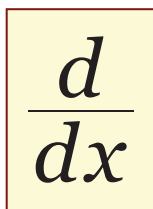


ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

1.^a Edición Digital
2020



J. ARMANDO VENERO B.
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS (U.N.I.)



EDICIONES GEMAR

LIMA

PERÚ

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

Autor: JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN
Estudios de Magíster en **MATEMÁTICAS (P.U.C.P.)**

Dpto. de tipeo, diagramación y diseño
Ana María Vargas Loayza de Venero,
Lic. en Educación (UNMSM)

1.^a Edición Digital, SETIEMBRE 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 202005374

ISBN IMPRESA: 978-612-45216-1-4

ISBN DIGITAL: 978-612-45216-5-2
DPF

978-612-48340-1-1
EPUB

Editado por:

© 2020 Representaciones GEMAR E.I.R.L.

Calle Río Vilcanota 168. COO 27 de abril, Ate - Lima

Teléfono: 446-6176

rep_gemar09@hotmail.com

<https://www.facebook.com/veneromath/>

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin la autorización legal del autor y/o de
REPRESENTACIONES GEMAR E.I.R.L. LIMA – PERÚ.

PRÓLOGO

Como alternativa a la necesidad de contar con un libro que complementa el primer curso de matemáticas universitarias en las especialidades de Ingeniería y Ciencias, es que presentamos esta obra que trata acerca del CÁLCULO DIFERENCIAL. El estudio de este tema es enfocado de dos maneras: teórica y práctica.

La teoría no es tan rigurosa, con ejemplos ilustrativos que explican por sí mismos la importancia de estudiar la teoría con atención y cuidado.

El estudio de este tema presupone conocer, aunque a un nivel elemental, la Lógica Simbólica y la Teoría de Conjuntos, y a un mayor grado las propiedades de los NÚMEROS REALES que se refieren a sus axiomas, a la solución de Ecuaciones e Inecuaciones tanto Lineales como Cuadráticas, las propiedades del Valor Absoluto y del Máximo Entero, así como el Axioma del Supremo. Estas propiedades se pueden encontrar en muchos libros entre los cuales: MATEMÁTICA BÁSICA o INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO de mi autoría. Sin embargo, algunos conceptos y propiedades importantes los presentamos en este libro en un capítulo introductorio denominado Capítulo 0: NÚMEROS REALES.

Los capítulos de esta obra siguen un orden tal que cada uno de ellos depende del anterior en gran medida, razón por la cual aconsejamos al estudiante dedicarse con esmero a cada capítulo, tanto en lo que respecta a su teoría como a sus ejemplos resueltos.

El primer Capítulo titulado RELACIONES está dedicado a la geometría de ciertas gráficas que será sumamente útil en el capítulo siguiente que trata de las Funciones. Se presentan los criterios y técnicas para graficar y reconocer curvas y regiones especiales en el plano cartesiano.

Luego se estudian las FUNCIONES en forma detallada, presentando las técnicas para hallar el dominio y el rango de una función dada, así como para realizar operaciones entre funciones y construir funciones más elaboradas como las FUNCIONES COMPUESTAS y las FUNCIONES INVERSAS.

El tercer Capítulo estudia el concepto de LÍMITE y es el más importante del libro pues constituye la puerta de entrada al universo denominado ANÁLISIS MATEMÁTICO, ya que conceptos posteriores como la Continuidad, la Derivada, la Integral y muchos otros, se definen en base a los

Límites. La presentación de este capítulo es el resumen de mi experiencia docente en la enseñanza de este tema durante varios años.

El cuarto Capítulo acerca de la CONTINUIDAD DE FUNCIONES es corto pero completo y es prácticamente una extensión del anterior.

El quinto Capítulo trata de la DERIVADA de funciones, que es una nueva operación matemática sobre las funciones. Precisamente este concepto así como el de la operación denominada INTEGRACIÓN, dieron un gran impulso a la Ciencia y a la Tecnología.

El sexto capítulo estudia las APLICACIONES DE LA DERIVADA en lo que se refiere principalmente a la Razón de Cambio de una función con respecto a su variable, a las Velocidades, al cálculo de valores Máximos y Mínimos y al trazado de Gráficas de Funciones.

Además, en este sexto capítulo presentamos el MÉTODO DE NEWTON que es una técnica muy sencilla y a la vez impresionante, que requiere al menos de una calculadora con memoria, y se utiliza para calcular las soluciones de aquellas ecuaciones polinómicas y de otros tipos, que resultan imposibles de ser halladas en forma exacta, con el grado de aproximación que uno quiera.

El último capítulo trata de la FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL (Logaritmo Neperiano) y la función EXPONENCIAL, sus definiciones, gráficas, propiedades, sus derivadas y algunas aplicaciones. Incluye los límites logarítmicos y exponenciales, y en esta segunda edición estamos presentando en una forma muy didáctica todas las técnicas para el cálculo de límites que tienen las formas exponenciales indeterminadas:

0^0 , ∞^0 y 1^∞ .

Como una ayuda adicional para el estudiante se presentan series de ejercicios al final de cada capítulo y a continuación sus respectivas claves de respuestas, y con avances de solución de muchos de ellos.

J. ARMANDO VENERO BALDEÓN

CONTENIDO

CAPÍTULO 0	NÚMEROS REALES	1
1	Axiomas de la Relación de Orden	1
2	Ecuaciones	2
3	Ecuaciones Cuadráticas en una variable	3
	Raíces del Trinomio Cuadrático $ax^2 + bx + c$	3
4	Completación de Cuadrados	5
	La técnica de completar cuadrados	7
5	Discriminante de $ax^2 + bx + c$	10
6	Valor Absoluto de un número real	12
CAPÍTULO 1	RELACIONES	16
1	Pares Ordenados, Producto Cartesiano	16
2	Relaciones. Tipos de Relaciones	19
3	Gráficas de Relaciones	26
4	Relaciones Inversas	34
5	Distancia entre dos Puntos	37
6	La recta y sus Ecuaciones	39
7	Rectas Paralelas y Rectas Perpendiculares	43
8	Distancia de un Punto a una Recta	45
9	Ángulo entre dos Rectas	47
10	Gráficas que involucran el Valor Absoluto	49
11	Gráficas de Ecuaciones: Parábolas, Circunferencias	54
12	Criterios generales para graficar ecuaciones	65
13	Serie de ejercicios	71
CAPÍTULO 2	FUNCIONES	74
1	Funciones. Dominio, Rango y Gráfica	74
2	Cálculo de Dominios y Rangos de Funciones	80
3	Funciones Especiales: Identidad, Constante, Escalón Unitario, Signo, Valor Absoluto, Máximo Entero, Raíz Cuadrada, Funciones Cuadráticas, Polinomios, Seno y Coseno	85
4	Evaluación de una Función en un Punto	100
5	Trazado de Gráficas Especiales	108
6	Funciones Pares, Impares y Periódicas	116
7	Álgebra de Funciones: Igualdad de Funciones; Suma,	

	Resta, Multiplicación y Cociente de Funciones	120
8	Composición de Funciones	130
9	Funciones Inversas. Funciones Suryectivas, Inyectivas y Biyectivas. Funciones Inversas	144
10	Funciones Trigonométricas y sus Inversas	178
11	Serie de ejercicios	189
CAPÍTULO 3	LÍMITES	234
1	Introducción	234
2	Vecindades. Entornos. Vecindades reducidas	234
3	Puntos de Acumulación de un conjunto de números reales. Puntos de Acumulación del dominio de una Función	248
4	Límites	251
5	Teoremas sobre Límites y sus aplicaciones	262
6	Límites Laterales. Ilustración geométrica	267
7	Límites de Funciones Compuestas	278
8	Cálculo de Límites	282
9	Límites Trigonométricos	288
10	Límites Infinitos	296
11	Asíntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas	309
12	Serie de ejercicios	314
CAPÍTULO 4	CONTINUIDAD	339
1	Continuidad de una Función en un punto	339
2	Continuidad de una Función sobre un subconjunto de su dominio	344
3	Continuidad por la derecha; continuidad por la izquierda en un punto	348
4	Clases de Discontinuidades. Extensión continua	350
5	Teoremas sobre Continuidad	353
6	Continuidad de Funciones especiales	356
7	Problemas resueltos	359
8	Teoremas Especiales sobre funciones Continuas: Teorema del Valor Intermedio. Teorema del Cero	362
9	Funciones acotadas. Teorema Fundamental de las Funciones continuas. Teorema de los Valores Extremos Absolutos	366
10	Serie de ejercicios	374
CAPÍTULO 5	LA DERIVADA	389
1	Recta tangente a la gráfica de una Función	389
2	La Derivada de una Función. Funciones Diferenciables	392
3	Diferenciación de funciones especiales	396
4	Teoremas sobre Derivadas	397

5	La Derivada de una Función Compuesta	403
6	Problemas resueltos	412
7	Derivadas Laterales	414
8	Funciones no diferenciables	417
9	Diferenciabilidad y Continuidad	423
10	Tópicos sobre Análisis de la Diferenciabilidad	425
11	Derivadas de orden superior	436
12	Diferenciación implícita	438
13	Diferenciales. Error Relativo y Error Porcentual	441
14	Razón de cambio instantáneo. Velocidad Instantánea	449
15	Representación paramétrica de curvas. Derivadas	457
16	Trazado de Curvas Paramétricas. Criterios	466
17	Serie de ejercicios	474
CAPÍTULO 6	APLICACIONES DE LA DERIVADA	511
1	Valores Extremos de una Función	511
2	El Teorema de Rolle. El Teorema del Valor Medio	513
3	Teorema Generalizado del valor Medio. Reglas de L'Hospital	518
4	Funciones crecientes. Funciones decrecientes	525
5	Aplicaciones del Teorema del Valor Medio	532
6	Puntos Críticos de una función en un intervalo	539
7	Criterio de la Primera Derivada. Criterio de la Segunda Derivada	544
8	Concavidad. Puntos de inflexión	556
9	Aplicaciones al trazado de curvas	563
10	Derivada de la Función Inversa	569
11	Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas	573
12	Serie de ejercicios	584
13	Evaluación de Polinomios con calculadoras de bolsillo	653
14	Aproximaciones Sucesivas. Método de Newton	654
CAPÍTULO 7	LOGARITMO Y EXPONENCIAL	670
1	La Función Logaritmo (Natural)	670
2	Propiedades de la Función Logaritmo	672
3	El Número e. Un estimado de su Valor Numérico	675
4	Derivación Logarítmica	689
5	Cálculo de Límites Logarítmicos	690
6	La Función Exponencial (Natural)	697
7	Límites Exponenciales (Naturales) y Gráficas	716
8	Gráficas de Funciones Exponenciales	722
9	Algunos Límites Especiales	738
10	Derivadas de Funciones Exponenciales Generalizadas	740
11	Límites de Funciones Exponenciales Generalizadas Serie de ejercicios	741 749

*“La conciencia es como un vaso ;
si no está limpio el vaso ...
resultará sucio todo lo que
entre en él.”*

Horacio

0

NÚMEROS REALES

1. AXIOMAS DE LA RELACIÓN DE ORDEN

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

01. LEY DE TRICOTOMÍA: Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solamente una de las relaciones :

$$a < b, \quad a = b \quad \text{ó} \quad a > b.$$

02. LEY TRANSITIVA:

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

03. LEY DE LA ADICIÓN Y CANCELACIÓN: Para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$$

" El sentido de la desigualdad no cambia si a ambos miembros se le suma (o se le resta) un mismo número real c "

04. LEY DE LA MULTIPLICACIÓN:

i) Si $c > 0$:

$$a < b \Rightarrow (ac) < (bc)$$

ii) Si $c < 0$:

$$a < b \Rightarrow (ac) > (bc)$$

❖ El sentido de la desigualdad no cambia si se multiplica a ambos miembros por un mismo número **positivo**.

- ❖ La desigualdad cambia de sentido si se multiplica ambos miembros por una misma cantidad **negativa**.

EJEMPLOS: $x < 5 \Rightarrow -2x > -10$

$$x < 5 \Rightarrow 3x < 15$$

2. ECUACIONES EQUIVALENTES

Se llaman **ECUACIONES EQUIVALENTES** a aquellas que tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones.

Por ejemplo, las ecuaciones $x^2 - 6x = 0$ y $(x - 3)^2 = 9$ tienen ambas exactamente dos soluciones: $x = 0$ y $x = 6$, (y ninguna otra).

2.1 OPERACIONES QUE ORIGINAN ECUACIONES EQUIVALENTES

- Sumar el mismo número o expresión a ambos miembros.
- Restar el mismo número o expresión a ambos miembros.
- Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma CONSTANTE NO NULA.
- Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma expresión que depende de una variable, para aquellos valores de la variable que NO PERMITAN que la expresión tome el VALOR CERO, y siempre que no origine soluciones extrañas ni que se pierdan algunas soluciones de la ecuación original.

2.2 NOTA.- RESOLVER UNA ECUACIÓN significa que se deben realizar sucesivamente las mismas operaciones (permitidas) en ambos miembros con el objetivo de dejar la incógnita sola en uno de los miembros. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 6x - 11 &= 2x + 9 && \text{(b)} \\ \Rightarrow 6x - 11 - 2x &= 2x + 9 - 2x \\ \Rightarrow 4x - 11 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \\ \Rightarrow 4x - 11 + 11 &= 9 + 11 \\ \Rightarrow 4x &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(c)} \\ \Rightarrow \frac{1}{4}(4x) &= \frac{1}{4}(20) \Rightarrow \boxed{x = 5} \end{aligned}$$

3. ECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA VARIABLE:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (*)$$

donde $a \neq 0$, b y c son constantes reales.

La resolución de la ecuación $(*)$ puede realizarse ya sea FACTORIZANDO o COMPLETANDO CUADRADOS, métodos basados en los siguientes teoremas.

3.1 TEOREMA I.- Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$:

$$a^2 = b \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{b}$$

Por ejemplo:

$$1) \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4 \quad (\text{dos soluciones})$$

$$2) \quad (x - 5)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x - 5 = \pm \sqrt{36}$$

$$x - 5 = \pm 6$$

$$\therefore \quad x = 11, \quad x = -1 \quad (\text{dos soluciones}).$$

$$3) \quad (2x + 1)^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = -1 \pm \sqrt{7}$$

$$(\text{dos soluciones}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{7}).$$

$$4) \quad 2(x - 3)^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 = 5/2$$

$$\Rightarrow \quad x - 3 = \pm \sqrt{5/2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{5/2}$$

5) La ecuación $(3x - 5)^2 = -4$ NO TIENE SOLUCIÓN EN $\mathbb{R}$, pues en este campo de números un cuadrado toma valor POSITIVO o CERO solamente y en ningún caso podrá tomar el valor: -4 .

Cabe indicar que esta ecuación sí tiene soluciones en el campo de los NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$, a saber:

$$x = (5 \pm 2i)/3, \quad \text{donde} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{es la unidad imaginaria.}$$

3.2 TEOREMA II.- Si $a, b \in \mathbb{R}$:

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

El conectivo lógico $\vee$ se lee "o" en el sentido inclusivo de "y/o" y se emplea para indicar **LA REUNIÓN** de las soluciones de la ecuación $a = 0$ con las de la ecuación $b = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 35 = 0 &\Leftrightarrow (x - 5)(x - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 5 = 0) \vee (x - 7 = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 5) \vee (x = 7) . \end{aligned}$$

Resolver UNA ecuación complicada de segundo grado equivale a resolver DOS ecuaciones sencillas de primer grado. Esto es un procedimiento usual en el campo de las matemáticas, en general, y se consigue por factorización.

Este teorema se extiende a productos de tres o más factores:

$$abc = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0) \vee (c = 0) .$$

3.3 TEOREMA III.-

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

En efecto, $a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0$,

$$\begin{aligned} (4x - 1)^2 &= (3x + 15)^2 \Leftrightarrow 4x - 1 = \pm (3x + 15) \\ &\Leftrightarrow [4x - 1 = 3x + 15] \vee [4x - 1 = -(3x + 15)] \\ &\Leftrightarrow [x = 16] \vee [7x = -14] \\ &\Leftrightarrow [x = 16] \vee [x = -2] \end{aligned}$$

3.4**RAÍCES DEL TRINOMIO CUADRÁTICO** $ax^2 + bx + c$

Son aquellos valores particulares de la variable x que hacen que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tome el valor CERO.

Por ejemplo, hallaremos varios valores de $x^2 + 2x - 8$:

$$\diamond \text{ Si } x = 1 : 1^2 + 2(1) - 8 = -5$$

$$\diamond \text{ Si } \boxed{x = 2} : 2^2 + 2(2) - 8 = \boxed{0}$$

$$\diamond \text{ Si } x = -3 : (-3)^2 + 2(-3) - 8 = -5$$

$$\diamond \text{ Si } x = 0 : 0^2 + 2(0) - 8 = -8$$

$$\diamond \text{ Si } \boxed{x = -4} : (-4)^2 + 2(-4) - 8 = \boxed{0}$$

Así resulta que $\boxed{x = 2}$ y $\boxed{x = -4}$ son **RAÍCES** del trinomio cuadrático $x^2 + 2x - 8$.

3.5 SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $ax^2 + bx + c = 0$

Si la ecuación tiene su segundo miembro igual a CERO, entonces se llaman **SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $ax^2 + bx + c = 0$** a las

RAÍCES DEL PRIMER MIEMBRO $ax^2 + bx + c$.

Así, las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ son las raíces del primer miembro $x^2 + 2x - 8$, es decir $x = 2$ y $x = -4$.

4. COMPLETACIÓN DE CUADRADOS

Es un procedimiento algebraico que consiste de transformar la expresión cuadrática EN FORMA EQUIVALENTE como

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - h)^2 + k$$

donde h y k son constantes reales que pueden tomar valores positivos, negativos o cero. Se le reconoce porque la variable x aparece una sola vez. Por ejemplo,

$$(1) \quad 2x^2 - 12x + 13 \equiv 2(x - 3)^2 - 5$$

$$(2) \quad x^2 + 2x - 8 \equiv (x + 1)^2 - 9$$

$$(3) \quad -3x^2 + 12x - 14 \equiv -3(x - 2)^2 - 2$$

$$(4) \quad 2x^2 - 4x + 7 \equiv 2(x - 1)^2 + 5$$

$$(5) \quad 5x^2 - 20x + 20 \equiv 5(x - 2)^2$$

$$(6) \quad -x^2 + 6x + 16 \equiv -(x - 3)^2 + 25$$

$$(7) \quad 7x^2 - 5 \equiv 7x^2 - 5$$

La completación de cuadrados es muy importante en varios aspectos. En particular casi de inmediato te proporciona las raíces reales de cualquier trinomio cuadrático:

$$\text{LAS RAÍCES DE :} \quad 2(x - 3)^2 - 5$$

$$\text{SON LAS SOLUCIONES DE :} \quad 2(x - 3)^2 - 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 5/2$$

$$x - 3 = \pm \sqrt{5/2} \quad \dots \text{TEOR. (I) [3.1]}$$

$$\text{es decir,} \quad x = 3 \pm \sqrt{5/2}.$$

Estas dos SOLUCIONES de la ecuación $2(x - 3)^2 - 5 = 0$ son las dos RAÍCES del trinomio $2(x - 3)^2 - 5$.

