HEINZ-DIETER HAUSTEIN

Kulturgeschichte der Formel

Vom Mondkalender der Vorgeschichte bis zur Aktienkapitalformel

AVM

Kulturgeschichte der Formel

Heinz-Dieter Haustein

Kulturgeschichte der Formel

Vom Mondkalender der Vorgeschichte bis zur Aktienkapitalformel

AVM

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

AVM – Akademische Verlagsgemeinschaft München 2009
© Thomas Martin Verlagsgesellschaft, München

Umschlagabbildung: © Lauren Ingro – Fotolia.com

Alle Rechte vorbehalten. Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urhebergesetzes ohne schriftliche Zustimmung des Verlages ist unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Nachdruck, auch auszugsweise, Reproduktion, Vervielfältigung, Übersetzung, Mikroverfilmung sowie Digitalisierung oder Einspeicherung und Verarbeitung auf Tonträgern und in elektronischen Systemen aller Art.

Alle Informationen in diesem Buch wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet und geprüft. Weder Autoren noch Verlag können jedoch für Schäden haftbar gemacht werden, die in Zusammenhang mit der Verwendung dieses Buches stehen.

e-ISBN (ePDF) 978-3-96091-114-2
ISBN (Print) 978-3-86924-896-7

Verlagsverzeichnis schickt gern:
AVM – Akademische Verlagsgemeinschaft München
Schwanthalerstr. 81
D-80336 München

www.avm-verlag.de

Inhalt

Vorwort 5

V0 Einführung 8

V1 Die Weltformel – ein Phantom? 14

V2 Formeln des Chaos 20

V3 Vorgeschichte 25
Frühestes Zählen 25. Zahlsysteme 26. Archaische Formeln 27. Reziprozität und Tausch 29.
Formeln der Periode 30 000 v. h. – 4000 v. h. 32

V4 Frühe Hochkulturen 39
Entstehung der babylonischen Mathematik 39. Das Rechnen der Ägypter 41. Mondkalender und Sonnenkalender 43.
Formeln der Periode 2040 – 1600 v. u. Z. 46

V5 Antike bis zur Kaiserzeit 59
Pythagoras und seine Schule 60. Von Eudoxos bis Euklid 62. Die Rechenpraxis der Römer 65.
Formeln der Periode 720 v – 90 u. Z. 68

V6 Spätantike, Völkerwanderung und Frühmittelalter 93
Ausgang der Antike mit Pappos und Diophantos 93. Aus dem Osten kommt das Licht 95. Araber nicht nur als Vermittler 96. Chinesische Philosophie und Mathematik 98. Mathematik in den Klöstern Westeuropas 100.
Formeln der Periode 100 - 830 101

V7 Hochmittelalter und Renaissance 110
Mathematik der Araber, Inder und Chinesen 110. Mathematik in der Zeit der europäischen Scholastik 111. Buchdruck und Rechenbücher 113. Zahlenmystik, Kunst und Astronomie 116. Copernicus und die heilige Zahl 27 119.
Formeln der Periode 1000 - 1590 121

V8 Wissenschaftliche Revolution 140
Galileis Mechanik 140. Auf dem Weg zur Infinitesimalrechnung 141. Von der Entdeckung Keplers bis zur mathematischen Mechanik von Descartes 143. Leibniz und Newton 145. Große empirische Entdeckungen 146
Formeln der Periode 1609 - 1687 148

V9 Absolutismus und Aufklärung 173
Naturwissenschaften und neue Mathematik 174. Erfolge und Ungewissheiten der Pionierzeit der Analysis 178. Der Laplacesche Dämon – die Weltformel des mechanischen Determinismus 180
Formeln der Periode 1703 - 1798 182

V10 Industrielle Revolution 193
Von der Naturphilosphie zur Naturwissenschaft, von der Kraft zur Wärme 194. Naturwissenschaft als Zweitberuf der führenden Mathematiker 196. Gauß und Humboldt 197. Der Weg der Mathematik von Gauß bis Weierstraß und Hilbert 200. Physik und Mathematik bereiten eine neue technische Revolution vor 206. Empirie und Theorie im Clinch 203.
Formeln der Periode 1794 - 1884 205

V11 Elektrotechnische Umwälzung, Fließband und Fordismus 227
Mathematisch-wissenschaftliches Startkapital für das nächste Jahrhundert 227 Trend zur reinen Mathematik 229. Der Paukenschlag von Kurt Gödel 230. Paradigmenwechsel in der Physik 231.Von der Quantentheorie bis zum Transistor 233
Formeln der Periode 1900 - 1960 235

V12 Informationstechnische Revolution und Metamorphose des Kapitals 256
Mathematisches Konzept der Information 256. Maß und Kalkül für Arbeit und Umwelt 259. Finanzkapital – Motor der Entgrenzung 261. Mathematik und Wirtschaftstheorie 264. Ultimative monetäre Logik und Progression der Ungleichheit 266. Grenzwerte und Entgrenzung zum Ausgang des Jahrhunderts 269.
Formeln der Periode 1962 - 2008 273

