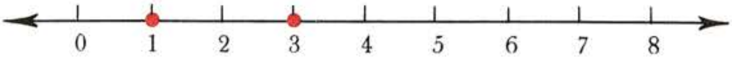
Ejercicio 1·16

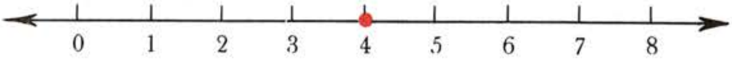
1. Dibujar las gráficas de los conjuntos solución de las siguientes proposiciones abiertas. En todos los casos, el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

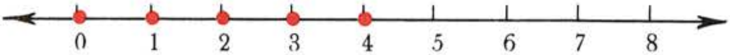
(a) $x = 6$
(b) $x > 3$
(c) $x < 5$
(d) $x + 2 = 6$
(e) $3x = 12$
(f) $x \geq 4$
(g) $x \neq 4$
(h) $1 < x < 9$
(i) $2 + x = 6$
(j) $2 + x \neq 6$
(k) $2 + x < 6$
(l) $2x \leq 8$

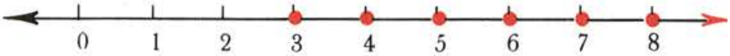
(m) $2(y + 1) = 6$
(n) $2 + x = 2$
(o) $x > 0$
(p) $y \leq 3$
(q) $2x = 8$
(r) $3x < 9$
(s) $3(x - 2) = 9$
(t) $5x - 1 = 14$
(u) $5x - 1 < 14$
(v) $3x > 6$
(w) $3 > y > 5$
(x) $0 < x < 4$

2. Determinar, en cada uno de los ejercicios siguientes, si el conjunto de puntos indicado es la gráfica de la proposición abierta dada. En todos los casos el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $x + 1 = 3$


(b) $2x = 8$


(c) $x \leq 4$


(d) $x > 2$


(e) $y \geq 2$


(f) $3 < x < 7$


3. Para cada gráfica escríbase una proposición abierta con los conjuntos solución dados por ella:

(a)


(b)


(c)


1.17 NOTACION "CONSTRUCTOR DE CONJUNTOS"

Al escribir los conjuntos de soluciones de proposiciones abiertas, se usa algunas veces la notación:

$$x|x < 5;\ x \text{ un número natural}$$

que algunos autores llaman "constructor de conjuntos" (set-builder).
Esto se lee: "Todos los números naturales tales que $x < 5$." Si aceptamos usar

la letra N para designar el conjunto de los números naturales, podemos usar la forma siguiente: $\{x|x < 5, x \in N\}$.

Nótese que la variable está a la izquierda de la línea vertical. La línea vertical se lee "tal que". Después sigue la proposición abierta que establece la condición que selecciona los elementos del dominio de la variable que satisfacen la condición dada. Y finalmente, se establece el dominio de la variable.

Ejemplo 1. El conjunto $\{x|x + 3 = 5$; x es un número cardinal$\}$ se lee: "Todos los números cardinales x tales que $x + 3 = 5$."

El conjunto descrito así es $\{2\}$.

Ejemplo 2. El conjunto $\{y|y < 8$; y es un número natural par$\}$ se lee: "El conjunto de todos los números naturales pares menores que 8."

El conjunto descrito es $\{2, 4, 6\}$.

Ejemplo 3. ¿Cuál es el conjunto descrito por la proposición siguiente? Dibujar su gráfica:

$\{x|x \leq 3$; x es un número cardinal$\}$.
El conjunto descrito así es $\{0, 1, 2, 3\}$.

Ejemplo 4. Hallar el conjunto que se describe y dibujar su gráfica:

$$\{y|2 < y \leq 8, y \in N\}.$$

Se lee: "Todos los números naturales mayores que 2 y menores que o iguales a 8."

El conjunto descrito es $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Ejercicio Oral 1-17

Leer cada uno de los conjuntos siguientes:

1. $\{x|x + 1 = 7, x \in N\}$.
2. $\{x|x > 2, x \in N\}$.
3. $\{y|y < 15, y$ es un número par$\}$.
4. $\{y|y \neq 7, y$ es un número cardinal menor que $10\}$.

5. $\{x|x \geq 2$, x es un número natural menor que $7\}$.
6. $\{y|y + 3 = 8, y \in N\}$.
7. $\{x|x + 3 > 5$, x es un número cardinal$\}$.
8. $\{y|y \leq 3$, y es un número par$\}$.
9. $\{x|2x > 8$, x es un número impar$\}$.
10. $\{x|x + 1 > 4$, x es un número par$\}$.
11. $\{x|5 < x < 10, x \in N\}$.
12. $\{y|3 < y \leq 8, y \in N\}$.
13. $\{x|2 > x > 9, x \in N\}$.
14. $\{x|6 \geq x \geq 11, x \in N\}$.

Ejercicio 1-18

1. En cada uno de los ejercicios siguientes, el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales. Escribir el conjunto que se describe en cada uno de ellos.

(a) $\{x|x + 2 = 7\}$
(b) $\{y|y - 2 = 1\}$
(c) $\{x|x > 3\}$
(d) $\{x|2x = 7\}$
(e) $\{y|y \leq 4\}$
(f) $\{x|x \neq 4\}$
(g) $\{y|2y = 10\}$
(h) $\{x|3x \geq 12\}$
(i) $\{y|y + 1 < 5\}$
(j) $\{x|x + 3 = 1\}$

2. Dibujar las gráficas de los conjuntos que se dan a continuación. Para todos ellos el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $\{x|x + 1 = 3\}$
(b) $\{x|2x = 10\}$
(c) $\{x|x - 2 = 4\}$
(d) $\{y|2 + y \neq 5\}$
(e) $\{x|2x + 1 > 7\}$
(f) $\{x|8 = x + 5\}$
(g) $\{x|x \leq 4\}$
(h) $\{x|5x + 2 = 12\}$
(i) $\{x|x + 1 \geq 7\}$
(j) $\{x|11 = 3x\}$
(k) $\{x|x + 3 > 5\}$
(l) $\{x|2x - 1 = 5\}$
(m) $\{x|3x - 4 \geq 5\}$
(n) $\{x|x - 2 \geq 3\}$
(o) $\{x|x + 1 \neq 7\}$
(p) $\{x|0 < x < 5\}$
(q) $\{x|2 > x > 6\}$
(r) $\{x|1 \geq x > 4\}$
(s) $\{x|3 \leq x \leq 9\}$

1.18 EXPONENTES

En una multiplicación, cada uno de los números que se multiplican se dice que es un factor del producto. Así, 5 y 7 son factores de 35; en forma semejante, 1 y 35 son factores de 35. En un producto puede aparecer un mismo número más de una vez como factor. Por ejemplo, en 25, 5 aparece 2 veces como factor. En ese caso podemos escribir $5 \times 5 = 25$ ó $5^2 = 25$. El pequeño número "2" que se escribe arriba a la derecha del 5 se llama exponente, y el número "5" se llama base. En forma semejante, 5^3 significa $5 \cdot 5 \cdot 5$ y 5^4 significa $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Cuando trabajemos con proposiciones abiertas tendremos ocasión de usar variables que tienen exponentes. Así, x^2 significa $x \cdot x$; x^3 significa $x \cdot x \cdot x$; $3y^5$ significa $3 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$; etc. A veces escribimos $3 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$ simplemente como $3yyyyy$, sin los puntos en medio; pues $3yyyyy$ significa también multiplicación. Así pues, $4aaabbbbcc$ significa $4 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$, o $4a^3b^4c^2$.