Es decir, para hallar las raíces de $2(x - 3)^2 - 5$, mentalmente (imaginariamente) haces aparecer a su derecha la expresión $= 0$ y procedes a hallarlas como acabamos de hacer.

4.1 NOTA.- Ya puedes darte cuenta de que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ cuando está presentado en la forma $a(x - h)^2 + k$:

i) **TIENE DOS RAÍCES REALES DISTINTAS SI LOS NÚMEROS a y k TIENEN SIGNOS OPUESTOS** como en los trinomios cuadráticos (1), (2), (6) y (7):

$$(x + 1)^2 - 9, \quad \text{raíces:} \quad x = -1 \pm 3$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, \quad x = -4$$

$$-(x - 3)^2 + 25, \quad \text{raíces:} \quad x = 3 \pm 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 8, \quad x = -2$$

$$7x^2 - 5, \quad \text{raíces} \quad x = \pm \sqrt{5/7}.$$

ii) **TIENE UNA ÚNICA RAÍZ REAL** (repetida) **SI $k = 0$** como en el trinomio (5) :

$5(x - 2)^2$ cuya raíz es $x = 2$ del cual también se dice que es una raíz de MULTIPLICIDAD DOS, es decir, repetida.

iii) **NO TIENE NINGUNA RAÍZ REAL SI LOS NÚMEROS a y k TIENEN EL MISMO SIGNO**, ambos positivos o ambos negativos. Ver los trinomios cuadráticos (3) y (4)

$$-3(x - 2)^2 - 2, \quad 2(x - 1)^2 + 5$$

(Ellos tienen raíces COMPLEJAS IMAGINARIAS).

En este último caso, debido a que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ NO SE HACE CERO NUNCA EN $\mathbb{R}$, entonces o toma solamente valores positivos o solamente valores negativos, en $\mathbb{R}$:

(iii) [1]. Si $a > 0$: $ax^2 + bx + c > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(iii) [2]. Si $a < 0$: $ax^2 + bx + c < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A los trinomios cuadráticos de este tipo se les conoce también como TRINOMIOS CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES en $\mathbb{R}$, o EXPRESIONES CUADRÁTICAS IRREDUCIBLES en $\mathbb{R}$, como $-3x^2 + 12x - 16 \equiv -3(x - 2)^2 - 4$ que no tiene raíces reales y cuyo valor es SIEMPRE NEGATIVO, para cualquier $x \in \mathbb{R}$

4.2

LA TÉCNICA DE COMPLETAR CUADRADOS

FUNDAMENTO : $x^2 + 2ax + a^2 \equiv (x + a)^2$

$$x^2 - 2ax + a^2 \equiv (x - a)^2$$

$$\begin{aligned} x^2 \pm 2ax &\equiv \underbrace{x^2 \pm 2ax + \boxed{a^2}}_{(x \pm a)^2} - \boxed{a^2} \\ &\equiv (x \pm a)^2 - a^2. \end{aligned}$$

" A LA EXPRESIÓN $\boxed{x^2 \pm 2ax}$ LE SUMAS Y LE RESTAS, EN ESE ORDEN, EL CUADRADO $\boxed{a^2}$ DE LA MITAD $\boxed{a}$ DEL COEFICIENTE $\boxed{2a}$ DEL TÉRMINO EN x . ENTONCES, LOS TRES PRIMEROS SUMANDOS CONSTITUYEN EL CUADRADO DEL BINOMIO $(x + a)^2$ O DE $(x - a)^2$, RESPECTIVAMENTE "

CASO 1

$$\begin{aligned}x^2 - bx &\equiv x^2 - bx + (b/2)^2 - (b/2)^2 \\ &\equiv \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + bx &\equiv x^2 + bx + (b/2)^2 - (b/2)^2 \\ &\equiv \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

AL COEFICIENTE **b** DE x LE TOMAS LA MITAD : **b/2** Y LO COLOCAS, **CON SU SIGNO**, DENTRO DE CADA UNO DE LOS DOS CUADRADOS. EL SEGUNDO CUADRADO SIEMPRE APARECE RESTANDO.

$$x^2 - 8x \equiv x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 \equiv (x - 4)^2 - 16$$

$$x^2 + 5x \equiv x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \equiv \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$x^2 - 8x + 3 \equiv [(x - 4)^2 - 4^2] + 3 \equiv (x - 4)^2 - 13$$

CASO 2

$$x^2 + bx + c \equiv \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2 - bx + c \equiv \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

COMPLETAS CUADRADOS SOLAMENTE A LOS DOS PRIMEROS SUMANDOS COMO EN EL CASO 1.

$$1) \quad x^2 + 4x - 7 \equiv (x + 2)^2 - (2)^2 - 7 \equiv (x + 2)^2 - 11$$

TIENE DOS RAÍCES REALES $x = -2 \pm \sqrt{11}$.

$$2) \quad x^2 - 9x + 5 \equiv \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 5 \equiv \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{61}{4}$$

TIENE DOS RAÍCES REALES $x = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{61}}{2} = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{61})$.

$$3) \quad x^2 - 3x + 4 \equiv \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \equiv \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

NO TIENE RAÍCES REALES.

$$4) \quad x^2 + 12x + 36 \equiv (x + 6)^2 - 6^2 + 36 \equiv (x + 6)^2$$

[ya era un cuadrado perfecto], TIENE UNA ÚNICA RAÍZ $x = -6$.

CASO 3

$$\begin{aligned} ax^2 \pm bx + c &\equiv a \left[x^2 \pm \frac{b}{a}x \right] + c \\ &\equiv a \left[\left(x \pm \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \end{aligned}$$

FACTORIZAS EL COEFICIENTE a SOLAMENTE EN LOS DOS PRIMEROS SUMANDOS QUE CONTIENEN A LA VARIABLE x .

LUEGO, DENTRO DEL CORCHETE , APLICAS LA TÉCNICA DEL CASO 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad 2x^2 + 8x + 5 &\equiv 2 \left[x^2 + 4x + \square - \square \right] + 5 \\ &\equiv 2 \left[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 \right] + 5 \\ (\text{CASO 1}) &\equiv 2 \left[(x + 2)^2 - 2^2 \right] + 5 \\ &\equiv 2(x + 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

tiene dos raíces reales: $x = -2 \pm \sqrt{3/2}$.

$$\begin{aligned} 2) \quad 3x^2 - 7x + 2 &\equiv 3 \left[x^2 - \frac{7}{3}x \right] + 2 \\ (\text{CASO 1}) &\equiv 3 \left[\left(x - \frac{7}{6} \right)^2 - \left(\frac{7}{6} \right)^2 \right] + 2 \\ &\equiv 3 \left(x - \frac{7}{6} \right)^2 - \frac{49}{12} + 2 \\ &\equiv 3 \left(x - \frac{7}{6} \right)^2 - \frac{25}{12} \end{aligned}$$

tiene dos raíces reales: $x = \frac{7}{6} \pm \frac{5}{6}$ es decir $x = 2$, $x = 1/3$.

$$\begin{aligned} 3) \quad -x^2 - 5x + 3 &\equiv - \left[x^2 + 5x \right] + 3 \\ &\equiv - \left[\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] + 3 \\ &\equiv - \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{4} + 3 \equiv - \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{37}{4} \end{aligned}$$

tiene dos raíces reales: $x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{37})$.

$$\begin{aligned}
 4) \quad -4x^2 + 5x - 2 &\equiv -4 \left[x^2 - \frac{5}{4}x \right] - 2 \\
 &\equiv -4 \left[\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \right] - 2 \\
 &\equiv -4 \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{25}{16} - 2 \\
 &\equiv -4 \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{7}{16} \quad \dots \text{NO TIENE RAÍCES REALES.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad -25x^2 + 20x - 4 &\equiv -25 \left[x^2 - \frac{20}{25}x \right] - 4 \\
 &\equiv -25 \left[x^2 - \frac{4}{5}x \right] - 4 \\
 &\equiv -25 \left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right] - 4 \\
 &\equiv -25 \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 4 - 4 \\
 &\equiv -25 \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 \quad \text{¡ cuadrado perfecto !} \\
 &\quad \text{TIENE UNA ÚNICA RAÍZ: } x = 2/5 \text{ (de multiplicidad dos).}
 \end{aligned}$$

5. DISCRIMINANTE DE $ax^2 + bx + c$

En la fórmula de las raíces del trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$:

$$(*) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R},$$

se llama DISCRIMINANTE a la cantidad subradical $\Delta = b^2 - 4ac$.

CASO I. Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces $ax^2 + bx + c$ tiene DOS RAICES

REALES DISTINTAS $x_1 \neq x_2$. En tal caso se puede factorizar con dos factores de grado uno, en $\mathbb{R}$, de la forma

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Por ejemplo: $2x^2 + 5x - 12$ tiene DISCRIMINANTE $b^2 - 4ac = 5^2 - 4(2)(-12) = 121$ > 0 , entonces tiene dos raíces reales distintas;

$$\begin{aligned} \text{en efecto, } 2x^2 + 5x - 12 &= (2x - 3)(x - 4) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 4) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 3/2, x_2 = -4$, son sus dos raíces reales distintas.

CASO II.

Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces $ax^2 + bx + c$ tiene DOS RAÍCES REALES IGUALES $x_1 = x_2$, es decir tiene UNA ÚNICA RAÍZ REAL DE MULTIPLICIDAD DOS (es decir, repetida).

En tal caso, tenemos un CUADRADO PERFECTO en $\mathbb{R}$, de la forma

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Por ejemplo, } 3x^2 - 30x + 75 &\Rightarrow b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(3)(75) \\ &= 900 - 3(300) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ tiene una única raíz real repetida; en efecto

$$\begin{aligned} 3x^2 - 30x + 75 &= 3(x^2 - 10x + 25) \\ &= 3(x - 5)^2 \end{aligned}$$

que tiene como única raíz $x_1 = x_2 = 5$.

CASO III.

Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $ax^2 + bx + c$ NO TIENE NINGUNA RAÍZ REAL, y no se podrá factorizar con dos factores de grado uno, en $\mathbb{R}$. Por esta razón a estas expresiones cuadráticas

se les denomina **IRREDUCIBLES EN $\mathbb{R}$** . Y como $ax^2 + bx + c$ no se hace cero para ningún $x \in \mathbb{R}$, entonces:

O toma valores positivos solamente o toma valores negativos solamente **para todo x en $\mathbb{R}$** . Así,

i) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ entonces $ax^2 + bx + c > 0$
... es **POSITIVO** para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

ii) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0$
... es **NEGATIVO** para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, para $-x^2 + 2x - 3$: $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-3)$
 $= -8 < 0$

$\Rightarrow -x^2 + 2x - 3$ NO tiene ninguna raíz real. Y se cumple que
 $-x^2 + 2x - 3$ es siempre **NEGATIVO**, para todo $x \in \mathbb{R}$,
pues $a = -1$ (negativo).

PROBLEMA.- Halle el conjunto de valores de K para los cuales el trinomio cuadrático $(K + 6)x^2 + (K - 2)x + 1$ **no tiene** soluciones reales.

SOLUCIÓN.- Ello ocurre si el discriminante es negativo:

$$\begin{aligned}(K - 2)^2 - 4(K + 6) < 0 &\Rightarrow K^2 - 4K + 4 - 4K - 24 < 0 \\ K^2 - 8K - 20 &< 0 \\ (K - 10)(K + 2) &< 0\end{aligned}$$

$$\therefore K \in \langle -2, 10 \rangle.$$

6. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0 \\ -u, & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

$|u|$ = Valor Absoluto de u es un número no negativo, siempre.

6.1 TEOREMA.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 1) \quad |a| = |b| &\Leftrightarrow \boxed{a = \pm b} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{a = b} \vee \boxed{a = -b} \\
 &\quad \text{(reunido con)}
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{Si } b \geq 0 : \quad \boxed{|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \text{Si } b \geq 0 : \quad |a| \leq b &\Leftrightarrow \boxed{-b \leq a \leq b} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{-b \leq a} \wedge \boxed{a \leq b} \\
 &\quad \text{(intersectado con)}
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{Si } b > 0 : \quad |a| < b \Leftrightarrow \boxed{-b < a < b}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \text{Si } b \geq 0 : \quad |a| \geq b &\Leftrightarrow \boxed{a \geq b \vee a \leq -b} \\
 &\quad \text{(reunido con)}
 \end{aligned}$$

$$6) \quad \text{Si } b \geq 0 : \quad |a| > b \Leftrightarrow \boxed{a > b \vee a < -b}$$

$$7) \quad \boxed{|a| < |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) < 0}$$

6.2 TEOREMA.- Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$1) \quad \text{Si } n \text{ es ENTERO POSITIVO PAR :} \quad \boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$$

$$2) \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^4} = |a|$$

6.3 TEOREMA.- Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$1) \quad \text{Si } n \text{ es ENTERO POSITIVO IMPAR :} \quad \boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$$

$$2) \quad \sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[5]{a^5} = a$$

6.4 NOTA .- Si la potencia n está afuera de la expresión radical **no interviene el valor absoluto**, sea n par o impar.

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}, \text{ para todo ENTERO POSITIVO } n, \text{ par o impar.}$$

6.5 COROLARIO.- Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$(1) \quad \boxed{\sqrt{a^2} = a} \quad , \quad \text{si } a \geq 0 .$$

$$(2) \quad \boxed{\sqrt{a^2} = -a} \quad , \quad \text{si } a \leq 0 .$$

EJEMPLO.- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 + x^2} &= \sqrt{x^2(x^2 + 1)} \\ &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \\ &= -x \sqrt{x^2 + 1} . \end{aligned}$$

6.6 TEOREMA.- Sean a y b números reales,

$$(1) \quad a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$$(2) \quad a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$(3) \quad \boxed{\sqrt{a} = b \Leftrightarrow (a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \wedge [a = b^2]}$$

NOTA.- En las ecuaciones con radicales del tipo [3] lo recomendable es comprobar cada una de las soluciones halladas al elevar al cuadrado, en la ecuación original.

EJEMPLO.- Resolver: $\sqrt{x^2 - 2x} = 3x$. Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 9x^2 \Rightarrow 8x^2 = -2x \\ &\Rightarrow x(4x + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \quad , \quad x = -1/4 \quad \text{se descarta en la ecuación original .}$$

$$(4) \quad \boxed{\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow (a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \wedge [a \leq b^2]}$$

EJEMPLO.- $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 3x \Leftrightarrow$

$$(x^2 - 2x) \geq 0 \wedge 3x \geq 0 \wedge x^2 - 2x \leq 9x^2$$

$$\text{[donde } 8x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(4x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1/4 \rangle \cup [0, \infty) \text{]}$$

$$\Leftrightarrow x \in (\langle -\infty, 0 \rangle \cup [2, \infty)) \cap [0, \infty) \cap (\langle -\infty, -1/4 \rangle \cup [0, \infty))$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0\} \cup [2, \infty) = \text{C.S.}$$

$$(5) \quad \boxed{\sqrt{a} \geq b} \Leftrightarrow \boxed{(a \geq 0) \wedge [(b < 0) \vee \{(b \geq 0) \wedge (a \geq b^2)\}]}]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{[(b < 0) \wedge (a \geq 0)] \vee [(b \geq 0) \wedge (a \geq 0) \wedge (a \geq b^2)]}$$

$$\text{EJEMPLO: } \sqrt{x^2 - 2x} \geq 3x \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 2x \geq 0) \wedge [(3x < 0) \vee \{(3x \geq 0) \wedge (x^2 - 2x \geq 9x^2)\}] \Leftrightarrow$$

$$x \in (\langle -\infty, 0 \rangle \cup [2, \infty)) \cap [\langle -\infty, 0 \rangle \cup \{[0, \infty) \cap [-1/4, 0]\}]$$

$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 0 \rangle = \text{C.S.}$$

6.7 TEOREMA.- Si a y $b \in \mathbb{R}^+$, ambos positivos,

$$(1) \quad -a \leq x \leq b \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq \max\{|a|; |b|\}$$

$$(2) \quad -a \leq x \leq b \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \max\{a^2; b^2\}$$

$$(3) \quad 0 \leq a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

$$(4) \quad 0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

1

RELACIONES

1. PARES ORDENADOS. PRODUCTO CARTESIANO

Los **PARES ORDENADOS** son entes matemáticos que consisten de dos elementos a y b, denominados **PRIMERA COMPONENTE** y **SEGUNDA COMPONENTE** respectivamente, y se les denota por el símbolo : (a, b) .

DEFINICIÓN FORMAL.- En términos de conjuntos, el PAR ORDENADO (a, b) se define como el conjunto:

$$(a, b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}.$$

1.1 IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

Dados dos pares ordenados (a, b) y (c, d) , entonces

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

Para la prueba se utiliza la Definición Formal, considerando los dos casos:

i) $a = b$, ii) $a \neq b$.

1.2 NOTA: De (1.1) tenemos que: **DOS PARES ORDENADOS son iguales** si y sólo si sus primeras componentes son iguales entre sí, y sus segundas componentes también son iguales entre sí.

1.3 EJEMPLOS .-

- a) $(2, 3)$ y $(3, 2)$ no son pares ordenados iguales.
- b) $(6, 3)$ y $(6, 9)$ tampoco son pares ordenados iguales, pues difieren en la segunda componente.

b) Si $(2x + y, 1) = (3, 2x - y)$ entonces se cumple el sistema de ecuaciones

$$\text{simultáneas: } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 1 = 2x - y \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, \quad y = 1$$

1.4 PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$

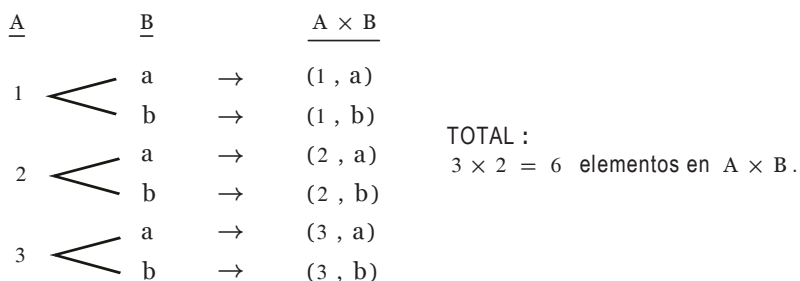
Dados dos conjuntos no vacíos A y B se define el PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$ como el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{ (a, b) / a \in A \text{ y } b \in B \},$$

tales que su primera componente está en el conjunto A , y su segunda componente en el conjunto B .