Register

Literatur 292

Formelregister chronologisch 302

Formelregister alphabetisch 304

Namenregister 306

Sachregister 313

Abkürzungen

V0 bis V12	Vorbemerkungen, mit den Einführungen zu den historischen Kapiteln V3 bis V12
JD	Julianisches Datum als Tagesziffer, 12 Uhr WZ = 13 Uhr MEZ
WZ	Weltzeit
MOZ	Mittlere Ortszeit
MEZ	Mitteleuropäische Zeit
p. a.	per annum, jährlich
d	Tag
v	v. Chr. (v. u. Z., vor unserer Zeitrechnung). Die meisten Historiker setzen heute das Geburtsjahr Christi als 4 v. Chr. an.
n	n. Chr. (u. Z., unserer Zeitrechnung)
v. h.	von heute, Schreibweise der Archäologen und Paläontologen für vorgeschichtliche lange Zeiträume, von der Gegenwart aus rückrechnend, um 1950 eingeführt.
bp	before the present, identisch mit v. h.
a. u. c.	ab urbe condita, seit Gründung der Stadt (Rom), beginnend 753 v
π	Das mathematische Symbol für das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser wird durchgehend zur Abkürzung verwendet, das Zeichen ist erst seit 1736 üblich.
St	Sonnenfinsternis, totale
Sp	Sonnenfinsternis, partielle
Sr	Sonnenfinsternis, ringförmige
Mt	Mondfinsternis, totale
Mp	Mondfinsternis, partielle

Die astronomischen Daten wurden mit Hilfe des Astronomieprogramms Bessel 4 überprüft. Die Jahreszahlen der Formeln sind zur Markierung der Reihenfolge und zum Gebrauch der Register gedacht und entsprechen nicht immer den direkten kalendarischen Daten wie zum Beispiel den im kulturgeschichtlichen Text angegebenen Geburts- und Todesjahren der Personen.

Vorwort

Du musst verstehn, aus Eins mach Zehn – der alte formelhafte Zauberspruch erinnert an die Rechenanweisungen des ägyptischen Schreibers vor viertausend Jahren. In diesem Sinne hat die Formel eine sehr lange Geschichte, denken wir etwa an die in verschiedenen Regionen der Welt gefundenen vorgeschichtlichen Knochenritzungen der Jäger und Sammler, die als Mondkalender identifiziert wurden. Der Mensch erfindet Vorschriften oder Vorhersagen durch Notation beobachteter Abläufe seiner Umgebung, um sich in Raum, Zeit, Materie und Gemeinschaft orientieren zu können und überträgt sie in symbolische Formen wie Zeichen, Rituale und Tänze. Es ist die Zahl, die noch nicht wie heute bei uns als sehr Abstraktes daherkommt. Sie hängt ganz mit konkreten Dingen und Ereignissen in seiner Lebens- und Arbeitsweise zusammen, die wiederum geographisch und historisch sehr unterschiedlich sein können. So entsteht die Formel nicht als blasses Gedankenkondensat des Homo sapiens, sie ist von Anfang an, von ihrer Herkunft und ihren Anwendungsbedingungen her kulturgeschichtlich bestimmt. Die Ethnologen haben das in den letzten Jahrzehnten erneut herausgearbeitet und am Beispiel der Naturvölker nachgewiesen, was schon *Oswald Spengler* und vor ihm wohl bereits *Herodot* wußte: es gibt von der Entwicklungsgeschichte der Völkerschaften her gesehen nicht eine Mathematik, sondern viele. Mancher Fachmathematiker meint vielleicht, dass damit der Königin der Wissenschaften die Krone des axiomatischen Aufbaus und der Unabhängigkeit von Modalitäten der vergänglichen Praxis entrissen wird. Beim Mathematikpädagogen dagegen wird man auf Verständnis stoßen, weil vermeintlich dürre und dem Schüler angsteinflößende Formeln ein Leben und eine geschichtskonkrete Fassbarkeit erhalten, die sie besser im Gedächtnis der Lernenden verankern. Geschichtsbewusstsein, Kenntnisse des sozialen, natürlichen und geistigen Werdens wachsen nicht automatisch in einer Zeit der unvergleichlichen Beschleunigung der Gegenwartsprozesse und der Informationsüberflutung.

