

MATEMÁTICAS III



1.^a Edición Digital

2020



Transformaciones.
Integrales Múltiples.
Integrales de Línea.
Integrales de Superficie.

J. ARMANDO VENERO B.

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS (U.N.I.)



EDICIONES GEMAR

LIMA

PERÚ

MATEMÁTICAS III

Autor: JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN

Estudios de Magíster en **MATEMÁTICAS (P.U.C.P.)**

*Dpto. de tipeo, diagramación y diseño
Ana María Vargas Loayza de Venero,
Lic. en Educación (U.N.M.S.M.)*

1.^a Edición digital, SETIEMBRE 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 202005377

ISBN IMPRESA : 978-612-45216-2-1

ISBN DIGITAL : 978-612-45216-9-0
PDF

978-612-48340-4-2
EPUB

Editado por:

© 2020, Representaciones GEMAR E.I.R.L.

Calle Río Vilcanota 168. COO 27 de abril, Ate - Lima

Teléfono: **446-6176**

rep_gemar09@hotmail.com

<https://www.facebook.com/veneromath/>

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin la autorización legal del autor y/o de **REPRESENTACIONES GEMAR E.I.R.L.**
LIMA – PERÚ.

P R Ó L O G O

Presentamos esta segunda edición revisada y corregida con sumo esmero donde hemos adicionado algunos ejercicios resueltos interesantes.

Este libro fue escrito con la idea de presentar el tema de las Integrales Múltiples en una forma detallada y accesible para quienes conocen un poco de las funciones reales de varias variables. Fundamentalmente se requiere saber cómo graficar estas funciones así como sus respectivos dominios.

Hemos tratado de evitar en lo posible una excesiva abstracción en el enfoque de los temas, presentando los resultados teóricos más importantes aunque sin demostrarlos en su mayoría.

En el primer capítulo se estudia una clase de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ llamadas Transformaciones de $\mathbb{R}^n$, las que constituyen la base analítica y geométrica de todo el texto; principalmente, se presentan algunas técnicas que permiten conocer la forma en que el espacio $\mathbb{R}^n$ es modificado por alguna de estas Transformaciones.

En este capítulo se presenta además, con especial detalle a las Transformaciones en Coordenadas Polares, Cilíndricas y Esféricas.

A continuación se estudian las Integrales Dobles en una amplia exposición de la teoría y sus técnicas de cálculo. Su aplicación inmediata se encuentra en el cálculo de áreas y volúmenes.

Presentamos también aquí el fundamento del Cambio de Variables en las Integrales Dobles, y que tiene su extensión natural a funciones de tres o más variables.

Revisamos un poco de las Coordenadas Polares utilizándolas en el cálculo de una gran cantidad de integrales múltiples que se presentan con mucha frecuencia en el campo de la Ingeniería. Esto lo podemos ver también en el capítulo de las Integrales Triples.

Se incluye un capítulo dedicado al estudio de la Topología de $\mathbb{R}^n$ a un nivel básico, enfatizando el aspecto geométrico de estos conceptos

que serán muy útiles en el resto del texto; en particular, su utilidad se aprecia en el Capítulo del TEOREMA DE GREEN el cual relaciona las Integrales Dobles con las Integrales de Línea.

El texto termina con un séptimo capítulo referente a las INTEGRALES DE SUPERFICIE que presenta los famosos Teoremas de GAUSS y de STOKES, completando de este modo el estudio del ANÁLISIS VECTORIAL el cual constituye la principal herramienta matemática de la Mecánica de Fluidos y de la Teoría de Campos Electromagnéticos.

J. ARMANDO VENERO B.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. TRANSFORMACIONES

1. Transformaciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$	.. 1
2. Transformaciones Afines de $\mathbb{R}^n$	.. 7
3. Transformaciones de $\mathbb{R}^3$	.. 12
4. Límites y Continuidad de las Transformaciones	.. 13
5. Derivadas de las Transformaciones de $\mathbb{R}^n$	.. 14
6. Matrices Jacobianas y Jacobianos de Transformaciones	.. 16
7. Propiedades de las Matrices Jacobianas	.. 17
8. Transformaciones en Coordenadas Polares (r, θ)	.. 22
9. Transformaciones Cilíndricas (r, θ, z)	.. 29
10. Transformaciones Esféricas (ρ, θ, ϕ)	.. 39
11. Interpretación Geométrica del Jacobiano para Transformaciones Afines de $\mathbb{R}^n$	.. 54

CAPÍTULO 2. INTEGRALES DOBLES

1. Introducción	.. 68
2. Integrales Dobles sobre Rectángulos	.. 69
3. La Integral Doble sobre regiones más generales de $\mathbb{R}^2$	.. 77
4. Propiedades Básicas de la Integral Doble	.. 81
5. Cálculo de Integrales Dobles mediante INTEGRALES ITERADAS	.. 86
6. Cálculo de Áreas y Volúmenes	.. 111
7. Cambio del Orden de Integración	.. 119
8. Centroides y el Teorema de PAPPUS	.. 133
9. Integrales Dobles en Coordenadas Polares	.. 139
10. Cambio de Variables en las Integrales Dobles	.. 154
11. Coordenadas Polares Modificadas	.. 167

CAPÍTULO 3. INTEGRALES TRIPLES

1. Introducción	.. 183
2. La Integral Triple sobre regiones más generales de $\mathbb{R}^3$	.. 186
3. Cálculo de Integrales Triples mediante INTEGRALES ITERADAS	.. 189
4. Cambio de Variables en Integrales Triples	.. 205
5. Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas	.. 207
6. Integrales Triples en Coordenadas Esféricas	.. 228

CAPÍTULO 4 . TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

1. Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados de $\mathbb{R}^n$	.. 261
2. Conjuntos Convexos en $\mathbb{R}^n$	.. 266
3. Conjuntos Conexos en $\mathbb{R}^n$	.. 266
4. Conjuntos <i>Simplemente Conexos</i> del Plano	.. 267
5. Conjuntos <i>Simplemente Conexos</i> de $\mathbb{R}^n$	.. 269
6. Conjuntos <i>Múltiplemente Conexos</i> del Plano	.. 272

CAPÍTULO 5. INTEGRALES DE LÍNEA

1. Curvas, Parametrizaciones y Caminos	.. 273
2. Integrales de Línea	.. 276
3. Integrales de Línea sobre Caminos Seccionalmente Regulares	.. 282
4. Integrales de Línea en Coordenadas Polares	.. 289
5. Problemas Resueltos y Propuestos	.. 290
6. Integrales de Línea con respecto a la Longitud de Arco	.. 298
7. Independencia del Camino respecto a Campos Vectoriales	.. 305
8. Propiedades y TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO para las Integrales de Línea	.. 308
9. Diferenciando bajo el Signo Integral	.. 318
10. Condiciones Necesarias y Suficientes para un Gradiente	.. 319
11. Existencia de Funciones Potenciales	.. 319
12. Resumen en el Plano	.. 328

CAPÍTULO 6. EL TEOREMA DE GREEN

1. EL TEOREMA DE GREEN	.. 339
2. Condición Necesaria y Suficiente para que un Campo sea un Gradiente, sobre Conjuntos Simplemente Conexos del Plano ($n = 2$)	.. 348
3. Regiones Múltiplemente Conexas del Plano	.. 350
4. TEOREMAS DE GREEN para Regiones Múltiplemente Conexas	.. 352

CAPÍTULO 7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. Parametrización de Superficies	.. 378
2. Planos Tangentes. Vectores Normales. La Primera Forma Fundamental	.. 394
3. Área de una Superficie	.. 404
4. Integrales de Campos Escalares sobre Superficies	.. 419
5. Superficies Orientadas	.. 427
6. Integrales de Campos Vectoriales sobre Superficies	.. 434
7. Circulación y Flujo	.. 448
8. <i>Divergencia y Rotacional</i> de un Campo Vectorial	.. 462
9. Aplicaciones del Teorema de Green	.. 482
10. EL TEOREMA DE STOKES (en el Espacio)	.. 495
11. EL TEOREMA DE GAUSS (de la Divergencia)	.. 515

APÉNDICE

Ejercicios variados resueltos	.. 536
-------------------------------	--------

Índice	.. 560
---------------	---------------

*Y todo lo que
hagáis, hacedlo
de corazón .*

Col. 3:23

*Lo que no quieres para ti ,
no lo quieras para tu prójimo.*

*Esta es toda la ley ,
lo demás sólo es comentario.*

Talmud: Shabbat 31

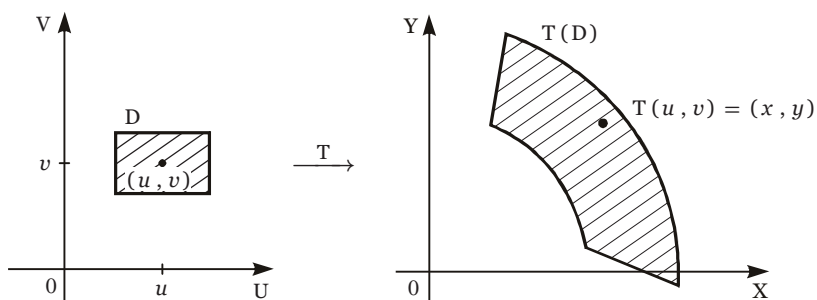
1

TRANSFORMACIONES

1. TRANSFORMACIONES DE $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}^n$

1.1 INTRODUCCIÓN.-

En este capítulo estudiaremos a las funciones $T: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (D , conjunto de $\mathbb{R}^n$) llamadas TRANSFORMACIONES DE $\mathbb{R}^n$, y estaremos interesados en conocer cómo estas transformaciones deforman a la región $D \subset \mathbb{R}^n$.



$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Tomemos por ejemplo la transformación

$$T: \begin{matrix} D \\ \Psi \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \Psi \end{matrix}$$

$$(u, v) \mapsto T(u, v) = (x, y)$$

tal que
$$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \end{aligned}$$

definida sobre el rectángulo $D = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \in [0, 1], v \in [0, \pi] \}$:

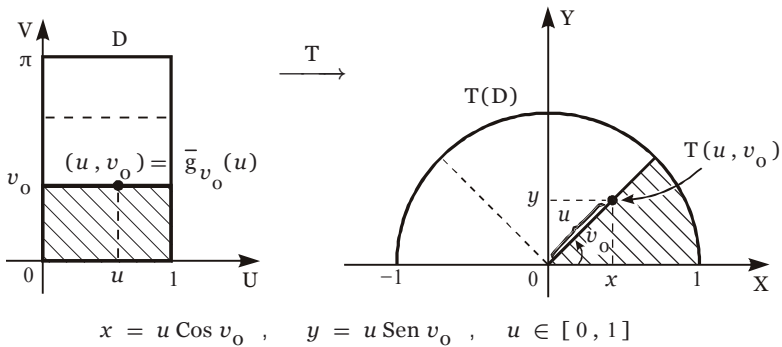
$$(x, y) = T(u, v) = (u \cos v, u \sin v), \quad u \in [0, 1], v \in [0, \pi].$$

Esta transformación toma el rectángulo $D = [0, 1] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ (plano UV) y lo lleva a su imagen, el semicírculo $T(D) \subset \mathbb{R}^2$ (en el plano XY) tal como se muestra en las siguientes figuras.

Una forma de conocer cómo actúa la transformación T para transformar el rectángulo D en el semicírculo $T(D)$ consiste en mantener fija en D una de las variables, por ejemplo $v = v_0$, y hacer variar la otra variable u en el intervalo $[0, 1]$: $0 \leq u \leq 1$, generando la "curva" (segmento de recta en este caso):

$$\bar{g}_{v_0}(u) = (u, v_0), \quad v_0 \text{ fijo} \in [0, \pi], \quad u \in [0, 1]$$

cuyo rango es un segmento de recta horizontal a la altura $v = v_0$ en D .



Vemos aquí, que v_0 representa el ángulo de inclinación (fijo) del radio vector (x, y) , y que u representa la longitud del radio vector (x, y) desde el origen, de manera que el radio u aumenta desde 0 hasta 1 tomando todos los valores intermedios.

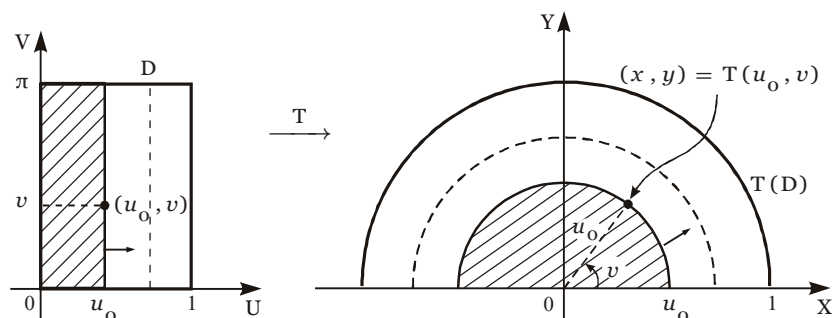
Así, el SEGMENTO HORIZONTAL $\{ (u, v_0) / 0 \leq u \leq 1 \}$ es transformado en el SEGMENTO DE RECTA RADIAL:

$$\{ T(u, v_0) = (u \cos v_0, u \sin v_0) / 0 \leq u \leq 1 \} \subset XY.$$

Se puede interpretar como que el dominio D es generado por el barrido de la recta horizontal $\{ (u, v_0) / 0 \leq u \leq 1 \}$ desde la altura $v_0 = 0$ hasta $v_0 = \pi$.

Asimismo, se puede considerar a la imagen de todo el semicírculo $\mathbf{T(D)}$ generada por el barrido del segmento radial $\{T(u, v_0), 0 \leq u \leq 1\}$ desde el ángulo $v_0 = 0$ hasta el ángulo $v_0 = \pi$, como desplegando un abanico.

Otra forma de ver cómo se deforma la región D del plano UV mediante la transformación T consiste en mantener fija la otra variable $u = u_0$, y hacer variar $v: 0 \leq v \leq \pi$. Ello genera un SEGMENTO DE RECTA VERTICAL $\{(u_0, v) / 0 \leq v \leq \pi\}$ el cual es transformado vía T en un arco de semicircunferencia $\{T(u_0, v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v) / 0 \leq v \leq \pi\}$ de radio u_0 .