Un exponente es un numeral que nos dice cuántas veces debemos tomar como factor, en un producto, un número llamado base. Se acostumbra escribir el exponente en la parte superior derecha de la base.

Cada factor de un producto es el coeficiente del producto de los otros factores. Por ejemplo, en el producto $6ab$, 6 es el coeficiente de ab, $6a$ es el coeficiente de b, y $6b$ es el coeficiente de a.

Ejemplo 1. Hallar el valor de 6^3.

6^3 significa $6 \cdot 6 \cdot 6$

Así pues $6^3 = 216$

Ejemplo 2. Hallar el valor de $4y^2$ cuando $y = 3$.

$4y^2$ significa $4 \cdot y \cdot y$

$4 \cdot y \cdot y = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Así pues $4y^2 = 36$

Nótese que el numeral 4 es un coeficiente y el numeral 2 es un exponente. El exponente afecta (o se aplica) solamente a la y, no al 4.

Ejemplo 3. Escribir $7xxxyyyyy$ usando exponentes.

$$7xxxyyyyy = 7x^3y^5$$

Ejemplo 4. Escribir $3 \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p - 7 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q$ usando exponentes.

$$3 \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p - 7 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 3p^4 - 7q^6$$

Ejemplo 5. Hallar el valor de $(4x)^2$ cuando $x = 3$

$4x$ significa $4 \cdot 3 = 12$
$(12)^2$ significa $12 \cdot 12 = 144$

Ejercicio Oral 1-19

1. Usar exponentes para simplificar la escritura:

(a) $d \cdot d \cdot d \cdot d$
(b) $x \cdot x \cdot a \cdot a \cdot a$
(c) $3 \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$
(d) $7 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot x \cdot x$
(e) $5 \cdot x \cdot y \cdot y$
(f) $a \cdot a + b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$
(g) $x \cdot x \cdot x + 3 \cdot y \cdot y + 9 \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$
(h) $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$

2. Hallar los valores de cada una de las siguientes expresiones:

(a) 10^3
(b) 2^4
(c) 3^2
(d) 1^5
(e) 6^3
(f) $2 \cdot 3^2$
(g) $3 \cdot 2^2$
(h) $5 \cdot 4^2$
(i) $10 \cdot 2^3$
(j) $5^2 \cdot 2^2$
(k) $17 \cdot 1^6$
(l) $5 \cdot 3^3$
(m) $(5 \cdot 3)^2$
(n) $(2 \cdot 4)^3$
(o) $(1 \cdot 6)^2$
(p) $3(2 \cdot 4)^2$

3. Encontrar el valor de cada una de las expresiones siguientes:

(a) $3x^2$, cuando $x = 2$
(b) $5a^2$, cuando $a = 3$
(c) $17b^3$, cuando $b = 1$
(d) $10a^3$, cuando $a = 2$
(e) $2x^2$, cuando $x = 5$
(f) a^2b^3, cuando $a = 1$ y $b = 2$
(g) $5xy^2$, cuando $x = 2$ y $y = 4$
(h) $(2a)^3$, cuando $a = 5$
(i) $(x + 2)^2$, cuando $x = 1$
(j) $y^3 + y$, cuando $y = 3$
(k) $(3x)^2$, cuando $x = 4$
(l) $(5y)^3$, cuando $y = 2$

Ejercicio 1-20

4. Encontrar el valor numérico de cada una de las expresiones siguientes cuando $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $x = 5$.

1. b^2cx
2. c^2x^2
3. $7a^2bx$
4. $a^2x + bc^2$
5. $2a^2 + a^3$
6. $8b^2c - 5a^2x$
7. $(2a + 3b)^2$
8. $a^2 + b^2 + c^2$
9. $x^2 - b^2 - c^2$
10. $(3x - 2c)^3$
11. $3a^3 + b^2 + c^3$
12. $(ab)^3 + (bc)^2$
13. $(2x + 1)^2$
14. $(3b - 4a)^5$
15. $x^2 + 2c^3 - 3b^2$
16. $4(2x - 1)^2$
17. $a^5 + b^4 + c^3$
18. $10(bx)^2 - 7(ac)^3$
19. $(a^3b^2)^4 + (c^2x)^2$
20. $8(3x - 2c)^2$
21. $(7ac)^3 - (2b)^2$
22. $(4b^2c)^2 + (6a^2x)^3$

1.19 FRASES Y EXPRESIONES ABIERTAS

Así como una proposición abierta es una proposición matemática que contiene una o más variables, una frase abierta es una oración o expresión matemática que contiene una o más variables. Por ejemplo, las siguientes son expresiones o frases abiertas.

(1) $n + 5$	(3) $5 + 2y^2$	(5) $x + y - 10$
(2) $2x^2 - 3$	(4) $2(x + 4)$	(6) $3(n^2 - 5)^4$

La expresión (**1**) significa"un número no especificado o más 5"“5 más un número no especificado". Hasta que la variable ha sido reemplazada por un número particular, no sabemos cuál es el número que representa la frase; es todavía una "pregunta abierta" Cuando no se da el dominio de la variable, se considera que es el conjunto de los números cardinales.

Ejercicio Oral 1-21

1. Traducir en palabras (o en frase abierta) cada una de las siguientes expresiones abiertas:

Ejemplo. $2x^2 - y^2$ se puede leer "la diferencia entre el doble del cuadrado de x y el cuadrado de y".

(a) $x + 5$	**(e)** $5(k - 10)$
(b) $n - 4$	**(f)** $n^2 - 1$
(c) $3x + 2$	**(g)** $a^2 + b^2$
(d) $4(x + 3)$	**(h)** $17 - 2y^2$

2. Traducir cada uno de los siguientes enunciados a símbolos usando x o n para presentar las variables.

(a) Un número aumentado en 7.
(b) Cinco veces un número más 12.
(c) El producto de 9 por el doble de un número.
(d) El doble de un número más 9.
(e) El cuadrado de la suma de un número más 10 veces el mismo número.
(f) Un número disminuído en 7.
(g) La suma de dos números diferentes multiplicada por 5.
(h) La diferencia entre el cuadrado de un número y el cuadrado de otro número.