In der heutigen Spass- und Mediengesellschaft hat Mathematik ein geringes Prestige. Bekannte Moderatoren und Quizmaster kokettieren geradezu selbstverliebt mit ihrer Matheschwäche seit Schulzeiten. Die Botschaft an die Langweiler der Mathezunft lautet, man könne es auch ohne sie weit nach oben schaffen. Mathematik ist an den Schulen oft das am wenigsten beliebte oder sogar am meisten gefürchtete Fach. Schüler äußern: Mathe ist öde. Mathe stinkt. Ich hasse Mathe. Die Furcht vor der Mathematik zeigt sich vor allem in der beinah einmütigen Ablehnung von Formeln. Es gibt viele verschiedene Auffassungen über die Ursachen dieser Situation in einem Land, das selbst eine lange Reihe von Pionieren der Mathematik hervorgebracht hat. Es wäre billig, den Lehrern die alleinige Schuld in die Schuhe zu schieben. Der wirkliche Bremsklotz ist ein anderer. Die Aneignung der Mathematik bedeutet nicht Auswendiglernen von Formeln. Mathematik ist weniger Wissen als vielmehr Können. Es kommt auf Eigenschaften des Denkens und des Charakters von Persönlichkeiten an wie Zielstrebigkeit, Neugier, Geduld, Ausdauer, Hartnäckigkeit und

Fähigkeit zur kreativen Kombination von Aussagen, Figuren, Grafiken und Formeln. Genaues und nicht flüchtiges Lesen, logische Klarheit, exaktes Arbeiten, systematische Selbstkontrolle und Freude am Erfolg eigenständiger Problemlösung sind gefragt.

Die Mathematikangst erklärt sich aus einem weiteren Merkmal dieses Lerngebiets. Das Resultat mathematischer Arbeit enthüllt, legt eindeutig bloß und kann nicht mehr durch dreiste und raffinierte Rhetorik widerlegt werden. Es fehlen die Schlupflöcher der Selbstdarstellung und des Mogelns. Das entspricht nicht den Regeln einer Konsumgesellschaft, in der das Prinzip der kleinsten Anstrengung bei unverzichtbarem Vergnügen gilt. Man genießt den Nutzen der Produkte einer nicht zuletzt durch mathematische Spitzenleistungen hervorgebrachten Technik wie Computer, Handy, MP-3-Player, GPS-Gerät, Internet und glaubt sich befreit vom langweiligen und mühseligen Selbstdenken, wenn man über Google ohnehin eine schnelle Antwort mit geringster Mühe bekommt.

Natürlich muss man auch über den Mathematikunterricht nachdenken und wir können annehmen, dass wohl die meisten Lehrer das selbst tun. Viele mathematische Zusammenhänge haben in ihrer historischen Grundlage eine einfache Idee, die durch die heutige Lehrbuchdarstellung eher verkompliziert wird. Wenn jene, die das Wirken und Weben der Zahlen jungen Menschen erklären sollen, ihnen „nur eine Zahlenhieroglyphik, bloße Chiffren, deren lebendige Bedeutung niemand mehr kennt und die man mit Schulstolz nachplappert“ vermitteln (*Heinrich Heine* 1834!), dann kommt das zustande, was wir heute bei uns beklagen müssen. Zahlen sind eben keine toten Spielsymbole, sie können Geschichten erzählen, phantastische Bilder aufbauen und zugleich praktische Lösungen vorhersagen, die aufwendige Umwege ersparen.

Das zumindest gelegentliche kulturgeschichtliche Zurückspulen kann interessante Aufschlüsse geben und dafür kann dieses Buch eine Hilfe sein. Kulturhistorisches Bewusstsein ist kein überflüssiger Zierat, es vermittelt die Idee des Ganzheitlichen in einer Zeit der einseitigen Spezialisierung. Bei den Fachwissenschaftlern des neunzehnten Jahrhunderts war es noch üblich, die historischen Wurzeln ihres Gegenstands zu rekapitulieren, wenn man das Lehrgebäude errichtete. Wozu braucht man kulturgeschichtliche Bodenhaftung beim Erlernen und Anwenden der Mathematik? Alle Formeln stehen in einer geistigen Tradition, die weit zurückverfolgt werden kann. Dieses Erbe wurzelt in den real-materiellen Verhältnissen und der ihnen entsprechenden Praxis der Menschen und steht damit in Wechselwirkung. Ferner kann man zeigen, dass ein mathematisches Ergebnis nicht das letzte Wort der Erkenntnis sein muss und selbst die großen Physiker und Mathematiker nicht frei von Irrtümern oder Trugschlüssen waren. Die Chinesen hielten in ihrer Geschichte die mathematischen Verfahren grundsätzlich nicht für unfehlbar. Es hätte ihrer ganzheitlichen Welterkenntnis widersprochen. Am besten ist es wohl, wenn man im Unterricht auch zu praktischen Anwendungen übergeht und dadurch die Aufmerksamkeit fördert, die Phantasie der Schüler anregt und ihnen vermittelt, dass technisch-mathematische Perfektion allein nicht ausreicht. Der einseitige technisch-mathematische Ansatz bei der Prognose, Planung und Gestaltung von Zukunftsvorhaben erweist sich als kontraproduktiv, die qualitativen gesellschaftlichen und natürlichen Prozesse müssen mitgedacht werden.