Se puede considerar al dominio D generado por el barrido de la recta vertical $\{(u_0, v) / 0 \leq v \leq \pi\}$ desde el segmento vertical izquierdo sobre el eje V ($u_0 = 0$) hasta el segmento vertical derecho $u_0 = 1$ y simultáneamente se puede considerar a su imagen $\mathbf{T(D)}$ generada por el barrido de una semicircunferencia centrada en $(0, 0)$ desde la que tiene radio $u_0 = 0$ hasta la que tiene radio $u_0 = 1$.

1.2 NOTA.- En ambos planos UV y XY del ejemplo anterior vemos que al hacer variar solamente una de las variables u ó v (manteniendo la otra variable fija) se obtiene una **CURVA** que se considera generada por el **DESPLAZAMIENTO** de un punto; y luego al hacer variar la otra variable (que estaba fija) se obtiene una **SUPERFICIE** que se considera generada por el *barrido* de la curva antes mencionada.

Esto es válido en general para las transformaciones $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, salvo los casos degenerados en que la **CURVA** es *un solo punto* o cuando la **SUPERFICIE** mencionada se reduce a *una CURVA* o a *un solo punto*.

Así, en la transformación $T(u, v) = (x, y) = (u \cos v, u \sin v)$, la imagen del segmento $\{(0, v) / 0 \leq v \leq \pi\}$ consiste de un único punto: $(0, 0)$.

1.3 GENERALIZACIÓN .-

Para transformaciones $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, del espacio UVW al espacio XYZ: $T(u, v, w) = (x, y, z)$, se tiene que en ambos espacios:

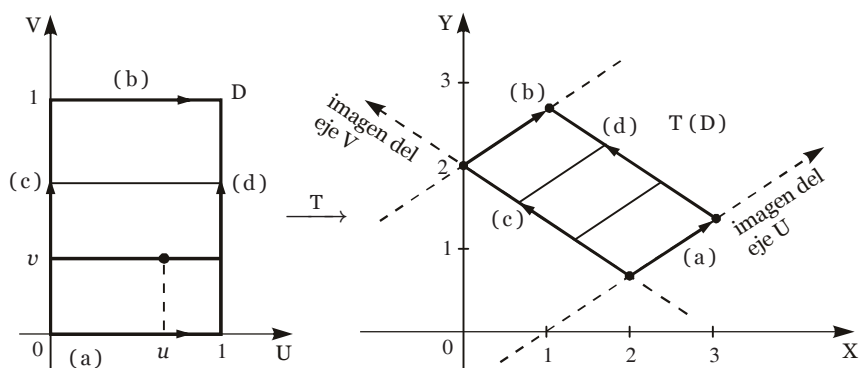
- 1º Manteniendo $v = v_0$, $w = w_0$ fijos, y haciendo variar u , entonces se genera una **CURVA** (o un punto).
- 2º Manteniendo $w = w_0$ fijo, y haciendo variar u y v , se genera una **SUPERFICIE** (ó una curva ó un punto).
- 3º Haciendo variar u, v y w se genera un **SÓLIDO**, salvo los casos degenerados.

1.4 EJEMPLO.- Dada la transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por :

$$T(u, v) = (x, y) = (2 + u - 2v, 1 + u + v), \text{ es decir}$$

$$\begin{cases} x = 2 + u - 2v \\ y = 1 + u + v \end{cases} \quad (*)$$

Veamos cómo es la imagen vía T del cuadrado $D = [0, 1] \times [0, 1] = \{(u, v) / u \in [0, 1], v \in [0, 1]\}$.



- a) La imagen del segmento horizontal $\{(u, 0) / 0 \leq u \leq 1\}$ se puede encontrar en el plano XY haciendo $v = 0$ en $(*)$ y relacionando las variables x, y entre sí:

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 1 + u \end{cases} \Rightarrow y = x - 1, \quad x \in [2, 3]$$

- b) La imagen del segmento horizontal $\{(u, 1) / 0 \leq u \leq 1\}$ se puede encontrar en el plano XY haciendo $v = 1$ en (*):

$$\begin{cases} x = u \\ y = u + 2 \end{cases} \Rightarrow y = x + 2, \quad x \in [0, 1]$$

- c) La imagen del segmento vertical $\{(0, v) / 0 \leq v \leq 1\}$ se encuentra (en XY) haciendo $u = 0$ en (*):

$$\begin{cases} x = 2 - 2v \\ y = 1 + v \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 - x, \quad x \in [0, 2]$$

- d) La imagen del segmento vertical $\{(1, v) / 0 \leq v \leq 1\}$ se encuentra haciendo $u = 1$ en (*):

$$\begin{cases} x = 3 - 2v \\ y = 2 + v \end{cases} \Rightarrow 2y = 7 - x, \quad x \in [1, 3]$$

- e) Observe que las imágenes de las rectas $u = 2v + h$ son las rectas verticales: $x = 2 + h$.

- f) Las imágenes de las rectas $v = -u + k$ son las rectas horizontales $y = 1 + k$.

1.5 EJEMPLO .- La transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) = T(u, v) = (au, bv)$, $a > b > 0$ transforma el disco

compacto $D: u^2 + v^2 \leq 1$ en la región $T(D): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ encerrada

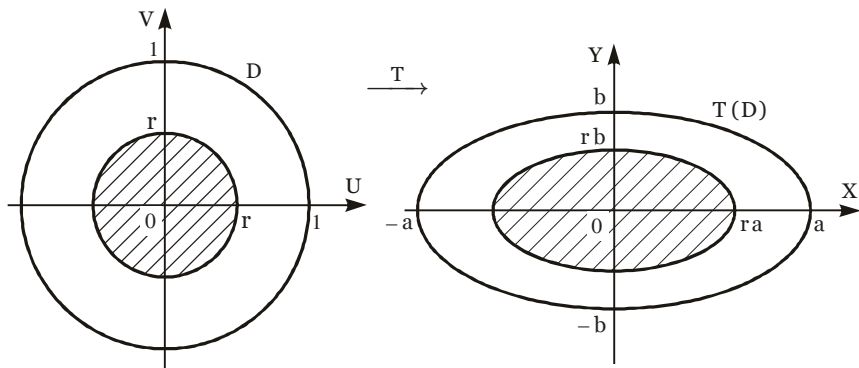
por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mediante deformaciones de las circunferencias

$u^2 + v^2 = r^2$, $r \in [0, 1]$ en las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$, con $r \in [0, 1]$.

Aquí tenemos otra forma de ver cómo se transforma una región D del plano UV caracterizada por una desigualdad como $u^2 + v^2 \leq 1$ (*) en una región $T(D)$ del

plano XY caracterizada por una desigualdad como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ (**).

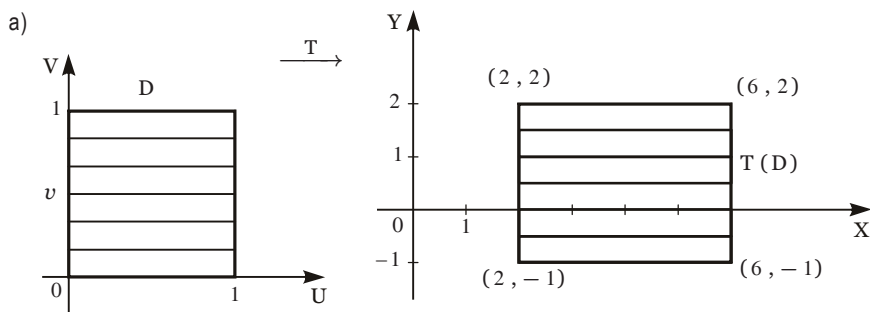
Note que utilizando la definición de T : $x = au$, $y = bv$ y reemplazando en (*) : $u = x/a$, $v = y/b$, obtenemos (**).



1.6 PROBLEMA.- Dada la transformación $(x, y) = T(u, v) = (4u + 2, 3v - 1)$:

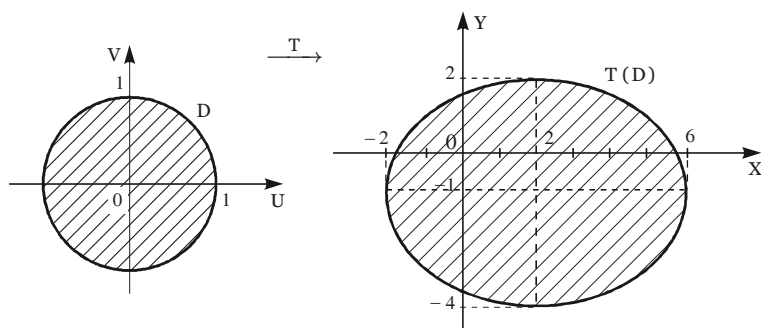
- Grafique la imagen $T(D)$ donde D es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano UV .
- Grafique la imagen $T(D)$ donde D es la región $\{(u, v) / u^2 + v^2 \leq 1\}$

SOLUCIÓN.- T : $x = 4u + 2$, $y = 3v - 1$, $u, v \in [0, 1]$ utilizamos los métodos anteriores



$$\begin{aligned} \text{b) } T: \quad x &= 4u + 2 & \Rightarrow & \quad u = (x - 2)/4 \\ y &= 3v - 1 & & \quad v = (y + 1)/3 \end{aligned}$$

$$D: u^2 + v^2 = r^2 \leq 1 \Rightarrow T(D): \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = r^2 \leq 1$$



2. TRANSFORMACIONES AFINES DE $\mathbb{R}^n$

Son aquellas transformaciones $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se pueden definir mediante una matriz constante $A = [a_{ij}]$ cuadrada de orden n tal que si

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y si}$$

$\bar{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$ es un punto fijo de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\bar{x} = T(\bar{u}) = \bar{x}_0 + A\bar{u} \quad (*)$$

donde $A\bar{u}$ es el producto de la matriz A con el vector (columna) $\bar{u}$.

En el caso particular de $\bar{x}_0 = \bar{0}$ se tiene que $\bar{x} = T(\bar{u}) = A\bar{u} \quad (**)$

En este último caso T recibe el nombre de TRANSFORMACIÓN LINEAL DE $\mathbb{R}^n$.

Nótese que $(*)$ y $(**)$ carecen de sentido a menos que $\bar{x}$, $\bar{x}_0$ y $\bar{u}$ se expresen como vectores columnas.

2.1 EJEMPLO .- La transformación T del Problema 1.6 definida por $(x, y) = T(u, v) = (4u + 2, 3v - 1)$ es una Transformación Afín pues se puede expresar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(u, v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\bar{x}_0 \qquad A \qquad \bar{u}$

Aquí la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonal (caso muy particular).

Una característica de las transformaciones afines es la siguiente.

2.2 TEOREMA.- Toda transformación afín $\bar{x} = T(\bar{u}) = \bar{x}_0 + A\bar{u}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\det(A) \neq 0$:

- a) Transforma RECTAS en RECTAS.
- b) Si D es una región poligonal con k vértices $P_1, P_2, \dots, P_k$, entonces la imagen $T(D)$ es una región poligonal con k vértices $T(P_1), T(P_2), \dots, T(P_k)$.

En otras palabras, T lleva vértices en vértices.

2.3 NOTA.- La parte (b) del Teorema 2.2 proporciona un método rápido para hallar la gráfica de la imagen de una región poligonal D vía una transformación afín, trabajando solamente sobre los vértices.

2.4 EJEMPLO.- En la transformación $(x, y) = T(u, v)$ definida por

$$x = 2 + u - 2v$$

$$y = 1 + u + v$$

que ya vimos anteriormente tenemos que

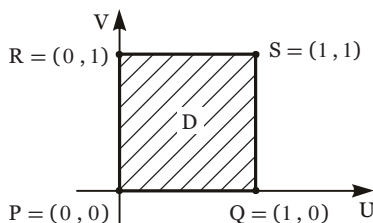
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(u, v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $\det A = 3 \neq 0$

de modo que si D es la región poligonal (un cuadrado)

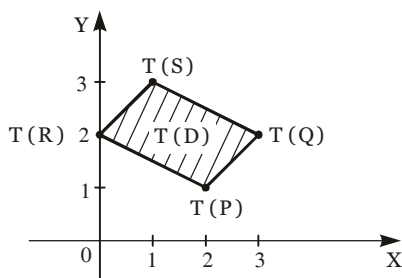
$$D = [0, 1] \times [0, 1]$$

del plano UV entonces la imagen $T(D)$ es una región poligonal cuyos vértices son:



$$T(P) = T(0, 0) = (2, 1) \quad , \quad T(R) = T(0, 1) = (0, 2)$$

$$T(Q) = T(1, 0) = (3, 2) \quad , \quad T(S) = T(1, 1) = (1, 3)$$



2.5 TEOREMA.- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación afín :

$$T(\bar{u}) = x_0 + A\bar{u}$$

Si $\det A \neq 0$, entonces T es una transformación inyectiva sobre $\mathbb{R}^2$, y si $\det A = 0$ entonces T transforma a todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ sobre **UNA RECTA** que pasa por x_0 , ó sobre **UN (único) PUNTO** x_0 .

2.6 TEOREMA.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación afín

$$T(\bar{u}) = x_0 + A\bar{u}.$$

Si $\det A \neq 0$ entonces T es una transformación inyectiva sobre $\mathbb{R}^3$ y si $\det A = 0$ entonces T transforma a todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ sobre **UN PLANO** que contiene a x_0 ó sobre **UNA RECTA** que pasa por x_0 ó sobre el **único punto** x_0 .

