



Introducción a la teoría de la probabilidad

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ

PRIMER CURSO



**MIGUEL ÁNGEL
GARCÍA ÁLVAREZ**

cursó la licenciatura en matemáticas
en la Facultad de Ciencias de la UNAM.
Realizó sus estudios de posgrado, en teoría de
los procesos estocásticos, en la Universidad
de Estrasburgo, bajo la dirección del doctor
Paul André Meyer. Actualmente es profesor
titular del Departamento de Matemáticas
de la UNAM.

SECCIÓN DE OBRAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Primer curso

Comité de Selección

Dr. Antonio Alonso
Dr. Francisco Bolívar Zapata
Dr. Javier Bracho
Dr. Juan Luis Cifuentes
Dra. Rosalinda Contreras
Dr. Jorge Flores Valdés
Dr. Juan Ramón de la Fuente
Dr. Leopoldo García-Colín Scherer
Dr. Adolfo Guzmán Arenas
Dr. Gonzalo Halffter
Dr. Jaime Martuscelli
Dra. Isaura Meza
Dr. José Luis Morán
Dr. Héctor Nava Jaimes
Dr. Manuel Peimbert
Dr. José Antonio de la Peña
Dr. Ruy Pérez Tamayo
Dr. Julio Rubio Oca
Dr. José Sarukhán
Dr. Guillermo Soberón
Dr. Elías Trabulse

Coordinadora

María del Carmen Farías R.

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD



Primer curso



FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición, 2005
Primera reimpresión, 2008

García Álvarez, Miguel Ángel

Introducción a la teoría de la probabilidad. Primer curso / Miguel Ángel García Álvarez. — México : FCE, 2005

454 p. : il. ; 23 × 17 cm — (Colec. Obras de Ciencia y Tecnología)

ISBN 978-968-16-7514-1 (primer curso)
978-968-16-7578-3 (obra completa)

1. Probabilidad, teoría de 2. Probabilidad — Historia
3. Matemáticas I. Ser. II. t.

LC QA273.2

Dewey 519.2 G 532i

Distribución mundial

Comentarios y sugerencias: laciencia@fondodeculturaeconomica.com
www.fondodeculturaeconomica.com
Tel. (55)5227-4672 Fax (55)5227-4694



Empresa certificada ISO 9001: 2000

D. R. © 2005, FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
Carretera Picacho-Ajusco, 227, 14738 México, D. F.

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra —incluido el diseño tipográfico y de portada—, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento por escrito del editor.

ISBN 978-968-16-7514-1 (Primer curso)
ISBN 978-968-16-7578-3 (obra completa)

Impreso en México • *Printed in Mexico*

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	11
NOTACIÓN	15
UN POCO DE HISTORIA	17
Bibliografía	23

PRIMERA PARTE

El cálculo de probabilidades

[27]

I. EL MODELO MATEMÁTICO	29
I.1 Experimentos aleatorios	29
I.2 Eventos	34
I.3 Principio de regularidad de las frecuencias	37
I.4 El concepto de probabilidad	39
I.5 Espacios muestrales	40
I.6 Representación de eventos	42
I.7 Composición de eventos	44
I.8 Funciones de probabilidad	48
I.9 Ejercicios	50
II. LAS REGLAS BÁSICAS	51
II.1 Algunas propiedades elementales	51
II.2 Propiedad de la aditividad finita	52
II.3 Regla de la suma	53
II.4 Elecciones al azar y resultados equiprobables	54
II.5 probabilidad condicional	57
II.6 Regla del producto	62
II.7 Independencia estocástica	66
II.8 Interpretación objetiva y subjetiva de la probabilidad	75

II.9 Ejercicios	77
III. MUESTREO ALEATORIO	85
III.1 Muestreo aleatorio con reemplazo	85
III.2 Muestreo aleatorio ordenado sin reemplazo	87
III.3 Muestreo aleatorio no ordenado sin reemplazo	89
III.4 Coeficientes binomiales	99
III.5 Ejercicios	102
IV. COMBINANDO LAS REGLAS BÁSICAS	111
IV.1 Regla de la probabilidad total	111
IV.2 Regla de Bayes	124
IV.3 Ejercicios	130
V. LA ADITIVIDAD NUMERABLE	137
V.1 Espacios muestrales infinitos numerables	137
V.2 probabilidades geométricas	154
V.3 Sucesiones infinitas de ensayos de Bernoulli	161
V.4 El problema de la medida	165
V.5 Espacios de probabilidad	169
V.6 Teorema de clases monótonas	172
V.7 Los borelianos y la medida de Lebesgue	178
V.8 Funciones borelianas	184
V.9 Ejercicios	187
Bibliografía	190

SEGUNDA PARTE

Variables aleatorias

[193]

VI. VARIABLES ALEATORIAS	195
VI.1 Variables aleatorias reales	196
VI.2 Funciones de distribución	198
VI.3 Clasificación de variables aleatorias	201
VI.4 Independencia de variables aleatorias	211
VI.5 Función gama	213
VI.6 Fórmulas de Wallis y de Stirling	215

VI.7	Ejercicios	219
VII.	VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS	221
VII.1	Distribución binomial	221
VII.2	Distribución geométrica	229
VII.3	Distribución binomial negativa	231
VII.4	Distribución Poisson	236
VII.5	Distribución hipergeométrica	243
VII.6	Otras distribuciones	249
VII.6.1	Distribuciones truncadas	249
VII.6.2	Distribución uniforme discreta	250
VII.7	Caminatas aleatorias	252
VII.7.1	Distribución de la posición en el n -simo paso	253
VII.7.2	Retornos al origen	254
VII.7.3	Distribución del tiempo del primer retorno al origen	258
VII.7.4	Primer paso por un valor positivo	258
VII.7.5	Distribución del tiempo de primer paso por un valor positivo	260
VII.8	Ejercicios	260
VIII.	VARIABLES ALEATORIAS ABSOLUTAMENTE CONTINUAS	267
VIII.1	Distribución uniforme continua	267
VIII.2	Distribución normal	271
VIII.3	Teorema de de Moivre-Laplace	274
VIII.4	Distribución exponencial	287
VIII.5	Distribución gama	291
VIII.6	Distribuciones uniformes en el plano	295
VIII.7	Distribución de funciones de variables aleatorias conti- nuas	297
VIII.8	Simulación de distribuciones	299
VIII.9	Ejercicios	305
IX.	ESPERANZAS	311
IX.1	Esperanza de variables aleatorias discretas	314
IX.2	Esperanza de variables aleatorias absolutamente conti- nuas	316
IX.3	Algunas ideas erróneas	316

IX.4	Definición general de la esperanza	320
IX.5	Esperanza de funciones de variables aleatorias	328
IX.6	Propiedades de la esperanza	331
IX.7	Varianza y demás momentos	345
IX.8	Desigualdad de Chebyshev	360
IX.9	Funciones generadoras	366
	IX.9.1 Función generadora de probabilidades	367
	IX.9.2 Función generadora de momentos	376
IX.10	Ejercicios	383
APÉNDICE		395
A.1	Sucesiones de números reales	395
A.2	Series de números reales	400
A.3	La integral de Riemann	403
A.4	La integral de Lebesgue	413
	A.4.1 Funciones medibles	414
	A.4.2 La integral de funciones medibles no negativas	418
	A.4.3 Funciones integrables	422
	A.4.4 La integral de Lebesgue en \mathbb{R}^2	427
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS		431
	Capítulo I	431
	Capítulo II	431
	Capítulo III	433
	Capítulo IV	436
	Capítulo V	438
	Capítulo VI	438
	Capítulo VII	439
	Capítulo VIII	441
	Capítulo IX	444
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR		449
ÍNDICE DE TÉRMINOS		451

PRÓLOGO

El universo es un gigantesco sistema termodinámico. En todos los niveles encontramos inestabilidades y bifurcaciones. En esta perspectiva podemos preguntarnos por qué durante tanto tiempo el ideal de la física estuvo asociado con la certidumbre, es decir con la negación del tiempo y la creatividad. . . En ciencia, la búsqueda de certidumbres encontró finalmente su expresión suprema en las “leyes de la naturaleza”, asociadas a la obra de Newton. . . Lo que emerge hoy es una descripción mediatriz, situada entre dos representaciones alienantes: la de un mundo determinista y la de un mundo arbitrario sometido al puro azar. Las leyes no gobiernan el mundo, pero tampoco éste es regido por el azar. Las leyes físicas corresponden a una nueva forma de inteligibilidad, expresada en las representaciones probabilísticas irreductibles. . . Distinguimos nuevos horizontes, nuevas preguntas, nuevos riesgos. Vivimos un momento privilegiado de la historia de la ciencia.

ILYA PRIGOGINE

ESTE LIBRO ESTÁ CONCEBIDO como introductorio a la *teoría de la probabilidad*. Se presenta en él todo el material que forma parte del programa de los dos primeros cursos de probabilidad que se ofrecen en varias universidades. El primer volumen comprende los temas correspondientes al primer curso y el segundo volumen comprende los del segundo curso.