Dieses Buch ist für einen breiten Leserkreis geschrieben, seine Bandbreite reicht von Philosophiegeschichte, Geschichte der Mathematik, Physik, Astronomie bis zur Wirtschafts- und Kulturgeschichte. Es ist gewissermaßen der dritte Band meiner Kulturgeschichte der quantitativ-numerischen Welterkenntnis, der „Weltchronik des Messens“ von 2001 und der „Quellen der Messkunst“ von 2003. Eine Kulturgeschichte der Formeln verschiedener Wissensgebiete muss die fachspezifische Erklärung der Formeln mit dem historischen Hintergrund ihrer Entstehung und Anwendung verbinden. Dabei stellt sich heraus, dass die jeweilige geschichtliche Bahn der Formel weit bis zur Vorgeschichte und den frühen Hochkulturen zurückreichen kann. Hinzu kommt, dass sie mit dem Auf und Ab der kulturgeschichtlichen „Großwetterlagen“ mannigfach verflochten ist. Der Leser findet diese Hintergrundinformation in den ersten drei Kapiteln und in den Einführungen zu den zehn großen historischen Perioden, in der kulturgeschichtlichen Spalte des Formeltextes und im ausführlichen Namen- und Sachregister. Die Dimension der historischen Erfassung wird deutlich an der Reichweite der Perioden von 30 000 v. h. bis 2008 u. Z., der Lebensdaten der Personen von dem Ägypter *Ahmes* bis *Konrad Zuse* und an der inhaltlichen Spannweite des Sachregisters von Abacus bis Zykloide. Das Buch ist auch durchaus als Nachschlagewerk gedacht, von dessen Register ausgehend der Leser in der Literatur tiefer schürfen kann.

Bernau, im April 2009 Heinz-Dieter Haustein

V0 Einführung

Natura et formula mundum commutant
Frei nach Lukrez

Das Wissen über das qualitative und quantitative Sein und Werden besteht aus Worten, Bildern, Zahlen und Formeln. Formeln gehören wie Rituale, Tanzformen, Zeichen zu den symbolischen Aktivitäten des Menschen, die oft wirkungsmächtiger als neue Techniken waren. So hatten Azteken, Maya und Inka nur einfache Werkzeuge, aber eine hochentwickelte Mathematik für ihren Kalender und ihre hervorragend geplanten Straßen und Städte. Heute zeigt uns die Wissenschaftsgeschichte den Weg der Erkenntnis von qualitativen Aussagen wie gelb, kalt, schwer oder hell zu Vergleichen und Rangfolgen sowie schließlich zu operationalen Definitionen, Messungen, Interpretationen der Messergebnisse und Formeln. Eine operationale Definition ist eine solche, bei der von einer bestimmten qualitativen Eigenschaft eine plausibel messbare Quantität abgeleitet werden kann. Vorhersageergebnisse der Formeln müssen mit der Wirklichkeit verglichen und kritisch bewertet werden.

Die Evolution des Zählens, Messens und Rechnens war stets Antrieb und Folge der Stufenleiter der gesellschaftlichen Produktivkräfte. Ihr theoretisches Rüstzeug liefert seit Jahrtausenden die Mathematik. Im Jahre 1971 brachte die Post von Nicaragua eine Briefmarkenserie mit den zehn wichtigsten mathematischen Formeln, die die Welt veränderten, heraus. Sie beginnt mit 1 + 1 = 2, dem Newtonschen Gravitationsgesetz und der Einsteinschen Energie-Masse-Relation. Es handelt sich um allgemein-mathematische und naturwissenschaftlich-mathematische Formeln, während Formeln von Sozial- und Geisteswissenschaften fehlen. 1980 wurde die Serie gleich zu Beginn einer Schrift von *Peter Schreiber* „Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie“ in Leipzig erwähnt. In den USA wurde die Idee der Zusammenstellung von Weltveränderungsformeln erst Jahrzehnte später aufgegriffen und verschiedene Fachleute versuchten, Ranglisten aufzustellen. *Pickovers* Liste beginnt mit der Einsteinschen Formel, *Ashbacher* mit den negativen Zahlen, andere Autoren werden neue Rangfolgen anbieten. Das läuft auf subjektive fachspezifische Präferenzen hinaus. Eine einfache Liste der wichtigsten Formeln, die die Welt verändern und veränderten, kann immerhin das akzeptable Ergebnis verschiedener Einschätzung von Breiten- und Tiefenwirkung sein. Sofern es aber um eine Rangordnung dieser Ergebnisse geht, sollte man ein anderes Herangehen bevorzugen.