2.7 PROBLEMA.- ¿Cómo actúa la transformación afín $(x, y) = T(u, v) = (3 + u - v, 4 - 2u + 2v)$ sobre $\mathbb{R}^2$?

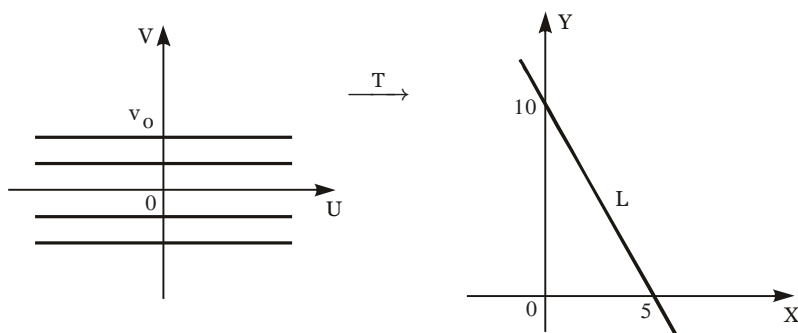
SOLUCIÓN.- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

Vemos que la recta horizontal $\{(u, v_0) / u \in \mathbb{R}\}$ se transforma en

$$\begin{cases} x = 3 + u - v_0 \\ y = 4 - 2u + 2v_0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 10 \quad \dots (*)$$

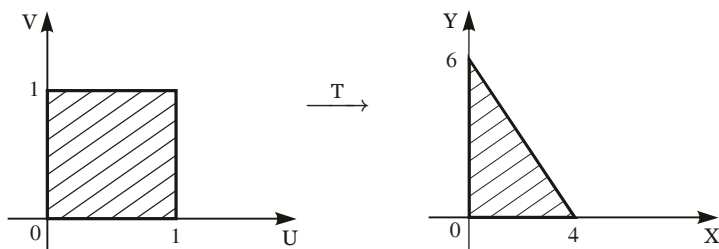
que es **UNA RECTA**, en XY , que no depende del valor v_0 . Es decir, **TODAS LAS RECTAS HORIZONTALES** $\{(u, v_0) / u \in \mathbb{R}\}$ se transforman en **UNA MISMA RECTA** $L: y = -2x + 10$, para cualquier v_0 .

Luego, $T(\mathbb{R}^2) = L = \{(x, y) / y = -2x + 10\}$.



Así, la imagen $T(\mathbb{R}^2)$ de TODO el plano UV es UNA RECTA $L: y = -2x + 10$.

2.8 PROBLEMA .- Halle una transformación que deforme el cuadrado unitario en el triángulo de la figura



SOLUCIÓN.- Todo segmento de recta de extremos A y B tiene la parametrización

$$\{A + t(B - A) / t \in [0, 1]\}$$

Consideremos el borde $L: A + t(B - A)$, $t \in [0, 1]$ y las rectas paralelas de extremos sA y sB , $L_s: sA + t(sB - sA)$, $0 \leq s \leq 1$; de mane-

ra que conforme s varía desde 0 hasta 1, la recta L_s barre todo el triángulo desde $(0, 0)$ hasta la recta L de la frontera. Así es que para $0 \leq s \leq 1$:

$$\begin{aligned} L_s: (x, y) &= s(4, 0) + t(s(0, 6) - s(4, 0)) \quad , \quad t \in [0, 1] \\ &= (4s - 4st, 6st) \quad . \end{aligned}$$

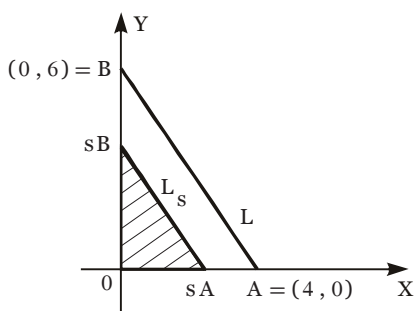
Denotando $t = u$, $s = v$ tenemos la transformación

$$\begin{aligned} (x, y) &= T(u, v) = (4v - 4vu, 6uv) = (4v(1 - u), 6uv) \quad , \\ u &\in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \end{aligned}$$

Note que **el segmento** $\{(u, 0)\}$ se transforma **en el único punto** $(0, 0)$ para $v = 0$, y que **el segmento**

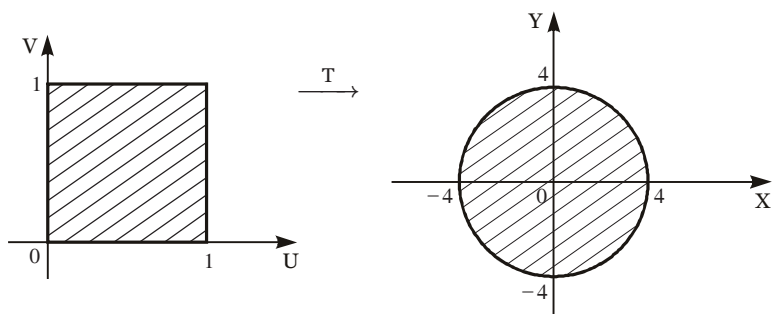
$$\{(u, 1) / u \in [0, 1]\}$$

se transforma **en la recta** L de la frontera, $L: 3x + 2y = 12$.



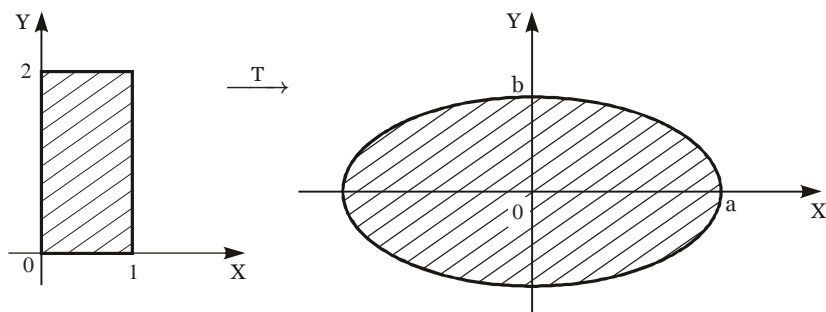
2.9 NOTA. La transformación del problema anterior es un ejemplo de una Transformación *no-afín*.

2.10 EJERCICIO .- Halle una transformación que deforme la región encerrada por el cuadrado de lado 1 de la figura en el círculo de radio 4.



RESPUESTA.- $T: x = 4u \cos(2\pi v) \quad , \quad y = 4u \sin(2\pi v) \quad ,$
para $u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1]$.

2.11 EJERCICIO.- Halle una transformación T que deforme la región encerrada por el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2] \subset UV$, en el interior de la elipse de la figura ($a, b > 0$).



SOLUCIÓN.- $\frac{x}{a} = u \cos(\pi v)$, $\frac{y}{b} = u \sin(\pi v)$,

$v \in [0, 2]$, $u \in [0, 1]$. Es decir ,

$(x, y) = T(u, v) = (au \cos(\pi v), bu \sin(\pi v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2]$.

3. TRANSFORMACIONES DE $\mathbb{R}^3$

Consideremos la transformación

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v, w) \mapsto T(u, v, w) = (x, y, z)$$

definida por $x = 5u$, $y = 3v$, $z = 2w$; podemos expresar

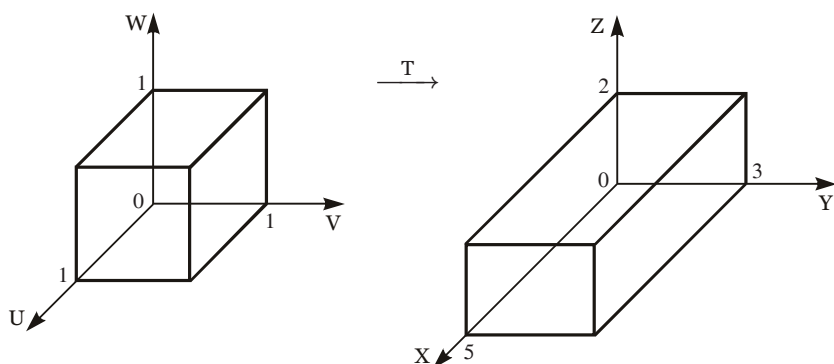
$$T(u, v, w) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A \qquad \bar{u} \qquad \bar{x}$

es decir,

$$\bar{x} = T(\bar{u}) = A\bar{u} .$$

- a) Esta transformación deforma el cubo unitario $D = \{(u, v, w) / u, v, w \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ del espacio UVW en el paralelepípedo $T(D) = [0, 5] \times [0, 3] \times [0, 2]$ del espacio XYZ .



- b) Esta misma transformación deforma la bola unitaria $D = \{ (u, v, w) / u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \}$ del espacio UVW en el sólido elipsoidal

$$T(D) = \{ (x, y, z) / \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \} \text{ del espacio XYZ.}$$

4. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE LAS TRANSFORMACIONES

4.1 DEFINICIÓN.- Una transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función tal que si

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

entonces

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = T(\bar{u}) = (f_1(\bar{u}), f_2(\bar{u}), \dots, f_n(\bar{u}))$$

donde las f_i son las *funciones (reales) componentes* :

$$x_i = f_i(\bar{u}) = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{que también se denotan por}$$

$$x_i = x_i(\bar{u}) = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = f_i(u_1, \dots, u_n) = f_i(\bar{u}),$$

y donde estas coordenadas x_i son funciones reales (llamadas **FUNCIONES COORDENADAS** de T) de n variables $u_1, u_2, \dots, u_n$:

$$x_i = f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{u} \mapsto x_i(\bar{u}) = f_i(\bar{u})$$

$$\bar{x} = T(\bar{u}) = T(u_1, \dots, u_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1(\bar{u}), \dots, x_n(\bar{u})) \\
 &= (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)).
 \end{aligned}$$

4.2 PROPOSICIÓN.- Una transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si todas sus funciones coordenadas $x_i = f_i$ son continuas sobre D .

4.3 DEFINICIÓN.- Una transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es de clase $C^{(k)}$ sobre su dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ si todas sus funciones coordenadas $x_i(\bar{u})$ son de clase $C^{(k)}$ sobre D ; es decir, si todas las funciones coordenadas $x_i(\bar{u})$ son continuas y tienen sus derivadas parciales hasta el orden k todas continuas sobre el dominio D .

5. DERIVADA DE LA TRANSFORMACIÓN DE $\mathbb{R}^n$

Si una transformación T de $\mathbb{R}^n$ es de clase $C^{(1)}$ sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ entonces todas sus funciones coordenadas $x_i = f_i = f_i(\bar{u})$ son diferenciables y por lo tanto existen sus gradientes o derivadas

$$\begin{aligned}
 \nabla f_1(\bar{u}) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \frac{\partial f_1}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \right) \\
 \nabla f_i(\bar{u}) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1}, \frac{\partial f_i}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial u_n} \right), \quad 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

5.1 DEFINICIÓN.- Dada una transformación $T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, de clase $C^{(1)}$ sobre un dominio D entonces, si denotamos

$$\bar{x} = T(\bar{u}) = (f_1(\bar{u}), \dots, f_n(\bar{u})),$$

se define la **DERIVADA** de T en el punto $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in D$ a la **MATRIZ** cuadrada de orden n definida por

$$DT(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{u}) \\ \nabla f_2(\bar{u}) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{u}), \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(\bar{u}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\bar{u}), \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial f_2}{\partial u_n}(\bar{u}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(\bar{u}), \frac{\partial f_n}{\partial u_2}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(\bar{u}) \end{pmatrix}$$

También se le denota por $T'(\bar{u}) = DT(\bar{u})$.

5.2 EJEMPLO.- Si $T(u, v) = (u \cos v, u \sin v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$

entonces $x_1 = f_1(u, v) = u \cos v$,

$x_2 = f_2(u, v) = u \sin v$; y por lo tanto

$$\begin{aligned} DT(u, v) &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(u, v) \\ \nabla f_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.3 EJEMPLO.- Si $T(u, v, w) = (2u, 3v, 5w) = (f_1(\bar{u}), f_2(\bar{u}), f_3(\bar{u}))$

entonces $f_1(\bar{u}) = 2u$, $f_2(\bar{u}) = 3v$, $f_3(\bar{u}) = 5w$,

donde $\bar{u} = (u, v, w)$,

$$DT(u, v, w) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{u}) \\ \nabla f_2(\bar{u}) \\ \nabla f_3(\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$DT(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = T'(u, v, w) .$$

6. MATRICES JACOBIANAS Y JACOBIANOS DE TRANSFORMACIONES

A la matriz derivada de T en un punto $\bar{u} \in D \subset \mathbb{R}^n$ también se le llama **MATRIZ JACOBIANA DE T** en $\bar{u}$, y por ser una matriz cuadrada a su DETERMINANTE se le denomina **JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN T** en el punto $\bar{u}$ y se le denota indistintamente por

$$J(\bar{u}) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \det[DT(\bar{u})] .$$

6.1 EJEMPLO.- Sea $(x, y) = T(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$, entonces

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} \\ &= u(\cos^2 v + \sin^2 v) = u . \end{aligned}$$

Así, tenemos que, en particular $J(3, \pi) = 3$.

6.2 EJEMPLO.- Sea $T(u, v, w) = (x, y, z) = (2u, -3v, 5w)$, entonces

$$\begin{aligned} J(u, v, w) &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30 \quad \text{para todo } (u, v, w) . \end{aligned}$$

7. PROPIEDADES DE LAS MATRICES JACOBIANAS

7.1 TEOREMA.- Sean $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\bar{u}) = \bar{v}$,
 $G : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G(\bar{v}) = \bar{w}$, donde A y B son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que T es diferenciable en $\bar{a} \in A$. Si $\bar{b} = T(\bar{a}) \in B$, G diferenciable en $\bar{b}$, y $H = G \circ T$ es una transformación definida en una vecindad del punto $\bar{a} \in A$, entonces H (la composición) es diferenciable en $\bar{a}$ y :

$$DH(\bar{a}) = DG[T(\bar{a})] \cdot DT(\bar{a})$$

$$\text{o} \quad H'(\bar{a}) = G'(T(\bar{a})) \cdot T'(\bar{a})$$

resultando $H'(\bar{a})$ una matriz cuadrada $n \times n$ como producto de las matrices $G'(T(\bar{a})) = G'(\bar{b})$ y $T'(\bar{a})$, cuadradas de orden n .

7.2 COROLARIO.- Con las condiciones del Teorema 7.1, por propiedades de los determinantes, y como

$$w = H(\bar{a}) = G(T(\bar{a})) = G(\bar{b}) ; \quad T(\bar{a}) = \bar{b}$$

entonces, en una vecindad del punto $\bar{a}$:

$$\frac{\partial(w_1, \dots, w_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \frac{\partial(w_1, \dots, w_n)}{\partial(v_1, \dots, v_n)} \cdot \frac{\partial(v_1, \dots, v_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}$$

PRUEBA.- Aplicar determinantes a la fórmula del Teorema 7.1.