A este nivel introductorio, la teoría de la probabilidad utiliza como herramienta matemática básica el *cálculo combinatorio*, la *teoría de series* de números reales y el *cálculo diferencial e integral* en una y varias variables, de manera que, para el primer volumen se asume el conocimiento de los dos primeros de estos temas así como del cálculo en una variable, mientras que para el segundo volumen se asume además el conocimiento del cálculo en varias variables.

En esta obra se pretende presentar una introducción a la formulación moderna de la teoría de la probabilidad, intentando combinar diferentes aspectos: se busca la motivación heurística de los conceptos, se trata de ubicar el origen de ellos y se exponen los resultados con el mayor rigor posible. Esta última tarea presenta dificultades, pues la teoría de la probabilidad moderna requiere, como herramienta básica, de la *teoría de la medida*, la cual no es conocida por la mayor parte de los lectores a quienes está dirigido este libro. Para salvar esta dificultad, se introducen, a lo largo de los dos volúmenes, los elementos que se necesitan para entender algunos conceptos probabilísticos básicos y contar con la herramienta que permite demostrar los resultados que se exponen. Con el mismo propósito, se incluye un Apéndice en el cual, entre otros temas, se exponen los conceptos y resultados básicos de la *teoría de integración* de Lebesgue.

Como se muestra en este primer volumen, el método para calcular probabilidades consiste en comenzar asignando probabilidades a una determinada familia de eventos y después, utilizando las propiedades de la función de probabilidad, se trata de extender ésta a una familia de eventos tan grande como sea posible. El enfoque de este libro es probabilístico en el sentido de que, para resolver cualquier problema, antes que otra cosa, se busca llevar este método tan lejos como sea posible, en lugar de intentar reducirlo, desde el inicio, a un problema de otro tipo, como pudiera ser uno de cálculo combinatorio.

La teoría de la probabilidad surge del estudio de los fenómenos aleatorios. El primer problema a resolver en este estudio consiste en encontrar un modelo matemático que permita analizar a profundidad el fenómeno en consideración. El modelo utilizado en este libro es el que formuló Andrey Nikolaevich Kolmogorov en el año 1933. Para un estudiante que se inicia en la teoría de la probabilidad no resulta simple entender el por qué se utiliza este modelo, lo cual es muy explicable por el hecho de que éste es el resultado de un proceso de investigación en el cual estuvieron involucrados muchos estudiosos del tema y, por lo general, no se muestra al alumno más que la conclusión del proceso. En este libro se profundiza en este tema buscando dar mayor claridad al estudiante.

Este primer volumen está dividido en dos grandes partes: en la primera se desarrolla el método para calcular probabilidades y se presentan las reglas básicas; en la segunda se hace el estudio de las variables aleatorias, concepto básico en la teoría de la probabilidad.

A su vez, la primera parte se divide en cinco capítulos: en el primero se definen los conceptos básicos del cálculo de probabilidades y se comienza a construir el modelo matemático de los fenómenos aleatorios; en el segundo se formulan las propiedades que permiten extender la función de probabilidad, definida en el capítulo I, además de introducir los conceptos de probabilidad condicional y de independencia así como las reglas que se relacionan con ellos; en el tercer capítulo se estudian diferentes maneras en que se puede seleccionar una familia de elementos de una colección dada; en el cuarto capítulo se integra lo estudiado en los 3 primeros capítulos para formular las reglas generales del cálculo de probabilidades; finalmente, en el quinto capítulo se completa el modelo matemático de los fenómenos aleatorios introduciendo la propiedad que facilita el estudio de aquellos cuyo conjunto de posibles resultados es infinito; de esta forma, queda formulado el modelo de Kolmogorov, el cual será la base para los capítulos posteriores.

La segunda parte se divide en cuatro capítulos: en el primero se hace un estudio general de las variables aleatorias, además de formular algunos resultados de cálculo integral que serán de utilidad más adelante; en el segundo y tercero se estudian las familias básicas de variables aleatorias; finalmente, en el cuarto, se introduce y se estudia otro concepto fundamental de la teoría de la probabilidad, el de *esperanza*.

MIGUEL A. GARCÍA ÁLVAREZ

Marzo, 2004

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM

México, D.F., 04510

e-mail: magaz@servidor.unam.mx

NOTACIÓN

$A \cup B$	Unión de los conjuntos A y B
$A \cap B$	Intersección de los conjuntos A y B
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	Unión de los conjuntos A_1, \dots, A_n
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	Intersección de los conjuntos A_1, \dots, A_n
A^c	Complemento del conjunto A
$A \times B$	Producto cartesiano de los conjuntos A y B
$A \subset B$	El conjunto A está contenido en el conjunto B
$A \supset B$	El conjunto A contiene al conjunto B
\emptyset	Conjunto vacío
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\{n, \dots, m\}$	Conjunto de números enteros entre n y m inclusive
$\{n, n + 1 \dots\}$	Conjunto de números enteros mayores o iguales a n
(a, b)	Intervalo abierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	Intervalo cerrado $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	Intervalo semiabierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, b)$	Intervalo semiabierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$x \cdot y$	Producto punto de los vectores x y y
$\ x\ $	Norma del vector x
$ x $	Valor absoluto del número real x
$[[x]]$	Mayor entero menor o igual a x
\bar{z}	Conjugado del número complejo z
$\text{mín}(a, b)$	Mínimo entre a y b
$\text{máx}(a, b)$	Máximo entre a y b
x^+	$\text{máx}(x, 0)$
x^-	$\text{máx}(-x, 0)$
$\sum_{k=1}^n x_k$	Suma de los números x_1, \dots, x_n
$\prod_{k=1}^n x_k$	Producto de los números x_1, \dots, x_n
$\ln x$	Logaritmo natural de x
$\binom{n}{k}$	Combinaciones de n elementos tomados de k en k
$g \circ f$	Composición de las funciones f y g
$f : A \mapsto B$	función definida sobre el conjunto A , con valores en el conjunto B
$x \rightsquigarrow \alpha$	x tiende al valor α

UN POCO DE HISTORIA

Le 29 juillet 1654

Monsieur,

L'impatiente me prend aussi bien qu'a vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'etendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait ; car je ne dout plus maintenant que je suis dans la verité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous... j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrais désormais vous ouvrir mon coeur, s'il se pouvait, tant que j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la verité est la même à Toulouse et à Paris.

CARTA DE PASCAL A FERMAT

EL SURGIMIENTO del cálculo de probabilidades, como disciplina matemática independiente, tiene como base las soluciones que, durante el periodo que va del año 1654 al 1657, dieron Blaise Pascal, Pierre de Fermat ([12]) y Christiaan Huygens ([14]) a varios problemas, entre los cuales destacan los siguientes:

PROBLEMA 1. *¿Cómo deben repartirse las apuestas en un juego que se interrumpe? Por ejemplo, suponiendo que dos jugadores, A y B, apuestan 32 pesos cada uno en un juego que consiste de partidas consecutivas, en cada una de las cuales cada jugador tiene la misma posibilidad de ganarla, de tal manera que quien gane una partida acumula un punto y el juego es ganado por quien obtenga primero cuatro puntos, ¿cómo deben de repartirse*

las apuestas en caso de que el juego se interrumpa cuando el jugador A ha ganado dos puntos y B un punto?

PROBLEMA 2. *¿Cuántas veces se necesita lanzar un par de dados para que sea más favorable obtener por lo menos un par de seises que no obtenerlo?*

PROBLEMA 3. *Dos jugadores, P y Q, juegan a lanzar alternadamente un par de dados. El juego comienza lanzando P el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 6 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando Q el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 7 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando P el par de dados bajo las condiciones iniciales. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

PROBLEMA 4. *Dos jugadores, A y B, los cuales poseen 12 fichas cada uno, juegan a lanzar sucesivamente tres dados, estableciéndose que A dará una ficha a B cada vez que se obtenga una suma igual a 11, mientras que B dará una ficha a A cada vez que se obtenga una suma igual a 14. Si el ganador del juego es el primero que llegue a poseer las 24 fichas, ¿cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

Los problemas 1 y 2 fueron planteados a Pascal en el año 1654 por Antoine Gombaud de Méré, conocido como el chevalier de Méré, quien era aficionado a los juegos de azar y había logrado resolver el problema 2 pero no el 1. Pascal y Fermat encontraron las soluciones correctas a los dos problemas, mismas que se dieron a conocer entre ellos en una serie de cartas las cuales constituyen los únicos documentos en los cuales quedaron plasmados los métodos que utilizaron. Más tarde, Huygens, sin conocer los métodos utilizados por Pascal y Fermat, encontró también las soluciones correctas a ambos problemas y en el año 1657 publicó sus soluciones en su libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* ([14]), siendo ésta la publicación que se convirtió en la base para el desarrollo posterior del cálculo de probabilidades.