1.5 EJEMPLO.- Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, entonces

$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$, cuyos elementos pudieron haberse distribuido en un DIAGRAMA DE ÁRBOL:



1.6 NOTA.- En general, si los conjuntos A y B son finitos con m y n elementos respectivamente, entonces el Producto Cartesiano $A \times B$ tiene $m \times n$ elementos. De aquí proviene su nombre y su notación.

El concepto de producto Cartesiano se puede extender a más de dos conjuntos no vacíos:

$$A \times B \times C = \{ (a, b, c) / a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \}$$

surgiendo así el concepto de **Terna Ordenada**:

$$(a, b, c) = \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$$

1.7 EJEMPLO.- Si $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{r, s\} \Rightarrow$

<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>$A \times B \times C$</u>	
a	1	r	(a, 1, r)	Total: $2 \times 2 \times 2 = 8$ elementos.
		s	(a, 1, s)	
	2	r	(a, 2, r)	
		s	(a, 2, s)	
b	1	r	(b, 1, r)	
		s	(b, 1, s)	
	2	r	(b, 2, r)	
		s	(b, 2, s)	

En general, el producto cartesiano no es conmutativo; es decir

$$A \times B \neq B \times A, \quad \text{a menos que } A = B.$$

1.8 EJEMPLO.- Si $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ entonces $A \times B = \{(1, 2)\}$,
mientras que $B \times A = \{(2, 1)\}$.

1.9 EJEMPLO.- Demuestre que:

$$1) \quad M \subset A \quad \wedge \quad N \subset B \quad \Rightarrow \quad M \times N \subset A \times B$$

$$2) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$3) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

SOLUCIÓN :

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{Sea } (x, y) \in M \times N &\Rightarrow x \in M \quad \wedge \quad y \in N \\ &\Rightarrow x \in A \quad \wedge \quad y \in B \quad \text{por hipótesis} \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times B \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M \times N \subset A \times B$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{Sea } (x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad y \in (B \cap C) \Leftrightarrow \\ &x \in A \quad \wedge \quad (y \in B \quad \wedge \quad y \in C) \Leftrightarrow \\ &(x \in A \quad \wedge \quad x \in A) \quad \wedge \quad y \in B \quad \wedge \quad y \in C \Leftrightarrow \\ &(a \in A \quad \wedge \quad b \in B) \quad \wedge \quad (a \in A \quad \wedge \quad b \in C) \Leftrightarrow \\ (x, y) \in A \times B \quad \wedge \quad (x, y) \in A \times C &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

3. EJERCICIO.

1.10 PROBLEMA .- Demuestre que

$$(A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B') .$$

SOLUCIÓN .- Sea

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \times B)' &\Leftrightarrow (a, b) \notin A \times B \Leftrightarrow \sim [(a, b) \in A \times B] \\ &\equiv \sim [a \in A \wedge b \in B] \equiv \sim(a \in A) \vee \sim(b \in B) \equiv \\ &[\sim(a \in A) \wedge (b \in B \vee b \in B')] \vee [(a \in A \vee a \in A') \wedge \sim(b \in B)] \\ &(\text{pues } p \equiv p \wedge V) , \\ &\equiv (a \in A' \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in B') \vee (a \in A' \wedge b \in B') \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B') . \end{aligned}$$

1.12 **NOTA .-** Al Producto Cartesiano $A \times A$ también se le representa por A^2 .**2. RELACIONES. TIPOS DE RELACIONES**

Dados dos conjuntos no vacíos A y B , a un conjunto $\mathcal{R}$ de pares ordenados se le denomina **RELACIÓN DE A EN B** si es que $\mathcal{R}$ es un subconjunto cualquiera de $A \times B$. También se le llama **RELACIÓN BINARIA**.

$\mathcal{R}$ es una **Relación de A en B** si y sólo si $\mathcal{R} \subset A \times B$

2.1 EJEMPLO .- Dados $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$. Los siguientes conjuntos de pares ordenados son algunas RELACIONES de A en B :

$$\mathcal{R}_1 = \{(3, 1)\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{(5, 1)\}, \quad \mathcal{R}_3 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}, \quad \mathcal{R}_5 = A \times B .$$

Puesto que, en general, si $A \times B$ tiene n elementos entonces $A \times B$ tiene 2^n subconjuntos; por lo tanto, existen 2^n relaciones de A en B .

Cuando un par ordenado (a, b) pertenece a una relación $\mathcal{R}$ también se denota: $a \mathcal{R} b$. Es decir, $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $(a, b) \in \mathcal{R}$, y en tal caso se lee:

" a está relacionado con b según la relación $\mathcal{R}$ ".

Para las relaciones previamente dadas: $3 \mathcal{R}_1 1$, $4 \mathcal{R}_3 2$.

Y si $(a, b) \notin \mathcal{R}$ entonces se denota $a \not\mathcal{R} b$.

2.2 DEFINICIÓN .- Se dice que $\mathcal{R}$ es una **RELACIÓN EN UN CONJUNTO A** si

$$\mathcal{R} \subset A \times A .$$

2.3 EJEMPLO .- Si $\mathcal{R}$ es una Relación en $A = \{2, 3, 4\}$ tal que

$$\mathcal{R} = \{ (x, y) / y + 1 \leq x^2 \} \quad \text{entonces}$$

$$\mathcal{R} = \{ (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4) \},$$

pues para $(x, y) \in A \times A$, con $x \in A \wedge y \in A$:

$$x = 2 : y + 1 \leq 2^2 \Rightarrow y \in \{2, 3\} \Rightarrow (2, 2), (2, 3) \in \mathcal{R}$$

$$x = 3 : y + 1 \leq 3^2 \Rightarrow y \in \{2, 3, 4\} \Rightarrow (3, 2), (3, 3), (3, 4) \in \mathcal{R}$$

$$x = 4 : y + 1 \leq 4^2 \Rightarrow y \in \{2, 3, 4\} \Rightarrow (4, 2), (4, 3), (4, 4) \in \mathcal{R}$$

2.4 PROBLEMA .- En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 1), (2, 4), (5, 4), (5, 2), (4, 3), (3, 5) \} .$$

Si $M = \{ (x \in A / (x, 2) \in \mathcal{R}) \}$, $N = \{ (y \in A / (3, y) \in \mathcal{R}) \}$

$P = \{ x \in A / (x, 5) \notin \mathcal{R} \}$, halle $(M \cup N) - P$.

SOLUCIÓN .- Verifique que

$$M = \{ (x \in A / (x, 2) \in \mathcal{R}) \} = \{ 2, 5 \}$$

$$N = \{ (y \in A / (3, y) \in \mathcal{R}) \} = \{ 3, 5 \}$$

$$P = \{ x \in A / (x, 5) \notin \mathcal{R} \} = \{ 1, 2, 4, 5 \}$$

$$\therefore (M \cup N) - P = \{ 2, 3, 5 \} - \{ 1, 2, 4, 5 \} = \{ 3 \} .$$

2.5 PROBLEMA .- Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y la relación R en A :

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a \text{ es divisor de } b .$$

Halle $n(\mathcal{R}) =$ número de elementos de la relación $\mathcal{R}$.

SOLUCIÓN .- $(a, b) \in \mathcal{R} \subset A \times A \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a .

Así $(1, 1), (2, 4), (3, 6) \in \mathcal{R}$. En general:

$$\mathcal{R} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8) \}$$

$$\therefore n(\mathcal{R}) = 20 \text{ elementos.}$$

2.6 EJERCICIO .- Se define una relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ como :

$$(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } 3.$$

- Demuestre que:
- 1) $(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in \mathbb{Z}$
 - 2) $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
 - 3) $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}.$

SOLUCIÓN $a - b$ es múltiplo de 3 $\Leftrightarrow a - b = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

- 1) $\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 = 3 \times 0$, con $0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a, a) \in \mathcal{R}.$
- 2) Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $a - b = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
 $\Rightarrow -(a - b) = 3(-k)$, donde $-k \in \mathbb{Z}$, pues $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow b - a = -(a - b) \in \mathcal{R}.$
- 3) Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow a - b = 3k_1$, algún $k_1 \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow b - c = 3k_2$, algún $k_2 \in \mathbb{Z}$

Entonces, sumando ambas igualdades: $a - c = 3k_3$, donde

$$k_3 = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}, \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}.$$

2.7 RELACIONES REFLEXIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ es una RELACIÓN REFLEXIVA EN $\underline{A}$
 $[\mathcal{R} \subset A \times A]$ si para todo $a \in A$: $(a, a) \in \mathcal{R}.$

Es decir, $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA en A si *todo elemento de A está relacionado consigo mismo mediante la relación $\mathcal{R}$.*

2.8 EJEMPLO .- Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones en A :

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 1), (2, 2), (1, 1)\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

entonces $\mathcal{R}_1$ es reflexiva en A pues $(a, a) \in \mathcal{R}_1, \forall a \in A$, además de otros puntos, en cambio en $\mathcal{R}_2$ falta $(3, 3)$ para serlo.

2.9 RELACIONES SIMÉTRICAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una RELACIÓN SIMÉTRICA en $\underline{A}$ si se cumple la implicación siguiente:

$$(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}.$$

Es decir, si (a, b) está en $\mathcal{R}$ entonces el elemento (b, a) también debe estar en $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}$ sea **SIMÉTRICA**.

2.10 EJEMPLO .- Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones en A :

$$\mathcal{R}_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (4, 2), (3, 2), (2, 1), (2, 4) \},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{ (1, 1), (3, 3), (4, 1), (2, 3), (1, 4) \},$$

veamos que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son **Simétricas**, pero que $\mathcal{R}_3$ no lo es, pues le falta el elemento $(3, 2)$ para serlo.

2.11 RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es **TRANSITIVA** si se cumple la implicación:

$$[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$$

2.12 EJEMPLO .- Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación en A :

$$\mathcal{R}_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 1) \},$$

NO ES TRANSITIVA, pues si bien se cumplen las implicaciones:

$$\begin{array}{lll} (1, 2) \in \mathcal{R}_1 \wedge (2, 3) \in \mathcal{R}_1 & \Rightarrow & (1, 3) \in \mathcal{R}_1 \\ \text{y} & & \\ (1, 3) \in \mathcal{R}_1 \wedge (3, 1) \in \mathcal{R}_1 & \Rightarrow & (1, 1) \in \mathcal{R}_1 \end{array}$$

en cambio falla en: $(2, 3) \in \mathcal{R}_1 \wedge (3, 1) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (2, 1) \in \mathcal{R}_1$,
pues falta $(2, 1)$ en $\mathcal{R}_1$.

En cambio $\mathcal{R}_2 = \{ (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 1) \}$ sí es Transitiva,

$\mathcal{R}_3 = \{ (1, 4), (4, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 3) \}$ no es Transitiva,
pues le faltan por lo menos 7 elementos para serlo. [¿Cuáles son?]

RPTA: Son: $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3)$, y $(4, 4)$.

2.12 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación $\mathcal{R}$ en A es una **RELACIÓN DE EQUIVALENCIA** si satisface (simultáneamente) las tres condiciones:

- 1) **REFLEXIVA** : $\forall a \in A, (a, a) \in \mathcal{R}$
- 2) **SIMÉTRICA** : Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, a) \in \mathcal{R}$
- 3) **TRANSITIVA** : Si $[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}]$ entonces $(a, c) \in \mathcal{R}$

2.13 EJEMPLOS.- 1) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

es una **RELACIÓN DE EQUIVALENCIA** en A .

2) La relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{Z}$ (enteros) por:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / (a - b) \text{ es múltiplo de } 3\}$$

también es de **EQUIVALENCIA**, lo cual ya fue demostrado en el Prob. [2.6].

2.14 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Se llama **DOMINIO** de la relación $\mathcal{R}$ al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de $\mathcal{R}$.

Y se llama **RANGO** de la relación $\mathcal{R}$ al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de $\mathcal{R}$.

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x / (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

$$\text{Rang}(\mathcal{R}) = \{y / (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

2.15 EJEMPLO.- Dada la relación en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$$

entonces $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{Rang}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
2. ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$ si $A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 < x + 6 < 20\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 < 400\}$?
3. Halle por extensión el conjunto $M = \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (s^2 + 3s, t^2 - 7t) = (-2, -12)\}$.
4. En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación $\mathcal{R}$:

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 1), (2, 4), (5, 4), (5, 2), (4, 3), (3, 5)\}$.
- Si $M = \{x \in A / (x, 2) \in \mathcal{R}\}$, $N = \{y \in A / (3, y) \in \mathcal{R}\}$,
 $P = \{x \in A / (x, 5) \notin \mathcal{R}\}$, halle: $(M \cup N) - P$.
5. Si $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, entonces dada la relación en A :
 $\mathcal{R} = \{(x, y) / y \text{ es múltiplo de } x, x \neq y\} \subset A \times A$,
 halle la suma de todos los elementos del Dominio de $\mathcal{R}$.
6. Demuestre que si A y B son conjuntos no vacíos y se cumple que
 $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$ entonces $A = B = C$.
7. Dadas las relaciones en $\mathbf{Z}$: $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) / x^2 - 2y = 3\}$ y
 $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) / x > y \vee x < y\}$, halle $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$.
8. Dado el Universo $U = \{1, 2, 3, 4\}$, y las relaciones en U :
 $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) / x = y\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) / y = 3\}$,
 $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) / y \geq x\}$, halle $\mathcal{R}_3 - (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$.
9. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbf{N} / x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} / x \text{ es par y } x < 5\}$, $C = \{x \in \mathbf{N} / x \text{ es impar, } x \leq 6\}$.
 Halle $(A \cap B) \times (C - A)$.
10. Sea $A = \mathbf{Z}$. En A definimos la relación T mediante la condición:
 $(x, y) \in T \Leftrightarrow x - y \text{ es divisible por } 5$.
 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?:
 a) $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$, b) $(x, 4) \in T \Rightarrow x \text{ es múltiplo de } 5$.
 c) $(2, 17) \in T$, d) $(7n, -8n) \in T, \forall n \in \mathbf{Z}$.
11. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) / x < y\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) / x + y = 5\}$ dos relaciones en U . Halle el número de elementos de la relación $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$.
12. Si $A = \{(x, y) / (x^2 + 3x, y^2 + 3y - 2) = (-2, 2x)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$,
 $B = \{(x, y) / y = x, x \in \mathbf{Z}\}$, halle: $A - B$.
13. Dado el conjunto $A = [1, 8] \cap \mathbf{Z}$, se define la relación $\mathcal{R}$ en A como:
 $(\underline{a}, \underline{b}) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \underline{a} \text{ es divisor de } \underline{b}$. Halle $n(\mathcal{R})$.
14. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d, e\}$, ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $(A \times B) - (B \times A)$?
15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:
 a) $A \subset A \times A, \forall \text{ conjunto } A$; b) $A \times B \subset (A \times B) \cup C$

- c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
 d) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) \cap (B' \times D')$
16. Si $A = \{x \in \mathbb{N} / x = (2k - 1)/3, k \in \mathbb{N}\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 1 \leq 12\}$, halle $(A \cap B) \times (B - A)$.
17. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación en A definida por:
 $\mathcal{R} = \{(x, y) / x = y \vee x + y = 3\}$, ¿Cuáles son verdaderas?:
 a) $(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in \mathcal{R}$
 b) $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}, \forall (a, b) \in \mathcal{R}$.
 c) $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.
 Indicar además si $\mathcal{R}$ es o no una relación de equivalencia.
18. En $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ se define $\mathcal{R} = \{(x, y) / 3 \text{ es divisor de } x + y\}$
 halle la suma de todos los elementos del rango de la relación $\mathcal{R}$.
19. En $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ se define $\mathcal{R} = \{(x, y) / x^2 + x = y^2 + y\}$, halle la suma de todos los elementos del dominio de $\mathcal{R}$.
20. Dada la relación $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (|x - 1| = |y - 1|)\}$,
 a) ¿Es $\mathcal{A}$ una relación de equivalencia?. ¿Por qué?
 b) Para cada x fijo, calcule $A_x = \{y / (x, y) \in \mathcal{R}\}$.
21. Si U es el conjunto de triángulos en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y si S es la relación definida en U por la regla: $(x, y) \in S$ si y sólo si $\underline{x}$ es semejante a $\underline{y}$,
 demuestre que S es una relación de Equivalencia.
22. Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se llama **ANTISIMÉTRICA** si cumple que:
 $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$ (*)
 Demuestre que son antisimétricas las siguientes relaciones definidas en $\mathbb{Z}$:
 $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) / x \leq y\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) / x < y\}$.
 SUG: En $\mathcal{R}_2$: " $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(x, y) \in \mathcal{R}$ " es FALSO pues " $x < y$
 y $y < x$ " es absurdo. Luego, (*) es VERDADERA.
23. Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son dos relaciones REFLEXIVAS definidas en un conjunto A ,
 ¿Cuáles son verdaderas?:
 a) $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es reflexiva, b) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es reflexiva,
 c) $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \cap (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$ es reflexiva.

24. En $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ se define la relación $\mathcal{R} = \{(x, y) / 3 \text{ es divisor de } x + y\}$. ¿Cuáles son verdaderas? :
- a) $\mathcal{R}$ es reflexiva , c) $\mathcal{R}$ es transitiva ,
 b) $\mathcal{R}$ es simétrica , d) $\mathcal{R}$ tiene 9 elementos.

CLAVE DE RESPUESTAS

2. 992 ; 3) $M = \{(-1, 3), (-1, 4), (-2, 3), (-2, 4)\}$; 4) $\{3\}$
 5. 12 ; 7) $\{(3, 3), (-1, -1)\}$; 8) $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 2)\}$
 9. $\{(2, 3), (2, 5)\}$; 10) Sólo (a), (c) y (d) ; 11) 12 ;
 12. $\{(-2, -1), (-1, 0), (-1, -3)\}$; 13) 20 ; 14) $2^8 = 256$
 15. Sólo (b) y (d) ; 16) $\{(1, 2), (3, 2)\}$; 17) Todas, Sí.
 18. 36 ; 19) -7 ; 20. a) Sí, b) $A_x = \{x, 1 - x\}$; 23) Todas
 24. Sólo (b) y (d) .