7.3 TEOREMA.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{x} = T(\bar{u})$ una transformación de clase $C^{(1)}$ sobre un conjunto abierto D y si el jacobiano $J(\bar{u}) \neq 0$, $\forall \bar{u} \in D$, entonces T es localmente univalente.

Es decir, para cada punto $\bar{u} \in D$ existe una vecindad $V(\bar{u}, \delta)$ de centro $\bar{u}$ y radio $\delta > 0$ donde T es univalente sobre $V(\bar{u}; \delta)$.

7.4 LEMA.- Si $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la transformación identidad $I(\bar{u}) = \bar{u}$, entonces **LA DERIVADA** de I en el punto $\bar{u}$ es la matriz IDENTIDAD I de orden n :

$$I'(\bar{u}) = DI(\bar{u}) = I, \text{ para todo } \bar{u} \in \mathbb{R}^n.$$

PRUEBA.- Sea $\bar{x} = I(\bar{u}) = \bar{u}$, entonces $x_i = u_i$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow I'(\bar{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = I$$

7.5 COROLARIO.- El jacobiano de la transformación IDENTIDAD I es igual a I .

7.6 TEOREMA.- Si la transformación $T : A \rightarrow B$ es de clase $C^{(1)}$ sobre A (A y B : conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$) y tiene inversa $T^{-1} : B \rightarrow A$ de clase $C^{(1)}$ sobre B entonces para $\bar{x} = T(\bar{u})$, $\bar{u} = T^{-1}(\bar{x})$: $T^{-1} \circ T(\bar{u}) = I(\bar{u})$,

$$\Rightarrow DT^{-1}[T(\bar{u})] \cdot DT(\bar{u}) = I$$

~~~~~

**7.7 COROLARIO.-** Con las hipótesis del Teor. [7.6], y tomando determinantes :

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}}.$$

~~~~~

PRUEBA.- Del teorema anterior se concluye que ambas matrices derivadas son *No Singulares*. Luego, sus respectivos jacobianos son diferentes de cero.

7.8 EJEMPLO.- Sea $T(\bar{u}) = \bar{x}$ la transformación de $\mathbb{R}^2$ tal que $u = x^2 - y^2$,

$v = 2xy$. Halle $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ en términos de u, v , sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

SOLUCIÓN.- Haremos el cálculo indirectamente por el COROLARIO 7.7 pues se tornó algo complicado el tratar de despejar x, y , en términos de u y v :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$$

y como $u = x^2 - y^2, v = 2xy \Rightarrow u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$

7.9 PROBLEMA.- Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una TRANSFORMACIÓN AFIN $\bar{x} = T(\bar{u}) = \bar{x}_0 + A\bar{u}$, donde $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada de orden n , entonces

a) $DT(\bar{u}) = T'(\bar{u}) = A$

b) $J(\bar{u}) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det A$.

PRUEBA.- Sea $\bar{x}_0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ un punto fijo de $\mathbb{R}^n$

a) $x_i = q_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k$

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} u_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial u_j} = a_{ij}$$

pues
$$\frac{\partial u_k}{\partial u_j} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow DT(\bar{u}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) = [a_{ij}] = A.$$

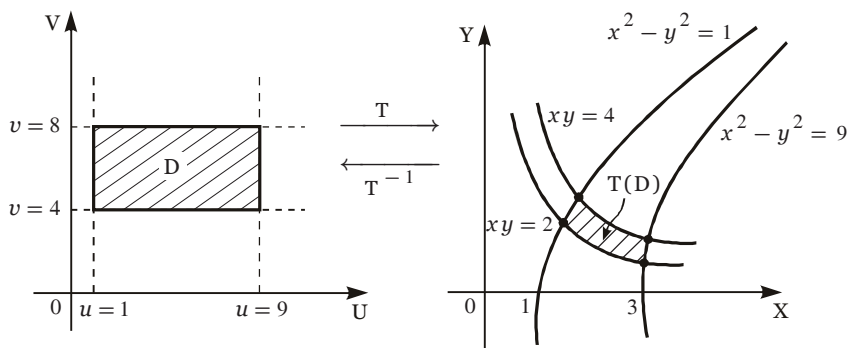
$$b) J(\bar{u}) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det[DT(\bar{u})] = \det A.$$

7.10 PROBLEMA .- Halle una transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de un plano UV a un plano XY que transforme una región D del plano UV en una región $E = T(D)$ del plano XY limitada por las gráficas de :

$$x^2 - y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad xy = 2, \quad xy = 4, \\ \text{en la región } x > 0.$$

SOLUCIÓN.- Sean $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, entonces, en el plano UV , las curvas dadas corresponden a las imágenes de las rectas

$$u = 9, \quad u = 1, \quad v = 4, \quad v = 8$$



$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad (x, y) = T(u, v).$$

7.11 PROBLEMA.- Dada la transformación $T(x, y) = (x - y, xy)$

a) Halle el jacobiano de $T(x, y)$.

b) ¿Cuáles son los puntos de la región $A = \{(x, y) / y \geq x, y \leq 1, x \geq 0\}$ donde el jacobiano *no es cero*?

SOLUCIÓN.- $(r, s) = T(x, y) = (x - y, xy) \Rightarrow r = x - y, s = xy$

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \partial r / \partial x & \partial r / \partial y \\ \partial s / \partial x & \partial s / \partial y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} = x + y.$$

Así es que $J(x, y) = x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$, corresponde a una recta que al intersectar con A se obtiene el único punto $(0, 0)$ donde el jacobiano se anula.

7.12 NOTA.- Limitaremos nuestro estudio a transformaciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) = T(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ donde x, y ,

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ son continuas en D (es decir, T es de clase $C^{(1)}$

sobre D), $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \geq 0$ ó $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \leq 0$, $\forall (u, v) \in D$

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = T(u, v, w)$, $(u, v, w) \in D \subset \mathbb{R}^3$ tal que T es de clase $C^{(1)}$ sobre D , y además

$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \geq 0$ ó $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \leq 0$, $\forall (u, v, w) \in D$.

Bajo estas condiciones la transformación T mapea una región cerrada y acotada D sobre una imagen cerrada y acotada $T(D)$ de manera que la frontera de D es mapeada sobre la frontera de $T(D)$.

Y si $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, para $(u, v) \in D$, entonces existe una transforma-

ción inversa T^{-1} de $T(D)$ sobre D , de clase $C^{(1)}$, tal que

$$J T^{-1}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0, \text{ para } (x, y) \in T(D).$$

Por ejemplo, para $(x, y) = T(u, v) = (u^2 - v^2, uv)$, sobre $(u, v) \in$

$D = \{(u, v) / u > 0, v > 0\}$ entonces $T(D) = \{(x, y) / y > 0\}$,

de modo que T es una transformación que mapea el *PRIMER CUADRANTE* del plano UV sobre el *SEMIPLANO SUPERIOR* del plano XY . Además,

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2) > 0 \text{ sobre } D.$$

Por lo tanto, T resulta ser una transformación biyectiva de D sobre $T(D)$.

8. TRANSFORMACIONES EN COORDENADAS POLARES (r, θ)

La transformación T que expresa un punto del plano $\mathbb{R}^2$ (XY) en términos de las COORDENADAS POLARES (r, θ) del plano $\mathbb{R}^2$ ($UV = R\theta$) está definida por

$$T : \begin{matrix} R\theta \\ \mathbb{R}^2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} XY \\ \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = T(r, \theta)$$

$$\text{donde } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (*)$$

es decir: $(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Esta transformación lleva un punto $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ (plano $R\theta$) hasta el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (plano XY) mediante la fórmula $(*)$.

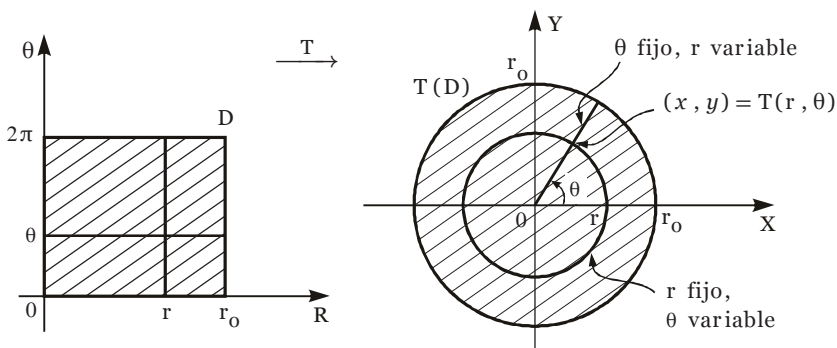
Una característica de estas coordenadas polares es que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Consideraremos aquí los siguientes dominios para r y θ :

$$D_\alpha = \{ (r, \theta) / 0 \leq r < \infty, \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi \}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

En particular, si $D = \{ (r, \theta) / 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$ entonces su imagen consiste de todo el disco cerrado con centro en $(0, 0)$ y de radio r_0 :



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta : \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El Jacobiano de esta transformación es:

$$\begin{aligned} J(r, \theta) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r.(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r. \end{aligned}$$

Ahora estudiaremos cómo actúa esta transformación con algunos ejemplos.

8.1 EJEMPLO.- Exprese en coordenadas cartesianas aquellos puntos del plano cuyas coordenadas polares (r, θ) son :

$$\text{a) } (2, \pi), \quad \text{b) } (3, -\pi/4), \quad \text{c) } (5, 7\pi/6).$$

SOLUCIÓN.- $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$

$$\text{a) } x = 2 \cos \pi, \quad y = 2 \sin \pi \Rightarrow (x, y) = (-2, 0)$$

$$\text{b) } x = 3 \cos(-\pi/4), \quad y = 3 \sin(-\pi/4)$$

$$\Rightarrow (x, y) = (3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$$

$$\text{c) } x = 5 \cos 7\pi/6 = -5 \cos \pi/6, \quad y = 5 \sin 7\pi/6 = -5 \sin \pi/6$$

$$\Rightarrow (x, y) = (-5\sqrt{3}/2, -5/2).$$

8.2 EJEMPLO.- Halle las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas (x, y) son:

$$\text{a) } (3, 3), \quad \text{b) } (-1, -1), \quad \text{c) } (3, -\sqrt{3})$$

$$\text{d) } (-\sqrt{5}, \sqrt{5}), \quad \text{e) } (-2\sqrt{3}, -2), \quad \text{f) } (0, -4).$$

SOLUCIÓN.- Ubicaremos el cuadrante en el cual se encuentra cada punto.

$$\text{a) PRIMER CUADRANTE, } x = 3, y = 3 : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 : \quad (r, \theta) = (3\sqrt{2}, \pi/4).$$

$$\text{b) TERCER CUADRANTE, } x = -1, y = -1 : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x = 1 \Rightarrow \theta = 5\pi/4 : \quad (r, \theta) = (\sqrt{2}, 5\pi/4).$$

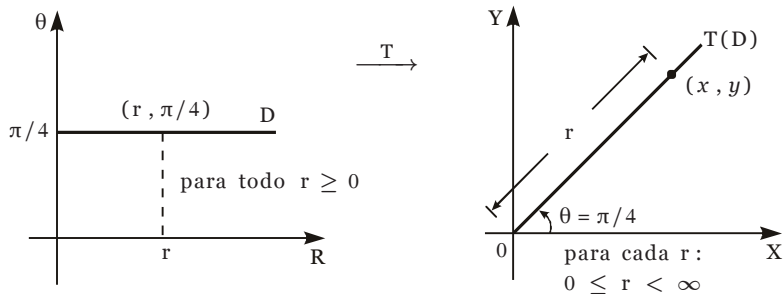
- c) Cuarto cuadrante, $x = 3$, $y = -\sqrt{3}$: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}$
 $\tan \theta = y/x = -1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\pi/6$ ó $\theta = 11\pi/6$
 que son equivalentes por estar en el 4º cuadrante:
 $(r, \theta) = (2\sqrt{3}, -\pi/6)$ ó $(r, \theta) = (2\sqrt{3}, 11\pi/6)$.
- d) Segundo cuadrante, $x = -\sqrt{5}$, $y = \sqrt{5}$: $r = \sqrt{10}$
 $\tan \theta = y/x = -1 \Rightarrow \theta = 3\pi/4$: $(r, \theta) = (\sqrt{10}, 3\pi/4)$.
- e) Tercer cuadrante, $x = -2\sqrt{3}$, $y = -2$: $r = 4$,
 $\tan \theta = y/x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 7\pi/6$ ó $\theta = -5\pi/6$:
 $(r, \theta) = (4, 7\pi/6)$ ó $(4, -5\pi/6)$.
- f) $(0, -4)$: semieje negativo del eje Y: $\theta = -\pi/2$ ó $3\pi/2$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$: $(r, \theta) = (4, -\frac{\pi}{2})$ ó $(4, \frac{3\pi}{2})$.

8.3 EJEMPLO.- Grafique en el plano $R\theta$ y en el plano XY los conjuntos D definidos por las ecuaciones

- a) $\theta = \pi/4$ b) $r = 2$.

SOLUCIÓN.- Ambas son curvas.