Sin embargo, no fueron Pascal, Fermat y Huygens los primeros en resolver de manera correcta problemas de probabilidad. La historia del cálculo de probabilidades se remonta por lo menos al siglo X cuando se plantearon algunos problemas que más tarde fueron la base para resolver problemas de probabilidad. En particular, en esa época se planteó el problema de determinar cuántos resultados distintos pueden obtenerse al lanzar n dados. La

primera solución correcta conocida de este problema se encuentra en un poema titulado “De Vetula” y escrito por Richard de Fournival (1200-1250). Ahí se afirma que 3 dados pueden caer en un total de 216 caminos.

La primera referencia conocida a una relación entre las diferentes posibilidades de ocurrencia de un evento y la frecuencia con que éste se observa, se encuentra en los comentarios a una publicación de *La Divina Comedia*, que en el año 1477 hizo Benvenuto d’Imola. Dice ahí:

Concerniente a estos lanzamientos (de dados) debe observarse que los dados son cuadrados y cualquier cara puede caer, así que un número que pueda aparecer en más caminos debe ocurrir más frecuentemente, como en el siguiente ejemplo: con tres dados, tres es el más pequeño número que puede obtenerse y sólo se obtiene con tres ases; cuatro puede obtenerse sólo en un camino, con un dos y dos ases.

En el libro titulado *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioniti et Proportionalità*, escrito por Luca Paccioli en 1487 y publicado en 1494, se encuentra formulado un problema similar al 1: Dos personas juegan de manera que se requiere un total de 60 puntos para ganar, siendo el premio de 22 ducados. Por alguna circunstancia, cuando uno tiene acumulados 50 puntos y el otro 30, no pueden continuar el juego. ¿Qué parte del premio le corresponde a cada uno? Paccioli consideraba, erróneamente, que la parte que corresponde a cada uno debe ser proporcional a los puntos que lleva ganados; en este caso, la repartición debería hacerse en la proporción de 5 : 3, es decir, al que lleva 50 puntos le corresponderían $\frac{5}{8}$ y al otro $\frac{3}{8}$.

El primer estudio sistemático de problemas de probabilidad se debe a Girolamo Cardano, quien en el año 1526 escribió un libro titulado *Liber de Ludo Aleae*, cuya primera publicación apareció en el año 1663 ([6]). En ese trabajo, Cardano realizó un estudio de problemas relacionados con lanzamientos de dados.

En su libro, estableció Cardano el número de posibilidades en el lanzamiento de 2 y 3 dados, obteniendo 36 y 216, respectivamente. Aunque en un lenguaje distinto al que se usó más tarde en el cálculo de probabilidades, Cardano planteó y resolvió, a la manera clásica, problemas de probabilidad. Un ejemplo es el siguiente:

Considerando el lanzamiento de 2 dados, estableció que por lo menos un as se obtiene de 11 maneras; lo mismo puede decirse de por lo menos un dos, y así sucesivamente. Agregaba que, sin embargo, un as o un dos no se obtiene

de 22 maneras, pues hay 11 maneras en que se obtiene por lo menos un as y 9 más en que se obtiene por lo menos un dos, así que en total son 20 maneras de obtener por lo menos un as o por lo menos un dos. Continuaba diciendo que si se agrega ahora el 3, habrá 7 maneras más y así sucesivamente; en el siguiente paso habrá que sumar 5 maneras más, luego 3 y por último 1.

Decía entonces que si alguien dijera, quiero un as, un dos o un tres, se sabe que hay 27 caminos favorables y como el circuito es de 36, los caminos en que no se obtiene ninguno de estos números son 9; las posibilidades son entonces de 3 a 1.

Con este razonamiento Cardano llegó de hecho a la llamada definición clásica de probabilidad estableciendo las posibilidades de obtener un determinado resultado en función del número de posibles maneras en que ese resultado puede obtenerse.

Situándonos nuevamente en la época de Pascal y Fermat, el problema 1 fue el problema que más interés provocó debido a que pocos lograron encontrar la solución correcta. La solución de Fermat a este problema es la siguiente:

Al jugador P le faltan dos partidas para ganar y al jugador Q tres partidas, entonces, a lo más en 4 partidas adicionales se acaba el juego. Denotando por la letra a el que P gane una partida y por la letra b el que gane Q, los posibles resultados de 4 partidas son los siguientes:

$$(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, b, a), (a, b, a, a), (b, a, a, a), (a, a, b, b), (a, b, a, b),$$

$$(a, b, b, a),$$

$$(b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, b, a, a), (a, b, b, b), (b, a, b, b), (b, b, a, b), (b, b, b, a),$$

$$(b, b, b, b)$$

en donde, por ejemplo, (b, b, a, b) significa que P gana sólo la tercera partida y Q las otras 3.

De estos 16 posibles resultados, hay 11 que hacen ganar al jugador P, a saber, (a, a, a, a) , (a, a, a, b) , (a, a, b, a) , (a, b, a, a) , (b, a, a, a) , (a, a, b, b) , (a, b, a, b) , (a, b, b, a) , (b, a, a, b) , (b, a, b, a) , (b, b, a, a) . Los 5 restantes hacen ganar al jugador Q. Por lo tanto, las apuestas se deben repartir en la proporción 11 : 5.

Los métodos seguidos por Pascal y Huygens para resolver este problema son distintos al de Fermat pero similares entre ellos. Su solución es como sigue:

Supongamos que al jugador A le falta una partida para ganar y a B dos, entonces, al jugar la siguiente partida hay dos posibilidades, la primera es que P la gane, en cuyo caso gana el juego y por lo tanto toda la apuesta, la segunda es que Q la gane, en cuyo caso P y Q quedan en igualdad de condiciones y debe entonces tocar a cada uno la mitad de las apuestas, es decir 32. Entonces en un caso a P le tocan 64 y en otro 32, así que, cualquiera que sea el caso, P tiene asegurado 32 y los otros 32 de las apuestas pueden corresponder a P o a Q con un azar igual; por lo tanto, de esos 32, la mitad debe ser para P y la otra para Q. Es decir, cuando a P le falta un punto y a Q dos, a P le corresponde $32 + 16 = 48$ y a Q 16.

Supongamos ahora que a A le falta un punto y a B tres. En esta situación, si se juega la siguiente partida, P puede ganar toda apuesta o bien 48 por el primer caso. Por lo tanto a P le corresponde $48 + \frac{1}{2}(16) = 56$ y a Q 8.

Finalmente, supongamos que a P le faltan dos puntos y a Q tres. En esa situación, si se juega la siguiente partida, P puede quedar faltándole un punto y tres a Q, en cuyo caso le corresponde 56 por el segundo caso; o bien, si Q gana esa partida, quedan en igualdad de circunstancias y toca a cada uno 32. Entonces P tiene asegurados 32 y puede ganar $56 - 32 = 24$ con un azar igual que Q; así que entonces a P le corresponde $32 + \frac{1}{2}(24) = 44$ y a Q $8 + \frac{1}{2}(24) = 20$, es decir, la repartición de las apuestas debe ser de 11 : 5.

Aunque los resultados de Pascal, Fermat y Huygens permitieron el establecimiento de reglas generales para resolver problemas de probabilidad y en ese sentido pueden considerarse como el origen del cálculo de probabilidades, la teoría de la probabilidad comenzó a ganarse un lugar importante dentro de la matemática a partir del libro de Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, publicado en el año 1713, ocho años después de su muerte ([1]).

Además de resolver con sus propios métodos los problemas ya resueltos por Pascal, Fermat y Huygens, Bernoulli se planteó un problema de singular importancia, el cual sería la base para todo el desarrollo posterior de la teoría. Escribió Bernoulli en su libro:

parece que, para hacer una hipótesis correcta sobre un hecho cualquiera, sólo es necesario calcular exactamente el número de casos posibles y, entonces, determinar las veces que puede posiblemente ocurrir un caso más que otro. Pero aquí, inmediatamente, surge nuestra mayor dificultad, porque este procedimiento se puede aplicar únicamente a muy pocos fenómenos; de hecho, casi exclusivamente a los relacionados con los juegos de azar... pero hay otro camino que nos conduce a lo que buscamos, y nos permite, por lo menos, hallar a posteriori lo

que no podemos determinar a priori, o sea, averiguando a partir de los resultados observados en numerosos casos similares. Ha de suponerse, a este respecto, que, bajo condiciones similares, la ocurrencia (o no ocurrencia) de un suceso en el futuro seguirá la misma pauta que se ha observado para sucesos iguales en el pasado... Lo que aún tiene que ser averiguado es si, cuando se aumenta el número de observaciones, también se sigue aumentando la probabilidad de que la proporción registrada de casos favorables y desfavorables se aproxime a la verdadera relación... Este es el problema que he decidido publicar aquí, después de haber trabajado sobre él durante veinte años.

El resultado al que hace referencia Bernoulli en su libro es el ahora llamado teorema de Bernoulli (véase la sección VII.1).