3. GRÁFICAS DE RELACIONES

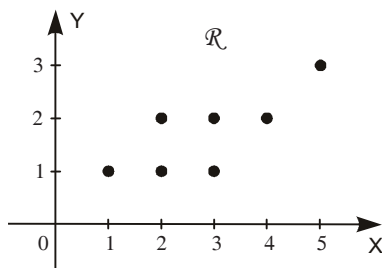
Dada una relación $\mathcal{R}$ se consideran los valores del DOMINIO de $\mathcal{R}$ en el Eje X, y los valores del RANGO de $\mathcal{R}$ en el Eje Y, y luego se van ubicando los puntos en el plano cartesiano correspondiente. Así por ejemplo, la representación gráfica de la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$$

Corresponde a la figura adyacente

3.1 NOTACIÓN.-

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$



3.2 EJEMPLO.- Bosquejaremos las gráficas de las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$:

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = y\} ,$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2\} = \{(2, y) / y \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3\} = \{(x, 3) / x \in \mathbb{R}\}$$

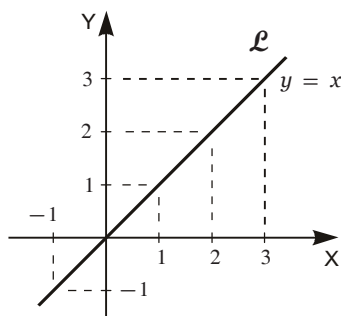
Para que un par ordenado se encuentre en la relación $\mathcal{L}$ sus dos componentes deben ser IGUALES. Así, algunos pares ordenados en $\mathcal{L}$ son:

$(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(6, 6)$, $(7/5, 7/5)$, etc., y donde resulta en este caso que:

$$\text{Dom}(\mathcal{L}) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R} \quad [\text{Eje X}] ,$$

$$\text{Rang}(\mathcal{L}) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R} \quad [\text{Eje Y}]$$

En general, como el dominio ha de ser un conjunto continuo, entonces uniendo todos los puntos de $\mathcal{L}$ se obtiene una RECTA.



Algunos elementos de la relación S son $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 3/2)$, etc. Aquí basta que la primera componente sea igual a $\underline{2}$ para que tal par ordenado se encuentre en la relación

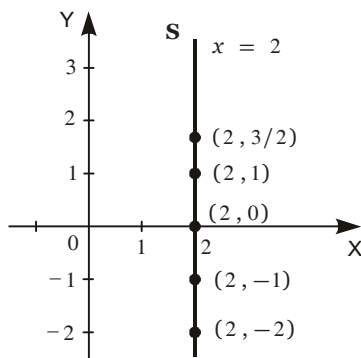
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2\} = \{(2, y) / y \in \mathbb{R}\} .$$

La segunda componente no tiene restricciones en $\mathbb{R}$:

$$\text{Dom}(S) = \{2\}$$

$$\text{Rang}(S) = \langle -\infty, \infty \rangle$$

Aquí también la gráfica corresponde a una RECTA (VERTICAL), que precisamente pasa por $x = 2$.



En general, toda ecuación de la forma: $x = C$ (C constante) en el plano XY corresponde a una RECTA VERTICAL que pasa por $x = C$ precisamente.

Análogamente, podemos ver que la gráfica de la relación T definida por $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3 \}$ corresponde a una **RECTA HORIZONTAL** que pasa a la "altura" $y = 3$.

$$\text{Dom}(T) = \langle -\infty, \infty \rangle$$

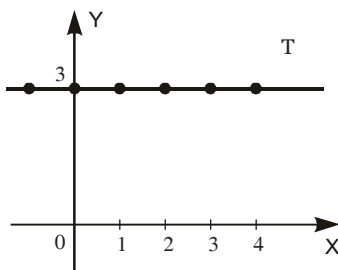
$$\text{Rang}(T) = \{3\}$$

En general, toda ecuación de la forma:

$$y = C$$

, con C constante, en el plano **XY** corresponde a una **RECTA**

HORIZONTAL que pasa precisamente a la altura $y = C$.



3.3 NOTA.- La gráfica correspondiente a

a) la ecuación $y = 0$ coincide con EL EJE X .

b) la ecuación $x = 0$ coincide con EL EJE Y .

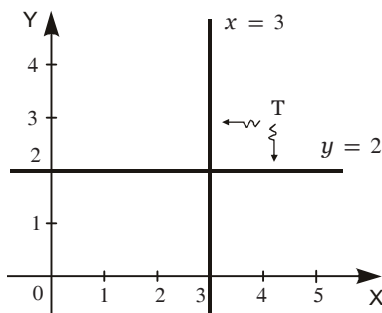
3.4 PROBLEMA .- Bosqueje la gráfica de la relación:

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 3)(y - 2) = 0 \}$$

SOLUCIÓN .- De la propiedad $ab = 0 \Leftrightarrow [a = 0 \vee b = 0]$:

$$\begin{aligned} (x - 3)(y - 2) = 0 &\Leftrightarrow [x - 3 = 0 \vee y - 2 = 0] \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee y = 2 \end{aligned}$$

y por tener el conectivo lógico de la **DISYUNCIÓN** $\vee$ su gráfica consiste de (LA REUNIÓN DE) ambas rectas, es decir, de toda la cruz de la figura siguiente.



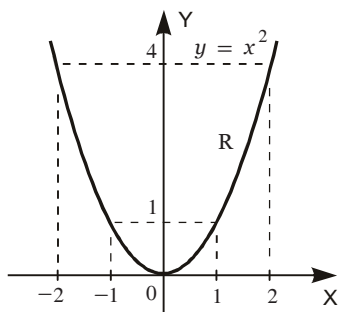
A continuación presentamos las gráficas de las siguientes relaciones (verificar):

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 \}$$

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x} \}$$

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = -\sqrt{x} \}$$

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = y^2 \}$$

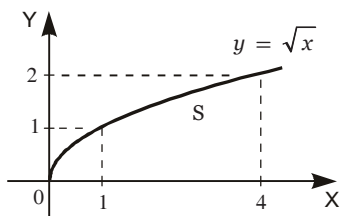


ANALÍTICAMENTE Y GRÁFICAMENTE

$$\begin{cases} y = x^2 \geq 0 \\ x \text{ no tiene restricciones.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(R) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$$

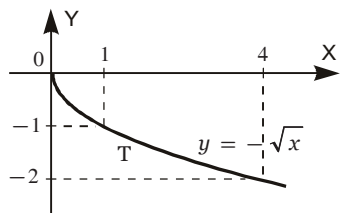
$$\text{Rang}(R) = [0, \infty)$$



$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, x \geq 0 \\ y = \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(S) = [0, \infty)$$

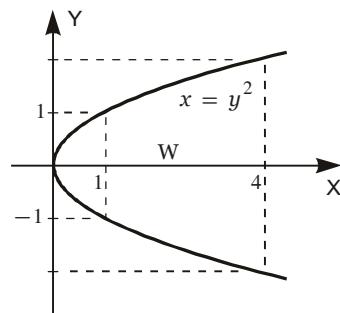
$$\text{Rang}(S) = [0, \infty)$$



$$\begin{cases} y = -\sqrt{x}, x \geq 0 \\ y = -\sqrt{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(T) = [0, \infty)$$

$$\text{Rang}(T) = \langle -\infty, 0 \rangle$$



$$\begin{cases} x = y^2 \geq 0 \\ y \text{ sin restricciones} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(W) = [0, \infty)$$

$$\text{Rang}(W) = \langle -\infty, \infty \rangle$$

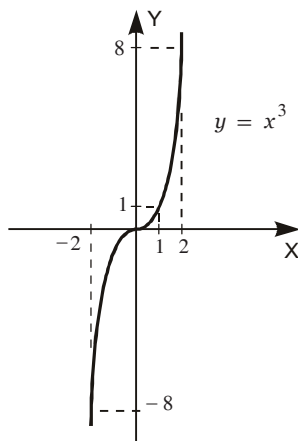
3.5 NOTA .- Como $x = y^2 \Leftrightarrow [y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}, \forall x \geq 0]$, entonces la gráfica de W corresponde a la reunión de las gráficas de las relaciones S y T.

La figura adyacente corresponde a la gráfica de la relación **CÚBICA**:

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^3 \}$$

$$\text{Dom}(B) = \langle -\infty, \infty \rangle$$

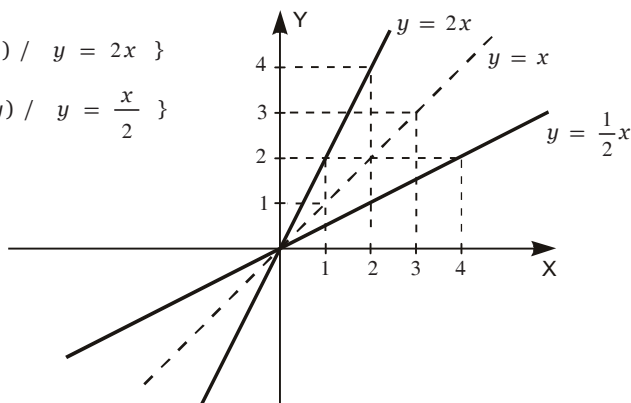
$$\text{Rang}(B) = \langle -\infty, \infty \rangle$$



Ahora bosquejaremos las gráficas de las siguientes relaciones (RECTAS):

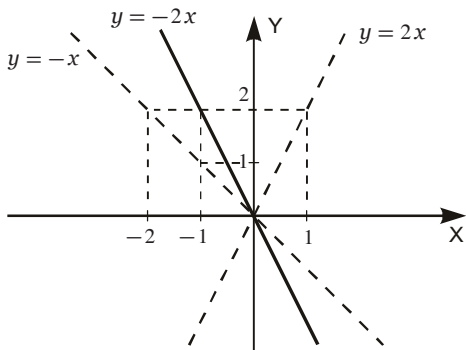
$$L_1 = \{ (x, y) / y = 2x \}$$

$$L_2 = \{ (x, y) / y = \frac{x}{2} \}$$



$$L_3 = \{ (x, y) / y = -2x \}$$

$$L_4 = \{ (x, y) / y = -x \}$$

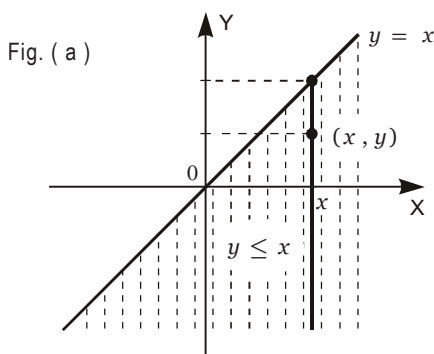


3.6 GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES DEL TIPO

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y \leq x \}$$

El punto (x, y) satisface la condición $y \leq x$ (véase en el Eje Y) siempre que se encuentre en la *semirrecta vertical* que comienza en la recta y baja sin límite. [Zona sombreada de la figura (a)].

La relación $S_0 = \{ (x, y) / y < x \}$ corresponde a la gráfica que sigue a continuación pero *con excepción de los puntos del borde* $y = x$. [Fig. (b)]



Cuando x toma todos los valores en el Eje X, la semirrecta hallada barrerá toda la zona sombreada.

Del mismo modo se puede bosquejar la gráfica de la relación T,

$$T = \{ (x, y) / 2y > -x \} = \{ (x, y) / y > -\frac{1}{2}x \},$$

partiendo de la gráfica del borde $y = -\frac{1}{2}x$, sin incluirlo. Fig. (c).

Fig. (b)

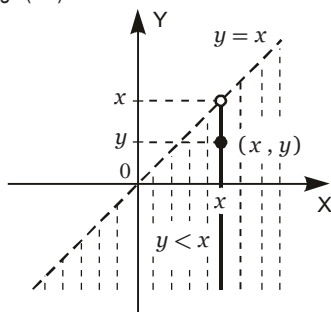
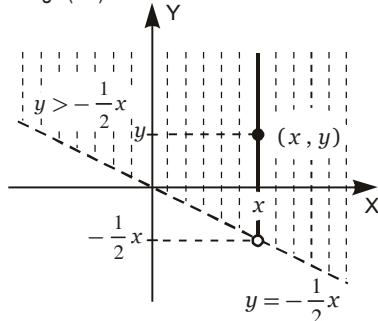


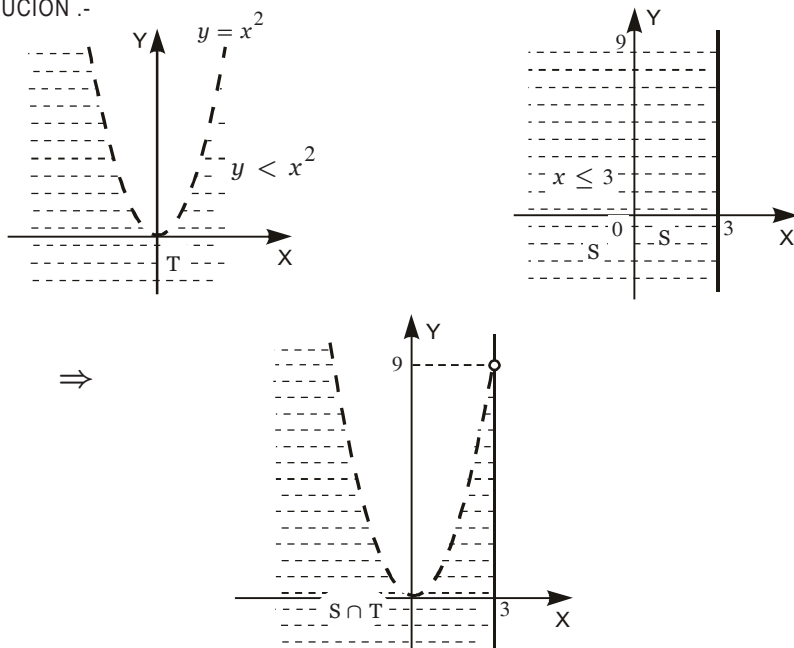
Fig. (c)



3.7 EJERCICIO .- Halle la gráfica de la intersección de las relaciones:

$$S = \{ (x, y) / x \leq 3 \} , \quad T = \{ (x, y) / y < x^2 \} .$$

SOLUCIÓN .-



3.8 RESUMEN .- Si la inecuación puede expresarse como

i) $y > (\text{EXPRESIÓN en } x) ,$

o como ii) $y \geq (\text{EXPRESIÓN en } x) ,$

entonces su gráfica tiene como *borde* : $y = (\text{EXPRESIÓN en } x) ,$ y

(i) tiene como gráfica a *la parte superior del plano, SIN EL BORDE.*

(ii) tiene como gráfica a *la parte superior del plano, CON EL BORDE.*

En los casos : $y < \dots$ (ó $y \leq \dots$) la gráfica corresponde a la región debajo del borde *sin incluirlo* (o incluyéndolo si $y \leq \dots$).

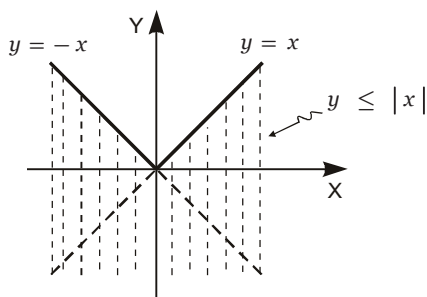
3.9 EJEMPLO .- Grafique las relaciones determinadas por las inecuaciones:

a) $y \leq |x| ,$ b) $y \geq |x| .$

SOLUCIÓN .-

$$\begin{aligned}
 \text{a) } |x| \geq y &\Leftrightarrow [x \geq y \vee x \leq -y] \\
 &\Leftrightarrow [y \leq x \vee y \leq -x],
 \end{aligned}$$

que corresponde a la
(RE)UNIÓN de las dos
regiones:



b) La gráfica corresponderá al complemento de la gráfica de (a) más la frontera, pues:

$$\begin{aligned}
 y \geq |x| &\Leftrightarrow |x| \leq y \Leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (-y \leq x \leq y) \\
 &\Leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (y \geq x) \wedge (y \geq -x) \\
 &\quad \text{(INTERSECCIÓN DE LAS TRES REGIONES)}
 \end{aligned}$$

3.10 PROBLEMA .- Grafique la (re)unión de las relaciones en $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{R} = \{ (x, y) / x \geq y > x^3, x > 0 \}$$

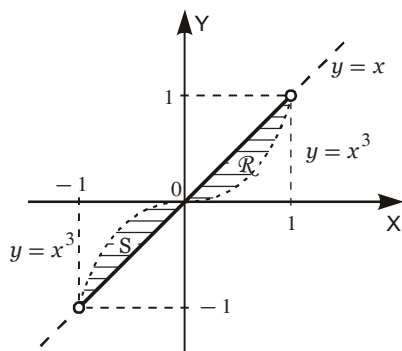
$$\mathcal{S} = \{ (x, y) / x \leq y < x^3, x < 0 \}$$

SOLUCIÓN .- $\mathcal{R}$ corresponde a la intersección de las tres regiones:

$$\text{i) } y \leq x \quad \wedge \quad \text{ii) } y > x^3 \quad \wedge \quad \text{iii) } x > 0$$

y $\mathcal{S}$ corresponde a la intersección de las tres regiones:

$$\text{i) } y \geq x \quad \wedge \quad \text{ii) } y < x^3 \quad \wedge \quad \text{iii) } x < 0$$



Note que el origen $(0, 0)$ no se incluye en ninguna de las dos relaciones: $\mathcal{R}$ ó $\mathcal{S}$.

3.11 PROBLEMA .- Grafique la región definida por la relación:

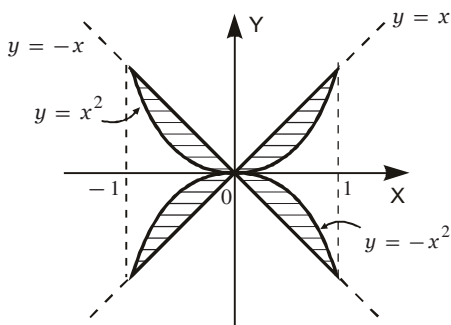
$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |y| \geq x^2, |y| \leq |x| \}$$

SOLUCIÓN .- S es la intersección de: $|y| \geq x^2 \wedge |y| \leq |x|$, donde

i) $|y| \geq x^2$ si y sólo si $y \geq x^2 \vee y \leq -x^2$,

$$\text{ii) } |y| \leq |x| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \wedge |y| \leq x \\ \vee \\ x < 0 \wedge |y| \leq -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x \geq 0) \wedge (-x \leq y) \wedge (y \leq x) \\ \vee \\ (x < 0) \wedge (y \geq x) \wedge (y \leq -x) \end{cases}$$



4. RELACIONES INVERSAS

Toda RELACIÓN $\mathcal{R}$ de A en B tiene una **RELACIÓN INVERSA** de B en A, denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, y definida por:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (b, a) / (a, b) \in \mathcal{R} \}.$$

Así, los elementos de $\mathcal{R}^{-1}$ son aquellos pares ordenados obtenidos al intercambiar las componentes entre sí de cada uno de los pares ordenados de la relación directa $\mathcal{R}$.