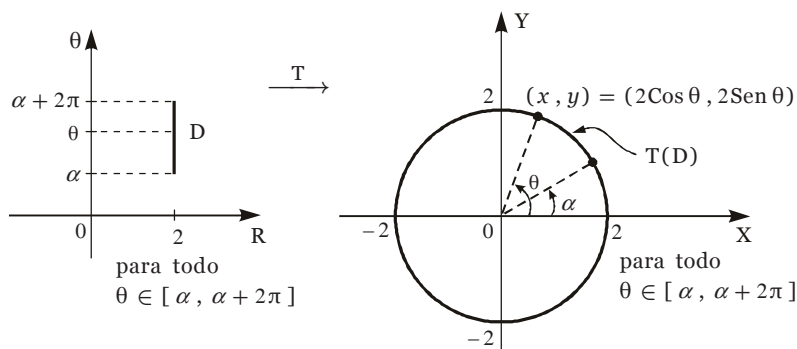
- a) La ecuación $\theta = \pi/4$ es independiente de la variable r (es decir $\theta = \pi/4$, para todo $r \geq 0$):



$$D = \{ (r, \theta) / \theta = \pi/4, r \geq 0 \}$$

$$T(D) = \{ (x, y) = (r \cos \pi/4, r \sin \pi/4) = (\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}), r \geq 0 \}$$

- b) La ecuación $r = 2$ es independiente de la variable θ ; así, un punto de su gráfica es de la forma $(r, \theta) = (2, \theta)$ en el plano $R\theta$, para cualquier $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$, α fijo



de modo que la gráfica de $r = 2$ en el plano XY es una circunferencia de radio igual a 2. Otra forma de ver esto mismo es como sigue:

$$r = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

que es la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el origen, y sin restricciones para θ , (es decir, para todo θ en $[\alpha, \alpha + 2\pi]$).

- 8.4 EJEMPLO.-** Indique los límites en coordenadas polares de la región ubicada en el interior de la circunferencia $r = 3 \text{ Sen } \theta$ y en el exterior de la cardiode $r = 1 + \text{Sen } \theta$.

SOLUCIÓN.- $r = 3 \text{ Sen } \theta \Rightarrow r^2 = 3r \text{ Sen } \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 3y$, es decir $x^2 + (y - 3/2)^2 = 9/4$.

Para conocer los valores de θ_1 y θ_2 igualamos:

$$3 \text{ Sen } \theta = r = 1 + \text{Sen } \theta$$

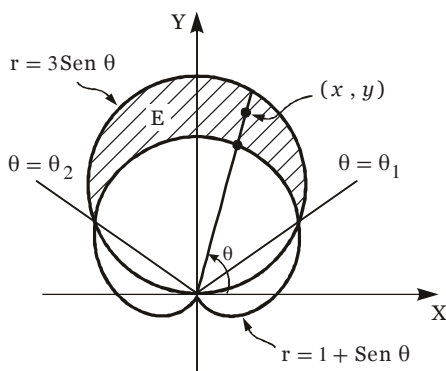
$$\Rightarrow \text{Sen } \theta = 1/2 :$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

En la región E el punto

$$(x, y) = (r \text{ Cos } \theta, r \text{ Sen } \theta)$$

es tal que $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$,



y cuando se mantiene θ fijo se obtiene el segmento radial que pasa por $(x, y) \in E$ para el cual el valor de r varía según la relación

$$1 + \text{Sen } \theta \leq r \leq 3 \text{ Sen } \theta, \quad \theta \in [\pi/6, 5\pi/6].$$

Por lo tanto en el plano XY se tiene

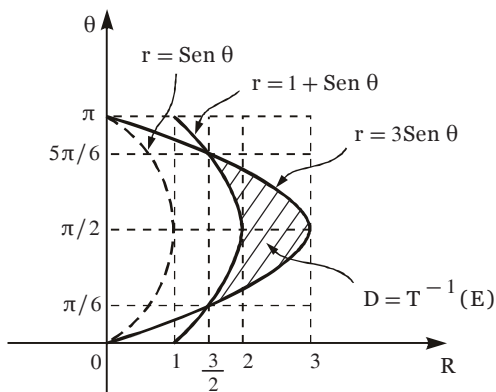
$$E = \{(x, y) / x = r \cos \theta, y = r \text{ Sen } \theta, \\ \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6, 1 + \text{Sen } \theta \leq r \leq 3 \text{ Sen } \theta\}$$

sin embargo en el plano $R\theta$ se tiene la gráfica adjacente.

De esta forma se tiene que

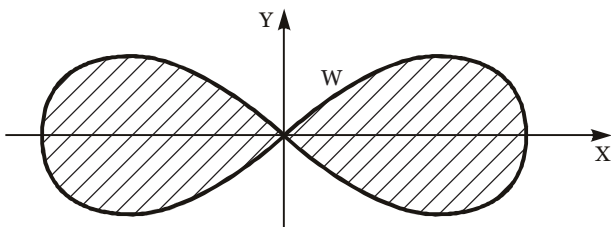
$$E = T(D)$$

es la imagen mediante T de la región D de la última gráfica.



8.5 PROBLEMA.- Halle los límites expresados en coordenadas polares de la región W del plano XY encerrada por la lemniscata: ($a > 0$)

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

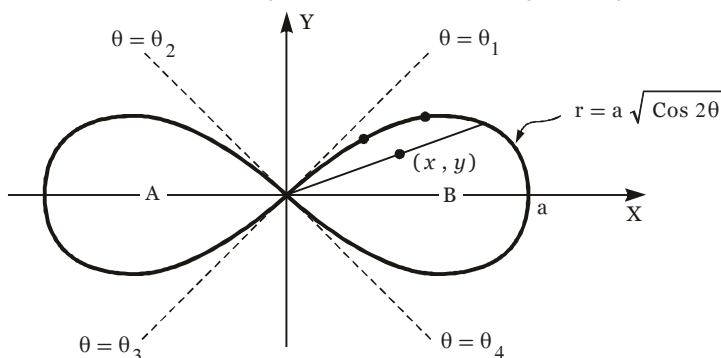


SOLUCIÓN.- La gráfica es simétrica respecto a los ejes X , Y , y al Origen; y como $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ Sen } \theta$, entonces la ecuación de la lemniscata se convierte en

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta \geq 0 \quad \text{y} \quad r = a \sqrt{\cos 2\theta} \quad (*)$$

De la gráfica vemos que los valores de r varían según: $0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\theta}$,

y para conocer los límites para el ángulo polar θ tenemos la gráfica siguiente



y como $(0, 0)$ pertenece a la gráfica, entonces de $(*)$:

$$\begin{aligned} r &\xrightarrow{\text{tiende}} 0 \quad \text{sii} \quad \cos 2\theta \xrightarrow{\text{tiende}} 0^+ \\ &\quad \text{sii} \quad 2\theta \longrightarrow \pi/2^-, 3\pi/2^+, 5\pi/2^-, 7\pi/2^+ \\ &\quad \text{sii} \quad \theta \longrightarrow \pi/4^-, 3\pi/4^+, 5\pi/4^-, 7\pi/4^+ . \end{aligned}$$

Luego, $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\theta_3 = 5\pi/4$, $\theta_4 = -\pi/4$ ó $7\pi/4$:

$W = A \cup B = T(A') \cup T(B')$ donde A' y B' son las regiones en el plano $R\theta$ correspondientes a A y B respectivamente:

$$A' = \{ (r, \theta) / 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\theta}, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \}$$

$$B' = \{ (r, \theta) / 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\theta}, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4 \} .$$

8.6 PROBLEMA.- Sea $A = \{ (r, \theta) / 0 \leq r \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 3\pi/4 \}$ y la transformación $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Grafique A y la imagen $T(A)$.

SOLUCIÓN.- En el plano $R\theta$ se tiene el conjunto A :

La ecuación en coordenadas polares

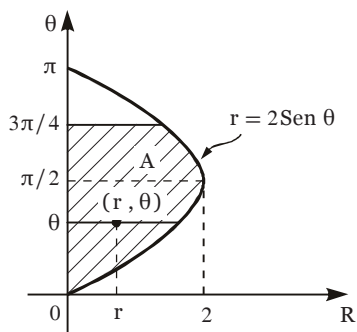
$$r = 2 \sin \theta \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta$$

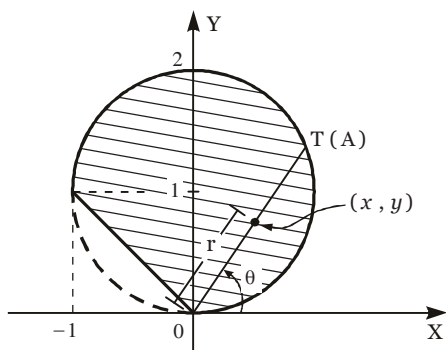
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

corresponde a una circunferencia en el plano XY .

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) :$$





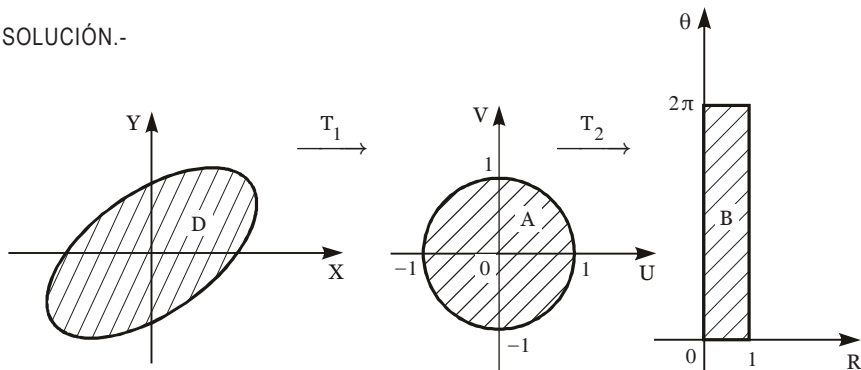
$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta \\ 0 \leq \theta \leq 3\pi/4 \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}$$

8.7 PROBLEMA.- Sea $D = \{ (x, y) / \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1 \}$ una región en el plano XY . Definir dos transformaciones T_1 y T_2 de $\mathbb{R}^2$ tales que: $T_2(T_1(x, y)) = (r, \theta)$, donde

$$T_1(D) = A = \{ (u, v) / u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

$$T_2(A) = B = \{ (r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \}$$

SOLUCIÓN.-



a) $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{y-1}{2} : u^2 + v^2 = \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1$

$$T_1(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{y-1}{2} \right) : T_1(D) = A.$$

b) $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, \tan \theta = \frac{v}{u}, r = \sqrt{u^2 + v^2} :$

$$(r, \theta) = T_2(u, v) =$$

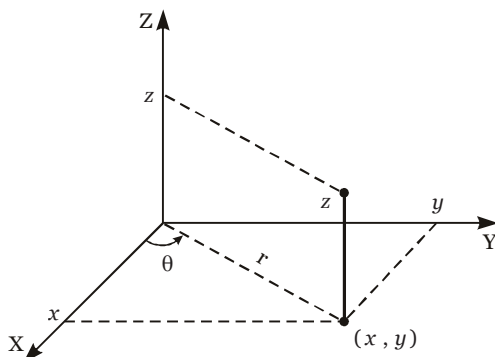
$$= \begin{cases} (\sqrt{u^2 + v^2}, \text{Arc Tan}(v/u)) & , \quad u > 0, v \in \mathbb{R} \\ (\sqrt{u^2 + v^2}, \pi/2) & , \quad u = 0, v > 0 \\ (\sqrt{u^2 + v^2}, \pi + \text{Arc Tan}(v/u)) & , \quad u < 0, v \in \mathbb{R} \\ (\sqrt{u^2 + v^2}, 3\pi/2) & , \quad u = 0, v < 0 \\ (0, 0) & , \quad (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

y de este modo se cumple que $T_2(A) = B$. Note que el rango de valores de $\text{Arc Tan}(v/u)$ es $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, por su definición.

9. TRANSFORMACIONES CILÍNDRICAS (r, θ, z)

En forma análoga a las coordenadas polares en el plano, estudiaremos las **COORDENADAS CILÍNDRICAS** en $\mathbb{R}^3$, definidas por la transformación

$$T : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



$$T : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ \Psi \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, z) \mapsto T(r, \theta, z) = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

del espacio $R\theta Z$ al espacio XYZ . A los números (r, θ, z) se les llama las **COORDENADAS CILÍNDRICAS** del punto (x, y, z) representadas en la anterior figura.

El rango máximo de valores de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) es:

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi, \quad \alpha \text{ fijo en } \mathbb{R}$$

$$z \text{ arbitrario} \in \langle -\infty, \infty \rangle.$$

Esta transformación es una extensión de las coordenadas polares a un espacio $\mathbb{R}^3$.

9.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS

Luego de haber relacionado las variables (r, θ) con las variables (x, y) del plano coordenado XY , y solamente en este plano deben analizarse sus variaciones en algún problema particular.

Para ello se debe hallar la **PROYECCIÓN PERPENDICULAR** de la curva, superficie o región del espacio en estudio, **HACIA EL PLANO XY** .

Además, en este plano, por tenerse que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{se cumple que} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = y/x \end{cases}$$

Así la superficie S en el espacio XYZ definida por

$$S = \{ (x, y, z) / z = f(x, y), (x, y) \in D \}$$

tiene su representación en coordenadas cilíndricas como sigue:

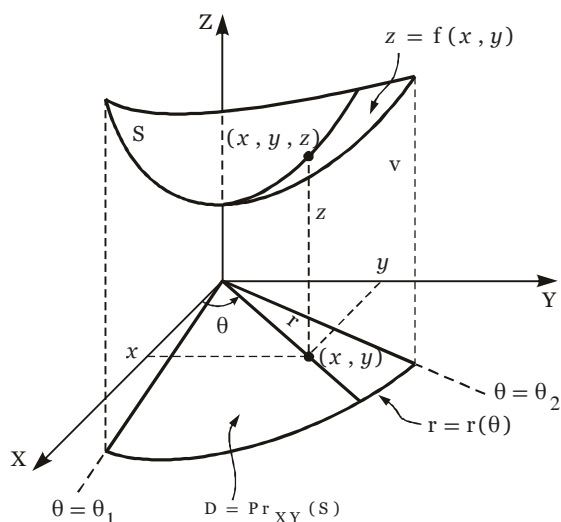
$$S' = \{ (r, \theta, z) / z = f(r \cos \theta, r \sin \theta), 0 \leq r \leq r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \},$$

Y el sólido V encima del plano XY y debajo de la superficie S , definido por

$$V = \{ (x, y, z) / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D \}$$

tiene su representación en coordenadas cilíndricas como sigue:

$$V' = \{ (r, \theta, z) / 0 \leq z \leq f(r \cos \theta, r \sin \theta), 0 \leq r \leq r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \}.$$



9.2 EJEMPLO.- Halle las gráficas de los siguientes conjuntos

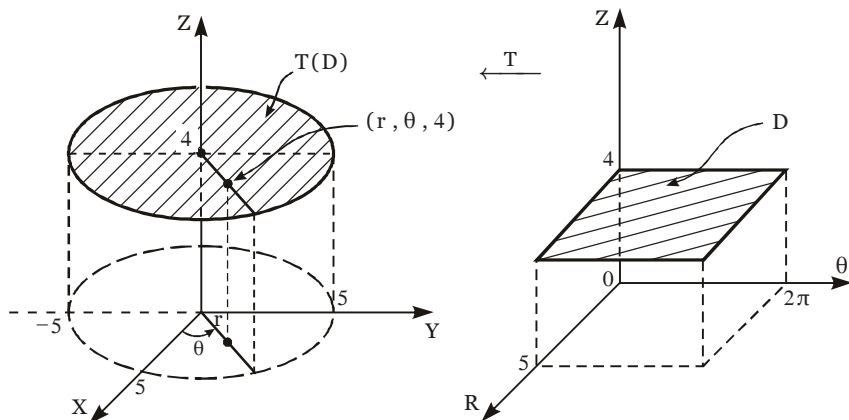
a) $D = \{ (r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5, z = 4 \}$

b) $D = \{ (r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5; \pi \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3 \}$,

así como las de sus imágenes en XYZ mediante la transformación cilíndrica T .