Más tarde, en el año 1733 ([10]), siguiendo a Bernoulli, Abraham de Moivre demostraría el ahora llamado teorema de de Moivre-Laplace (véase la sección VIII.3). Ambos resultados constituyeron los primeros teoremas límite de la teoría de la probabilidad, cuyo estudio se prolongó durante un periodo de más de 200 años, sentando así las bases de la teoría de la probabilidad moderna.

Los teoremas límite fueron formulados y demostrados de manera general a principios del siglo XX, interviniendo en ese proceso, entre otros, Pierre Simon Laplace ([20], [21]), Siméon Denis Poisson ([29]), Pafnuty Lvovich Chebyshev ([7], [8], [9]), Andrei Andreyevich Markov ([27]), Aleksandr Mikhailovich Lyapunov ([25], [26]), Félix Édouard Justin Émile Borel ([2]), Francesco Paolo Cantelli ([3], [4], [5]), J. W. Lindeberg ([24]), Paul Pierre Lévy ([22], [23]), Aleksandr Yakovlevich Khintchine ([15], [16]), Andrey Nikolaevich Kolmogorov ([17], [18]) y William Feller ([11]).

A principios del siglo XX la teoría de la probabilidad gozaba ya de una gran popularidad; sin embargo, sus fundamentos matemáticos no eran satisfactorios. De hecho, la probabilidad no era considerada como parte de la matemática. Sus conceptos y métodos eran específicos para las aplicaciones y no formaban parte de una estructura abstracta general. La misma definición de probabilidad, la cual estaba basada en el concepto de equiprobabilidad, resultaba insatisfactoria pues no en todos los fenómenos aleatorios resulta evidente qué resultados pueden considerarse como equiprobables.

Una buena referencia para conocer el estado de la teoría de la probabilidad a principios del siglo XX es el libro de Jules Henri Poincaré ([28]), cuya primera frase es elocuente: "No se puede dar una definición satisfactoria de la probabilidad". Comenta más adelante que

la definición completa de la probabilidad es una especie de petición de principio: ¿cómo reconocer que todos los casos son igualmente probables? Aquí, una definición matemática no es posible; deberemos, en cada aplicación, hacer convenciones, decir que consideramos tal y tal caso como igualmente probables. Esas convenciones no son completamente arbitrarias, pero escapan al espíritu del matemático, que no tendrá más que examinarlas una vez que son admitidas. Así, todo problema de probabilidad ofrece dos periodos de estudio: el primero, metafísico, por así decirlo, el cual legitima tal o cual convención; el segundo, matemático, que aplica a esas convenciones las reglas del cálculo.

El estudio de la fundamentación matemática de la teoría de la probabilidad se realizó en los primeros 30 años del siglo XX, hasta que, en el año 1933, A. N. Kolmogorov publicó un artículo ([19]) en el cual estableció la formulación de la teoría de la probabilidad que prevalece hasta nuestros días.

El modelo que formuló Kolmogorov es axiomático, lo cual se explica por el hecho de que, a principios del siglo XX, el método axiomático había ganado un gran prestigio, luego de las aportaciones de Nikolai Ivanovich Lobachevskii, Hermann Minkowski y otros matemáticos, las cuales mostraban que es posible definir geometrías no euclidianas mediante diferentes sistemas axiomáticos. Aportaciones como éstas, así como la búsqueda del rigor en la ciencia, habían llevado a plantear la necesidad de la axiomatización para todas las ramas de la matemática, así como para aquellas ramas de la física en donde las matemáticas desempeñan un papel preponderante ([13]).

La historia de la teoría de la probabilidad no termina con su fundamentación matemática; ésta, que fue la conclusión de un proceso, se convirtió a su vez en punto de partida para profundizar en temas estudiados con anterioridad y para el estudio de nuevos sujetos de interés. Una vez formulado el modelo de Kolmogorov, la teoría de la probabilidad contó con una nueva herramienta que la haría desarrollarse mucho más: la *teoría de la medida*. En particular, la *teoría de los procesos estocásticos* se convirtió en el centro de interés de los estudiosos de la probabilidad, tema que hasta la fecha continúa desarrollándose.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bernoulli, J., *L'Art de Conjecturer*, L.G.F. Vastel, G. Le Roy, Caen, 1801. Traducción de *Ars Conjectandi*, Basileæ, 1713.

- [2] Borel, F. E. J. E., *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 27, p. 247-270, 1909. Reimpreso en *Oeuvres* de Émile Borel, Tome II, Centre National de la Recherche Scientifique, p. 1055-1079, 1972.
- [3] Cantelli, F. P., “Sulla legge dei grandi numeri”, *Mem. Acad. Lincei*, vol. **11**, Série 5, p. 329-349, 1916.
- [4] Cantelli, F. P., “Sulla probabilità comme limite della frequenza”, *Rend. Acad. Lincei*, vol. **26**, p. 39-45, 1917.
- [5] Cantelli, F. P., “Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla Statistica Matematica”, *Accademia dei Lincei Roma, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti*, **26** (5), p. 295-302, 1917.
- [6] Cardano, G., *Liber de Ludo Aleae*, 1564. Publicado en *Opera Imnia*, vol. 1, 1663. Traducción al inglés en *The book on games on chance*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1961.
- [7] Chebyshev, P. L., “Des valeurs moyennes”, *Matematicheskii Sbornik*, **127**, p. 1-9, 1867, también publicado en *Liouville’s Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **88**, p.177-184, 1867.
- [8] Chebyshev, P. L., *Démonstration élémentaire d’une proposition générale de la théorie des probabilités*.
- [9] Chebyshev, P. L., *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*.
- [10] de Moivre, A., “A method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a+b)^n$ expanded into a series, from whence are deduced some practical rules, to estimate the degree of assent which is to be given to experiments”, *The doctrine of chances*, Third edition, p. 243-259, A. Millar, Londres, 1756. Reimpreso por Chelsea, Nueva York, 1967. Traducción (con algunas adiciones) de *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a+b)^n$ in Seriem Expansi*, 1733.
- [11] Feller, W., “Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Math. Zeitsch*, **40**, p. 521-559, 1935.
- [12] Fermat, P. & Pascal, B., “Correspondance – 1654”, *Oeuvres* de Pascal, t. III, p. 369-430.

- [13] D. Hilbert, “Sur les problèmes futures des Mathématiques”, *Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Paris, p. 58-114, 1900.
- [14] Huygens, C., *Du calcul dans les jeux de hasard*, Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, Vol. XIV, Martinus Nijhoff, 1920. Traducción de *De Ratiociniis in Aleae Ludo*, 1657.
- [15] Khintchine, A. Ya., “Sur la loi des grands nombres”, *Comp. Rend. Acad. Sci.*, **188**, p. 477-479, 1929.
- [16] Khintchine, A. Ya., “Sur la loi forte des grands nombres”, *C. R. Ac. Sc.* Paris, vol. **186**, p. 285-287, 1928.
- [17] Kolmogorov, A. N., “Sur la loi des grands nombres”, *Rend. Acad. Lincei*, vol. **9**, p. 470-474, 1929.
- [18] Kolmogorov, A. N., “Sur la loi forte des grands nombres”, *C. R. Ac. Sc.* Paris, vol. **191**, p. 910-912, 1930.
- [19] Kolmogorov, A. N., *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, 1950. Traducción de “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Erg Mat.* **2**, No. 3, 1933.
- [20] Laplace, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), Livre I. *Calcul des fonctions génératrices*, troisième édition, Courcier, Paris, 1820. *Oeuvres complètes* de Laplace, tome septième, Gauthier-Villars, 1886.
- [21] Laplace, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), Livre II. *Théorie générale des probabilités*, troisième édition, Courcier, Paris, 1820. *Oeuvres complètes* de Laplace, tome septième, Gauthier-Villars, 1886.
- [22] Lévy, P. P., *Calcul des Probabilités*, Gauthier Villars, Paris, 1925.
- [23] Lévy, P. P., *Théorie de l'addition des variables aleatoires*, Gauthier Villars, Paris, 1937 (deuxième édition – 1954).
- [24] Lindeberg, J. W., “Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Math. Zeitsch.*, t. **15**, p. 211-225, 1922.
- [25] Lyapunov, A. M., “Sur une proposition de la Théorie des Probabilités”, *Izv. Akad. Nauk.*, Ser. 5, **13**, p. 359-386, 1900.

- [26] Lyapunov, A. M., “Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités”, *Notes Acad. Sci. Phys. Math. Sect.*, Ser. 8, **2**, p. 1-24, 1901.
- [27] Markov, A. A., *Ischislenie Veroyatnostei* [El cálculo de probabilidades], Moscú, 1913 (cuarta edición, 1924).
- [28] Poincaré, J. H., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, París, 1896.
- [29] Poisson, S. D., *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Bachelier, París, 1837.