4.1 EJEMPLO.- Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ y la relación $\mathcal{R}$ de A en B:

$$\mathcal{R} = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5) \}$$

entonces $\mathcal{R}^{-1} = \{ (4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2) \}$

4.2 EJEMPLO.- Dado $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación en V :

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \text{ , entonces}$$

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \text{ .}$$

En este caso vemos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

4.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RELACIONES INVERSAS.-

Dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B y su relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$ de B en A :

$$\text{DOMINIO de } \mathcal{R}^{-1} = \text{RANGO de } \mathcal{R}$$

$$\text{RANGO de } \mathcal{R}^{-1} = \text{DOMINIO de } \mathcal{R}$$

En el primer ejemplo tenemos que

$$\text{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \{4, 5\} = \text{Rang}(\mathcal{R})$$

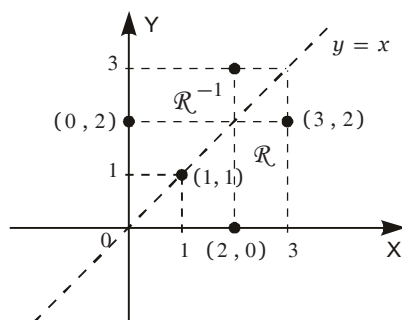
$$\text{Rang}(\mathcal{R}^{-1}) = \{1, 2\} = \text{Dom}(\mathcal{R}) \text{ .}$$

4.4 GRÁFICA DE UNA RELACIÓN INVERSA

De la definición $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in \mathcal{R}\}$, y tomando el caso $\mathcal{R} = \{(2, 0), (1, 1), (3, 2)\}$ entonces su inversa resulta ser

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(0, 2), (1, 1), (2, 3)\}$$

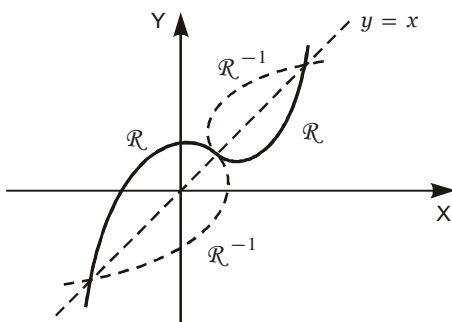
En la figura se han ubicado los puntos de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$, y vemos que si se considera a la RECTA $y = x$ como un **ESPEJO DOBLE** entonces precisamente se obtiene $\mathcal{R}^{-1}$ como **LA IMAGEN DE $\mathcal{R}$ A TRAVÉS DE DICHO ESPEJO**.



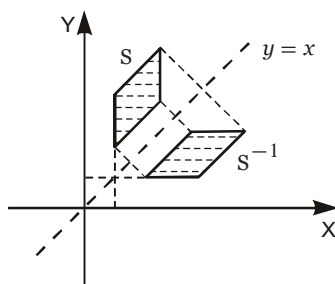
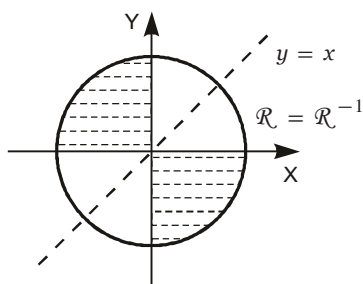
En este caso, se dice que la recta $y = x$ es una **RECTA DE SIMETRÍA**, y que:

LA GRÁFICA DE LA RELACIÓN INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$ ES SIMÉTRICA A LA GRÁFICA DE $\mathcal{R}$ CON RESPECTO A LA RECTA $y = x$.

En los diagramas siguientes, las curvas continuas corresponden a la relación directa $\mathcal{R}$, y las curvas punteadas a la relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$.



En la figura izquierda $\mathcal{R}$ consiste de toda la circunferencia y de toda la zona sombreada.

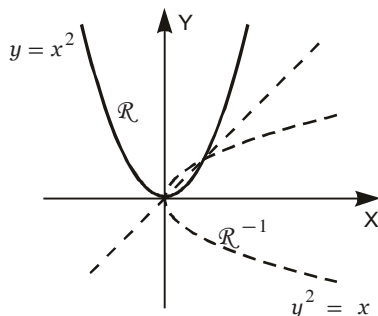
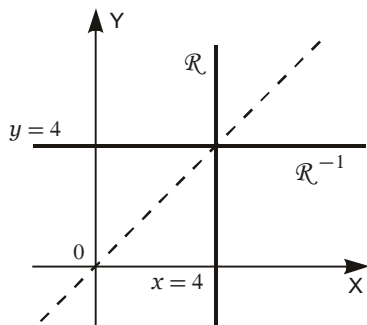


Observe que la Relación Inversa de una Recta Horizontal $y = C$ es la Recta Vertical $x = C$, y viceversa. En efecto,

$$\mathcal{R} = \{ (4, z) / z \in \mathbb{R} \} \text{ tiene ecuación } x = 4$$

$$\text{y } \mathcal{R}^{-1} = \{ (z, 4) / z \in \mathbb{R} \} \text{ tiene ecuación } y = 4.$$

La Relación Inversa de la parábola $\mathcal{R} : y = x^2$ es la parábola $\mathcal{R}^{-1} : x = y^2$, la cual se obtuvo intercambiando x con y en la relación inicial $\mathcal{R}$.



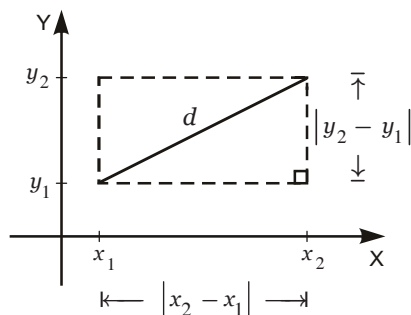
5. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La DISTANCIA entre los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, denotada por $d = d[P, Q]$ satisface la siguiente condición:

$$\begin{aligned} d^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \end{aligned}$$

$$d[P, Q] =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



5.1 EJEMPLO .- Para los puntos:

1) $P = (3, 4)$, $Q = (6, 8)$: $d[P, Q] = \sqrt{(6 - 3)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$

2) $P = (-1, -4)$, $Q = (11, -9)$:

$$d[P, Q] = \sqrt{[11 - (-1)]^2 + [(-9) - (-4)]^2} = \sqrt{169} = 13$$

3) $P = (-8, -7)$, $Q = (0, 8)$:

$$d[P, Q] = \sqrt{[0 - (-8)]^2 + [8 - (-7)]^2} = \sqrt{289} = 17$$

5.2 NOTA.- Siempre se cumple que $d[P, Q] = d[Q, P] \geq 0$.

5.3 PROBLEMA .- Demuestre que el triángulo de vértices

$$A = (2, 3), B = (-1, 0), C = (-2, 4) \text{ es isósceles.}$$

SOLUCIÓN.- Para que ello ocurra, dos de sus lados deben tener longitudes iguales. Podemos verificar que, en efecto:

$$d[A, B] = 3\sqrt{2}, \quad d[A, C] = \sqrt{17}, \quad d[B, C] = \sqrt{17}.$$

5.4 PROBLEMA .- Halle una ecuación para los puntos $P = (x, y)$ que equidisten de $A = (-2, 3)$ y $B = (5, 7)$.

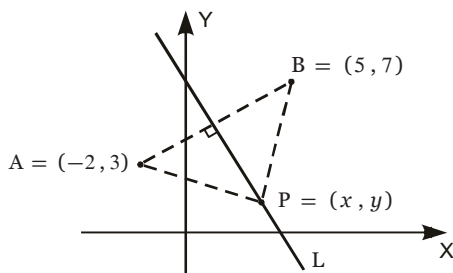
SOLUCIÓN .-

Por la condición:

$$d[P, A] = d[P, B] :$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y reduciendo : $14x + 8y = 61$.



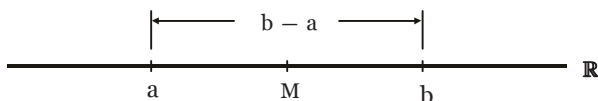
5.5 PROBLEMA .- Demuestre que los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, -6)$ y $C(1, -2)$ son colineales [que se encuentran en una misma recta].

SOLUCIÓN .- Ello ocurrirá en el único caso en que, considerando las distancias entre ellos, la **SUMA** de dos de tales distancias debe coincidir con el valor de la tercera. Así, podemos verificar que esto es cierto puesto que

$$d[A, C] = 4\sqrt{2} \quad , \quad d[C, B] = 4\sqrt{2} \quad , \quad d[A, B] = 8\sqrt{2} \quad .$$

5.6 FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

En la recta vemos que el Punto Medio M entre $\underline{a}$ y $\underline{b}$ es

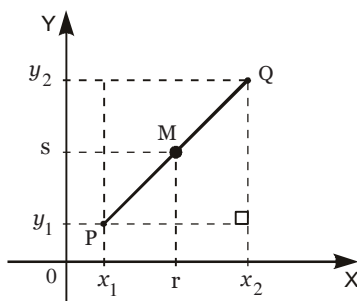


$$M = a + \left(\frac{b - a}{2} \right) = \frac{a + b}{2} \quad (\text{SEMISUMA de } a \text{ y } b)$$

Usaremos este hecho en ambos Ejes X, Y , para hallar las coordenadas del punto $M = (r, s)$ que se encuentra a la mitad del segmento de recta que une a los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$:

Por el Teorema de Tales, si M es punto medio del segmento

$\overline{PQ}$, entonces r es punto medio entre x_1 y x_2 , y s es punto medio entre y_1 y y_2 :



$$r = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad s = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

y se lee : LA SEMISUMA DE LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS P y Q .

5.7 EJEMPLO.- El punto medio M entre A = (3, 7) y B = (9, -5) es

$$M = \left(\frac{3 + 9}{2}, \frac{7 + (-5)}{2} \right) = (6, 1).$$

6. LA RECTA Y SUS ECUACIONES

Si una recta es *vertical* sabemos que su ecuación es de la forma $x = C$, siendo C : una constante.

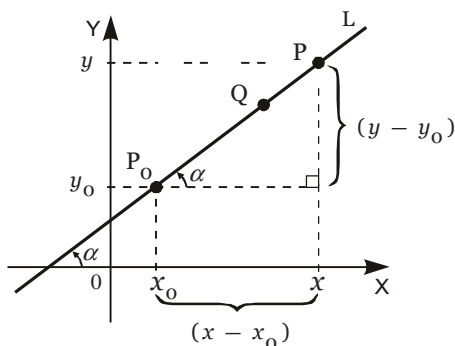
Si la recta L *no es vertical* y pasa por un punto fijo $P_0 = (x_0, y_0)$ llamado **PUNTO DE PASO** de la recta, entonces L forma un ángulo fijo $\alpha \neq 90^\circ$ con el Eje X, medido *en sentido antihorario a partir del semieje positivo del Eje X*. Este ángulo se llama **ÁNGULO DE INCLINACIÓN de L**.

Un punto $P = (x, y) \neq P_0$ pertenecerá a la recta L si y sólo si

$$\tan \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Si $Q = (x_1, y_1) \in L$, entonces también se cumple que:

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



6.1 PENDIENTE .- Se llama **PENDIENTE** de una recta L al valor de la tangente de su ángulo de inclinación α , y se le denota

$$m = \tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad \alpha \neq 90^\circ$$

donde los puntos $(x_1, y_1) = Q$ y (x_0, y_0) pertenecen ambos a la recta L.

El valor de la **PENDIENTE** siempre es *constante* para cada recta, y proporciona una medida de su inclinación con respecto al Eje X. Así, la ecuación de una recta que NO ES VERTICAL L queda determinada tan sólo indicando su PENDIENTE m , y las coordenadas de cualquier PUNTO DE PASO (x_0, y_0) , en la forma:

$$L: m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow L: y - y_0 = m(x - x_0)$$

6.2 PROBLEMA .- Halle la ecuación de la recta L que pasa por $(1, 2)$ y tiene ángulo de inclinación de 45° .

SOLUCIÓN.- $\alpha = 45^\circ$. La pendiente m es: $m = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$, y como pasa por $(x_0, y_0) = (1, 2)$, entonces

$$\begin{aligned} L: y - y_0 &= m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \\ \Rightarrow L: y - 2 &= x - 1, \text{ es decir } L: y = x + 1. \end{aligned}$$

6.3 PROBLEMA .- Halle la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $A = (3, 4)$ y $B = (5, 8)$.

SOLUCIÓN .- Como ambos puntos pertenecen a la recta L , se puede tomar cualquiera de ellos como PUNTO DE PASO $P_0 = (x_0, y_0)$; digamos $P_0 = A = (3, 4)$.

Ahora sólo falta hallar el valor de la pendiente m , y con las coordenadas del punto $B = (x, y) = (5, 8)$ obtenemos

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{8 - 4}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow m = 2$$

Y la ecuación de L : $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 3) \dots (1)$

Pero, si en lugar de $P_0 = A$ se hubiese considerado $P_0 = B = (5, 8)$ entonces se habría obtenido $m = 2$,

$$L: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow L: y - 8 = 2(x - 5) \dots (2)$$

que aparentemente es diferente de (1) pero si se efectúan las reducciones necesarias se encontrará que (1) y (2) son equivalentes obteniéndose en ambos casos:

$$L: y = 2x - 2$$

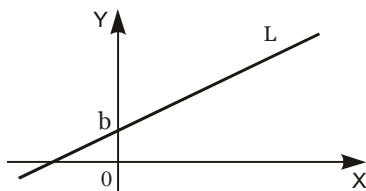
La ecuación para L en la forma:
la **FORMA PUNTO - PENDIENTE**.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ es denominada}$$

Ahora, consideremos como Punto de Paso a $(0, b)$, donde L intercepta al EJE Y , entonces

$$L: y - b = m(x - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{L: y = mx + b}$$



Esta forma proporciona directamente la **PENDIENTE** m como el coeficiente de la variable x , mientras que el término independiente b indica el punto en el EJE Y donde la recta L lo corta y b obviamente puede ser: > 0 , $= 0$ ó < 0 .

Así, por ejemplo, la ecuación $y = 3x - 1$ corresponde a la recta con **pendiente** $m = 3$, y **punto de paso** $(0, b) = (0, -1)$.

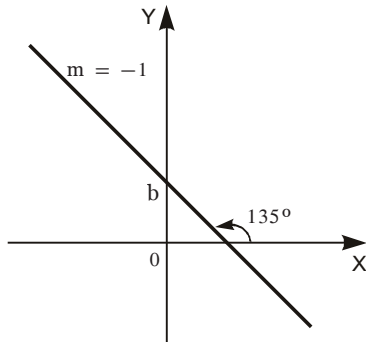
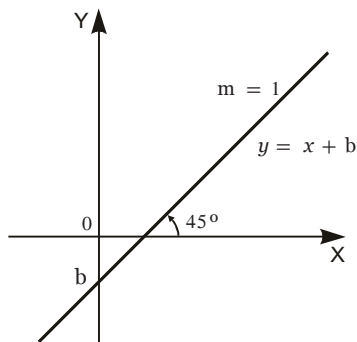
Si la recta L tiene su **ángulo de inclinación** α , tal que:

- 1) $0 < \alpha < 90^\circ$: $m = \tan \alpha > 0$... PENDIENTE POSITIVA.
- 2) $\alpha = 0$: $m = \tan 0 = 0$... Recta HORIZONTAL.
- 3) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$: $m = \tan \alpha < 0$... PENDIENTE NEGATIVA.

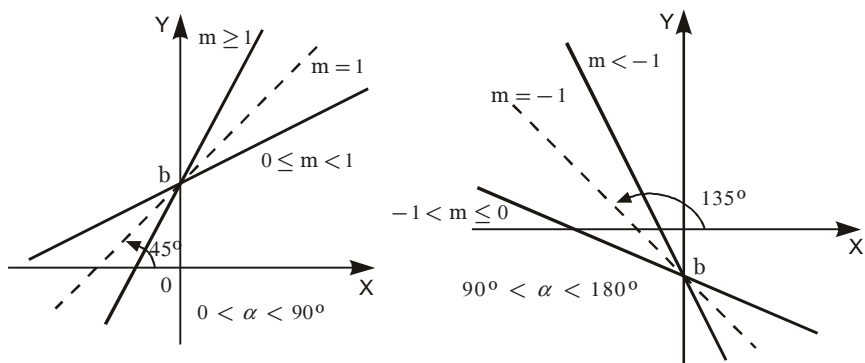
Cualquier otro ángulo se reduce a los tres casos dados para efectos del cálculo de la **PENDIENTE** $m = \tan \alpha$.

6.4 NOTA .- $m = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$

$m = -1 \Leftrightarrow \tan \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ$



Y si $0 < \alpha < 90^\circ$, la pendiente m aumenta de valor conforme el ángulo α va creciendo. En general se tiene el siguiente esquema gráfico:



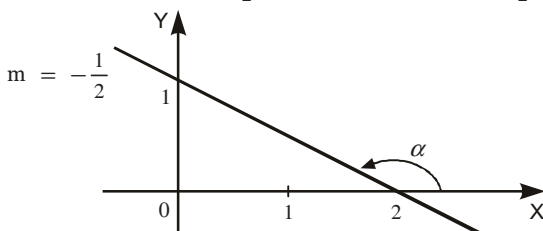
6.5 PROBLEMA .- Dada la ecuación de la recta $L: 2x + 4y = 4$, halle su **pendiente**, un **punto de paso**, y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN .- Para hallar algún punto de paso basta dar un valor real cualquiera a la variable x , y despejar el correspondiente valor de y , o viceversa.

Así, para $y = 0$ se tiene $x = 2$, luego $P_0 = (2, 0)$ resulta ser un punto de paso

(pero NO ES EL ÚNICO). Despejando y : $y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Note que la recta también pasa por el punto $(0, b) = (0, 1)$



6.6 TEOREMA .- Si a y b no son ambos ceros a la vez, entonces la ecuación: $ax + by + c = 0$ siempre representa a **una recta en el plano XY**.

PRUEBA .- i) Si $a = 0$, $b \neq 0$: $y = -c/b$, (L HORIZONTAL)

ii) Si $a \neq 0$, $b = 0$: $x = -c/a$, (L VERTICAL)

iii) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$: $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$ que es una

recta con *pendiente* $m = -a/b$, y pasa por $(0, -c/b)$.

7. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

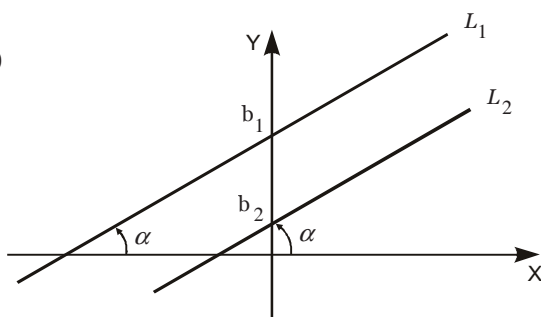
Dos rectas L_1 y L_2
son **PARALELAS** ($L_1 // L_2$)

si tienen el mismo ángulo de inclinación:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

En el caso de rectas que **no son verticales**, esto equivale a que sus pendientes sean iguales:

$$m_1 = m_2 = m = \tan \alpha.$$



Si ninguna de las dos rectas L_1 y L_2 es vertical, entonces ellas serán **PERPENDICULARES** si y sólo si $\alpha_2 - \alpha_1 = 90^\circ$,

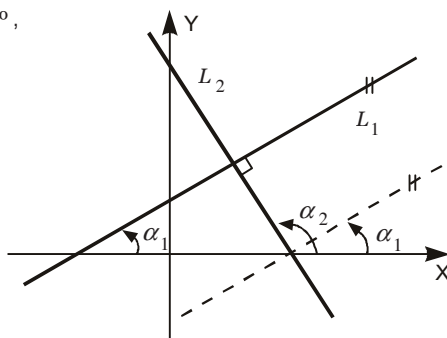
$$\alpha_2 = 90^\circ - (-\alpha_1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \cot(-\alpha_1) \\ &= -\cot(\alpha_1) \\ &= -1/\tan(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\tan \alpha_1)(\tan \alpha_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

[PRODUCTO DE PENDIENTES = -1]



7.1 **TEOREMA.-** Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces

i) $L_1 // L_2$ son **PARALELAS** $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$.

ii) $L_1 \perp L_2$ son **PERPENDICULARES** $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 = -1$.

7.2 **EJEMPLOS.-** Las rectas $L_1: 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -2$

$$L_2: 2y = -5 - 4x \Rightarrow m_2 = -2$$

son **PARALELAS**, pues sus pendientes son iguales.

Las rectas $L_1: ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$L_2: -bx + ay + d = 0$$

son **PERPENDICULARES**, pues $m_1 = -a/b$ y $m_2 = b/a$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = -1.$$

Las rectas $L_1: 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 3/2$

$$L_2: 4x + 6y - 12 = 0 \Rightarrow m_2 = -4/6 = -2/3$$

también son **perpendiculares**: $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

7.3 PROBLEMA .- Halle el valor de k para que la rectas dadas sean paralelas

$$L_1: kx + (k - 1)y + 18 = 0, \quad L_2: 4x + 3y + 7 = 0.$$

SOLUCIÓN .- $m_1 = \frac{-k}{k-1}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$, y como las rectas deben ser paralelas entonces $m_1 = m_2$. De esta ecuación despejamos $k = 4$.

7.4 PROBLEMA .- ¿Son las rectas $L_1: -2x + y = -2$, $L_2: x + y = 7$ perpendiculares? . Halle su punto de intersección Q .

SOLUCIÓN . $m_1 = 2$, $m_2 = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \neq -1$. Luego, las dos rectas

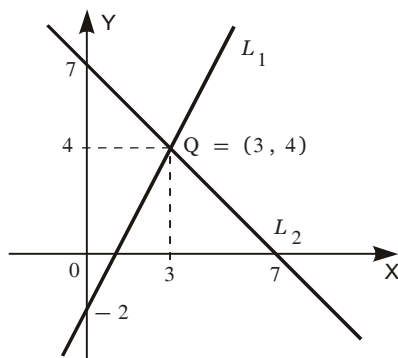
NI SON perpendiculares NI SON paralelas.

El punto $Q = (x, y)$ buscado, al estar en ambas rectas, deben satisfacer las dos ecuaciones simultáneamente, lo que indica que se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3, \quad y = 4$$

$$\Rightarrow Q = (3, 4).$$



7.5 NOTA .- Cuando dos ecuaciones (simultáneas) de dos rectas no tienen ninguna solución, es porque ambas rectas *son paralelas y están separadas entre sí*.

Tal es el caso de las rectas:

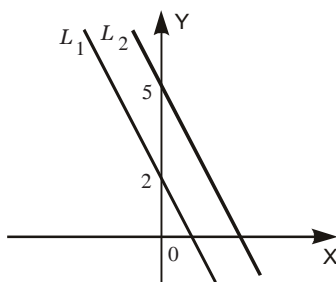
$$L_1: 2x + y = 2 \quad \dots (1)$$

$$L_2: 4x + 2y = 10 \quad \dots (2)$$

que al reemplazar (1) en (2) se llega a que $4 = 10$ (ABSURDO), y esto ocurre pues al tener las pendientes el mismo valor: $m_1 = m_2 = -2$ se concluye únicamente que las dos rectas **SON PARALELAS** $L_1 // L_2$, pero que no necesariamente tienen que ser coincidentes. Podemos ver que estas dos rectas dadas son paralelas, pero están separadas:

$$L_1: 2x + y = 2$$

$$L_2: 2x + y = 5$$



7.6 PROBLEMA .- Si $L: 3x + 4y - 2 = 0$, halle la ecuación de la recta L' tal que $L' \perp L$, y que pasa por $(4, 2)$.

SOLUCIÓN .- $L: 3x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow L': -4x + 3y + k = 0$

Y como $(4, 2) \in L'$ se cumple que $-4(4) + 3(2) + k = 0$

$\therefore k = 10$, $L': -4x + 3y + 10 = 0$.

8. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

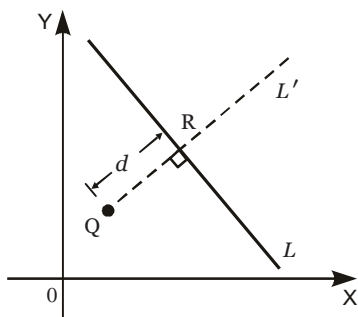
Dados un punto $Q = (x_1, y_1)$ y la recta L de ecuación

$L: ax + by + c = 0$ entonces la recta L' que pasa por Q y es perpendicular a la recta L tiene como ecuación: (VERIFICAR)

$$L': -bx + ay + (bx_1 - ay_1) = 0.$$

La distancia de Q a L es igual a la distancia de Q al punto $R \in L \cap L'$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de L y L' se obtienen las coordenadas del punto R :



$$x = (b^2x_1 - aby_1 - ac)/(a^2 + b^2)$$

$$y = \frac{a^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2} \Rightarrow (x - x_1)^2 = \frac{a^2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} = a^2k^2$$

$$(y - y_1)^2 = \frac{b^2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} = b^2k^2$$

donde $k = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$. Por lo tanto, $d = d[Q, L] = d[Q, R]$

$$\Rightarrow d = |k| \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{d[Q, L] = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}, \text{ donde } Q = (x_1, y_1) \text{ y } L: ax + by + c = 0.$$

8.1 EJEMPLOS.- Dados los puntos $A = (9, 1)$ y $B = (3, 4)$, las distancias respectivas a la recta $L: 3x - 4y + 7 = 0$ son:

$$d[A, L] = \frac{|3(9) - 4(1) + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6, \quad A = (9, 1)$$

$$d[B, L] = \frac{|3(3) - 4(4) + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{0}{5} = 0, \quad B = (3, 4).$$

Esto implica que el punto B **PERTENECE A LA RECTA** L , como se puede verificar sustituyendo las coordenadas del punto B en la ecuación de L .

8.2 PROBLEMA.- Demuestre que la distancia entre las Rectas Paralelas:

$$L_1: ax + by + C = 0 \quad \text{y} \quad L_2: ax + by + C' = 0$$

está dada por

$$d[L_1, L_2] = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

SOLUCIÓN.- i) Si $L_1 \parallel L_2$ y si son verticales entonces $b = 0$.

[Completar esta prueba como ejercicio]

ii) Si L_1 y L_2 *no son verticales* entonces $b \neq 0$,

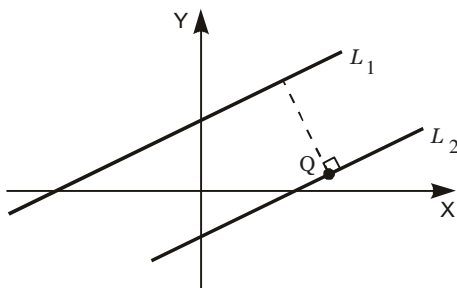
tomamos un punto $Q \in L_2$ cualquiera, digamos:

$$Q = (0, -c'/b)$$

$$\Rightarrow d[L_2, L_1] = d[Q, L_1]$$

$$= \frac{|a \cdot (0) + b(-\frac{c'}{b}) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d[L_2, L_1] = |c - c'| / \sqrt{a^2 + b^2}.$$



8.3 EJEMPLO.- La distancia entre las rectas $L_1 : 3x + 4y + 5 = 0$, y

$$L_2 : -6x - 8y + 20 = 0 \Rightarrow L_2 : 3x + 4y + 10 = 0$$

donde identificamos los valores de $c = 5$, $c' = -10$, está dada por

$$d[L_1, L_2] = \frac{|5 - (-10)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ unidades.}$$

9. ÁNGULO ENTRE RECTAS

Si θ es el ángulo entre L_1 y L_2 , medido en sentido *positivo* (ANTIHORARIO), y si α_1 y α_2 son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 respectivamente con $\alpha_1 < \alpha_2$ como en la figura, entonces:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En efecto,

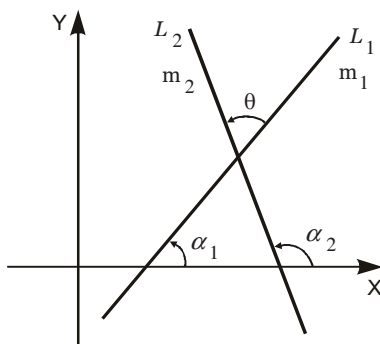
$$m_1 = \text{pendiente de } L_1 = \tan \alpha_1$$

$$m_2 = \text{pendiente de } L_2 = \tan \alpha_2$$

ÁNGULO ENTRE L_1 y L_2 :

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Así, la fórmula (*) viene de la relación:



$$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} , \quad \text{donde si :}$$

i) Si $\tan \theta > 0$ entonces θ es un ángulo **AGUDO**

ii) Si $\tan \theta < 0$ entonces θ es un ángulo **OBTUSO** .

Y si $\beta = \pi - \theta$ es el ángulo suplementario entre L_1 y L_2 : $\tan \beta = -\tan \theta$.

9.1 PROBLEMA.- Halle la ecuación de la recta L' que forma un ángulo de 45° con $L : 3x - y + 1 = 0$, y que pasa por $(0, 1)$.

SOLUCIÓN.- Sólo falta hallar la pendiente de L' pero hay dos posibles soluciones para L' y los denotamos L_1 y L_2 .

Como L tiene pendiente $m = 3$:

$$L_1 : \tan \theta_1 = \frac{m - m_1}{1 + m m_1}$$

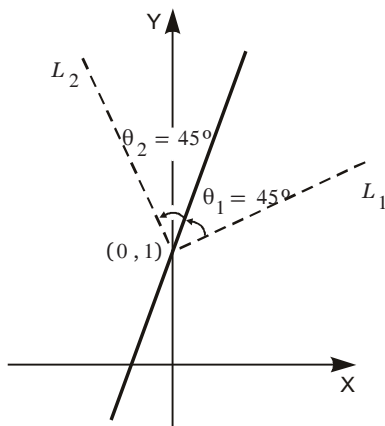
Y siendo $\theta_1 = 45^\circ = \theta_2$:

$$1 = \frac{3 - m_1}{1 + 3m_1} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{entonces } L_1 : y - 1 = \frac{1}{2}x$$

$$L_2 : \tan \theta_2 = \frac{m_2 - m}{1 + m m_2}$$

$$1 = \frac{m_2 - 3}{1 + 3m_2} \Rightarrow m_2 = -2 , \quad L_2 : y - 1 = -2x .$$



9.2 PROBLEMA.- Si θ es uno de los ángulos entre las rectas L_1 y L_2 ,

y si $|\tan \theta| = 2$, halle el valor de:

i) La tangente del ángulo agudo entre L_1 y L_2 .

ii) La tangente del ángulo obtuso entre L_1 y L_2 .

SOLUCIÓN.- Como $\tan \theta = \pm 2$ entonces

i) θ_1 agudo $\Rightarrow \tan \theta_1 = +2$ (pues $\tan \theta_1$ debe ser > 0)

ii) θ_2 obtuso $\Rightarrow \tan \theta_2 = -2$ (pues $\tan \theta_2$ debe ser < 0)

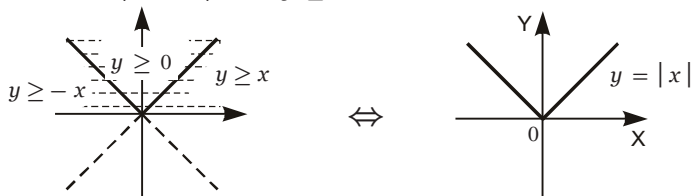
9.3 NOTA.- Las tangentes del ángulo agudo y del ángulo obtuso entre dos rectas sólo difieren en el signo.

10. GRÁFICAS QUE INVOLUCRAN EL VALOR ABSOLUTO

La ecuación $y = |x|$ es equivalente a la condición

$$y \geq 0 \wedge [x = y \vee x = -y] \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge [y = x \vee y = -x]$$

que equivale a considerar los puntos de ambas rectas: $y = x$, $y = -x$ pero solamente en el semiplano superior $y \geq 0$

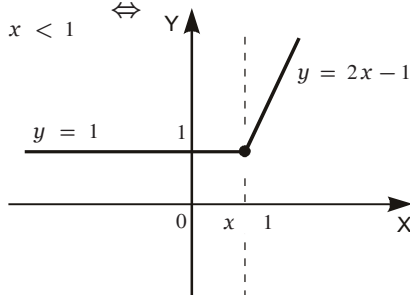


La ecuación $y = |x - 1| + x$ es equivalente a :

$$y = \begin{cases} x - 1 + x = 2x - 1, & \text{para } x \geq 1 \\ 1 - x + x = 1, & \text{para } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

que consiste de dos partes: la parte de la recta $y = 2x - 1$ correspondiente solamente a los valores de $x \geq 1$, y la parte de la recta



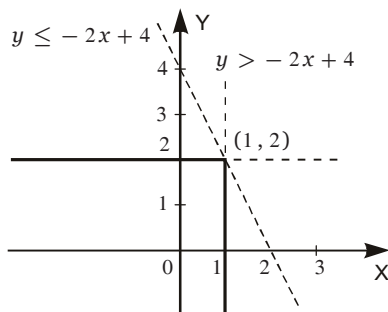
$y = 1$ (*horizontal*) correspondiente sólo a la parte del plano ubicada a la izquierda de $x = 1$, es decir: $x < 1$.

La ecuación $|y - 2x| = 4 - 2x - y$, que es equivalente a:

$$4 - 2x - y > 0 \wedge [y - 2x = 4 - 2x - y \vee y - 2x = -4 + 2x + y]$$

$$\Leftrightarrow y \leq -2x + 4 \wedge [y = 2 \vee x = 1]$$

consiste de aquellos puntos del plano que están en las rectas $y = 2$ (*horizontal*) y $x = 1$ (*vertical*) pero solamente aquellos que se encuentran debajo de la recta $y = -2x + 4$, es decir, en la región $y \leq -2x + 4$.



EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Grafique la relación $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - 1| = |y - 1| \}$.

2. Grafique e indique el dominio de la relación:

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < |x - 4| \leq 12 \}$$

3. Grafique e indique el dominio y el rango de la relación

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \geq x^2 \wedge |y| < x \}.$$

4. Grafique la región S indicando su dominio y rango:

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \leq |x| \leq 3 \}.$$

5. Grafique la región definida por la relación

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |y| \geq x^2, |y| \leq |x| \}$$

e indique su dominio y rango.

6. Grafique la región determinada por la relación S^{-1} , para la relación S del problema anterior.

SUG.- Utilice la recta $y = x$ como espejo doble.

7. Grafique la región definida por la relación inversa S^{-1} donde

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{y} \geq x \}$$

$$\mathbf{SUG.-} \sqrt{y} \geq x \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge [x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge y \geq x^2)]$$

8. Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $(2, 1)$ y $(3, 4)$

b) $(6, -3)$ y $(-2, 1)$

c) $(0, 1)$ y $(1, 0)$

9. Encuentre el valor de las pendientes de las rectas que son bisectrices entre las rectas $y = x$ y el EJE X.

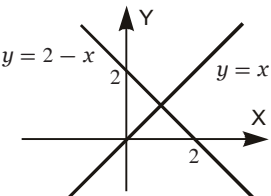
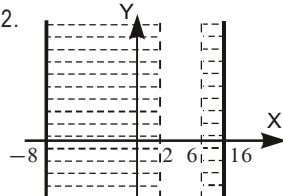
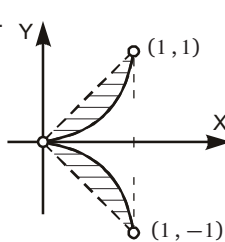
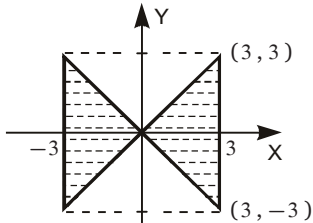
SUG.- $m = \tan(\alpha/2)$ donde $\tan \alpha = 1 = (\text{Pendiente de } y = x)$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)}, \text{ y despeje } \tan(\alpha/2).$$

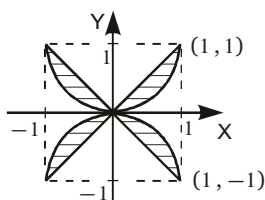
10. Una recta con pendiente negativa pasa por $(-1, 1)$ y dista $\sqrt{5}$ unidades del punto $A = (4, 1)$. Halle el valor de su pendiente y la ecuación de dicha recta.
11. Sea $P = (a, b)$ un punto del plano tal que la recta OP que lo une con el origen tiene pendiente -3 y la recta MP trazada por los puntos P y $M = (3, 1)$ tiene pendiente 2 . Halle el valor de $a + b$.
12. Halle las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 que pasan por $(5, 6)$ y tales que
 L_1 es paralela a $2x + y + 1 = 0$, y
 L_2 es perpendicular a $3x + 2y + 2 = 0$.
13. Halle el ángulo obtuso θ que forman las rectas L_1 con pendiente k y la recta L_2 con pendiente $(k - 1)/(k + 1)$.
SUG.- Halle $\tan \theta$, con valor negativo.
14. Una recta cuya ordenada en el origen es tres veces la de $2x - y + 1 = 0$ (en el origen) es *dos veces* la de $2y - 4x + 12 = 0$, forma un triángulo en el primer cuadrante con los ejes coordenados. Halle su área.
15. Halle la ecuación de la recta L que pasa por el origen de coordenadas sabiendo que la longitud de su segmento comprendido entre las rectas
 $L_1: 2x - y + 5 = 0$ y $L_2: 2x - y + 10 = 0$ es $\sqrt{10}$.
 Se sabe además que la recta no pasa por el segundo cuadrante.
SUG.- Bosqueeje una gráfica aproximada.
16. Dada la familia de rectas $2kx + y + k^2 = 0$, halle la tangente del ángulo agudo entre las dos rectas de la familia que pasa por $(1, -8)$.
17. La ecuación $x + y - 2 + k(x - y + 6) = 0$ representa una familia de rectas que pasan **todas** por un mismo punto. Halle las coordenadas de este punto.
18. Una recta que pasa por el origen corta a las rectas $x - y = 3$ y $y = 2x + 4$ en los puntos A y B respectivamente. Si el origen es punto medio del segmento AB , halle la abscisa del punto A .