Wenn von Formeln die Rede ist, muss es nicht gleich oder nicht nur um Mathematik gehen. Merkwürdigerweise hat der Mathematiker *d'Alembert* in der großen Enzyklopädie, die er mit *Diderot* ab 1750 herausgab, den Begriff nur als Glaubensformel der Theologie und Kirchengeschichte erklärt, damals wohl das Hauptanwendungsgebiet des Wortes. Noch älter sind Zauber- und Beschwörungsformeln. Die Orakelsprüche von Delphi waren nicht so sehr Prophezeiungen als vielmehr mystische Anweisungen, Verhaltensformeln. Die Formel, lateinisch formula als Diminutiv von Form, gilt heute allgemein als Vorschrift, Regel, Richtschnur, Typus, Norm, Modell oder Muster. Es gibt Rechtsformeln,

Eidesformeln, Vertragsformeln, Gewerbsgeheimnisformeln, kultische und religiöse Formeln, Schicksalsformeln, Formeln als traditionell festgelegte Notenfolgen, Formeln in Gedichtform bei den Arabern, Zauberformeln und Formeln für die Konstruktion von Rennwagen im Motorsport. Ihre oft gemeinsamen Merkmale sind Kurzfassung, Maßstabcharakter, Markierung eines Status und Unterstützung routinierter Aufgabenlösung. Das Wort kommt von dem lateinischen Wort forma für Gestalt, das von den Römern auch als Übersetzung von Platons Terminus εἶδος für Idee, Urbild, Wesen oder Beschaffenheit verwendet wurde. In der Mathematik ist die Formel der in Symbolen gegebene Betrag einer aus mehreren Bestimmungskomponenten zusammengesetzten Größe. Mathematische Formeln gelten daher als abstrakt, das lateinische Quellwort ist trahere – ziehen, also gewissermaßen das Wegziehen der konkreten Hülle, um das Wesentliche zu erfassen. Die chemische Formel ist die aus chemischen Zeichen bestehende Darstellung der Struktur oder des Aufbaus von Verbindungen aus Elementen. In der Physik ist die Formel die Kurzschrift eines physikalischen Zusammenhangs durch eine mathematische Gleichung. Schließlich ist in der mathematischen Logik Ausdruck oder Formel eine spezielle Zeichenreihe in einer formalisierten Theorie. Formalisierung ist die Präzisierung einer Aussage durch eine operationale Definition, Interpretation und ein Kalkül mit Formeln. Vorgeschriebene Formeln rationalisieren die Aufgabenlösung. Sie sind aber nicht das Nonplusultra in der mathematischen Einführung und Bildung.

Heute wird oft geklagt über die unzureichenden rechnerischen Fähigkeiten der Lehrlinge oder die Rechenschwäche, Mathematikaversion und Formelangst von Schülern. Kinder an die Mathematik heranzuführen heißt vor allem, ihnen Aufgaben lebendig und fasslich vorzugeben und einen Freiraum zu öffnen für ihre eigenen Wege zur Problemlösung. Dann prägen sich später der Sinn wie die Notation der Formel viel besser ein und die Abneigung gegen langweilige Formeln wird überwunden. Hinweise auf den geschichtlichen Werdegang des Problems und der Lösungsformel können dazu dienen, die überhöhte Abstraktionsebene zu verlassen und kulturhistorische Bodenhaftung in den Mathematikunterricht einzuführen. Zum Beispiel erläutert der Physiklehrer den Zwölfjährigen das Gesetz und die Formel des Druckes. Druck ist gleich Kraft, geteilt durch die gedrückte Fläche. Die Kraft ist Masse mal Beschleunigung und die Fläche wird in Meter gemessen. Er wird die Schüler vielleicht fragen, ob jemand ein Erlebnis mit unterschiedlichem Druck hatte. Einer berichtet, dass er einen Luftballon mit Druck so lange aufgeblasen hat, dass er schließlich zerplatzte. Der nächste meint, dass ein Nagel nur dann ins Hartholz eindringt, wenn man bei Schwierigkeiten einen schwereren Hammer oder einen spitzeren Nagel verwendet. Der Lehrer erinnert dann an *Wilhelm Buschs* Geschichte der Streiche von Max und Moritz. Im dritten Streich wird erzählt, wie die beiden Schwerenöter den Holzsteg über dem Bach vor dem Haus von Schneider Böck ansägen. „Max und Moritz, gar nicht träge - Sägen heimlich mit der Säge – Ritzeratze! Voller Tücke – In die Brücke eine Lücke.“ Sie locken den Schneider mit Spottversen aus dem Haus, die Brücke bricht und Böck fällt ins Wasser. Der Lehrer fragt nun, wieso die Formel auch den Erfolg dieser hinterlistigen Missetat erklärt. Im Anschluss an die Diskussion und ein kleines Experiment wird er die Maßeinheit des Druckes, das Pascal erklären. Das ist zugleich das Stichwort, um zu erwähnen, dass der

Namensgeber der Maßeinheit, *Blaise Pascal* (1623-1662), vor fast vierhundert Jahren als Neunzehnjähriger die erste funktionierende mechanische Rechenmaschine für Addition und Subtraktion konstruierte. Die älteste der von ihm gebauten acht Rechenmaschinen kann man in Paris im Museum der Künste und des Handwerks besichtigen. Eine weitere befindet sich im Staatlichen Mathematisch-physikalischen Salon in Dresden. *Pascal* hat sich auch mit der Luftdruckmessung in unterschiedlichen Höhen und der Druckmessung von Flüssigkeiten in verschieden geformten Gefäßen mit gleicher Bodenfläche befasst. Wie in dem Beispiel wird das Lernen von Formeln erleichtert, wenn es mit eigenen Erfahrungen und Aussagen der Schüler, Lockerungsbeispielen, kleinen praktischen Experimenten und historischen Informationen verbunden wird. Jeder Lernende hat ein besonderes Lernprofil, es gibt vorwiegend visuelle, auditive durch Hören und Sprechen, haptische durch Anfassen und Fühlen oder schnelldenkende Erfassung.