Ejercicio 1-22

1. Escribir una frase que traduzca cada una de las siguientes expresiones o frases abiertas.

(a) $3n - 2$	**(f)** $35 - 2x^2$
(b) $x(x + 1)$	**(g)** $4(2n + 9) - 6$
(c) $4(x - 1)$	**(h)** $x + (2x + 7)$
(d) $3(2y - 5)$	**(i)** $y + (y + 1)$
(e) $x^2 + y^2$	**(j)** $4x^2 - 1$

2. Traducir a símbolos cada una de las siguientes frases usando x ó n para representar las variables:

(a) El doble de un número menos 3.
(b) Un número aumentado en 7 y el resultado multiplicado por 5.
(c) El producto de un número por el mismo número disminuído en 3.
(d) El producto de un número natural por el siguiente.
(e) La suma de un número natural más el que le sigue.
(f) La diferencia entre el cuadrado de un número y el doble del mismo.
(g) La diferencia entre un número y 3 menos que ese número.
(h) La suma de dos números diferentes multiplicada por 6.
(i) El producto de 5 menos de un número y 8.
(j) El producto de 3 menos que el doble de un número y 3 más que el doble del mismo número.

3. Calcular los valores de cada pareja de expresiones para los valores indicados de las variables:

(a) $5n + 2$ y $5(n + 2)$ para $n = 2$.
(b) $(x + 3) - 2$ y $x + (3 - 2)$ para $x = 7$.
(c) $n - 5$ y $5 - n$ para $n = 12$.
(d) $3(x - y)$ y $3x - 3y$ para $x = 7$ y $y = 2$.

4. ¿Cuál es el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones si x vale 2, y vale 4 y z vale 3?

(a) $3x + 4y - 20$	**(c)** $5x^2 - (y + z)$
(b) $3(x + z) - 2(y + z)$	**(d)** $(x + y)^2 - (y - z)^2$

1.20 IDENTIDADES Y ECUACIONES

Consideremos la proposición abierta:

$$3x + 2 = 2 + 3x$$

Cuando queremos encontrar el conjunto solución de esta proposición, es fácil ver que cualquier número hace cierta la proposición. Podemos tratar con unos cuantos números, por ejemplo, 5, 8, 20, . . . El conjunto solución es un conjunto infinito a no ser que se especifique un dominio finito.

Una proposición tal como

$$n + 2n = 3n$$

o

$$8x - 2x = 10x - 4x$$

o

$$k + 2k + 5k = 8k$$

es llamada una identidad. En todos estos casos, reemplácese la variable por números naturales cualesquiera. Los números seleccionados, ¿pertenecen al conjunto solución de la proposición?

¿Es una identidad la proposición $x + 2 = 2x$? Para averiguarlo, reemplazamos x por 2 y tenemos $2 + 2 = 2 \cdot 2$; si sustituímos x por 3 tenemos $3 + 2 = 2 \cdot 3$ que es falso. Así pues, $x + 2 = 2x$ *no* es una identidad. Para demostrar que una proposición, $x + 2 = 2x$, no es una identidad es suficiente que no sea cierta para un solo valor de la variable. Una sola excepción así recibe el nombre de contraejemplo.

Una proposición abierta que no es una identidad es una ecuación condicional o una desigualdad condicional. Tanto las identidades como las ecuaciones condicionales se llaman "ecuaciones" por brevedad.

El conjunto solución de una ecuación condicional puede no tener elementos, o tener un número infinito de elementos. El conjunto solución de una identidad contiene siempre un número infinito de elementos, a no ser, desde luego, que el dominio especificado sea un conjunto finito. No siempre es fácil hallar el conjunto solución de una proposición abierta dada. Sería imposible desde luego probar todos los números, puesto que hay un número infinito de ellos. Pero a veces es fácil hallar el conjunto solución, especialmente si tiene solamente uno o dos elementos.

Ejercicio 1-23

1. En cada uno de los ejemplos siguientes hallar el conjunto solución. El dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $x + 5 = 12$
(b) $8 + x = 10$
(c) $5 + 2x = 7$
(d) $6x = 0$
(e) $3x = 12$
(f) $4x = 20$
(g) $2x + 1 = 1 + 2x$
(h) $2x + 1 = 2(x + 1)$
(i) $2x + 1 = 7$
(j) $2(x - 2) = 0$

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones abiertas son identidades?

(a) $m + 6 = 6 + m$
(b) $7p - 5p = 5p - 3p$
(c) $y + 12 = y$
(d) $5 + x = 5x$
(e) $k + 0 = 0$
(f) $k \times 0 = 0$
(g) $(y + 2) + 8 = (y + 8) + 2$
(h) $2x - 7 = 7 - 2x$

3. Para cada uno de los siguientes enunciados, escríbase una proposición apropiada con símbolos algebraicos, usando n para designar el número buscado. Hallar después el conjunto solución de la proposición que se escribió.

(a) Si a un número se le suma 10 se obtiene 25.
(b) Si a 14 le restamos un número el resultado es 10.
(c) Si a un número le sumamos 3 veces el mismo número el resultado es 12.
(d) Si a 16 le restamos 3 veces un número el resultado es 7.
(e) El doble de un número aumentado en 4 es 16.
(f) Si a 5 le sumamos 3 veces un número nos da 29.
(g) La suma de un número y 3 al multiplicarla por 2 nos da 14.
(h) Si de un número le restamos 5 nos da 7.
(i) Si al doble de un número le restamos 5 se obtiene 17.
(j) El triple de un número aumentado en 2 es lo mismo que el número aumentado en 8.

4. En cada uno de los ejemplos siguientes, úsese el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ como el dominio de la variable; hallar, cuando sea posible, el conjunto solución:

(a) $x + 5 = 7$
(b) $2x + 1 = 9$
(c) $4x + 3 = 8$
(d) $3x - 1 = 5$
(e) $2x \geq 7$
(f) $2x \leq 8$
(g) $x + 3 < 8$
(h) $2x + 1 < 10$

5. Hallar el conjunto solución de cada una de las proposiciones siguientes:

(a) $x > 6$, donde el dominio de x es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
(b) $y < 8$, si el dominio de y es $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
(c) $2x + 7 = x + 7 + x$; si el dominio de x es el conjunto de los números cardinales.
(d) $x + 5 = 23$; dominio, el conjunto de los números naturales.
(e) $3x = 5$; dominio, el conjunto de los números cardinales.
(f) $2x = 25$, dominio, el conjunto de los números cardinales.
(g) $8 > x > 3$; dominio, el conjunto de los números naturales.
(h) $2 < x < 7$; dominio, el conjunto de los números naturales pares.

6. Explicar cuál es la diferencia entre:

(a) una identidad y una ecuación.
(b) una relación de orden y una relación de igualdad.
(c) una proposición matemática y una frase matemática.
(d) una proposición matemática abierta y una proposición numérica.

Resumen

¿Qué hemos aprendido acerca de las variables?