PRIMERA PARTE
El cálculo de probabilidades

I. EL MODELO MATEMÁTICO

En medio de las causas variables y desconocidas que designamos con el nombre de azar y que hacen incierta e irregular la marcha de los acontecimientos, se ve surgir, a medida que ellos se multiplican, una regularidad asombrosa, que parece obedecer a un designio y que se ha considerado como una prueba de la providencia. Pero reflexionando sobre ella, se reconoce pronto que esta regularidad no es más que el desarrollo de las respectivas posibilidades de los acontecimientos simples, los cuales deben presentarse más frecuentemente cuando más probables son.

PIERRE SIMON LAPLACE

I.1 EXPERIMENTOS ALEATORIOS

EL ESTUDIO DE LA NATURALEZA se realiza mediante la experimentación, es decir, la observación de sistemas que son brindados por la misma naturaleza o diseñados especialmente para el estudio de determinadas propiedades del sujeto de interés. Por ejemplo, en física, se estudian las leyes del movimiento de los cuerpos basándose ya sea en la observación del movimiento de cuerpos que ofrece la misma naturaleza, como pueden ser los planetas de nuestro Sistema Solar, o bien diseñando experimentos en el laboratorio, por ejemplo, utilizando planos inclinados para estudiar el movimiento de cuerpos sobre ellos.

En general, el estudio de un determinado sistema conduce a un modelo de éste mediante el cual el estudio puede ser profundizado. El modelo, en general, es solo una aproximación del sistema real y está sujeto siempre a comprobación. Así, por ejemplo, en física, el estudio del movimiento de los cuerpos condujo a la mecánica clásica, según la cual este movimiento obedece a las llamadas leyes de Newton. Éstas se aplicaron a todo sistema en donde intervienen movimientos mecánicos hasta que se descubrieron fenómenos a

los cuales no se adaptaban con exactitud. La Teoría de la Relatividad mostraría que las leyes de Newton son válidas únicamente dentro de un cierto rango más allá del cual es necesario sustituirlas por las leyes de la mecánica relativista.

En la teoría de la probabilidad nos planteamos el estudio de una determinada clase de experimentos mediante un modelo matemático que definiremos más adelante. Para este fin, consideraremos un experimento como cualquier proceso que conduce a un resultado específico. Así, el observar el color de los ojos de una persona, el preguntar a una persona si le gustan los chocolates, el medir el tiempo que permanece prendida una lámpara de manera ininterrumpida, el medir el tiempo que una piedra tarda en caer de un edificio, son todos ejemplos de experimentos. Como puede verse, le estamos dando al concepto de experimento un sentido muy amplio, no nos interesa el tipo de proceso involucrado, pudiendo ser éste una observación, una medición o cualquier otra cosa, lo único que requerimos es que el proceso en consideración conduzca a un resultado que puede ser especificado.

DEFINICIÓN I.1 (Experimento) *Un experimento es cualquier proceso que conduce a un resultado específico.*

Para los fines del tema que abordaremos en este libro, clasificaremos a los experimentos en dos grandes categorías. Por un lado consideraremos todos aquellos experimentos en los cuales, una vez definidas todas las condiciones bajo las cuales se realizan, su resultado queda únicamente determinado. Los experimentos relativos al movimiento de un cuerpo bien determinado, sujeto a la acción de ciertas fuerzas, también bien determinadas, entran dentro de esta categoría. El movimiento del cuerpo queda perfectamente determinado conociendo la posición y velocidad del cuerpo en un momento dado, así como las fuerzas que actúan sobre él. Ese movimiento queda determinado en el sentido de que siempre que se repitan las mismas condiciones, el cuerpo seguirá la misma trayectoria.

Por otro lado, consideraremos todos aquellos experimentos en los cuales, una vez definidas las condiciones en que se realizan, su resultado no queda únicamente determinado. A un experimento de este tipo lo llamaremos aleatorio. En otras palabras, un experimento es aleatorio si, una vez definido, al considerar diferentes repeticiones de él, aunque sea potencialmente, todas bajo las condiciones establecidas, se pueden obtener resultados distintos.

DEFINICIÓN I.2 (Experimento aleatorio) *Un experimento aleatorio es un experimento con la característica de que, una vez definidas todas las condiciones bajo las cuales se realiza, su resultado no queda únicamente determinado.*

Dentro de la categoría de experimentos aleatorios caben todos aquellos en los cuales la indeterminación del resultado se debe simplemente a que las condiciones en que se realizan incluyen cierta arbitrariedad que los hace impredecibles, así como aquellos que son por naturaleza no determinísticos, es decir, aquellos en los que aún cuando las condiciones en que se realizan no incluyen arbitrariedad, el resultado es impredecible por no estar únicamente determinado. No caben dentro de esta categoría de experimentos aquellos que son determinísticos pero en los cuales el experimentador no es capaz de predecirlos por ignorancia, ya sea de las condiciones en que se realizan o de las leyes que los rigen, o bien por no disponer de los medios adecuados para ello. Algunos ejemplos ilustrarán este punto:

EJEMPLO I.3. *Consideremos una línea de un boliche, boliches y una bola de boliche, todos con características físicas que podemos considerar invariables mientras experimentamos con ellos. Supongamos, además, que contamos con algún aparato que nos permite colocar los boliches en cualquier posición determinada y con otro aparato que nos permite lanzar la bola con la fuerza y dirección que deseemos. Fijemos una posición determinada de los boliches, elijamos una fuerza de lanzamiento de la bola orientada hacia los boliches y consideremos el experimento consistente en lanzar la bola con esa fuerza y dirección determinadas a priori y en observar el número de boliches que caen. Este experimento, así definido, es un ejemplo de un experimento determinístico. Incluso si el experimentador desconoce las leyes físicas involucradas en el experimento o no cuenta con los medios adecuados para realizar cálculos rápidos y entonces no puede predecir, antes de que la bola llegue a los boliches, el número de boliches que caerán, el experimento sigue siendo determinístico pues siempre que se repitan las mismas condiciones, el resultado será el mismo, es decir éste está únicamente determinado.*

EJEMPLO I.4. *Consideremos ahora el mismo dispositivo de boliches, pero definamos un nuevo experimento consistente en lanzar la bola con una fuerza y dirección arbitrarias (sobre la línea)¹ y en observar el número de boliches*

¹Cosa que se puede lograr, por ejemplo, eligiendo a una persona de manera arbitraria y pidiéndole que lance la bola sobre la línea como mejor le parezca

que caen. Este nuevo experimento es ahora un ejemplo de un experimento aleatorio. Incluso si el experimentador conoce perfectamente las leyes físicas involucradas en el problema y dispone de una computadora que le permite efectuar cálculos rápidos y así predecir, antes de que la bola llegue a los boliches, el número de boliches que caerán en cada lanzamiento, el experimento sigue siendo aleatorio pues la elección arbitraria de la fuerza y dirección de lanzamiento de la bola es parte del experimento y entonces el resultado de éste no está únicamente determinado.

EJEMPLO I.5. Supongamos que tenemos tres pelotitas pintadas, una de rojo, una de azul y otra de verde, colocadas en 3 cajas numeradas del 1 al 3, de manera que la bola roja se encuentre en la caja 1, la azul en la 2 y la verde en la 3. Consideremos entonces el experimento consistente en pedirle a una persona, elegida arbitrariamente, que saque la pelotita colocada en la caja número 3 y anote el color de ella como resultado del experimento. Incluso si la persona elegida desconoce la manera en que están colocadas las pelotitas en las cajas y entonces para ella el resultado del experimento es impredecible, el experimento descrito es un experimento determinístico pues estando ya colocadas las pelotitas en sus respectivas cajas, el resultado será siempre el mismo.

EJEMPLO I.6. Consideremos las mismas 3 pelotitas del ejemplo anterior, las mismas 3 urnas numeradas del 1 al 3 y consideremos el experimento consistente en colocar las pelotitas en las cajas, una en cada una, de manera arbitraria, y en seleccionar después la pelotita de la urna número 3, anotando su color como resultado del experimento. Incluso si alguna persona fuera capaz de predecir la manera en que quedarán colocadas las pelotitas en las cajas en cada realización particular del experimento descrito, éste es un experimento aleatorio pues la colocación arbitraria de las pelotitas en las cajas es parte del experimento. La predicción del resultado en cada realización particular del experimento indicaría que cada realización particular admite un único posible resultado, pero una repetición del experimento, en las mismas condiciones (que incluyen la colocación arbitraria de las pelotitas en las cajas), puede dar un resultado distinto. ▲

En los dos ejemplos de experimentos aleatorios dados arriba, la indeterminación del resultado de ellos se debe exclusivamente a que las condiciones en que se realizan incluyen cierta arbitrariedad y entonces, al repetirlos, podemos esperar distintos resultados. En otras palabras, si bien están definidos

con base en experimentos que son por naturaleza determinísticos, se introduce la aleatoriedad al permitir que las condiciones precisas en que se realizan sean variables.

El problema de la existencia de otro tipo de experimentos aleatorios en los cuales la aleatoriedad sea intrínseca a ellos no será abordado en este libro. Los ejemplos que pueden darse para abordarlo requieren la profundización en áreas científicas como puede ser la mecánica cuántica. Lo único que podemos mencionar aquí es que ambos tipos de experimentos aleatorios caben en el estudio que haremos y nuestro objetivo será el establecer modelos que nos permitan estudiarlos. Como lo mencionamos con anterioridad, el único requisito que tienen que cumplir los experimentos que consideraremos es el poder especificar los resultados que se obtienen al realizarlos.