Ein Credo sei mathematica cum historia culturalis, Mathematik u n d Kulturgeschichte, weil es ganzheitliches Denken fördert. Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Mathematikgeschichte und den allgemeinen kulturellen Bestrebungen der Zeiten, die selbst wieder einen gesellschaftlichen und sozialökonomischen Hintergrund haben. Vor allem stecken die mathematischen Probleme in den Formen menschlicher Arbeit lange vor der Entdeckung von Zähl- und Rechenroutinen. Verschiedene natürliche und kulturelle Bedingungen prägen die Arten des Zählens, Messens, Ordnens, Teilens und Rechnens der Menschen. So gesehen, trägt die Mathematik ebenso wie die Sprache und andere Erkenntnisformen den Stempel der lokalen oder regionalen Kultur. Das menschliche Bauen, die Textilgestaltung, Ackerbau und Gewerbe, die sozialen Beziehungen, das Kalenderwesen sind, wie uns Archäologie und Geschichtsforschung zeigen, vielfach differenziert und widerspiegeln sich in den mathematischen und anderen Kulturtechniken. So gibt es in der Weltgeschichte mehrere angewandte Mathematiken zu gleichen Aufgabenstellungen. Daher ist die geschichtliche Folge der wichtigsten Formeln, Algorithmen und Ausdrücke des Zählens, Messens und Rechnens in ihrer Vielfalt das wesentliche Kriterium der Rangordung neben einer plausiblen Schätzung des Wirkungsumfangs.

Die mathematischen Formeln bilden seit der Antike eine besondere Welt der Abstraktion. Nach *Platon* ist dies ein Abbild des Kosmos der objektiven Ideen, die gewissermaßen die Vorlage für die veränderliche Realwelt darstellen, ganz unabhängig vom menschlichem Tun und Denken. Bei ihm entsprechen den vier Elementen Erde, Wasser, Luft und Feuer die vier Sorten von Elementarteilchen Würfel, Ikosaeder, Oktaeder und Tetraeder. Sie werden wiederum in Dreiecke ihrer Oberfläche zerlegt und aus diesen Dreiecken aufgebaut. Zwei Elementarteilchen Luft plus ein Elementarteilchen Feuer ergibt so ein Elementarteilchen Wasser. Die Symmetrie, das mathematische Gesetz, die Form oder summa summarum die Formel ist letzte Wurzel der Erscheinungen. In ähnlicher Richtung wie *Platon* dachten viel später auch große Mathematiker wie *Gregor Cantor* (1845-1918) und der Logiker *Kurt Gödel* (1906-1978). Ganz anders als *Platon* beurteilte *Aristoteles* die Mathematik. Tieferes Wissen erlangt man aus Sinneserfahrung in der realen Welt mit Hilfe von Verallgemeinerung durch menschliches Denken. Er meinte, dass die Mathematik dazu beiträgt, die Zusammenhänge materieller Phänomene aufzudecken. In der Neuzeit gab es seit

Descartes jedoch viele bedeutende Gelehrte, die der Meinung waren, dass die Formeln eine reine Erfindung des Menschengeistes sind. So ist die Formel bis heute ein Streitobjekt der verschiedenen Philosophien.

Der Satz des *Pythagoras* beeinflusst seit zweieinhalb Jahrtausenden die menschliche Praxis, als Erfahrungsroutine bereits noch länger. Heutzutage wird er millionenfach angewendet in Navigationssystemen, alle Entfernungen im Koordinatensystem werden danach berechnet. Die Einsteinsche Relation von Energie und Masse ist fundamental auf vielen Feldern, sie existiert aber erst seit einem Jahrhundert. Könnten wir die Zahl der Wirkungsjahre mit der Veränderungswirkung auf die jeweilige Jahreswelt multiplizieren und die Ergebnisse summieren, so würde vielleicht *Pythagoras* vor *Einstein* rangieren. Aber es gibt kein Maß für die jährliche Veränderungswirkung auf Wissenschaft, Technik, Wirtschaft und Gesellschaft.