(1) Una variable es un símbolo, generalmente una letra, que ponemos en lugar del nombre de uno cualquiera de los elementos de un conjunto dado.
(2) Cualquier conjunto cuyos elementos pueden ser usados para sustituir a una variable se llama el conjunto de sustitución.
(3) Una proposición abierta es una proposición que contiene una o más variables. Una frase abierta es una oración o expresión que contiene una o más variables.
(4) El conjunto de sustitución para una variable se llama dominio de la variable.
(5) El conjunto solución de una proposición abierta es el subconjunto del dominio de la variable que hace cierta la proposición.
(6) La gráfica del conjunto solución de una proposición abierta en una variable es el conjunto de todos los puntos en la recta numérica cuyas coordenadas son los números que hacen cierta la proposición.
(7) Los números que se multiplican entre sí para formar un producto se llaman factores.
(8) Un exponente nos dice cuántas veces un número particular es usado como factor en un producto dado.
(9) Cualquier factor, o combinación de factores, es un coeficiente del producto de los otros factores de dicho producto.
(10) Una identidad es una proposición abierta que es cierta para todos los elementos del conjunto de sustitución.
(11) Una proposición abierta que no es una identidad se llama ecuación condicional o desigualdad condicional.
(12) El conjunto solución de una ecuación condicional puede no contener elementos, o un número finito de elementos, o un número infinito de elementos.
(13) El conjunto solución de una identidad contiene siempre un número infinito de elementos si el conjunto de sustitución es infinito.

Vocabulario

Aquí están algunas de las palabras más importantes usadas en este capítulo. ¿Estás seguro de conocer el significado de cada una de ellas?

coeficiente
conjunto solución
conjunto de sustitución
conjuntos equivalentes
coordenada
correspondencia biunívoca
correspondencia uno a uno
desigualdad
dominio
ecuación
exponente
factor
identidad
inecuación
infinito
numeral
número cardinal
número natural
proposición abierta
siguiente
subconjunto
subconjunto propio
variable

Ejercicios de Revisión

1. Describir en palabras cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots\}$
(b) $\{1, 7, 13, 19, 25, 31, \ldots\}$
(c) $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots\}$
(d) $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots\}$

2. Dado el conjunto $A = \{x, y, z, w\}$, escribir todos los subconjuntos que tienen 2 elementos.

3. Dado el conjunto $B = \{p, q, r, s, t\}$, ¿cuáles de los siguientes son subcontos de *B?* ¿Cuáles de ellos son subconjuntos propios?

(a) $\{r\}$ **(b)** $\{p, q, r, s, t\}$ **(c)** $\{p, m\}$ **(d)** $\varnothing$ **(e)** $\{p, t\}$

4. ¿Cuáles de las siguientes parejas de conjuntos son iguales? ¿Cuáles son equivalentes?

(a) $\{0, 1\}$; $\{1, 0\}$
(b) $\{20, 40, 60, 80\}$; $\{200, 400, 600, 800\}$
(c) $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 4, 9, 16\}$
(d) $\{3, 6, 9, 12\}$; $\{12, 3, 9, 6\}$
(e) $\{1, 2, 3, \ldots 8, 9, 10\}$; {todos los números primos de 2 a 29 inclusive}

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son infinitos?

(a) Todos los edificios de la ciudad de Nueva York.
(b) Todos los números naturales menores que mil millones.
(c) Todos los números naturales mayores que mil millones.
(d) Todos los números naturales pares.
(e) Todas las gotas de agua contenidas en todos los Océanos.

6. Para cada uno de los siguientes conjuntos, escríbanse los nombres de los elementos dentro de llaves.

(a) El conjunto de los números naturales impares entre 30 y 40.
(b) El conjunto de los múltiplos de 4 que son mayores que 12 y menores que 44.
(c) El cuadrado de los números naturales de 2 a 8, inclusive.

7. **(a)** Escribir el conjunto de todos los números cardinales de 15 a 50, inclusive, que son divisibles por 5.
(b) Escribir el conjunto de los números cardinales de 15 a 50, inclusive, que son divisibles por 5 la suma de cuyos dígitos es divisible por 3.
(c) ¿Es el conjunto **(b)** un subconjunto del conjunto **(a)**? ¿Es **(b)** un subconjunto propio del conjunto **(a)**?

8. Dado el conjunto $S = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 65, 82\}$:

(a) ¿Cuál es el subconjunto formado por números primos?
(b) ¿Cuál es el subconjunto formado por los números divisibles por 3?
(c) ¿Cuál es el conjunto formado por los cuadrados perfectos?

9. Dado el conjunto $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, y el conjunto $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, formar el conjunto P que contenga todos los elementos que están tanto en Q como en S.

(a) ¿Es 0 un elemento de P? ¿Es 3 un elemento de P?
(b) ¿Es Q un subconjunto de P?
(c) ¿Es P un subconjunto de Q?
(d) ¿Es S un subconjunto de Q?

10. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 9\}$ y $B = \{0, 3, 5, 7, 9\}$:

(a) Hallar el conjunto R, formado por todos los números que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B.
(b) Hallar el conjunto S, formado por todos los números que están en el conjunto A o en el conjunto B o en ambos.
(c) En rectas separadas para cada conjunto, dibújese la gráfica de los conjuntos A, B, R, S respectivamente.

11. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son infinitos?

(a) Todos los múltiplos de 6.
(b) Todos los números naturales que no son múltiplos de 6.
(c) Todos los números naturales entre 1 y 100 millones.
(d) Todos los múltiplos de 6 que son menores que 6 000.
(e) Todos los números naturales entre 1 y 3.
(f) Todos los números naturales menores que 100.
(g) Todos los números naturales iguales a 100.
(h) Todos los números naturales mayores que 100.

12. Escribir el resultado más simple de cada una de las siguientes expresiones numéricas:

(a) $12 \div 4 + 2$
(b) $6 + 4 \times 2$
(c) $2 \times 3 + 1 - 5$
(d) $4 + 4 \times 4 - 4 \div 4$
(e) $10 - 3 \times 0 + 21 \div 3$
(f) $3 \times 2 + 3 + 2$

13. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas y cuáles son falsas?

(a) $3 \times 0 > 0$
(b) $3 \times 2 \times 1 = 1 \times 2 \times 3$
(c) $5 + 0 = 5 \times 0$
(d) $0 + 4 \neq 4 + 0$
(e) $0 \times 8 \neq 0 \times 4$
(f) $(2 + 0) + 2 = (2 + 2) + 0$
(g) $2(4 + 6) \cdot 3 = [3(6 + 4)] \cdot 2$
(h) $1 + 8 + 5 + 7 \neq 5 + 8 + 1 + 7$
(i) $5(2 + 3) = 5(2) + 5(3)$
(j) $5 \cdot 2 + 3 = 5(3) + 2(3)$

14. Expresar en palabras cada uno de los siguientes conjuntos; el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales:

(a) $\{x | x + 3 = 10\}$
(b) $\{x | 2x \geq 12\}$
(c) $\{x | x + 1 \leq 6\}$
(d) $\{z | 2z - 3 \geq 5\}$
(e) $\{y | 3 < y < 9\}$
(f) $\{y | 3 \leq y \leq 9\}$
(g) $\{z | 4 > z > 2\}$
(h) $\{z | 4 \geq z \geq 2\}$