Como puede verse por los ejemplos dados arriba, en general, la definición de un experimento aleatorio involucra una familia de experimentos particulares, todos realizados bajo las mismas condiciones (las cuales puedes incluir cierta arbitrariedad). La situación es distinta únicamente cuando se trata de experimentos con una aleatoriedad intrínseca; es decir aquellos para los cuales, aun cuando las condiciones bajo las cuales se realizan no incluyen arbitrariedad, el resultado no está únicamente determinado. Ahora bien, el que la definición de un experimento aleatorio involucre en general una familia de experimentos particulares no significa que sea posible realizar realmente cada experimento particular de la familia; es decir, no significa que el experimento aleatorio sea realmente repetible. El siguiente ejemplo ilustrará este punto:

EJEMPLO I.7. Tomemos un gato para experimentar, digamos el gato de la Sra. Conchita que vive en la casa de al lado, el cual está completamente sano y no tiene ninguna herida. Consideremos entonces el experimento consistente en elegir una persona de manera arbitraria, darle una pistola cargada y pedirle que dispare sobre el gato. Como resultado del experimento, observemos si, después de realizarlo, el gato está vivo o muerto. Si quisiéramos considerar una serie de repeticiones de este experimento, en un momento dado, posiblemente después de su primera realización, este experimento ya no será repetible pues el gato ya estará herido o muerto y entonces no se pueden reproducir las condiciones originales bajo las cuales está definido el experimento. Sin embargo, el experimento que definimos es un experimento aleatorio y su definición involucra, al menos conceptualmente, una familia de experimentos particulares, a saber, diferentes personas que disparan sobre el

gato de diferentes maneras particulares. El estudio de este tipo de experimentos puede ser más complejo que el de un experimento aleatorio que se pueda realizar tantas veces como queramos, sin embargo, forma parte del grupo de experimentos que nos interesa estudiar. ▲

En general, consideraremos en este libro experimentos aleatorios del tipo de los ejemplos I.4 y I.6, es decir, en los cuales la aleatoriedad proviene de que las condiciones en que se realizan incluyen cierta arbitrariedad y entonces no podemos esperar el mismo resultado en cada una de sus posibles realizaciones. En ese tipo de experimentos, cada una de sus realizaciones se efectúa bajo condiciones particulares precisas y su resultado está entonces únicamente determinado; la aleatoriedad proviene de que, dentro de las condiciones generales que caracterizan al experimento aleatorio, caben diferentes condiciones precisas de experimentación. También, como nota aclaratoria, estaremos interesados fundamentalmente en el estudio de experimentos aleatorios, aunque eventualmente consideraremos experimentos determinísticos, viéndolos como casos extremos de experimentos aleatorios en los cuales sólo se admite un posible resultado. Finalmente, cabe mencionar que en todo problema de probabilidad está involucrado un experimento aleatorio, aunque no sea explícitamente.

DEFINICIÓN I.8 (Realización de un experimento aleatorio) *A cada repetición particular de un experimento aleatorio la llamaremos una realización de éste.*

I.2 EVENTOS

A partir de esta sección consideraremos algunos experimentos aleatorios cuya descripción conviene señalar de una vez. En ocasiones consideraremos un experimento aleatorio consistente en lanzar cierto número de dados y anotar los números que se obtienen. En ese caso debe entenderse, a menos que se diga otra cosa, que se trata en primer lugar de dados usuales, es decir cubos con seis caras marcadas con números del 1 al 6; además se entenderá también que se trata de dados perfectamente simétricos y balanceados y que el lanzamiento de ellos se realiza también de la manera en que se hace usualmente en un juego con dados, es decir se agitan de manera arbitraria y se hacen caer sobre una mesa; finalmente se considera que el resultado que

se obtiene con cada dado es el número que aparece en su cara superior. Una descripción semejante puede hacerse de un experimento aleatorio consistente en lanzar una o varias monedas y anotar el resultado que se obtiene; en ese caso, los dos posibles resultados del lanzamiento de una moneda serán llamados **cara** y **cruz**. En muchas ocasiones consideraremos un experimento aleatorio consistente en **seleccionar “al azar”** uno o varios elementos de una colección de objetos, que bien pueden ser cosas, animales, personas, etc.; en esos casos podemos hablar en general de la **elección al azar de individuos de una población** y la elección “al azar” se refiere, por el momento, a que ésta se realiza de manera arbitraria, es decir sin que haya predilección por elegir algunos de los individuos de la población. Más adelante definiremos el término “al azar” de una manera más precisa.

Hechas estas aclaraciones, consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado 3 veces en forma consecutiva, anotando los números que se obtienen. Cada posible resultado de este experimento lo podemos representar por una terna de números; así, la terna $(2, 5, 3)$ significa que en el primer lanzamiento se obtiene 2, en el segundo 5 y en el tercero 3. Cada posible resultado de este experimento tiene determinadas propiedades, por ejemplo, el resultado $(2, 6, 1)$ tiene la propiedad de que nos da una suma igual a 9, también tiene la propiedad de que los 3 números son distintos, otra es que el número más grande es el 6, etc.; estas propiedades no son las mismas para todos los posibles resultados del experimento, aunque algunas de ellas pueden coincidir para varios resultados, por ejemplo, el resultado $(3, 2, 6)$ tiene como propiedad común, con el resultado anterior, el que su número más grande es el 6, también es común la propiedad de estar formado por 3 números distintos, en cambio la propiedad de que la suma es 9 no se presenta aquí.

Con cada posible resultado del experimento descrito podemos asociar entonces determinadas propiedades. Supongamos ahora que aún no hemos realizado el experimento y fijemos una determinada propiedad, por ejemplo, el que la suma de los 3 números que se obtienen sea 12. Antes de realizar el experimento, no sabemos si esta propiedad se presentará o no al realizarlo, únicamente realizando el experimento podemos decir si se presenta o no.

En general, diremos que una propiedad es relativa al experimento aleatorio si una vez realizado éste podemos decir si se presenta o no, es decir, si el experimento aleatorio determina la presencia o no de esa propiedad. Dado un experimento aleatorio, a cada propiedad relativa a ese experimento la

llamaremos un evento relativo al experimento, o simplemente un evento, si no hay confusión sobre el experimento aleatorio al que se refiere.

DEFINICIÓN I.9 (Propiedad relativa a un experimento aleatorio) *Diremos que una propiedad es relativa a un experimento aleatorio si una vez realizado éste podemos decir si se presenta o no.*

DEFINICIÓN I.10 (Eventos) *Un evento es una propiedad relativa a un experimento aleatorio.*

Cuando, al realizar un experimento, la propiedad que define a un evento se presenta, diremos que el evento ocurre, en caso contrario, diremos que no ocurre. Un evento tiene entonces la característica de que una vez realizado el experimento podemos decir si ocurre o no ocurre.

DEFINICIÓN I.11 (Ocurrencia de un evento) *Se dice que un evento ocurre al realizar un experimento aleatorio si la propiedad que lo caracteriza se presenta en esa realización.*

Los eventos relativos a un experimento aleatorio serán denotados por letras mayúsculas A , B , C ,...; así, en el ejemplo descrito antes, podemos definir a A como el evento: ‘se obtienen resultados distintos en cada uno de los 3 dados’.

A manera de ilustración, consideremos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO I.12. *Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces un dado en forma consecutiva y en anotar el número resultante en cada lanzamiento. Los siguientes son eventos relativos a este experimento:*

A : *Se obtiene una suma igual a 9.*

B : *Se obtiene por lo menos un 5.*

C : *En el segundo lanzamiento se obtiene 3.*

EJEMPLO I.13. *De una urna en la cual hay 2 bolas rojas, 4 bolas blancas y 7 bolas negras, se extraen 3 bolas al azar. Los siguientes son eventos relativos a este experimento:*

A : *Se obtienen 3 bolas de distinto color.*

B : *Ninguna de las 3 bolas seleccionadas es blanca.*

EJEMPLO I.14. *Se elige al azar un matrimonio de una cierta población y se cuenta el número de hijos e hijas que ha tenido. Los siguientes son eventos relativos a este experimento:*

A: El matrimonio seleccionado tiene 2 niños y una niña.

B: El matrimonio seleccionado tiene en total 4 hijos.

C: El matrimonio seleccionado tiene más niños que niñas.

D: El matrimonio seleccionado tiene únicamente un niño.

EJEMPLO I.15. *De una determinada población humana se eligen al azar 10 personas y se anota su sexo, edad, peso y estatura. Los siguientes son eventos relativos a este experimento:*

A: Todas las personas elegidas son mayores de 21 años.

B: Todas las personas elegidas menores de 10 años pesan menos de 30 kilos.