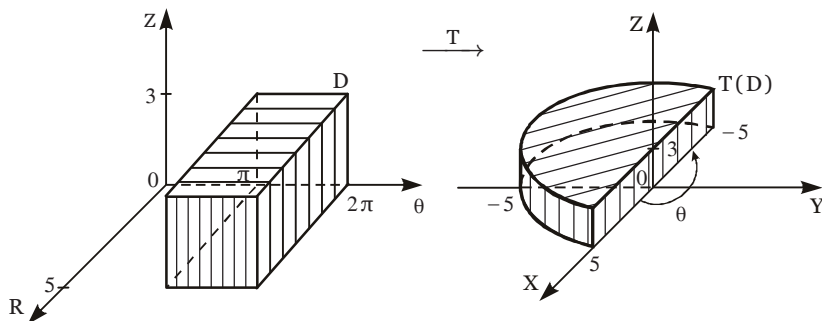
SOLUCIÓN.-

- a) $D = \{ (r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5, z = 4 \}$ no depende de θ , ello indica que θ varía en toda una vuelta de 2π radianes: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($\alpha = 0$).



En el espacio $R\theta Z$, D es una lámina rectangular plana horizontal a la altura $z = 4$, y su imagen $T(D)$ en el espacio XYZ es un disco horizontal de radio 5 a la altura $z = 4$.

- b) $D = \{ (r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5 ; \pi \leq \theta \leq 2\pi, z \in [0, 3] \} :$



9.3 NOTA.- Las coordenadas cilíndricas se analizan en el espacio XYZ de modo que las coordenadas r y θ se ubican en algún plano coordenado (XY , XZ ó YZ).

9.4 PROBLEMA.- a) Encuentre las coordenadas cilíndricas de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(2, 2, 3)$ y $(-2, 2\sqrt{3}, -5)$.

- b) Encuentre las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas son $(2, \pi, -3)$ y $(5, -\pi/3, 2)$.

SOLUCIÓN.- $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$.

a1) $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\tan \theta = y/x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$ (pues $x > 0$, $y > 0$: 1er cuadrante)

Así, $(r, \theta, z) = (2\sqrt{2}, \pi/4, 3)$.

a2) $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$ (2º cuadrante), $z = -5$;

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16} = 4$; $\tan \theta = y/x = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 2\pi/3$;

Así, $(r, \theta, z) = (4, 2\pi/3, -5)$

b1) $r = 2$, $\theta = \pi$, $z = -3$:

$x = r \cos \theta = 2 \cos \pi = -2$; $y = r \sin \theta = 2 \sin \pi = 0$

Así, $(x, y, z) = (-2, 0, -3)$

b2) $r = 5$, $\theta = -\pi/3$, $z = 2$

$$x = r \cos \theta = 5 \cos(-\pi/3) = 5/2$$

$$y = r \sin \theta = 5 \sin(-\pi/3) = -5\sqrt{3}/2$$

Por lo tanto, $(x, y, z) = (5/2, -5\sqrt{3}/2, 2)$.

9.5 PROBLEMA.- Grafique el conjunto D definido en coordenadas cilíndricas :

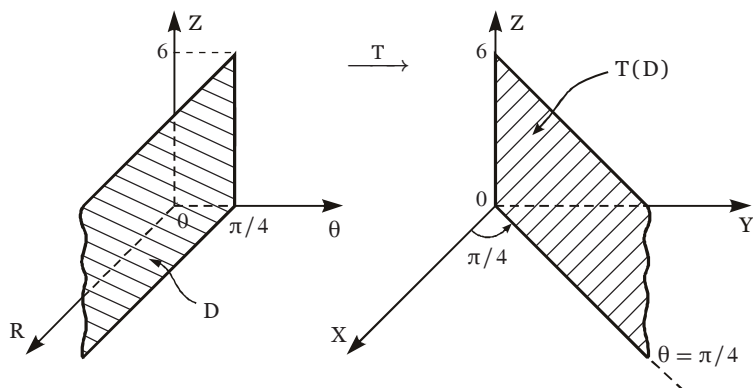
a) $D = \{ (r, \theta, z) / \theta = \pi/4 , z \in [0, 6] \}$

b) $D = \{ (r, \theta, z) / \theta = \pi/2 , r \in [0, 1] \}$

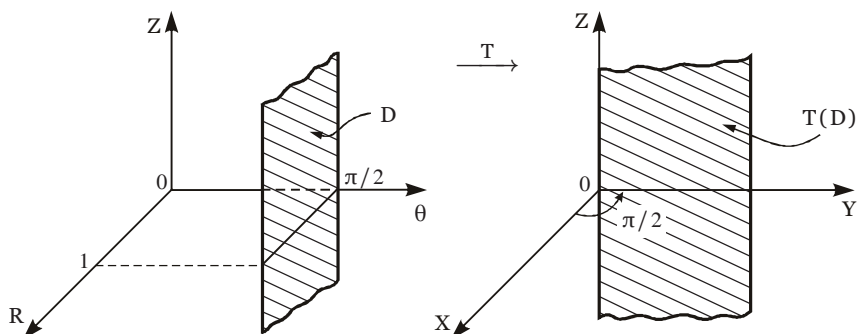
c) $D = \{ (r, \theta, z) / r = 3 , z \in [0, 4] \}$.

SOLUCIÓN.-

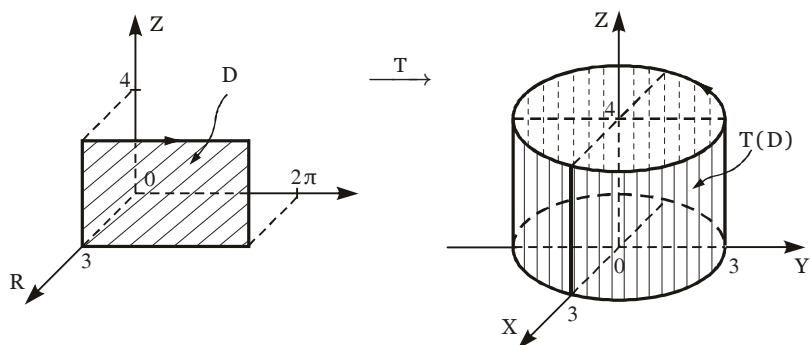
a) $\theta = \pi/4$, $z \in [0, 6]$, $0 \leq r < \infty$ (todo su rango).



b) $\theta = \pi/2$, $r \in [0, 1]$.



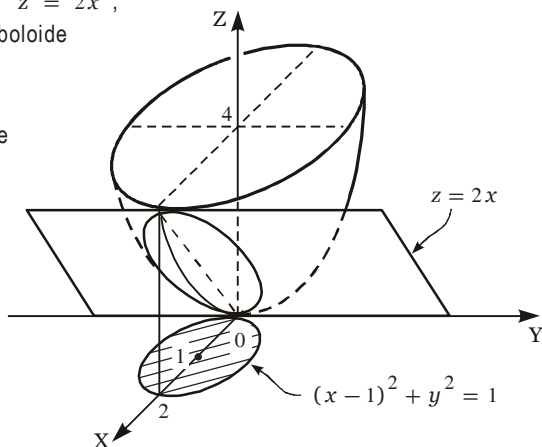
c) $r = 3$, $z \in [0, 4]$, $\theta \in$ todo su rango $[0, 2\pi]$:



9.6 PROBLEMA.- Exprese en coordenadas cilíndricas la región limitada superiormente por el plano $z = 2x$, e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

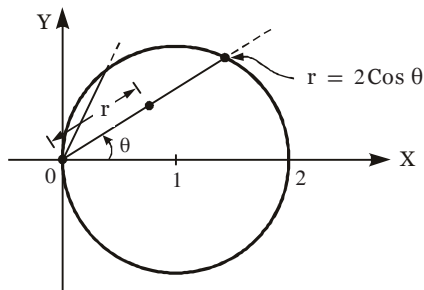
SOLUCIÓN.- La intersección de ambas superficies tiene su proyección en el plano XY :

$$\begin{aligned} 2x &= z = x^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 2x \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$



Veamos más claramente la variación de r y θ en un solo plano, el XY :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \\ x^2 + y^2 &= 2x \Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow \boxed{r = 2 \cos \theta} \quad (*) \end{aligned}$$



Según (*):

r tiende a 0 si

θ tiende a: $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

Así, $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$,
 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

La variación de z en coordenadas cilíndricas la ubicamos de la gráfica en XYZ :

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2x \Rightarrow r^2 \leq z \leq 2r \cos \theta ,$$

desde el paraboloide $z = x^2 + y^2 = r^2$ hasta el plano $z = 2x = 2r \cos \theta$.

Por lo tanto, el sólido buscado está definido por las coordenadas cilíndricas:

$$\{ (r, \theta, z) / r^2 \leq z \leq 2r \cos \theta , 0 \leq r \leq 2 \cos \theta , -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \} .$$

9.7 PROBLEMA.- Halle una ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie :

$$2x^2 + 2y^2 - 5z - 6 = 0 . \quad \text{RPT: } 2r^2 - 5z = 6 .$$

9.8 JACOBIANO DE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta , \quad z = z ,$$

$$J(r, \theta, z) = \frac{\partial(z, y, x)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

9.9 SUGERENCIAS PARA EL USO DE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS

De acuerdo a la forma del sólido en estudio, las coordenadas cilíndricas se pueden definir de manera que las coordenadas polares (r, θ) tengan que ver no con las coordenadas (x, y) sino con las coordenadas (y, z) ó con (x, z) .

Esta flexibilidad permite resolver mayor cantidad de problemas, principalmente en lo que se refiere a las *integrales múltiples*, como veremos en el siguiente capítulo.

9.10 EJEMPLO.- Consideremos el sólido, en XYZ , limitado por las gráficas de las ecuaciones:

$$x^2 + z^2 = 9 , \quad y + z = 3 , \quad y = -3 :$$

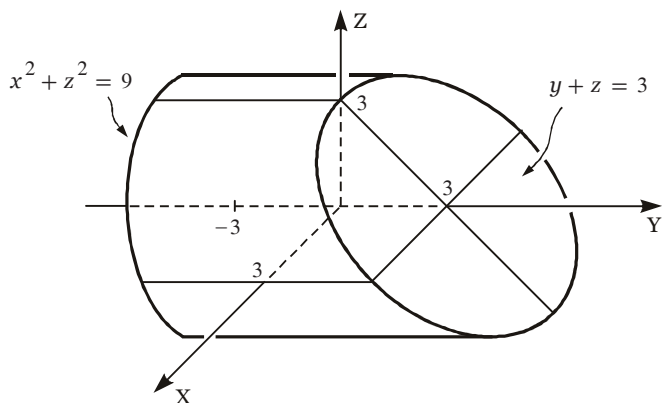
$$\text{Siendo } S = \{ (x, y, z) / x^2 + z^2 \leq 9 , -3 \leq y \leq 3 - z \} ,$$

en este caso conviene elegir

$$x = r \cos \theta , \quad z = r \sin \theta , \quad y = y ,$$

así es que

$$x^2 + z^2 = r^2 .$$



La proyección perpendicular de todo el sólido hacia el plano XZ es el disco cerrado

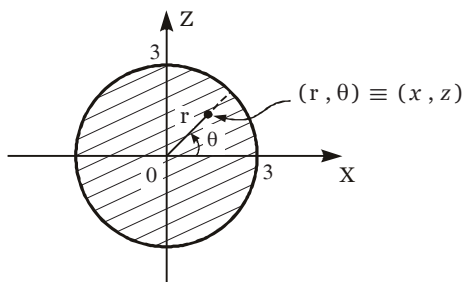
$$x^2 + z^2 \leq 9,$$

donde observamos

que

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 3$$



Según la primera figura, la variación para " y " es : $-3 \leq y \leq 3 - z$

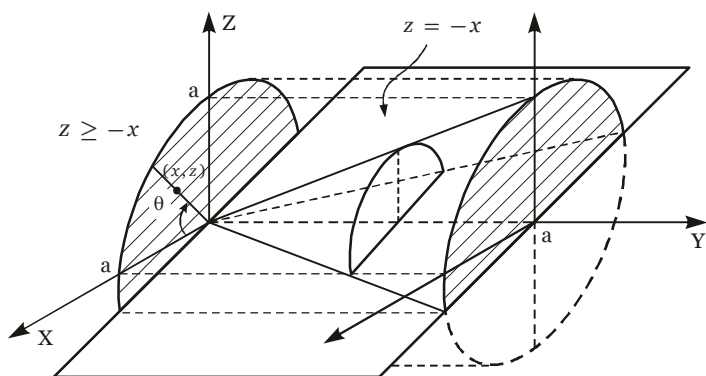
(desde el plano $y = -3$ hasta el plano $y + z = 3$) , que en coordenadas

polares corresponde a : $-3 \leq y \leq 3 - r \text{ Sen } \theta$. Es decir ,

$$S = \{ (r, \theta, y) / -3 \leq y \leq 3 - r \text{ Sen } \theta, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}.$$

9.11 EJEMPLO.- Si S es el sólido encerrado por la superficie $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ y los planos $x + z = 0$, $y = a$, $a > 0$, en la región $z \geq -x$, encuentre las variaciones de las coordenadas cilíndricas que definen al sólido S .