Welche Stellung nimmt die Formel im mathematischen Erkenntnissystem ein? Ausgangspunkt ist die Formalisierung ganzheitlicher, qualitativ-quantitativer Zusammenhänge durch Einführung allgemeiner Begriffe, Regeln, Axiome und Elementarsätze. Formeln verwenden Abkürzungen und Symbole, mit ihnen beginnt die von *Diophantos* aus Alexandria (um 150-350) geprägte eigentliche Algebra, deren Vorstufen freilich bereits in Babylonien und Ägypten zu finden sind. Im mathematischen System Axiom - Theorem oder Lehrsatz - Beweis liefert die Formel oft eine Beweiskette. Die Kreativität des mathematischen Denkens speist sich aus Anstößen der menschlichen Praxis wie aus einer intuitiven Gesamtschau und logischen, traditionelle Grenzen überschreitenden Phantasie, die der Praxis manchmal vorauseilen kann. Als die Griechen sich mit Kegelschnitten befassten, handelte es sich, wie oft behauptet wird, um hochabstrakte Raumbeziehungen. Es war nicht absehbar, wie bedeutsam sie für die viel spätere Analyse der Planetenbahnen und vieler praktischer Probleme werden. Aber *Apollonios* von Perge (262-190 v) mit seinem Hauptwerk über Kegelschnitte hatte durchaus praktische Anregungen zur Verfügung im Zusammenhang mit konischen Sonnenuhren, die es nach den archäologischen Funden in jener Zeit bereits gab.

Der nächste Schritt nach der Formalisierung ist die Notation der Ergebnisse in Worten, geometrischen Gebilden und schließlich in Symbolen. Für die Lösung von Aufgaben werden Algorithmen bestimmt, das heißt endliche Folgen von Schritten in Übereinstimmung mit den Regeln. Gesetzmäßig veränderliche Größen werden durch Funktionen verknüpft, die in Worten, Graphen, Diagrammen oder Formeln dargestellt werden, welche symbolische Notation voraussetzen. Die Symbolik ist ein gewisser Schärfungsfilter der Begriffe, der die in der Wortsprache unvermeidlichen mitschwingenden Nebenbedeutungen ausschaltet. Unser heutiger Formelbegriff setzt algebraische Notation voraus, aber auch früher gab es formelmäßige mathematische Routinen. Nicht alle mathematischen Formeln sind durch Beweise abgesichert, manche stützen sich lediglich auf empirische Erfahrung. Dazu gehört die Relation $\pi / 18^{1/2}$, die, wie schon *Kepler* vermutete, einen Grenzwert von 74 Prozent für die Packungsdichte einer Pyramide aus gleichgroßen Kugeln angeben soll.

Formeln sind Merkzeichen der Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung, oft eine Art Schlussstein zu einem großen und langdauernden Bogen menschlicher Erkenntnis.

Sie rationalisieren Berechnungen, ersparen Messungen, ermöglichen sichere oder wahrscheinliche Prognosen und liefern die numerische Basis für technische Lösungen. Formeln vermögen es, die Komplexität der Welt in überschaubare Muster zu übersetzen. Das mathematische Modell, das auf der Formel der Parabel beruht, kann zum Beispiel für so verschiedene Anwendungen wie Katoptrik, Konstruktion von Wurfmaschinen oder Schiffsquerschnitten verwendet werden. Neben der beschreibenden und prognostischen haben die Formeln eine anweisende oder exekutierende Funktion, die uns täglich begegnet in den vielen technischen Systemen, mit denen wir leben, von den Uhren bis zum Telefon, von der Energieversorgung bis zur Kreditkarte. Formeln schränken das Wirkungsfeld auf die von ihnen zugelassenen Beziehungen ein und können andererseits Brücken zur Welt der Wahrscheinlichkeit und der Schätzung bilden. Wenn die empirischen Daten nichts taugen, nützt auch die beste Formel nichts. Die mit den Formeln verbundene quantitative Vereinfachung blendet manchmal wesentliche qualitative Seiten aus. Formeln können auch Exaktheit und Tiefe vorgaukeln, während sie wesentliche Komponenten der Wirklichkeit ignorieren. Das kommt im Bereich der Physik wohl kaum vor, ist aber heute nicht selten in den sozialen und ökonomischen Disziplinen anzutreffen. Es sei erwähnt, dass in den mathematischen Konzepten auch eine konservative Komponente steckt, wie die Geschichte zeigt. Die trügerisch exakte mathematische Epizyklentheorie des *Claudius Ptolemäus* hat über Jahrhunderte die Suche nach den wahren Planetenbahnen verhindert.

Keine Formel erschöpft die Konkretheit wirkender Prozesse. Die Formeln sind eigentlich nichts anderes als Sätze bestimmter Art. Auch ihr wörtlicher Ausdruck hat die Qualität des Abstrakten. Sie können praktisch angewendet werden, aber sie sind nicht identisch mit der vollständigen Einsicht in die wirklichen konkreten Zusammenhänge. *Albert Einstein* schrieb 1950 an *Max von Laue:* „Es gibt die erstaunliche Möglichkeit, dass man einen Gegenstand mathematisch beherrschen kann, ohne den Witz der Sache wirklich erfasst zu haben“. Die Wirkungsmacht der Formeln bleibt dennoch unbestritten. Natürlich verändern nicht Formeln die Welt, es sind die Menschen, welche sie schaffen und zum Guten oder zum Bösen verwenden.