19. Entre las rectas que pasan por $A = (3, 0)$ halle una manera que el segmento comprendido entre las rectas $2x - y = 2$ y $x + y + 3 = 0$ sea dividido por la mitad por el punto A .
20. Uno de los vértices de un triángulo es $A = (3, -1)$ y las ecuaciones de la bisectriz y de la mediana trazadas desde vértices diferentes son respectivamente $x - 4y + 10 = 0$ y $6x + 10y - 59 = 0$. Halle la pendiente del lado que contiene al vértice A y al vértice que se encuentra en la bisectriz.
21. Halle la gráfica de las relaciones determinadas por las ecuaciones
 - a) $y = \frac{|x|}{x} - 1$, b) $y = |x - 2| - x$.
22. Una recta L con pendiente positiva pasa por $A = (1, -2)$ y forma con las rectas $3x + 4y - 2 = 0$ y $4x + 3y + 1 = 0$ un triángulo isósceles cuyos lados iguales están sobre las rectas dadas. Halle la ecuación de L .
23. Un rayo de luz corre a lo largo de la recta $x - 2y + 5 = 0$ hasta llegar al espejo cuya ecuación es $3x - 2y + 7 = 0$ en el cual se refleja. Halle la ecuación de la recta L en la que el rayo reflejado se encuentra.
24. Halle la gráfica de la relación $A \cap B$ donde
 $A = \{ (x, y) / x - 1 \leq y \leq x + 1 \}$, $B = \{ (x, y) / 1 \leq x \leq 3 \}$.

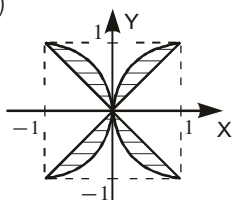
CLAVE DE RESPUESTAS

1. 
 2. 
 3. 
 4. 
2. $\text{Dom } R = [-8, 2) \cup (6, 16]$
 3. $\text{Dom } S = \langle 0, 1 \rangle$
 $\text{Rang } S = \langle -1, 1 \rangle - \{0\}$
 4. $\text{Dom } S = [-3, 3]$
 $\text{Rang } S = [-3, 3]$

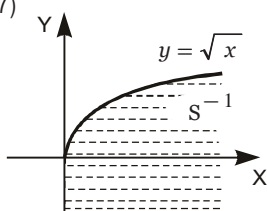
5)



6)



7)

8. a) $m = 3$, b) $m = -1/2$, c) $m = -1$ 9. $m_1 = \sqrt{2} - 1$, $m_2 = -(\sqrt{2} + 1)$. Note que ambas bisectrices son perpendiculares entre sí. (Esto siempre se presenta así.)10. $m = -1/2$, $L: y = 1 - (1/2)(x + 1)$ pues

$$L: y = mx + b \quad , \quad (-1, 1) \in L \Rightarrow b = m + 1 \quad , \quad \text{de donde}$$

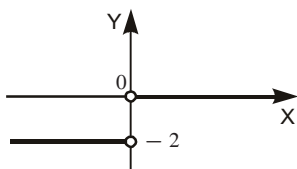
$$L: y = mx + (m + 1) \quad , \quad \text{o también } mx - y + (m + 1) = 0$$

$$\text{Luego, } \sqrt{5} = d[L; (4, 1)] = |4m - 1 + (m + 1)| / \sqrt{m^2 + 1}$$

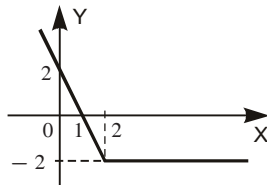
$$\Rightarrow m = \pm 1/2 \quad \dots \quad \text{y elegimos el signo } (-) .$$

11. $a + b = -2$ pues $\frac{b-1}{a-3} = 2 \wedge b = -3a \Rightarrow a = 1$, $b = -3$.12. $m_1 = -2 \Rightarrow L_1: y - 6 = -2(x - 5)$ $m_2 = 2/3 \Rightarrow L_2: y - 6 = (2/3)(x - 5)$ 13. $\tan \theta = \pm \left[\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right] \Rightarrow \tan \theta = -1$, $\theta = 3\pi/4$.14. $9u^2$, 15. $m = 1/3$, $L: x = 3y$.16. $\tan \theta = 12/31$, 17. $A = (-2, 4)$, 18. 1 , $A = (1, -2)$.19. $8x - y - 24 = 0$, 20. $m = 6/7$.

21. a)

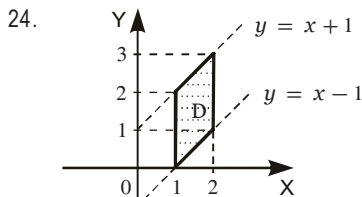


b)



22. $m = 1$, $L: y + 2 = x - 1$.

23. $m = \frac{29}{2}$, $L: y - 2 = \frac{29}{2}(x + 1)$



11. GRÁFICAS DE ECUACIONES. PARÁBOLAS. CIRCUNFERENCIAS

1. GRÁFICA DE LA PARÁBOLA

Ya vimos que la gráfica de la ecuación de primer grado de la forma $ax + by + c = 0$ es una recta. Ahora conoceremos las gráficas de las ecuaciones de segundo grado de la forma

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$$

Esta completación de cuadrados siempre se puede realizar, donde h y k son ciertas constantes que dependen de a , b y c , y que pueden tomar cualquier valor real.

1.1 DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

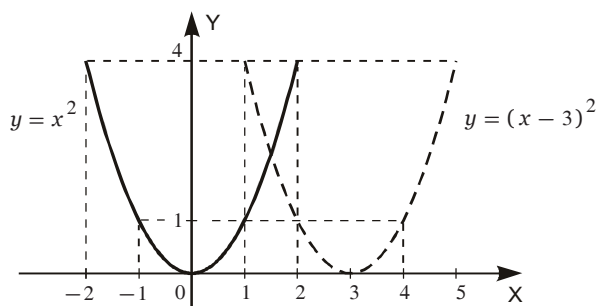
GRÁFICA DE LAS PARÁBOLAS $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$:

Para $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = (x - 3)^2$:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9



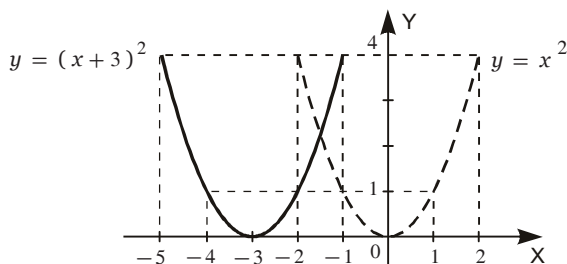
1.2 NOTA.- La forma de la gráfica de la ecuación $y = (x - 3)^2$ es la misma que la de $y = x^2$, a la que se le ha desplazado 3 unidades HACIA LA DERECHA.

a) La gráfica de $y = a(x - h)^2$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$

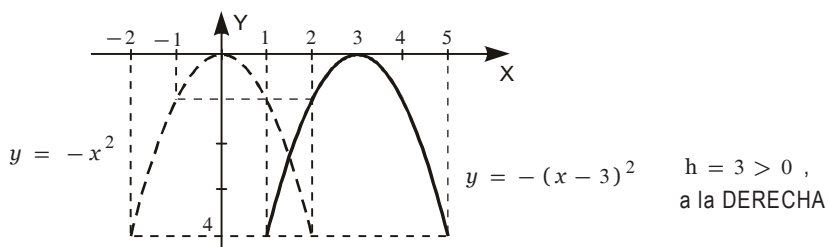
a la que se le desplazado $|h|$ unidades **HORIZONTALMENTE** y

- HACIA LA DERECHA si $h > 0$
- HACIA LA IZQUIERDA si $h < 0$.

Así, la gráfica de $y = (x + 3)^2 = [x - (-3)]^2$ es, para $h = -3$:



GRÁFICAS DE : $y = -x^2$ y $y = -(x - 3)^2$:



1.3 NOTA.- La gráfica de $y = -x^2$ tiene la misma forma que la de $y = x^2$ **pero volteada, como si el EJE X actuara como un ESPEJO** y ahí se reflejara la gráfica de $y = x^2$.

1.4 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES.-

GRÁFICAS DE : $y = x^2$, $y = x^2 + 1$

$y = x^2$:

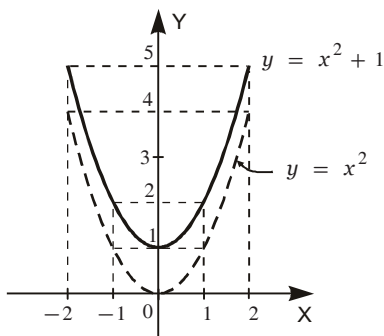
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

$y = x^2 + 1$:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

Observe que la gráfica de $y = x^2 + 1$ tiene la misma forma que la de

$y = x^2$, a la cual se le ha subido **1** unidad VERTICALMENTE.

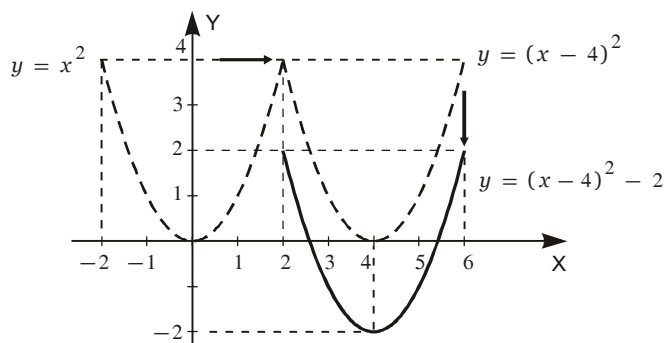


1.5 NOTA .- En general, la gráfica de la ecuación $y = a(x - h)^2 + k$ tiene la misma forma que la de $y = a(x - h)^2$ a la que se le ha desplazado $|k|$ unidades, **VERTICALMENTE**:

- HACIA ARRIBA, si $k > 0$
- HACIA ABAJO, si $k < 0$

Combinando las NOTAS (1.2) y (1.5) podemos bosquejar la gráfica de $y = (x - 4)^2 - 2$, tomando la gráfica de $y = x^2$ y desplazándola

$|h| = |4| = 4$ unidades HACIA LA DERECHA ($h = 4 > 0$), y luego
 $|k| = |-2| = 2$ unidades HACIA ABAJO ($k = -2 < 0$):



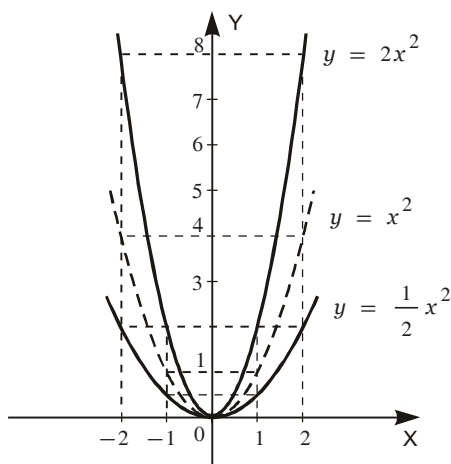
Analicemos ahora la mayor o menor
 abertura de estas parábolas.

GRÁFICAS DE :

$$y = x^2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = 2x^2$$

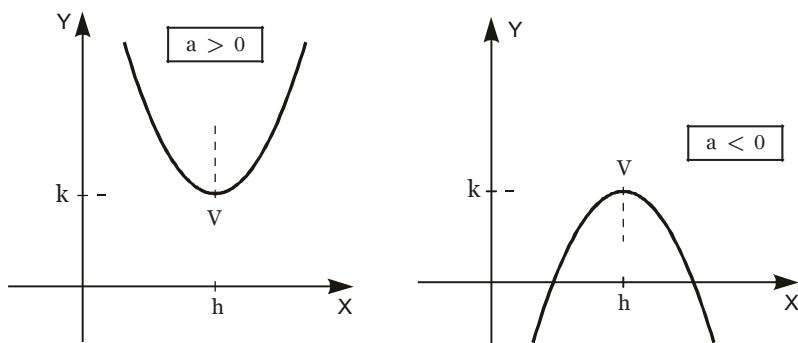


1.6 NOTA .- La gráfica de $y = ax^2$ es :

- a) **MÁS ANGOSTA** que la de $y = x^2$ si $|a| > 1$
- b) **MÁS ANCHA** que la de $y = x^2$ si $0 < |a| < 1$.

Al punto $V = (h, k)$ en $y = a(x - h)^2 + k$ se le llama **VÉRTICE DE LA PARÁBOLA**, siendo su abscisa: $h = -b/(2a)$.

GRÁFICAS DE $y = a(x - h)^2 + k$:



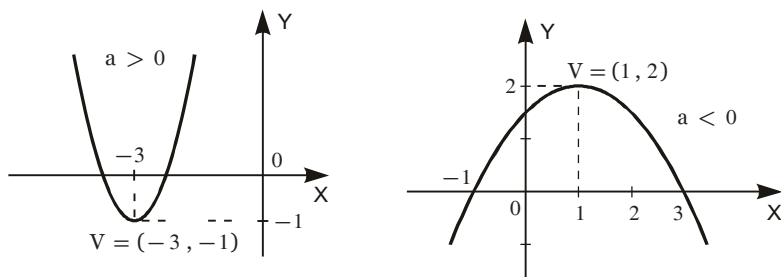
1.7 PROBLEMA .- Bosqueje las gráficas de las ecuaciones:

a) $y = 2x^2 + 12x + 7$, b) $2y = 2x - x^2 + 3$.

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados:

a) $y = 2(x + 3)^2 - 1 \Rightarrow$ VÉRTICE $V = (h, k) = (-3, -1)$, $a = 2 > 0$

b) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2 \Rightarrow$ VÉRTICE $V = (h, k) = (1, 2)$, $a = -\frac{1}{2} < 0$



1.8 GRÁFICAS QUE INVOLUCRAN EL VALOR ABSOLUTO

Aquí bosquejaremos las gráficas de las ecuaciones de la forma :

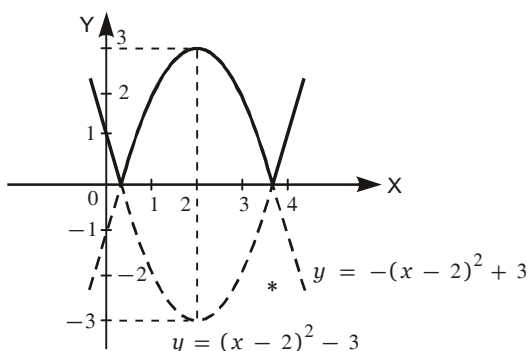
$$y = |a(x - h)^2 + k|$$

Observe que la ordenada y debe satisfacer $y \geq 0$ (semiplano superior). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} y &= |-(x - 2)^2 + 3| \\ \Leftrightarrow y &= |(x - 2)^2 - 3| \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \wedge [y = (x - 2)^2 - 3 \vee y = -(x - 2)^2 + 3]$$

cuyos puntos, de cada parábola,
se encuentran en el semiplano
superior $y \geq 0$:



La forma de ambas en la misma, solamente que una de ellas está dirigida hacia arriba con vértice $(2, -3)$ y la otra hacia abajo con vértice $(2, 3)$.

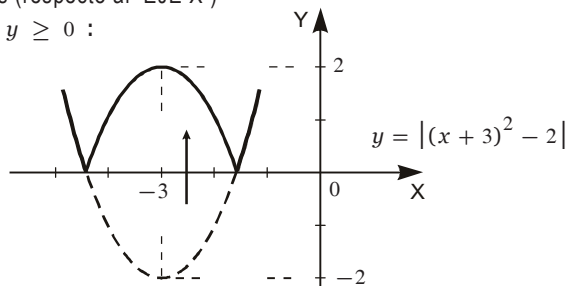
La gráfica resultante (curva continua), se obtiene también considerando al EJE X como un ESPEJO, y donde la parte de la parábola $y = (x - 2)^2 - 3$ que se encuentra en el *semiplano inferior* $y \leq 0$ (*) se ha reflejado hacia el semiplano superior $y \geq 0$ (como si hubiese girado en 180° alrededor del EJE X.)

MÉTODO PRÁCTICO :

Para $y = |a(x - h)^2 + h|$, donde se ha acomodado de manera que $a > 0$, se grafica $y = a(x - h)^2 + k$, y si alguna parte de esta parábola cae en el semiplano inferior $y \leq 0$, esta parte se ha de reflejar en el ESPEJO (EJE X) "girando" hacia el semiplano superior.

1.9 EJEMPLO.- Para graficar $y = |-(x + 3)^2 + 2| = |(x + 3)^2 - 2|$ se comienza graficando la parábola $y = (x + 3)^2 - 2$, y luego lo que se encuentre en la zona $y \leq 0$ lo reflejamos (respecto al EJE X)

HACIA LA PARTE SUPERIOR $y \geq 0$:



2. LA CIRCUNFERENCIA

Una **CIRCUNFERENCIA** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que equidistan de un punto fijo $C = (h, k)$ llamado el **CENTRO**. Al valor de dicha distancia constante se le llama **RADIO** de la circunferencia.

$$P(x, y), C = (h, k)$$

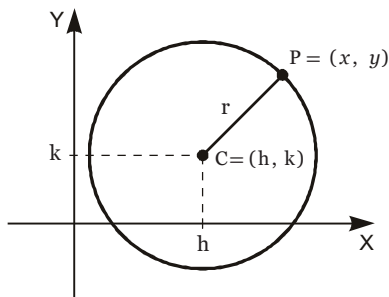
$$\text{CONDICIÓN: } d(P, C) = r, r > 0$$

es decir

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$\Leftrightarrow$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



EJEMPLOS .-

1. La ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ($= 5^2$) corresponde a una circunferencia con centro $(h, k) = (1, 3)$, y radio $r = 5$.
2. La ecuación: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$ ($= (\sqrt{6})^2$) corresponde a una circunferencia con centro $(h, k) = (-2, 1)$, y radio $r = \sqrt{6}$.
3. La ecuación $(y + 2)^2 + (x - 1)^2 = 36$ corresponde a una circunferencia con centro $(h, k) = (1, -2)$ y radio $r = 6$.

2.1 EJERCICIO .- Especifique qué tipo de gráfica corresponde a la ecuación:

$$16y - 8x + 2x^2 + 2y^2 + 25 = 0.$$

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados para cada variable:

$$2(x - 2)^2 - 8 + 2(y + 4)^2 - 32 + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 15/2$$

que corresponde a una circunferencia de centro $(h, k) = (2, -4)$ y radio $r = \sqrt{15/2}$.