15. En cada uno de los ejemplos de los ejercicios siguientes seleccionar los elementos del conjunto dado que pertenezcan al conjunto solución de la proposición abierta:

(a) $3x + 2 = 14$; $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
(b) $2x - 1 = 19$; $\{9, 10, 18, 20, 21\}$
(c) $x^2 = 4x$; $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
(d) $x(x - 9) = 0$; $\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
(e) $x^2 - 6x + 8 = 0$; $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
(f) $x^2 + 5x + 6 = 0$; $\{0, 1, 2, 3\}$

16. En cada una de las siguientes proposiciones abiertas, supóngase que la variable tiene el valor indicado, y dígase si la proposición es cierta o falsa:

(a) $3 (x + 4) < 19$; para $x = 2$
(b) $35 < 4y + 6$; para $y = 6$
(c) $8 < 2x < 12$; para $x = 4$
(d) $5 \leq (x + 2) \leq 6$; para $x = 3$

17. Hallar los números cardinales, si los hay, que hagan ciertas las siguientes proposiciones abiertas:

(a) $a + 12 = 14$
(b) $z + 6 < 10$
(c) $15 - p = 12$
(d) $3x = 0$
(e) $x - 3 < x - 2$
(f) $u + 5 = 5 + u$
(g) $y + 1 = y + 2$
(h) $3v + 6 < 15$

18. Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas, el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales:

(a) $3x = 0$
(b) $x + 4 = 4$
(c) $3 + k > 8$
(d) $5 < y < 10$
(e) $0 \leq x \leq 7$
(f) $2x + 3 > 9$
(g) $y + 5 < y + 6$
(h) $x + 3 > x + 2$
(i) $2 \leq v < 8$
(j) $3 > x > 5$

19. Dibujar la gráfica del conjunto solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas; el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

(a) $y > 2$
(b) $z < 5$
(c) $x + 3 = 7$
(d) $x + 2 > 5$
(e) $y \geq 3$
(f) $x \leq 4$
(g) $y \geq 0$
(h) $x + 3 = x$
(i) $x + 3 = 3$

20. Para cada una de las siguientes gráficas, escribir una proposición abierta cuyo conjunto solución sea el indicado en la gráfica; el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales:

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


(g)


21. Escribir una frase que traduzca cada una de las siguientes expresiones matemáticas:

(a) $3(x - 5)$
(b) $2(3y + 10)$
(c) $5(2p + 1) - 3$
(d) $n(n - 1)(n - 2)$
(e) $(a + b) \div 2$
(f) $\dfrac{a + b}{2}$
(g) $b^2 - 4ac$

22. Escribir cada una de las siguientes frases en formas simbólicas, usando v para representar la variable:

(a) Un tercio de la cuarta parte de un número.
(b) Un número disminuido en la mitad del cuadrado del mismo número.
(c) Cinco más el triple de un número.
(d) El producto de un número por tres veces el mismo número.
(e) El cociente de un número entre 2 unidades menos que el número.

23. Dibujar la gráfica del conjunto solución de cada uno de los siguientes conjuntos. El dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales:

(a) $\{x | x - 2 = 5\}$
(b) $\{y | 2y + 3 = 9\}$
(c) $\{x | 3x - 2 \geq 7\}$
(d) $\{z | 3 < z < 8\}$
(e) $\{x | 8 > x > 3\}$
(f) $\{y | 2 \leq y \leq 7\}$

24. Hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones cuando $a = 3$ $b = 2$, y $c = 5$:

(a) $3a + 10b - c$
(b) $a - b + 3c$
(c) $4(2a - b) + 2(b + 2c)$

25. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones abiertas son identidades?

(a) $(2b)a = 2(ab)$
(b) $v + 3 = 3 + v$
(c) $a - 5 = 5 - a$
(d) $x - 2 = x$
(e) $(x + 3) + 1 = (x + 1) + 3$
(f) $6r - 4r = 8r - 6r$
(g) $x + y + z = x + y - z$
(h) $7 + y = 7y$

Examen del Capítulo

1. Escribir el resultado más simple de cada una de estas expresiones:

(a) $(3 + 2) \div 5 - 1$
(b) $3 \times 3 + 3 \div 3 - 3$

2. Para cada una de las siguientes expresiones decir si es cierta o falsa:

(a) $(2 + 3) + 7 = 3 + (7 + 2)$
(b) $4(2 + 5) < 4(2) + 5$
(c) $3(15) \neq 3(9) + 3(6)$

3. ¿Qué números cardinales, si los hay, hacen ciertas las siguientes proposiciones abiertas?

(a) $y + 5 < 8$ **(b)** $x + 2 > 6$ **(c)** $4 < x < 9$

4. Para cada una de las expresiones siguientes decir si es cierta o falsa para el valor de la variable que se indica:

(a) $2(y + 4) < 15$; para $y = 3$.
(b) $3p - 4 > 2$; para $p = 2$.

5. Dibujar las gráficas de:

(a) $x + 3 > 7$ **(b)** $y \leq 5$

6. Traducir en palabras cada una de las siguientes expresiones:

(a) $6n^2 - 1$ **(b)** $2(3n + 5)$

7. Escribir en símbolos, usando n como variable:

(a) Tres veces un número menos cinco.
(b) La suma de 4 veces un número y la mitad del cuadrado del mismo número.

8. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones abiertas son identidades?

(a) $x \div 2 = 2$
(b) $x + 2 = 2 + x$
(c) $x - 2 = 2 - x$
(d) $2x = 2$

9. Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas:

(a) $3 + 2x = 11$
(b) $3(x - 1) = 12$

10. Si la suma de cierto número y 4 se multiplica por 3, el resultado es el mismo que si aumentamos el número en 16. Hallar el número.

11. En cada uno de los siguientes conjuntos, el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales. Enunciar el conjunto que se describe en cada caso:

(a) $\{x|x \geq 4\}$
(b) $\{y|y \leq 3\}$
(c) $\{z|3 \leq z \leq 6\}$

12. Dibujar las gráficas de los conjuntos indicados; en todos los casos el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales:

(a) $\{x|3x = 18\}$
(b) $\{y|y + 2 < 7\}$
(c) $\{z|z - 3 \leq 3\}$

Tema Extraordinario

OPERACIONES CON CONJUNTOS

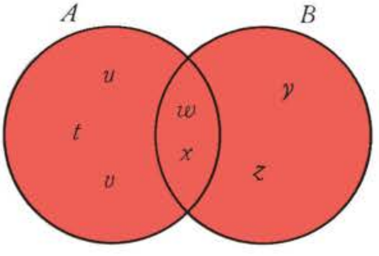
Con los conjuntos se pueden hacer algunas operaciones. En esta sección consideraremos dos de tales operaciones.

(1) UNIÓN. La unión de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B, o en ambos A y B.