SOLUCIÓN.- $y = \sqrt{x^2 + z^2}$... Cono circular recto con eje en el Eje Y



La proyección de todo el sólido lo haremos hacia el plano XZ , y por tener la forma de una circunferencia, para este cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, elegimos las siguientes coordenadas cilíndricas en el espacio XZY :

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad y = y \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = r^2.$$

Según la figura vemos que: $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$.

Además, la proyección de la curva de intersección del cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ con el

plano $y = a$ es: $a = y = \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow x^2 + z^2 = a^2$.

Luego, $0 \leq r \leq a$. Para la variación de y :

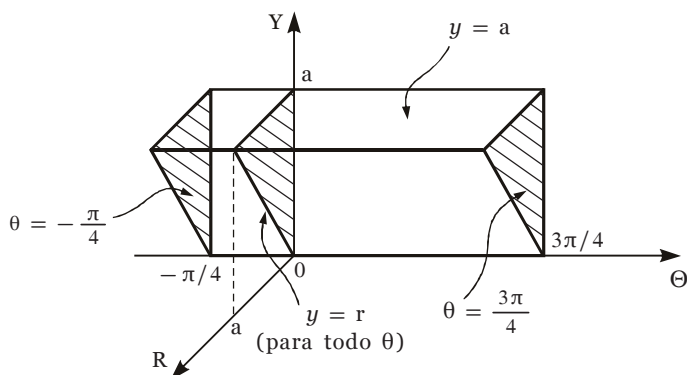
$$\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq a \quad \equiv \quad r \leq y \leq a.$$

Por lo tanto, el sólido está definido por las siguientes relaciones en coordenadas cilíndricas:

$$S = \left\{ (r, \theta, y) / r \leq y \leq a, \quad 0 \leq r \leq a, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

cuya representación gráfica en el espacio $R\Theta Y$ la tenemos en la figura siguiente.

Aquí la ecuación $y = r$ corresponde al plano inclinado que se genera barriendo la recta $y = r$ del plano RY a lo largo del EJE Θ desde $\theta = -\pi/4$ hasta $\theta = 3\pi/4$.



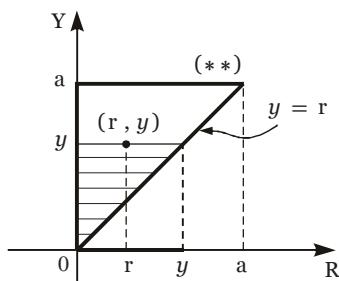
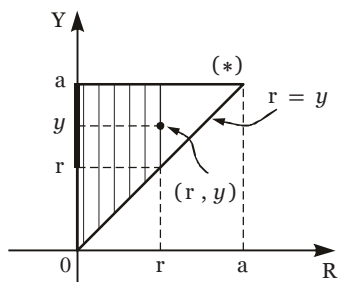
Note que en la proyección (triángulo) en el plano RY , las relaciones:

$$0 \leq r \leq a, \quad r \leq y \leq a \quad (*)$$

son equivalentes a las relaciones:

$$0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq r \leq y \quad (**)$$

que determinan la misma región triangular



Por esta razón podemos también definir el sólido S en la forma equivalente:

$$S = \left\{ (r, \theta, y) / 0 \leq r \leq y, \quad 0 \leq y \leq a, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

9.12 NOTA.- El manejo de estas variaciones será una herramienta muy útil en el capítulo de las INTEGRALES MÚLTIPLES. El único cambio que se presenta en estas variaciones es el signo del jacobiano con respecto a las coordenadas cilíndricas usuales en las que $J(r, \theta, y) = r$.

En efecto, $x = r \cos \theta$, $y = y$, $z = r \sin \theta$,

$$J(r, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r$$

Este detalle no presenta ningún inconveniente en cuanto al cálculo de las INTEGRALES MÚLTIPLES pues ahí lo que se considera es EL VALOR ABSOLUTO DEL JACOBIANO .

10. TRANSFORMACIONES ESFÉRICAS (ρ, θ, ϕ)

La Transformación Esférica está definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} R\theta\Phi & & XYZ \\ T : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \Psi & & \\ (\rho, \theta, \phi) & \mapsto & T(\rho, \theta, \phi) = (x, y, z) \end{array}$$

donde

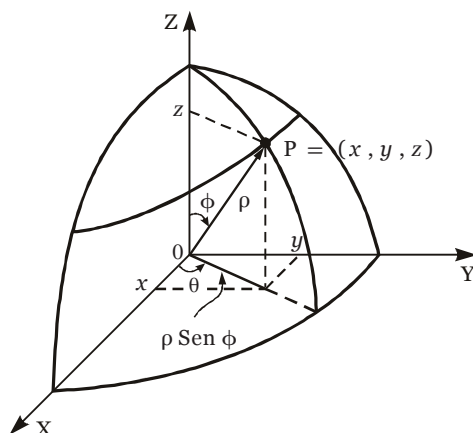
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

de lo que se deduce la relación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$



10.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS COORDENADAS ESFÉRICAS

- Cada terna (ρ, θ, ϕ) de coordenadas esféricas determina un único punto $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$.
- La coordenada esférica ρ mide la **DISTANCIA** del punto P al origen ($\rho \geq 0$).
- La coordenada **esférica** θ es la misma que la coordenada **cilíndrica** (polar) θ y su variación no se ve en el espacio sino en un plano cartesiano (XY) .

Esta coordenada θ recibe el nombre de **LONGITUD** o **ACIMUT** de **P**. Su rango de variación es de 2π radianes:

$$\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi \quad (\alpha \text{ real fijo})$$

- d) La coordenada esférica ϕ es el ángulo entre la dirección positiva del eje Z y el radio vector P . Se le mide a partir del semieje positivo Z^+ y recibe el nombre de **COLATITUD** del punto P .

Al ángulo $(\pi/2 - \phi)$ se le llama la **LATITUD** de **P**.

- e) Cada punto $P = (x, y, z)$ tiene muchas representaciones en coordenadas esféricas.
- f) El rango maximal de variación del ángulo ϕ es: $0 \leq \phi \leq \pi$.
- g) De la definición de las coordenadas esféricas se tiene que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ Sen}^2 \phi, \quad \text{Tan } \theta = \frac{y}{x}.$$

- h) Las variaciones maximales de (ρ, θ, ϕ) , son:

$$\rho \geq 0, \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi \quad (\alpha \text{ fijo}), \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

de modo que

$$\text{Sen } \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho}, \quad \text{Cos } \phi = \frac{z}{\rho}, \quad \text{Tan } \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

10.2 JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN ESFÉRICA (ρ, θ, ϕ)

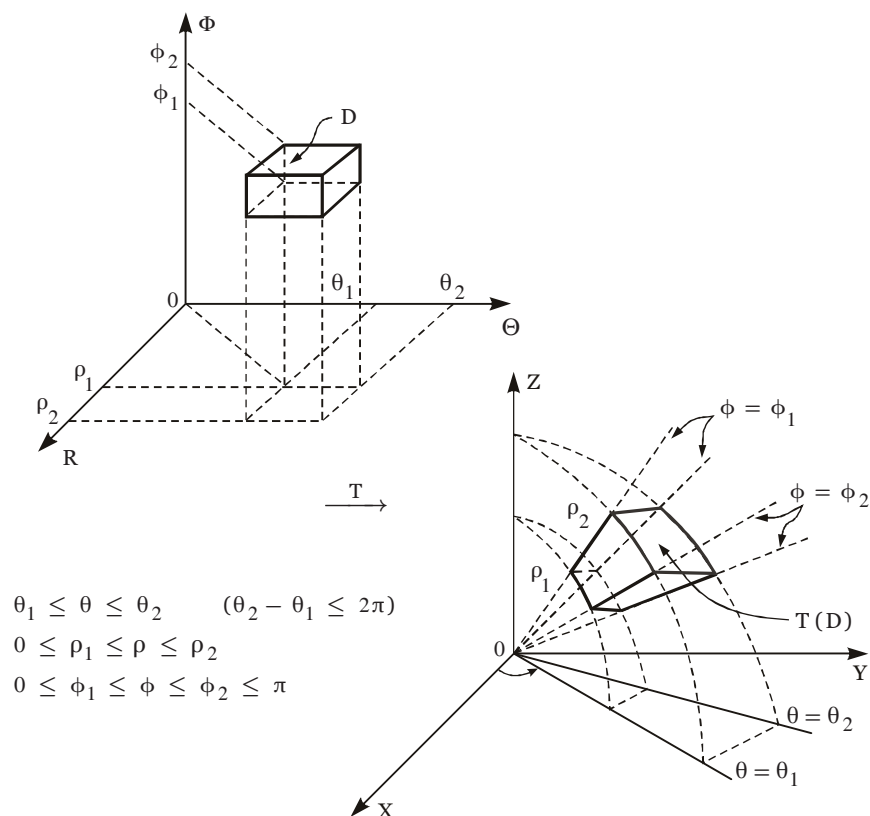
$$x = \rho \text{ Sen } \phi \text{ Cos } \theta, \quad y = \rho \text{ Sen } \phi \text{ Sen } \theta, \quad z = \rho \text{ Cos } \phi$$

$$J(\rho, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Sen } \phi \text{ Cos } \theta & \text{Sen } \phi \text{ Sen } \theta & \text{Cos } \phi \\ -\rho \text{ Sen } \phi \text{ Sen } \theta & \rho \text{ Sen } \phi \text{ Cos } \theta & 0 \\ \rho \text{ Cos } \phi \text{ Cos } \theta & \rho \text{ Cos } \phi \text{ Sen } \theta & -\rho \text{ Sen } \phi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2 \text{ Sen } \phi$$

10.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TRANSFORMACIÓN ESFÉRICA



10.4 PROBLEMA.- Determine las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) son:

- a) $(1, 0, \pi/2)$, b) $(1, \pi/3, 0)$, c) $(2, \pi/2, 3\pi/4)$.

SOLUCIÓN.- $x = \rho \text{ Sen } \phi \text{ Cos } \theta$, $y = \rho \text{ Sen } \phi \text{ Sen } \theta$, $z = \rho \text{ Cos } \phi$

a) $\rho = 1, \theta = 0, \phi = \pi/2$: $x = 1, y = 0, z = 0$

b) $\rho = 1, \theta = \pi/3, \phi = 0$: $x = 0, y = 0, z = 1$

c) $\rho = 2, \theta = \pi/2, \phi = 3\pi/4$: $x = 0, y = 2/\sqrt{2}, z = -2/\sqrt{2}$

10.5 PROBLEMA .- Asigne coordenadas esféricas a los puntos cuyas coordenadas cartesianas x, y, z son:

- a) $(1, 0, 0)$, c) $(0, \sqrt{3}, -1)$, e) $(32, -25, 18)$
 b) $(1, 1, 0)$, d) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$.

SOLUCIÓN.- $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\tan \theta = y/x$, $\cos \phi = z/\rho$.

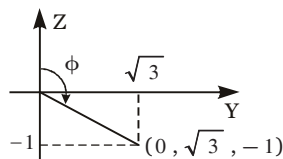
- a) Semieje X^+ : $\rho = 1$, $\tan \theta = y/x = 0$, $\cos \phi = z/\rho = 0$

$$\Rightarrow \theta = 0, \phi = \pi/2 .$$

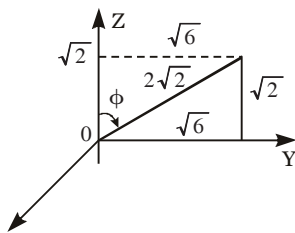
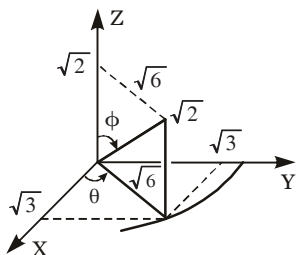
- b) Plano XY : $\phi = \pi/2$, $\rho = \sqrt{2}$, $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$,
 por estar $(1, 1, 0)$ en el Primer cuadrante del plano XY .

- c) Plano YZ^- : $\theta = \pi/2$, $\rho = 2$, $\cos \phi = z/\rho = -1/2$

$$\Rightarrow \phi = 2\pi/3 \\ = 120^\circ$$



- d) $(x, y, z) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$: $\rho = 2\sqrt{2}$; si hacemos girar el punto alrededor del eje Z describimos un arco de circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6}$, sin hacer variar ϕ , hasta llevarlo al plano YZ :



$$\tan \phi = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ ;$$

$$\text{o también : } \cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

pues el rango máximo de variación de ϕ es $0 \leq \phi \leq \pi$; este último método (algebraico) es más rápido, mientras que el anterior es un método geométrico.

Note que $\theta = \pi/4$. ¿Por qué?.

10.6 PROBLEMA.- Interprete geoméricamente en XYZ la ecuación $\rho = 2$ (dada en coordenadas esféricas).

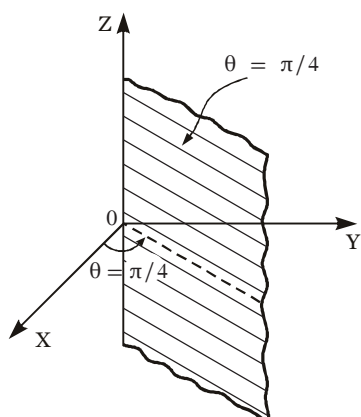
SOLUCIÓN.- Como no hay restricciones para θ (el cual da toda una vuelta) ni para ϕ entonces:

$$\rho = 2 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

que corresponde a la ecuación de una esfera de radio $\rho = 2$ centrada en el origen.

10.7 PROBLEMA.- Dada la ecuación $\theta = \pi/4$ en coordenadas esféricas, interpretarla geoméricamente.

SOLUCIÓN.- La ecuación indica que manteniendo fijo $\theta = \pi/4$ se hace variar todo ρ ($\rho \geq 0$) y todo $\phi \in [0, \pi]$:



La ecuación $\theta = \pi/4$ corresponde al semiplano de la figura, a partir del eje Z , hacia $X^+ Y^+$.