2.2 NOTA .- 1) Puesto que: $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$,

$$\text{entonces } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \wedge y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3, y = 2$$

que tiene solución gráfica la intersección de la recta $x = 3$ y con la recta $y = 2$, es decir, el punto $(-3, 2)$ es el único punto del plano que satisface la ecuación.

II) Asimismo, $a^2 + b^2 = -k$ ($k > 0$) no tiene solución real para $\underline{a}$ y $\underline{b}$, entonces la ecuación

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 2 = 0$$

no tiene representación gráfica en el plano XY, pues

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -2 \quad \text{tiene conjunto solución VACÍO.}$$

Ambos casos (I) y (II) se consideran "*Casos Especiales*" de circunferencias.

2.3 TEOREMA .- Toda ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

corresponde a una Circunferencia o a uno de sus Casos Especiales.

PRUEBA.- En efecto, al completar cuadrados:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F) \quad (*)$$

- 1) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, entonces se tiene una circunferencia de centro $(-D/2, -E/2)$.
- 2) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, (*) corresponde al único punto $(-D/2, -E/2)$.
- 3) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, **NO EXISTE REPRESENTACIÓN GRÁFICA.**

2.4 PROBLEMA .- Halle el radio de la circunferencia que pasa por los puntos

$$A = (3, 3), \quad B = (0, -6), \quad y \quad C = (-2, -2).$$

SOLUCIÓN .- Sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ su ecuación; como A, B y C pertenecen a esta circunferencia entonces satisfacen su ecuación:

- Para A : $9 + 9 + 3D + 3E + F = 0 \Rightarrow 3D + 3E + F = -18$
- Para B : $0 + 36 + 0 - 6E + F = 0 \Rightarrow -6E + F = -36$
- Para C : $4 + 4 - 2D - 2E + F = 0 \Rightarrow -2D - 2E + F = -8$

Resolviendo el sistema: $D = -6$, $E = 4$, $F = -12$, y reemplazando:

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25,$$

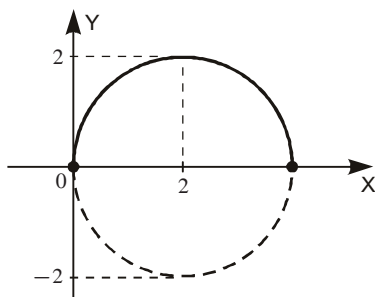
que tiene como centro $C = (3, -2)$ y radio $r = 5$.

2.5 PROBLEMA .- Grafique la ecuación : $y = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$.

SOLUCIÓN .- Observe que la ecuación implica $y \geq 0$ (Semiplano superior) y que en forma equivalente se tiene la ecuación

$$y^2 = 4 - (x - 2)^2, \quad y \geq 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$$

cuya gráfica corresponde a la de la circunferencia de centro $C = (2, 0)$ y radio $r = 2$, pero solamente la parte que cae en la región $y \geq 0$:



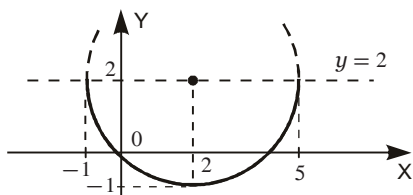
2.6 EJERCICIO .- Grafique la ecuación: $y = 2 - \sqrt{5 + 4x - x^2}$.

SOLUCIÓN .- Observemos que $y \leq 2$, además se tiene

$$(y - 2)^2 = 9 - (x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

de modo que la gráfica buscada corresponde a la parte de la circunferencia de centro $(2, 2)$ y radio $r = 3$, que se encuentra en la región

$$y \leq 2 .$$

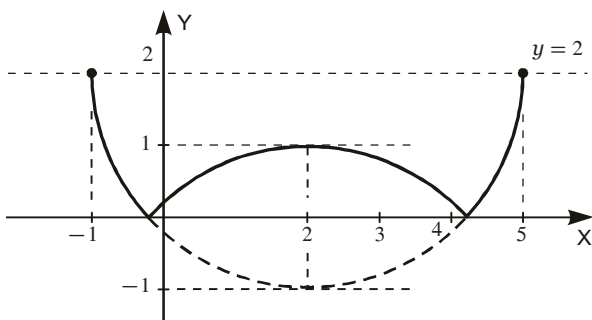


2.7 PROBLEMA .- Grafique $y = |2 - \sqrt{9 - (x + 2)^2}|$.

SOLUCIÓN .- Se sigue el mismo procedimiento que para $y = |a(x - h)^2 + k|$ en el que el EJE X hace el papel de un ESPEJO para reflejar hacia el semiplano superior $y \geq 0$ todo lo que está en el semiplano inferior $y \leq 0$.

Graficamos primero $y = 2 - \sqrt{9 - (x + 2)^2}$. Observe que $y \leq 2$ y que ade-

más es equivalente a $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$, $y \leq 2$ la cual ya graficamos en el problema anterior, pero que ahora le aplicamos el valor absoluto: (curva gruesa continua)



2.8 EJERCICIO .- Grafique la relación definida por:

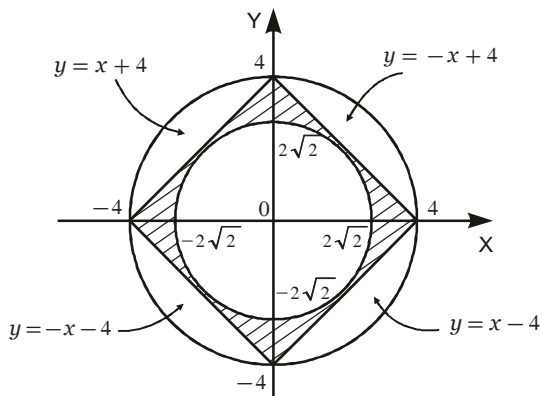
$$\mathcal{R} = \{ (x, y) / 8 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \wedge |x| + |y| \leq 4 \}.$$

SOLUCIÓN .- $\mathcal{R}$ es la intersección de las regiones (i) y (ii):

i) $8 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ que corresponde a la zona de barrido de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ desde $r^2 = 8$ hasta $r^2 = 16$, es decir, desde $r = 2\sqrt{2}$ hasta $r = 4$.

ii) $y \geq 0$: $|x| \leq 4 - y \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4 \wedge y - 4 \leq x \leq 4 - y$
 $\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4 \wedge y \leq x + 4 \wedge y \leq -x + 4$

$y < 0$: $|x| \leq y + 4 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 0 \wedge -4 - y \leq x \leq y + 4$
 $\Leftrightarrow -4 \leq y \leq 0 \wedge y \geq -x - 4 \wedge y \geq x - 4$



2.9 RECTAS TANGENTES

La ecuación de 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- 1) Tiene una única solución $\Leftrightarrow$ su **DISCRIMINANTE** $\Delta = b^2 - 4ac = \mathbf{CERO}$,
- 2) Tiene dos raíces reales distintas $\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$
- 3) No tiene ninguna solución real $\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$.

En general, este criterio se utiliza para hallar una recta L_T : $y = mx + b$

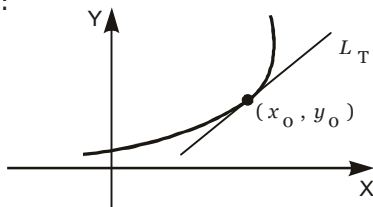
TANGENTE a una curva C cuya ecuación cuadrática tiene la forma:

$$C: Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (*)$$

para lo cual se reemplaza en (*) la relación $y = mx + b$ obteniéndose una ecuación de 2º grado en una sola variable:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y como esta ecuación **DEBE TENER UNA ÚNICA SOLUCIÓN** por la **CONDICIÓN DE TANGENCIA**, entonces debe cumplirse que



$$\mathbf{DISCRIMINANTE} = 0 \quad \text{es decir} \quad \underline{b^2 - 4ac = 0}.$$

2.10 EJEMPLO .- Halle el valor de $16(n - m)$ si la recta $y = 2x + m$ ha de ser tangente a la parábola $y = 6x^2 - x + n$.

SOLUCIÓN .- Reemplazamos $y = 2x + m$ en la ecuación de la parábola:

$$y = 6x^2 - x + n \Rightarrow 6x^2 - 3x + (n - m) = 0$$

y como debe satisfacer la Condición de TANGENCIA: **DISCRIMINANTE** = 0 :

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{es decir} \quad 9 - 4(6)(n - m) = 0 \Rightarrow 16(n - m) = 6.$$

2.11 PROBLEMA .- Halle la ecuación de las dos rectas tangentes trazadas desde el punto $(2, 7)$ a la circunferencia: $x^2 + y^2 = 6x + 16$.

SOLUCIÓN .- Sea $y = mx + b$ una ecuación genérica de la recta tangente L_T ,

$$\text{y como } (2, 7) \in L_T \text{ entonces } 7 = 2m + b \Rightarrow b = 7 - 2m$$

Reemplazando en $y = mx + b$: $y = mx + 7 - 2m$

Reemplazando en la circunferencia: $x^2 + (mx + 7 - 2m)^2 = 6x + 16$

$$\Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 2(2m^2 - 7m + 3)x + (4m^2 - 28m + 33) = 0.$$

Aquí aplicamos la Condición de Tangencia DISCRIMINANTE = CERO :

$$12m^2 - 7m - 12 = 0 = (3m - 4)(4m + 3) \Rightarrow m_1 = \frac{4}{3}, \quad m_2 = -\frac{3}{4}$$

$\therefore$ Existen **DOS RECTAS TANGENTES** que pasan por $(2, 7)$, con ecuaciones :

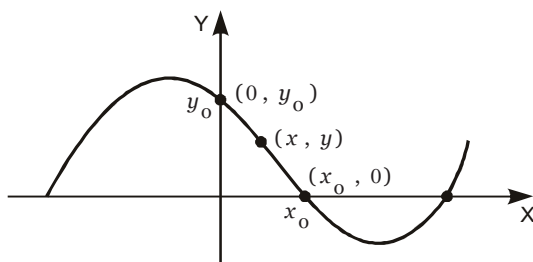
$$L_1: y - 7 = \frac{4}{3}(x - 2) \quad , \quad L_2: y - 7 = \left(-\frac{3}{4}\right)(x - 2) .$$

12. CRITERIOS GENERALES PARA GRAFICAR ECUACIONES

I) INTERCEPTOS CON LOS EJES COORDENADOS

a) **CON EL EJE X :** Se hace $y = 0$ en la ecuación y luego se despejan los valores correspondientes de x .

b) **CON EL EJE Y :** Se hace $x = 0$ en la ecuación y luego se despejan los valores correspondientes de y .



por ejemplo, en la ecuación $(x - 3)^2 + y^2 = 25$.

❖ si $x = 0$: $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (0, 4)$ y $(0, -4)$
son puntos de la gráfica, en el Eje Y.

❖ si $y = 0$: $x = 3 \pm 5 \Rightarrow x = 8, -2 \Rightarrow (8, 0)$ y $(-2, 0)$
son puntos de la gráfica, en el eje X .

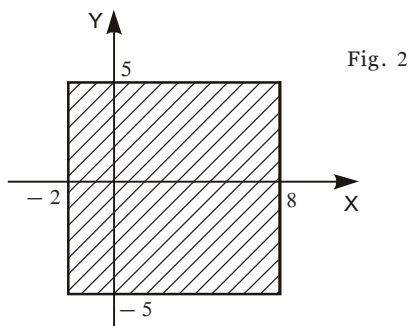
II) EXTENSIÓN

Se trata de indicar los intervalos máximos en los cuales las variables x y y toman valores permisibles para la ecuación dada. Por ejemplo, en la ecuación $(x - 3)^2 + y^2 = 25$ al despejar la variable x , se obtiene $x = 3 \pm \sqrt{25 - y^2}$, el cual tiene sentido para aquellos valores y tales que: $-5 \leq y \leq 5$.

Análogamente, despejando la variable y : $y = \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2}$, vemos que ésta será válida sólo para aquellos valores x tales que

$$(x - 3)^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-2, 8].$$

Así, la gráfica está contenida en la región del plano limitado por el siguiente rectángulo que determina su extensión en el plano (Fig. 2).

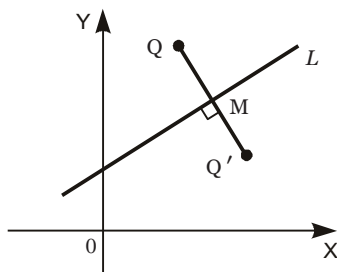


III) SIMETRÍAS

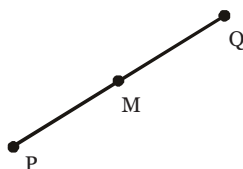
Sea L una recta y Q un punto cualquiera, entonces se dice que el punto Q' es el **SIMÉTRICO DE Q con respecto a la recta L** si

- $L \perp \overline{QQ'}$, ($\overline{QQ'}$ es el segmento que va de Q a Q'), y si
- L intercepta al segmento $\overline{QQ'}$ en su punto medio M .

La recta L se llama **EJE DE SIMETRÍA** de los dos puntos Q y Q' , y actúa como un **ESPEJO**. Se dice además que dos puntos P y Q son **SIMÉTRICOS ENTRE SÍ CON RESPECTO A UN PUNTO M** , si M es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.



Este punto M se denomina
CENTRO DE SIMETRÍA.



a) SIMETRÍA RESPECTO AL EJE X

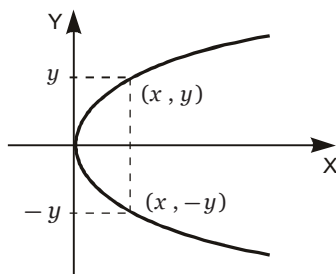
Si $\forall (x, y) : (x, y) \in G \text{ (gráfica)} \Rightarrow (x, -y) \in G$ también, entonces se dice que la gráfica G es **SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE X**. Esto se refleja en la ecuación, la cual **NO VARÍA** si se reemplaza y por $-y$.

Por ejemplo, en la ecuación $x = y^2$:

sustituimos y por $-y$:

$$\begin{aligned} x &= (-y)^2 \\ &= y^2 \\ \Rightarrow x &= y^2 \end{aligned}$$

y vemos que la ecuación original **NO VARÍA**.



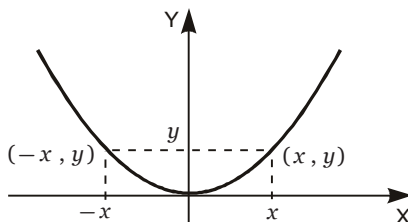
b) SIMETRÍA RESPECTO AL EJE Y

Esta simetría ocurre si: $(x, y) \in G \Rightarrow (-x, y) \in G$.

Y la ecuación **NO DEBE VARIAR** si se reemplaza x por $-x$.

Por ejemplo en $y = x^2$:

$$\begin{aligned} y &= (-x)^2 = x^2, \\ \text{(NO VARÍA)} \end{aligned}$$



c) SIMETRÍA RESPECTO AL ORIGEN

Se presenta cuando: $(x, y) \in G \Rightarrow (-x, -y) \in G$

La ecuación por lo tanto **NO DEBE VARIAR** si se sustituye simultáneamente

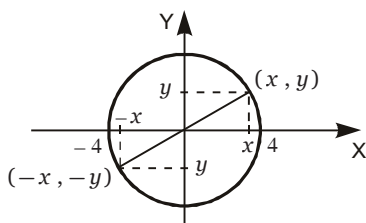
$$y \quad \begin{cases} x & \text{por } -x \\ y & \text{por } -y \end{cases}$$

Por ejemplo, en $x^2 + y^2 = 16$:

$$(-x)^2 + (-y)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16 ,$$

la ecuación NO VARÍA.



IV) ASÍNTOTAS

Si la distancia de un punto de la curva a una recta fija L va disminuyendo, *tendiendo a cero*, conforme el punto se aleja ilimitadamente del origen, entonces dicha recta recibe el nombre de **ASÍNTOTA DE LA CURVA**.

IV.1) REGLA PARA HALLAR LAS ASÍNTOTAS

1) **ASÍNTOTAS HORIZONTALES** : Se despeja $\underline{x}$ en términos de $\underline{y}$, se hallan los valores de $\underline{y}$ que hacen *CERO* al denominador (si hubieran) , y si es que para tales $\underline{y}$ la expresión NO SE HACE $\frac{0}{0}$ entonces dichos valores de $\underline{y}$ coincidirán con las ecuaciones de las rectas asíntotas horizontales.

2) **ASÍNTOTAS VERTICALES** : Se despeja $\underline{y}$ en términos de $\underline{x}$, se hallan los valores de $\underline{x}$ que *ANULAN* al denominador (si hubieran), y si para tales $\underline{x}$ la expresión NO SE HACE $\frac{0}{0}$ entonces dichos valores de $\underline{x}$ corresponderán a las rectas asíntotas verticales.

EJEMPLO.- Asíntotas de la gráfica de : $xy - y + 1 = 0$.

a) Despejando x : $x = \frac{y-1}{y}$... (*), vemos que el denominador se anula para $y = 0$. Al reemplazar este valor en (*) resulta :

$$x = \frac{0-1}{0} = -\frac{1}{0} \quad (\text{diferente de } \frac{0}{0})$$

∴ La ecuación $y = 0$ (Eje X) representa la única **asíntota horizontal**.

- b) Despejando y : $y = \frac{1}{1-x}$ observamos que $x = 1$ es la única **asíntota vertical** de la curva dada.

IV.2) CONSTRUCCIÓN DE UNA CURVA

Graficaremos la ecuación : $x^2 y^2 = 1$.

1. a) INTERCEPTOS CON EL EJE X :

Hacemos $y = 0$ en la ecuación dada resultando: $0 = 1$ lo cual es ABSURDO; ello implica que la gráfica nunca corta al Eje X .

b) INTERCEPTOS CON EL EJE Y : No existen (¿Por qué ?)

2. EXTENSIÓN : $y^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x \neq 0$, es decir $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Análogamente, como $x^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y \neq 0$, entonces $y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. SIMETRÍAS.-

- Es simétrica respecto al EJE X , pues su ecuación no varía al reemplazar y por $-y$.
- Es simétrica respecto al EJE Y , pues su ecuación no varía al reemplazar x por $-x$.
- Es simétrica respecto al ORIGEN también. (¿Por qué ?)

Debido a estos resultados sólo será suficiente graficar la ecuación en el primer cuadrante, y el resto se completará por simples simetrías.

4. ASÍNTOTAS.-

- $y = \pm \frac{1}{x}$... vemos que $x = 0$ [EJE Y] es la única ASÍNTOTA VERTICAL .
- $x = \pm \frac{1}{y}$... vemos que $y = 0$ [EJE X] es la única ASÍNTOTA HORIZONTAL .

TABULACIÓN.-

x	1	2	3	4	5	1/3	1/4
y	± 1	± 0.6	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$	± 0.2	3	4