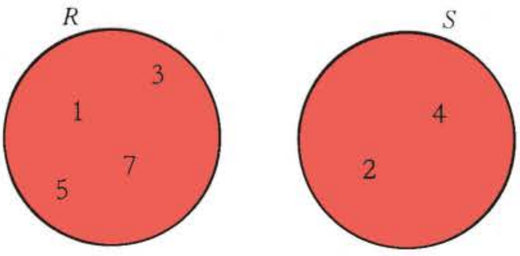
Ejemplos:

(a) Si $A = \{t, u, v, w, x\}$ y $B = \{w, x, y, z\}$
entonces $A \cup B = \{t, u, v, w, x, y, z\}$

Debe notarse que no se repiten los elementos. Una gráfica de la operación, mediante un diagrama de Venn, es la siguiente:



(b) Si $R = \{1, 3, 5, 7\}$ y $S = \{2, 4\}$ entonces $R \cup S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.



En todos los casos el nuevo conjunto que se forma, que es la unión de los dos conjuntos dados, se indica por la porción sombreada del diagrama.

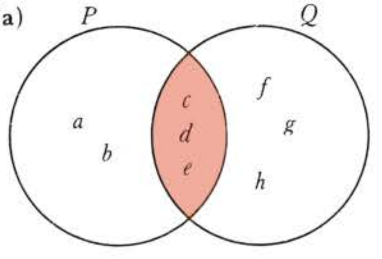
Nótese que los conjuntos A y B tienen elementos comunes por lo que se llaman conjuntos intersectados. Los conjuntos R y S que no tienen elementos comunes se llaman conjuntos ajenos o disjuntos.

(2) INTERSECCIÓN. La intersección de dos conjuntos A y B que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B es decir que pertenecen a A y pertenecen a B.

Ejemplos:

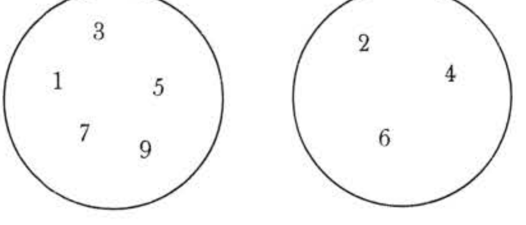
(a) Si $P = \{a, b, c, d, e\}$ y $Q = \{c, d, e, f, g, h\}$ entonces $P \cap Q = \{c, d, e\}$.

(a)

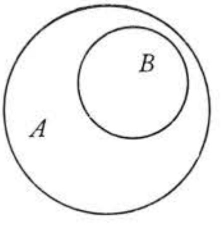


(b) Si $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $T = \{2, 4, 6\}$ entonces $S \cap T = \phi$.

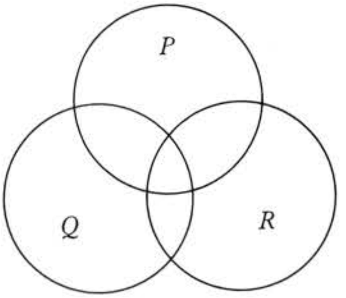
(b)



Si B es un subconjunto propio de A, podemos indicar este hecho escribiendo $B \subset A$, $B \neq A$. Esto significa que todo elemento de B es un elemento de A pero que *no* todo elemento de A es un elemento de B. (*Cuando menos* un elemento de A no es elemento de B.)

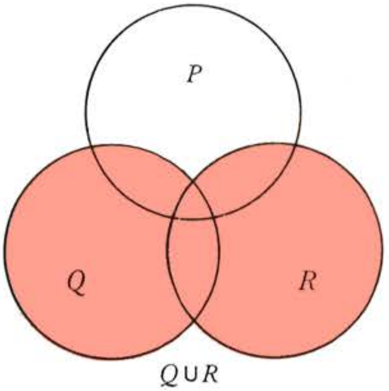


A veces operamos con más de dos conjuntos a la vez. Consideremos, por ejemplo, los conjuntos P, Q y R, que se "traslapan".



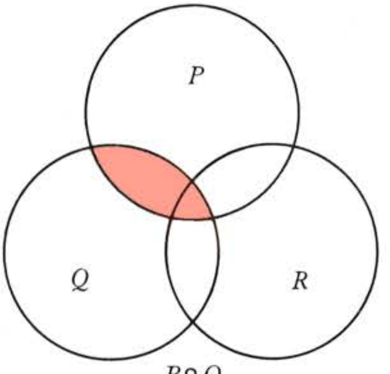
¿Entiendes bien que la porción sombreada en cada uno de los casos puede expre sarse con símbolos tal como se indica?

(a)



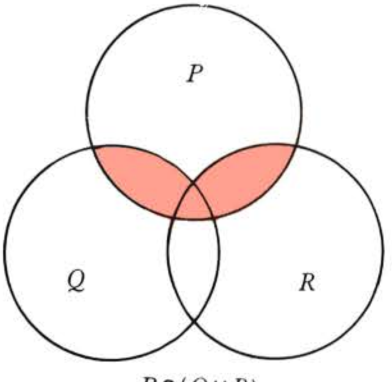
$Q \cup R$

(b)



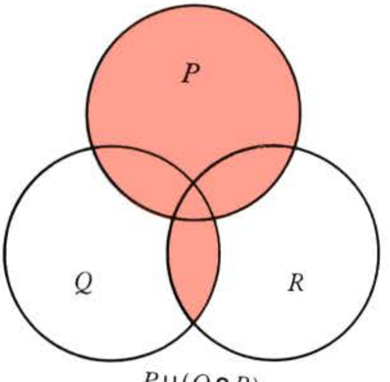
$P \cap Q$

(c)



$P \cap (Q \cup R)$

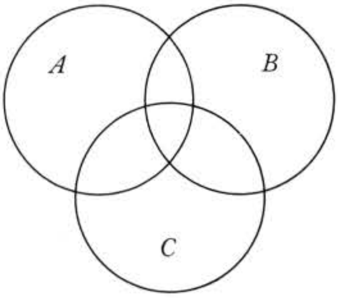
(d)



$P \cup (Q \cap R)$

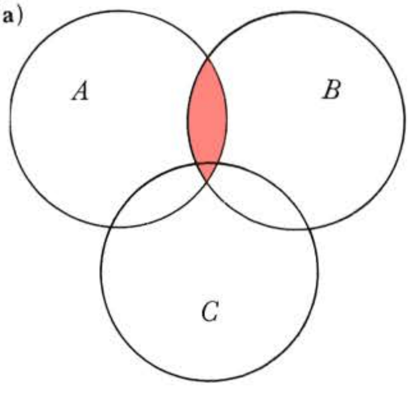
Ejercicios

1. Dados los conjuntos A, B y C

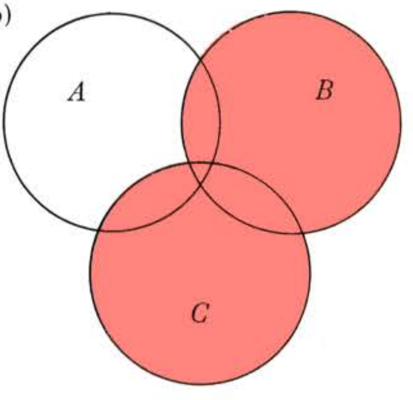


Identificar el conjunto representado en cada caso por la porción sombreada del diagrama, usando los símbolos de unión y de intersección, usando paréntesis cuando sea necesario:

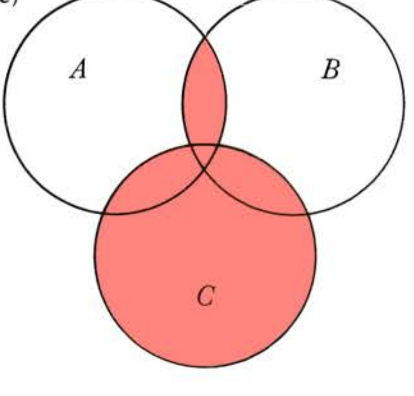
(a)



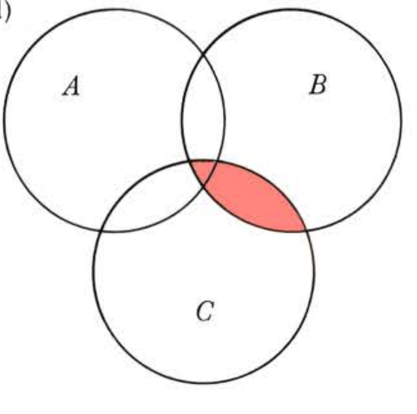
(b)



(c)



(d)



2. Expresar cada una de las siguientes proposiciones en palabras y demostrar que es cierta dibujando un diagrama de Venn apropiado. Considerar que A y B son conjuntos que se traslapan:

(a) Si $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cup B$.
(b) Si $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cap B$.

3. Dibujar un diagrama de Venn apropiado para representar cada una de las siguientes aseveraciones, en donde A, B, y C son conjuntos que se traslapan:

(a) $A \cup (B \cup C)$
(b) $A \cap (B \cap C)$
(c) $A \cup (A \cap B)$
(d) $A \cap (B \cup C)$
(e) $(A \cap B) \cup C$
(f) $A \cap (A \cup B)$

4. Hacer lo mismo que en problema 3 para cada uno de los siguientes conjuntos que se traslapan:

(a) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. Si $P \subset Q$, demostrar por medio de un diagrama que $P \cup Q = Q$; también que $P \cap Q = P$.

6. ¿Será cierto que $P \cup Q = Q \cup P$? ¿Es cierto que $P \cap Q = Q \cap P$? Explicar la respuesta por medio de palabras o por el uso de un diagrama.

7. ¿Qué es $P \cap Q$ si

(a) P y Q son conjuntos disjuntos?
(b) P y Q se traslapan?
(c) P y Q son idénticos?
(d) $P \subset Q$?
(e) $Q \subset P$?

Ilústrense los resultados por medio del diagrama de Venn

8. ¿Qué significa $P \cup Q$ si

(a) P y Q son conjuntos disjuntos?
(b) P y Q se traslapan?
(c) P y Q son idénticos?
(d) $P \subset Q$?
(e) $Q \subset P$?

Comprobar los resultados por medio de diagramas de Venn.

9. El conjunto A es un subconjunto propio del conjunto B, y el conjunto B es un subconjunto propio del conjunto C.

(a) Hallar $(A \cup B) \cup C$.
(b) Encontrar $(A \cap B) \cap C$.

Comprobar los resultados por medio de diagramas de Venn.

10. Dados A, B y C, que son 3 conjuntos disjuntos:

(**a**) ¿Es cierto que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$?
(**b**) ¿Será cierto que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$?

Explicar las respuestas por medio de diagramas de Venn.

Trabajo de Biblioteca

1. ¿Te gustaría saber algo acerca de los *símbolos* usados para representar los números? ¿y qué son los gnomons?
Cameron, páginas 146-149; Valens página 16-25.

2. Escribir un pequeño trabajo sobre las varillas de Napier y cómo se usaban:
Cameron, páginas 114-117.

3. Ver si puedes construir un cuadrado mágico. Quizás te gustaría conocer el raro cuadrado de Benjamín Franklin para ver si realmente es tan mágico como se dice:
Goodman, páginas 40-56.

4. Posiblemente te gustaría hacer un reporte para tus compañeros, diciéndoles algo acerca del misterio de los números primos.
Stein, páginas 24-29.

5. ¿Qué era la GEMATRIA? ¿Qué puedes encontrar acerca de la numerología y la mística de los números?
Bowers and Bowers, páginas 239-243.

6. Haz un trabajo de 150 palabras sobre la vida y el trabajo de Jorge Cantor. Explica lo importante que fue su trabajo en matemáticas.
Muir, páginas 217-240.

Lecturas que se sugieren

Bowers, H. and Bowers, J. E. *Arithmetical Excursions, An Enrichment of Elementary Mathematics.* Dover Publications, 1961.
Cameron, A. J. *Mathematical Enterprises for Schools.* Pergamon Press, 1966.
Goodman, A. W. *The Pleasures of Math.* Crowell Collier & Macmillan, 1965.
Muir, Jane. *Of Men and Numbers.* Dodd Mead & Co., 1961.
Stein, Sherman K. *Mathematics, the Man-made Universe.* W. H. Free, am & Co., 1963.
Valens, Evans G. *The Number of Things.* E. P. Dutton & Co., 1964.

Colin Maclaurin (1698-1746) fue un matemático escocés, admirador de Isaac Newton y un expositor de una doctrina. *El tratado de álgebra* en 1748 de Maclaurin fue el mayor avance en libros de enseñanza en esos días

A

TREATISE

OF

ALGEBRA.

PART I.

CHAP. I.

Definitions and Illuſtrations.

§ 1. ALGEBRA is a general method of computation by certain ſigns and ſymbols which have been contrived for this purpoſe, and found convenient. It is called an UNIVERSAL ARITHMETICK, and proceeds by operations and rules ſimilar to thoſe in common arithmetick, founded upon the ſame principles. This, however, is no argument againſt its uſefulneſs or evidence; ſince arithmetick is not to be the leſs

Algebra: Antes y Ahora

Hace miles de años, cuando el hombre aprendió a contar, inventó sistemas numéricos. Al hacerlo, sentó inconscientemente las bases de lo que un día sería el álgebra. El origen del álgebra, como el comienzo mismo del lenguaje, es desconocido, pero podemos estar seguros de que se desarrolló a causa del interés que la gente ha tenido siempre por los números.

Sabemos que los antiguos babilonios, conocieron, hace más de cinco mil años, los sistemas de numeración de bases 10 y 60. Aun cuando supieron extraer raíces cuadradas, resolver algunos tipos de ecuaciones y calcular el interés compuesto, su álgebra era muy elemental y limitada.

Ni los griegos ni los romanos estuvieron sensiblemente más adelantados. A los griegos les interesaban más la geometría y la lógica, mientras que los romanos se preocuparon principalmente en problemas prácticos de topografía y mediciones.