C: La estatura promedio de las personas elegidas es un número entre 1.5 m. y 2.0 m.

I.3 PRINCIPIO DE REGULARIDAD DE LAS FRECUENCIAS

Algo que hace interesante el estudio de los experimentos aleatorios es el hecho de que, a pesar de su aleatoriedad, presentan también una regularidad, aunque de un tipo distinto a la del ejemplo del movimiento de un cuerpo sujeto a la acción de ciertas fuerzas, en el cual la regularidad consiste en que, siempre que se repitan las condiciones establecidas para el experimento, el cuerpo seguirá la misma trayectoria.

En el caso de un experimento aleatorio, cuando, de ser posible, éste se realiza varias veces, se obtienen diferentes resultados; sin embargo, se puede observar que se manifiesta una regularidad en la frecuencia relativa de ocurrencia de cada posible resultado, manteniéndose aproximadamente constante cuando el número de realizaciones del experimento es grande. Por **frecuencia relativa** de un posible resultado o, en general, de un evento relativo a un experimento, entenderemos la fracción que resulta de dividir el número de veces que el evento ocurre en una serie de realizaciones del experimento entre el número total de veces que el experimento se realiza en esa serie. Esta frecuencia relativa se puede expresar también como un porcentaje simplemente multiplicando por 100 la fracción descrita.

Por ejemplo, consideremos el experimento aleatorio consistente en observar el sexo de un recién nacido elegido arbitrariamente en un cierto hospital. El resultado de una realización de este experimento no está únicamente determinado, pudiendo ser una de dos alternativas: hembra o varón. Sin embargo, si se mide la frecuencia relativa con que cada una de estas dos alternativas se ha presentado, se observará que la proporción de hembras y varones se mantiene aproximadamente constante.

La misma regularidad se puede observar en la frecuencia relativa de ocurrencia de cualquier evento relativo a un experimento aleatorio repetible. Así, por ejemplo, al realizar muchas veces el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 dados y anotar los números que resultan, se podrá observar que, a medida que crece el número de repeticiones del experimento, la frecuencia relativa con que se obtiene una suma igual a 8 se mantiene aproximadamente constante.

A esta propiedad de regularidad de la frecuencia relativa con que ocurre cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio repetible o, en general, cada evento relativo al experimento, la llamaremos **principio de regularidad de las frecuencias**. Este principio no es un principio absoluto que se cumple en cualquier serie de repeticiones de un experimento aleatorio; por ejemplo, supongamos que tenemos a la mano un dado perfectamente simétrico y balanceado y consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar ese dado de manera arbitraria sobre una mesa y en observar el número que muestra la cara superior del dado al estabilizarse sobre la mesa. Supongamos además que el experimento aleatorio descrito lo hemos ya realizado un millón de veces, observando que el número 1 resulta en 15 % de los casos. Si el mismo experimento lo realizamos un millón de veces más, no necesariamente se obtendrá una frecuencia relativa de ocurrencia del número 1 cercana al 15 %, en realidad cualquier frecuencia de ocurrencia es perfectamente aceptable. Sin embargo, basándonos en el principio de regularidad de las frecuencias, podemos decir que en muchas series de un millón de realizaciones del experimento aleatorio descrito, una desviación grande de la frecuencia con que ocurre el número 1 de un determinado porcentaje, ocurrirá raramente, es decir en proporción pequeña. La cadena de razonamientos en este sentido es interminable, nuevamente la última afirmación no debe tomarse como algo absoluto, siendo perfectamente aceptable que en diferentes series de un millón de realizaciones del experimento aleatorio se obtengan porcentajes de ocurrencia del número 1 completamente distintos.

Abundando un poco más en el análisis del ejemplo anterior, supongamos que en la segunda serie de un millón de realizaciones del experimento descrito, se observe que el número 1 se obtiene únicamente 10 veces, es decir que el número 1 se obtiene sólo en 0.001% de los casos en vez de un porcentaje cercano al 15%. ¿Significa eso que podemos estar seguros que el número 1 se presentará en un porcentaje muy superior al 15% en una serie posterior de realizaciones del mismo experimento, de manera que, tomando las dos series juntas, el porcentaje con que se presente el número 1 sea ya cercano al 15%? La respuesta es un no. De hecho, dos series de repeticiones del experimento descrito son totalmente independientes, es decir lo que ocurra en una de ellas no tiene ninguna influencia en lo que ocurra en la otra. Esto no contradice el que el porcentaje con que se presenta el número 1 se pueda estabilizar a la larga, pues lo que ocurre en una serie de un millón de realizaciones del experimento tiene poca influencia en el porcentaje de ocurrencia del número 1 digamos en un billón de realizaciones del mismo experimento.

Así, el principio de regularidad de las frecuencias debe interpretarse con cuidado. Expresa que la frecuencia con que se presenta cada posible resultado de un experimento aleatorio, en una serie grande de realizaciones, se mantiene aproximadamente constante, pero, una eventual desviación de esa constante, si bien es algo que ocurre raramente, es perfectamente aceptable.

I.4 EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Consideremos un determinado experimento aleatorio y eventos A, B, C, \dots relativos a ese experimento. Al considerar una realización del experimento, podemos decir si cada uno de los eventos en consideración ocurre o no, pero antes de realizar el experimento no podemos, en general, determinar si un evento ocurrirá o no al realizarlo. Sin embargo, cuando un experimento aleatorio se realiza varias veces, se puede observar que la frecuencia relativa con que ocurre cada evento, relativo a ese experimento, no es la misma para todos los eventos. La manera más simple de verificar esto es observando que en una serie de realizaciones de un experimento aleatorio hay eventos que ocurren muy raramente y otros que ocurren casi siempre. Por ejemplo, si consideramos el experimento consistente en lanzar 10 dados y lo realizamos varias veces, se podrá observar que el evento 'se obtiene un 1 en cada uno de los 10 dados' ocurre muy raramente, mientras que el evento 'la suma de

los números que se obtienen en los 10 dados es mayor que 10' ocurre casi siempre. En general, la diferencia en la frecuencia relativa de ocurrencia de un par de eventos no será tan marcada como en este ejemplo, pero sí se podrá observar que, en general, son distintas para eventos distintos. Esta diferencia en la frecuencia relativa con que ocurre cada evento relativo a un experimento aleatorio puede interpretarse diciendo que, entre todos los eventos, hay unos que ocurren “**más fácilmente**” que otros. Más aún, con base en el principio de regularidad de las frecuencias, en una serie grande de realizaciones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa con que ocurre cada evento se mantiene aproximadamente constante. Esa constante puede interpretarse como una medida del “qué tan fácilmente” esperamos que el evento correspondiente ocurra.

El problema que se plantea en el cálculo de probabilidades consiste en encontrar una manera que permita medir el “qué tan fácilmente” se presentará un evento en futuras realizaciones de un experimento aleatorio. Así, se trata de asignar un número a cada evento, el cual exprese esa medida. De acuerdo con lo dicho anteriormente, esperamos que, en el caso de experimentos aleatorios repetibles, los números asignados a los diferentes eventos sean tales que, mientras más grande sea el número asignado a un evento, más grande será la frecuencia relativa con que éste ocurre en una serie grande de realizaciones del experimento.

A ese número que mide la “facilidad” con que un evento ocurre al realizar el experimento aleatorio correspondiente lo llamaremos la probabilidad del evento correspondiente.

DEFINICIÓN I.16 (Probabilidad de un evento) *La probabilidad de un evento relativo a un experimento aleatorio es un número que mide la “facilidad” con que el evento ocurre al realizar el experimento.*

I.5 ESPACIOS MUESTRALES

En general, dado un experimento aleatorio, no es difícil precisar y denotar de alguna manera a cada uno de sus posibles resultados. Por ejemplo, vimos que en el caso del experimento aleatorio consistente en lanzar un dado 3 veces en forma consecutiva, anotando los números que se obtienen, cada posible resultado puede representarse mediante una terna de números con la

convención de que, por ejemplo, la terna $(2, 5, 3)$ significa que en el primer lanzamiento se obtiene 2, en el segundo 5 y en el tercero 3.

A manera de notación, utilizaremos la letra ω con un subíndice para denotar a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Así, en el caso del lanzamiento de dados descrito arriba, podríamos denotar con ω_1 al resultado $(1, 1, 1)$, con ω_2 al resultado $(1, 1, 2)$, ...