10.8 PROBLEMA.- Interprete la gráfica de la ecuación: $\tan \theta = 1$, dada en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN.- $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\tan \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/4, 5\pi/4.$$

De modo que la gráfica corresponde, en el espacio XYZ , al semiplano de la figura del Problema 10.7 más su prolongación hacia $X^- Y^-$; es decir, corresponde a todo el plano vertical $y = x$.

10.9 PROBLEMA.- Interprete geoméricamente la solución de las ecuaciones

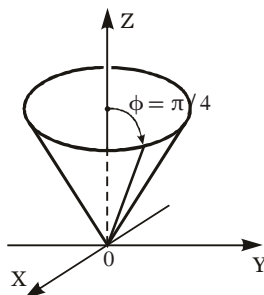
a) $\phi = \pi/4$, b) $\phi = \pi/2$, dadas en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN.- Ambas ecuaciones corresponden a superficies cónicas, pues por ser independientes de θ y ρ , estas varían según sus máximos rangos:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho < \infty$$

a)



- b) Obviamente, $\phi = \pi/2$ corresponde a todo el plano coordenado XY.

Otra forma de obtener los resultados anteriores es como sigue:

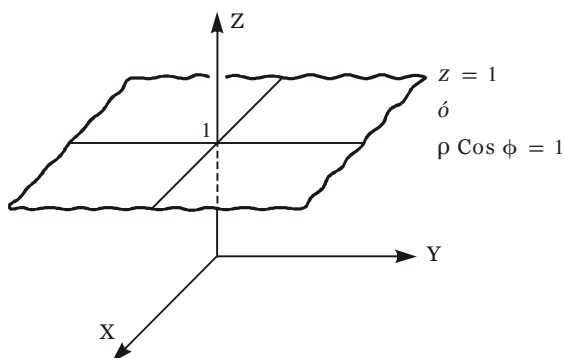
$$\begin{aligned} \text{a) } \phi = \pi/4 &\Rightarrow z = \rho \cos \phi = \rho/\sqrt{2} \geq 0 \\ &\Rightarrow 2z^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad z \geq 0 \\ &\Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ecuación de un cono simple}). \end{aligned}$$

- b) $\phi = \pi/2 \Rightarrow z = \rho \cos \phi = 0 \Rightarrow z = 0$, que corresponde a la ecuación del plano coordenado XY.

10.10 PROBLEMA.- Grafique el conjunto solución en XYZ, de la ecuación

$$\rho \cos \phi = 1, \quad \text{dada en coordenadas esféricas.}$$

SOLUCIÓN.- Como $z = \rho \cos \phi = 1$ el conjunto solución es todo el plano horizontal $z = 1$



10.11 PROBLEMA.- Grafique los conjuntos

$$D = \{ (\rho, \theta, \phi) / \phi = \pi/4, \rho = 1 \}$$

$$T(D) = \{ (x, y, z) / \phi = \pi/4, \rho = 1 \}.$$

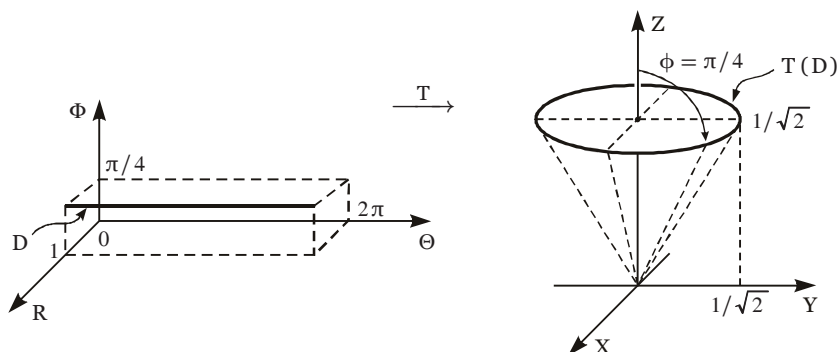
SOLUCIÓN.- Como las ecuaciones son independientes de θ , la gráfica de $T(D)$ rodea al eje Z en toda una vuelta:

Un punto correspondiente a $\theta = \pi/2$ es :

$$x = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Cos} \theta = 1 \cdot \frac{\operatorname{Cos} \theta}{\sqrt{2}} = 0$$

$$y = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Sen} \theta = 1 \cdot \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \rho \operatorname{Cos} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



La gráfica corresponde a una circunferencia horizontal centrada en el eje Z , de radio $1/\sqrt{2}$, a la altura $z = 1/\sqrt{2}$.

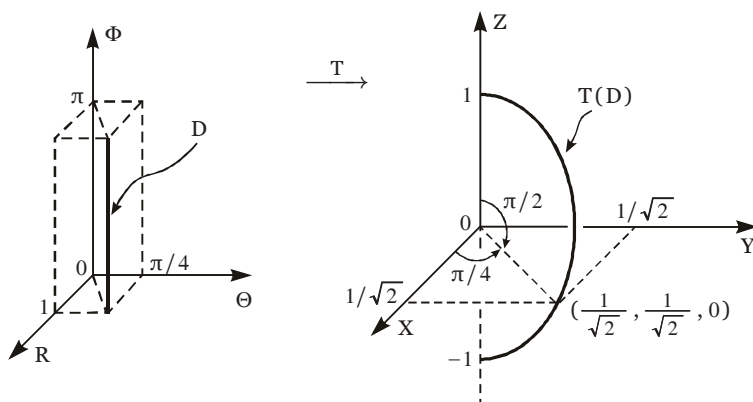
10.12 PROBLEMA.- Grafique los conjuntos $D = \{ (\rho, \theta, \phi) / \theta = \pi/4, \rho = 1 \}$
y $T(D) = \{ (x, y, z) / \theta = \pi/4, \rho = 1 \}$ definidos
mediante coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN.- Como D no depende de ϕ , este varía libremente según $0 \leq \phi \leq \pi$.
Un punto (x, y, z) para $\phi = \pi/2$ en particular es:

$$x = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Cos} \theta = 1(1)(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$$

$$y = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Sen} \theta = 1(1)(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$$

$$z = \rho \operatorname{Cos} \phi = 0$$



La gráfica de $T(D)$ corresponde al arco de la semicircunferencia de la figura.

10.13 PROBLEMA.- Utilizando la transformación esférica grafique los conjuntos

$$D = \{ (\rho, \theta, \phi) / \theta = \pi/3, \phi = \pi/4 \}$$

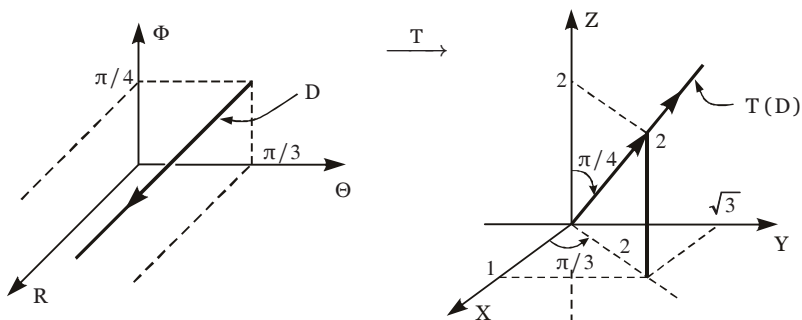
$$\text{y } T(D) = \{ (x, y, z) / \theta = \pi/3, \phi = \pi/4 \}$$

SOLUCIÓN.- La variable ρ recorre todo su dominio : $\rho \geq 0$,

$$x = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Cos} \theta, \quad y = \rho \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Sen} \theta, \quad z = \rho \operatorname{Cos} \phi$$

$$x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\rho\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad z = \frac{\rho}{\sqrt{2}},$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \frac{\rho}{2\sqrt{2}} (1, \sqrt{3}, 2), \quad \forall \rho \geq 0$$

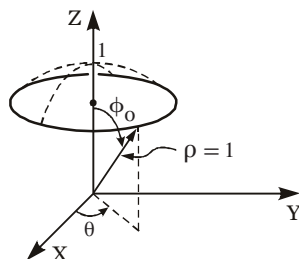


La gráfica de $T(D)$ corresponde al rayo que parte del origen $\bar{0}$ y en la misma dirección y sentido que el vector $(1, \sqrt{3}, 2)$.

10.14 GENERACIÓN DE UNA ESFERA

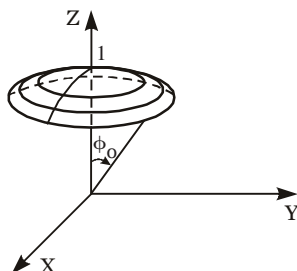
Tomando como referencia los problemas 10.11 y 10.12, generaremos una esfera (cáscara) de radio $\rho = 1$:

- a) Comenzaremos generando una circunferencia con $\rho = 1$, $\phi = \phi_0$ (constante) y haciendo variar θ desde 0 hasta 2π (una vuelta).

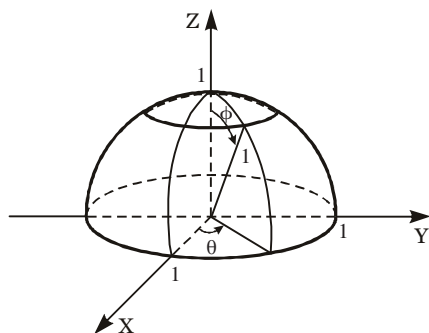


- b) Luego, manteniendo constante $\rho = 1$, hacemos variar ϕ desde $\phi = 0$ (semieje positivo Z^+) hasta $\phi = \phi_0$.

Esto generará circunferencias paralelas más pequeñas que la correspondiente a $\phi = \phi_0$, y conforme ϕ varíe desde 0 hasta $\phi = \phi_0$ estas circunferencias barrerán un casquete esférico como en la figura adyacente (b).



- c) Continuaremos haciendo variar ϕ hasta $\phi = \pi/2$ de modo que las circunferencias generadas con $\rho = 1$ barrerán toda una semiesfera de radio $\rho = 1$.



- d) Evidentemente haciendo variar ϕ desde 0 hasta π , θ desde 0 hasta 2π , y manteniendo constante $\rho = 1$, habremos generado la esfera completa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; es decir:

$$E = \{ (x, y, z) / \rho = 1 \} = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \\ = \{ (x, y, z) / \rho = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi \}.$$

10.15 GENERACIÓN DE UNA BOLA

La bola B cerrada de radio 1 y centrada en el origen 0 está descrita por la ecuación

$$B : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

que equivale a tener esferas de radio $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad (\rho^2 \leq 1)$$

a las que se les hace variar el radio ρ desde 0 hasta 1 ; ello hará que las esferas vayan aumentando de radio barriendo una región sólida, es decir todo el interior más la cáscara de una esfera de radio 1 .

Por lo tanto las variaciones de las coordenadas (ρ, θ, ϕ) que generan una BOLA cerrada B de radio 1 , con centro en el origen de coordenadas, son:

$$\begin{aligned} B &= \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \} \\ &= \{ (x, y, z) / \rho \leq 1 \} \quad (\text{que no depende ni de } \theta \text{ ni de } \phi) \\ &= \{ (x, y, z) / 0 \leq \rho \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi] \}. \end{aligned}$$

10.16 PROBLEMA.- En coordenadas esféricas halle una ecuación para la esfera

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2, \quad a > 0 \quad (*)$$

y encontrar las variaciones de las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) que definen a la región encerrada por dicha esfera.

SOLUCIÓN.- La ecuación rectangular dada $(*)$ es equivalente a :

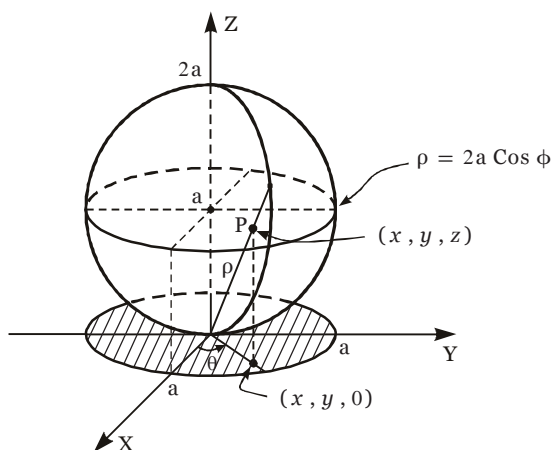
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

$$\rho^2 = 2a \rho \cos \phi \Rightarrow \boxed{\rho = 2a \cos \phi}$$

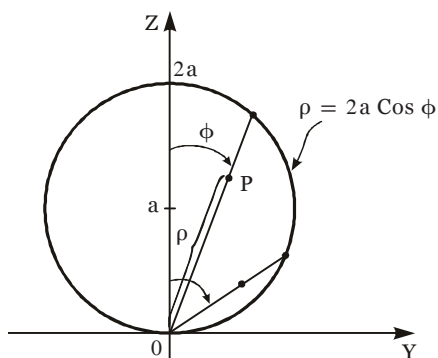
que incluye a $\rho = 0$ como se puede verificar para $\phi = \pi/2$.

Un punto genérico $P = (x, y, z)$ del interior del sólido que se mueve sobre el segmento radial de la figura tiene su distancia ρ variando desde 0 hasta el punto sobre la esfera $\rho = 2a \cos \phi$ según la relación

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \phi.$$



Para ver la variación de ϕ , podemos utilizar la proyección en el plano YZ (haciendo $x = 0$ en la ecuación) de todo el sólido.



Por lo tanto

$$0 \leq \phi \leq \pi/2$$

Otra forma de ver esto es como sigue: los puntos sobre la circunferencia $\rho = 2a \cos \phi$ incluirán al origen $\bar{0}$ al que se le puede considerar como un punto límite en dicha ecuación cuando ρ tiende a cero; entonces, en $\rho = 2a \cos \phi$:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow 0^+ && \text{si y sólo si} \\ \cos \phi &\rightarrow 0^+ && \text{si y sólo si} \\ \phi &\rightarrow \pi/2^- && (\text{por la izquierda}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.