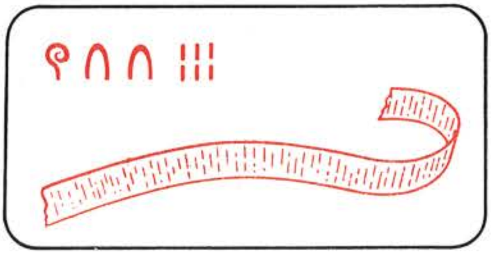
Por cerca de mil quinientos años no hubo avances de importancia, especialmente en el uso de letras y símbolos. Un siglo o dos antes del descubrimiento de América por Colón, la gente comenzó a preocuparse por el álgebra: Primero los hindúes, árabes y persas, más tarde, los españoles, italianos y alemanes.

Poco después de la invención de la imprenta, por 1490, comenzaron a aparecer muchos libros de aritmética y álgebra. Poco después se desarrolló el álgebra, tal como la conocemos. Las fracciones decimales, los números negativos, los exponentes y las raíces, fueron algunas de las ideas que se empezaron a usar ampliamente.

Desde principios del siglo XX, los símbolos y métodos del álgebra son más elaborados. Una página de álgebra moderna parece un grupo de marcas sin significado, pero puede ser leída, por los que han aprendido álgebra, tan fácilmente como una prosa cualquiera. Y lo más importante, esta álgebra "teórica" es una herramienta indispensable en la ciencia, en la ingeniería y en la tecnología.

2

Los Números Naturales; Operaciones y Propiedades



HIPOTESIS BASICAS

2.1 LA EXPERIENCIA EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS

Hemos trabajado con sistemas numéricos por mucho tiempo. Como resultado de esta experiencia, hemos aprendido ciertas propiedades de los sistemas numéricos. Por ejemplo, sabemos usar los números naturales para contar 1,2,3,4, . . . , y sabemos que este proceso de contar puede continuarse indefinidamente. Hemos aprendido también por experiencia, que cuando se suman dos números naturales, el resultado es otro número natural. Sabemos además que la suma de $8 + 3$ es igual a la suma de $3 + 8$. Además $8 - 3$ *no* es igual a $3 - 8$. Estos son unos pocos ejemplos de propiedades que la experiencia nos dice que son razonables.

2.2 HIPOTESIS MATEMATICAS

En el párrafo anterior, recalcamos algunas propiedades de los números que la experiencia nos ha enseñado. ¿Pero cómo sabemos que éstas son "propiedades" de los números? el hecho escueto es: no lo sabemos. En lugar de eso decimos: Supongamos que este es el comportamiento de los números.

La idea de una hipótesis es fundamental en todas las matemáticas. Cuando consideramos que una proposición es "verdadera" o "cierta", solamente decimos que convenimos en ella. Por ejemplo, en beisbol aceptamos que una media entrada ha terminado cuando se han hecho 3 outs. En basquetbol convenimos que una canasta cuenta 2 puntos exceptuando el tiro libre que cuenta 1. No decimos que estos convenios sean ciertos o falsos. No podemos probar que la consideración es cierta; ni negarla tampoco. Sencillamente lo aceptamos o no.

De una manera semejante, las hipótesis matemáticas son convenios. Si aceptamos todos las mismas hipótesis, entonces "hablamos" las mismas matemáticas, las hipótesis que hacemos vienen a ser las propiedades de las cosas acerca de las cuales hacemos dichas consideraciones. En este capítulo estudiaremos las hipótesis que conciernen a las operaciones con números naturales. Estas hipótesis serán la base de una comprensión más profunda acerca de otros números, y de nuevas clases de números que desarrollaremos al estudiar álgebra.

2.3 HIPOTESIS DE LA IGUALDAD

En matemáticas los números pueden tener nombres muy diferentes. Por ejemplo los numerales "$2 + 4$" y "$5 + 1$" son dos nombres diferentes para el mismo número, el número "6". Así, pues, podemos decir que los números representados por los numerales "$2 + 4$" y "$5 + 1$" son iguales.

Entre las hipótesis más importantes de las matemáticas está la igualdad de números. Las usamos tan seguido que ya ni la tomamos en cuenta. Vamos a estudiar el "igual" con un poco más de atención. La relación de igualdad tiene las propiedades que vamos a enumerar. Son suposiciones que hacemos con respecto a la relación de igualdad para el conjunto de los números naturales.

HIPÓTESIS E_1. **Propiedad Reflexiva.**

Para cualquier número a, $a = a$

Esto no es una perogrullada. Lo que estamos haciendo es poner las cosas lógicamente compatibles. Simplemente decimos que el significado de un símbolo o un numeral no cambia sin razón.

HIPÓTESIS E_2. **Propiedad Simétrica.**

Para dos números cualesquiera a y b, si $a = b$ entonces $b = a$.

Esto es importante, porque significa que una igualdad puede leerse de derecha a izquierda igual que de izquierda a derecha. Significa también que los números son los mismos aunque los numerales sean diferentes. Brevemente, los dos numerales son nombres diferentes para la misma cosa. Esto es lo que realmente significa "igualdad".

HIPÓTESIS E_3. **Propiedad Transitiva.**

Para números cualesquiera a, b y c, si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

Esto es una propiedad o hipótesis muy útil, porque puede extenderse a más números. Por ejemplo, si $a = b$, $b = c$, $c = d$ y $d = e$, entonces $a = e$.

Ejercico Oral 2-1

Dígase qué propiedad de la igualdad se aplica en cada uno de los ejemplos siguientes:

1. Si $x + y = c + d$, entonces $c + d = x + y$
2. Si $2x + 3 = 11$ y $11 = 7y + 5$, entonces $2x + 3 = 7y + 5$
3. Si $3y + 5 = 17$, entonces $17 = 3y + 5$
4. $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$
5. Si $p + 2q = 3s + t$ y $3s + t = 5$, entonces $p + 2q = 5$
6. If $a + b = c$, entonces $c = a + b$
7. $18x^2y = 18x^2y$
8. Si $t + 5 = x + y + z$, entonces $x + y + z = t + 5$
9. Si $b^2 - 4ac = d$ y $d = 16$, entonces $b^2 - 4ac = 16$
10. $ab + ac + ad = ab + ac + ad$

2.4 CERRADURA BAJO UNA OPERACION

Sabemos que podemos sumar dos números naturales cualesquiera, y que el resultado es siempre un número natural único. Por ejemplo, $2 + 3 = 5$. También cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado es un número natural. Por ejemplo, $2 \times 3 = 6$. Esto es cierto aun cuando se use el mismo número natural dos veces: por ejemplo $4 + 4 = 8$; $3 \times 3 = 9$.

Por otra parte, cuando restamos un número natural de otro número natural, el resultado no es forzosamente un número natural; por ejemplo, $3 - 8$ no nos da un número natural, ni tampoco nos lo da $5 - 5$. También, cuando dividimos un número natural por otro, el resultado puede ser o no, otro número natural: por