Al conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama el espacio muestral de ese experimento y se le denota con la letra Ω . Así, en el ejemplo dado arriba, el espacio muestral está dado por:

$$\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots\}$$

O bien, si hemos definido a los posibles resultados usando ω 's, podemos escribir:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

DEFINICIÓN I.17 (Espacio muestral) *El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos sus posibles resultados.*

El espacio muestral de un experimento aleatorio puede ser un conjunto muy grande e incluso puede contener una infinidad de elementos. Un ejemplo típico de esa situación es el siguiente:

EJEMPLO I.18. *Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire tantas veces como sea necesario hasta obtener por primera vez cruz, anotando el resultado de cada lanzamiento. Los posibles resultados de este experimento pueden representarse por sucesiones de A 's y C 's, en donde A representa la obtención de cara y C la obtención de cruz en un lanzamiento. Así, la sucesión $CCCCCA$ representa un posible resultado del experimento aleatorio descrito. Utilizando ω 's, podríamos definir:*

$$\begin{aligned}\omega_1 &= C \\ \omega_2 &= CA \\ \omega_3 &= CCA \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

El número de cruces que resultan antes de la obtención de una cara puede ser cualquier número entero no negativo, es decir, en este caso el espacio muestral Ω es un conjunto infinito numerable. ▲

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el espacio muestral de un experimento aleatorio puede incluso ser más grande que un conjunto infinito numerable.

EJEMPLO I.19. Considérese el experimento aleatorio consistente en elegir al azar una lámpara de la producción de una cierta fábrica y en medir su tiempo de vida, es decir, el tiempo que permanece iluminando continuamente antes de fundirse. Aunque el tiempo de vida lo podríamos dar mediante un múltiplo entero de una unidad de tiempo elegida previamente, teóricamente ese tiempo de vida puede ser cualquier número real no negativo. En otras palabras, en este caso, cada posible resultado del experimento aleatorio puede representarse con un número real no negativo, que representa el tiempo de vida de la lámpara seleccionada, y $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Así, en este caso, Ω es un conjunto infinito no numerable.

I.6 REPRESENTACIÓN DE EVENTOS

Consideremos un experimento aleatorio y un evento A relativo a ese experimento. Antes de realizar el experimento, no sabemos si el evento A ocurrirá o no. Siendo el evento A una propiedad relativa al experimento, solo podemos saber si ocurre o no realizando el experimento. Es decir, el que A ocurra o no depende de cual sea el resultado del experimento. Para algunos resultados, la propiedad que define al evento A se presentará y para otros resultados no se presentará. El evento A divide entonces al conjunto de todos los posibles resultados del experimento en dos clases; una clase está formada por todos aquellos resultados de los cuales se deduce la ocurrencia de A y la otra por todos aquellos resultados de los cuales se deduce la no ocurrencia de A . Al conjunto formado por los resultados de la primera clase lo llamaremos el conjunto de resultados favorables a la ocurrencia de A .

DEFINICIÓN I.20 (Resultados favorables a un evento) *Los resultados favorables a un evento A , relativo a un experimento aleatorio, son todos aquellos posibles resultados del experimento de los cuales se deduce la ocurrencia de A .*

De esta manera, cada evento A relativo a un experimento aleatorio puede representarse como un subconjunto del espacio muestral Ω de dicho experimento, el formado por los posibles resultados que le son favorables.

EJEMPLO I.21. *Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 dados sobre una mesa, anotando los números que se obtienen, y llamemos A al evento: ‘se obtiene el mismo número en los 3 dados’, entonces podemos escribir:*

$$A = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$$



Por otra parte, cada subconjunto A del espacio muestral Ω representa un evento, a saber, el evento: ‘ocurre alguno de los resultados que conforman A ’.²

Dado un evento específico, el subconjunto del espacio muestral que lo representa queda únicamente determinado; por otra parte, dado un subconjunto del espacio muestral, se le pueden asociar diferentes eventos, los cuales, formalmente, son distintos; por ejemplo, si consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado 3 veces en forma consecutiva, al subconjunto del espacio muestral $A = \{(1, 1, 1)\}$ se le pueden asociar los eventos ‘la suma de los números que se obtienen es igual a 3’ y ‘se obtiene 1 en cada uno de los lanzamientos’. Sin embargo, puede observarse que todos los posibles eventos que pueden asociarse con un subconjunto del espacio muestral tienen la característica de que uno de ellos ocurre en una realización del experimento si y sólo si ocurren los otros. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN I.22 (Equivalencia de eventos) *Dos eventos son equivalentes si la ocurrencia de cualquiera de ellos implica la ocurrencia del otro en cualquier realización del experimento.*

Con base en esta definición, la familia de eventos queda partida en clases formadas por eventos que son equivalentes entre sí. Todos los eventos de una clase son esencialmente el mismo y así lo consideraremos en lo sucesivo. De esta manera, hay una correspondencia uno a uno entre los eventos relativos a un experimento aleatorio y los subconjuntos del correspondiente espacio muestral.

En particular, cada posible resultado $\omega \in \Omega$ representa un evento, consistente en la ocurrencia de ω . A esta clase particular de eventos, que se representan por un elemento de Ω , los llamaremos eventos elementales.

²En la formulación moderna de la teoría de la probabilidad se restringe la familia de eventos de tal manera que se pueda garantizar que la función de probabilidad satisfaga determinadas propiedades. Este punto será analizado más adelante.

DEFINICIÓN I.23 (Eventos elementales) *Un evento elemental relativo a un experimento aleatorio es un evento consistente en la ocurrencia de un específico posible resultado del experimento.*

De la misma manera, el mismo espacio muestral Ω representa un evento, el cual tiene la particularidad de ocurrir siempre que se realiza el experimento aleatorio correspondiente, razón por la cual es llamado el evento seguro.

DEFINICIÓN I.24 (Evento seguro) *El evento seguro relativo a un experimento aleatorio es un evento que siempre ocurre al realizar el experimento.*

Finalmente, el conjunto vacío \emptyset representa también un evento, el cual no tiene asociados resultados favorables y que podría definirse como: ‘no ocurre ninguno de los posibles resultados del experimento’. Evidentemente este evento nunca ocurre, razón por la cual es llamado el evento imposible.

DEFINICIÓN I.25 (Evento imposible) *El evento imposible relativo a un experimento aleatorio es un evento que nunca ocurre al realizar el experimento.*

I.7 COMPOSICIÓN DE EVENTOS

Consideremos un experimento aleatorio, digamos lanzar 3 veces un dado en forma consecutiva. Con relación a un experimento de este tipo, hemos dicho que podemos definir eventos, los cuales tienen la característica de ocurrir o no ocurrir cuando realizamos el experimento. En el ejemplo en consideración, los siguientes son eventos:

- A*: Se obtiene una suma igual a 7.
- B*: Se obtiene 3 números iguales.
- C*: Se obtiene por lo menos un 5.
- D*: Se obtiene una suma igual a 3.
- E*: En el primer lanzamiento se obtiene 6.
- F*: En el segundo lanzamiento se obtiene 3.
- G*: No se obtiene ningún 5.
- H*: Se obtiene una suma menor que 20.

Estos eventos se pueden comparar unos con otros, por ejemplo, al comparar el evento *A* con el evento *B*, podemos decir que, al realizar el experimento, es imposible que ocurran ambos; al comparar el evento *C* con el

evento G , podemos decir que, al realizar el experimento, uno ocurre si y sólo si el otro no ocurre; al comparar el evento E con el evento F , podemos decir que la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos no influye sobre la ocurrencia o no ocurrencia del otro; comparando los eventos B y D , podemos decir que la ocurrencia de D en una realización del experimento implica la ocurrencia de B .

También a partir de los eventos dados, podemos definir nuevos eventos. Por ejemplo, a partir de C y B podemos considerar un evento definido por la propiedad de que ocurre en la realización de un experimento si y sólo si ocurre alguno de los dos eventos considerados o ambos, en este caso, el nuevo evento así definido ocurre sólo cuando se obtienen 3 números iguales, o bien cuando los 3 números no son iguales pero se obtiene por lo menos un 5; también podemos considerar otro evento definido por la propiedad de que ocurre en la realización de un experimento si y sólo si ocurren ambos eventos, en este caso, el nuevo evento así definido ocurre únicamente cuando se obtienen tres cincos.

Las consideraciones anteriores nos llevan a las siguientes definiciones, para las cuales supondremos que se tiene definido un experimento aleatorio \mathcal{E} y eventos A, B, C, \dots relativos a ese experimento.

DEFINICIÓN I.26 (Unión de eventos) *Si A y B son dos eventos, definimos un nuevo evento caracterizado por la propiedad de que ocurre en la realización de un experimento si y sólo si ocurre alguno de los eventos A o B , o ambos. A este nuevo evento lo llamaremos la unión de A y B y lo denotaremos por $A \cup B$.*

DEFINICIÓN I.27 (Intersección de eventos) *Si A y B son dos eventos, definimos un nuevo evento caracterizado por la propiedad de que ocurre en la realización de un experimento si y sólo si los dos eventos A y B ocurren. A este nuevo evento lo llamaremos la intersección de A y B y lo denotaremos por $A \cap B$.*

DEFINICIÓN I.28 (Complemento de un evento) *Si A es un evento, definimos un nuevo evento caracterizado por la propiedad de que ocurre en la realización de un experimento si y sólo si A no ocurre. A este nuevo evento lo llamaremos el complemento o la negación de A y lo denotaremos por A^c .*

EJEMPLO I.29. *Considerando el experimento y los eventos definidos al inicio de esta sección, tenemos:*