In der Erkenntnisfolge wird das Etablieren logischer Formen stets im Widerstreit mit neuen qualitativ-quantitativen Momenten stehen, die nicht in das alte Formelbett passen und veränderte oder neue Formelbildung auslösen. *Felix Klein* meinte einmal, dass Formeln mächtig, aber blind sind. Auch *Augustin Cauchy* verwies darauf, dass Formeln nur wahr sind bei Einhaltung bestimmter Bedingungen. So befasste sich seinerzeit *Descartes* mit der Gleichung für die Form des Blütenblatts des Jasmin, die man als $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ beschreiben kann. Die Formel der ebenen Form abstrahiert von der in der Realität gekrümmten Fläche des Objekts. Immer wieder überraschend ist es, wenn man entdeckt, dass Jahrmillionen alte Formen der biologischen Naturgeschichte in bestimmten charakteristischen Komponenten formelmäßig erfasst werden können wie zum Beispiel mit der Gleichung der logarithmischen Spirale $r = e^{kw}$ für die Nautilusmuschel. Bei der Erkenntnis der Wirklichkeit wetteifert der Ausbau des abstrakten mathematischen Denkens gleichsam mit der Erforschung ihrer qualitativen Vielfalt, ohne dass man Grenzen oder Privilegien für beide Denkrichtungen postulieren kann. Mittel der Weltveränderung ist weder ein bloßes

mathematisches Exempel noch ein verbales Räsonnement über Eigenschaften und Wesensarten.

Im Folgenden wird versucht, eine geschichtliche Reihe der wichtigsten mathematischen Praxisroutinen, Algorithmen und Formeln aufzustellen, die für die Menschen die Weltaneignung am wirksamsten beeinflusst haben. Diese Reihe zeigt, dass manche Formeln ein historisches Fenster nicht nur in ihrer mathematischen Entwicklungsgeschichte haben. Auch ihre intensive Anwendungsperiode in Technik und Wirtschaft kann begrenzt sein. Manchmal wartet eine mathematische Entdeckung Jahrhunderte, bis sie eine breite Anwendung findet. Für mich ist das eine der erstaunlichsten Eigenschaften des mathematischen Denkens. Sie zeigt auch, dass der mathematische Fortschritt kein simples Resultat der technischen und wirtschaftlichen Veränderungen ist. Eine bahnbrechende Formel ist wie ein Baumstamm, dessen Wurzeln tief in die Geschichte des mathematischen Denkens und dessen Zweige breit in die Felder der Anwendung reichen.

Die Formeln des historischen Überblicks unterscheiden sich im Abstraktionsgrad zwischen allgemein-mathematischen und spezialwissenschaftlich-mathematischen Formeln. Es gibt Formeln eines sehr abstrakten mathematischen Überbaus wie zum Beispiel der Gruppentheorie, die zugleich ganz weitgreifende allgemeine realwissenschaftliche Zusammenhänge abbilden. Es ist eben diese Eigenschaft des mathematischen Denkens, die uns erklärt, warum es nicht selten wie der Igel früher da ist als der Hase bestimmter realer Erkenntnisse, der dann dem Igelpfad folgen wird. Formeln und Algorithmen sind Zaubermittel der rationalen Art. Sie ermöglichen es, dass viele Zusammenhänge, ganze Figurengruppen sich gleichsam schichten, ordnen und Ungeahntes, Niegesehenes offenbaren. *Leibniz* nannte die Mathematik einmal „vera cabbala“, mystische Zahlenwahrheit, sicher aus Respekt gegenüber den wundersamen, oft unerwarteten Erkenntniszuwächsen, die sie bieten kann. *Heinrich Hertz* bewunderte am Beispiel der Maxwellschen Gleichungen die Eigenschaft von Formeln, neue Horizonte aufzuschließen, die ursprünglich gar nicht mit ihnen verbunden waren.

Formelnotationen sollten einleuchtend und leicht handhabbar sein. Dazu bemerkte *Leibniz*: „Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, dass sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert“. (Über die Analysis des Unendlichen, S. 74). Zu den bahnbrechenden allgemeinmathematischen Formeln gehören auch die prominenten Zahlen, wie *Günter Kröber* sie nennt. Dazu gehören die Kreiszahl π, die Wurzel aus 2, die Zahl φ des Goldenen Schnitts, die Wurzel aus -1 und die Basis der natürlichen Logarithmen, die Eulersche Zahl e. Sie sind eine Art dimensionslose Wegmarken und in ihrer merkwürdigen Rolle zwischen fundamentaler Bedeutung und Unbestimmbarkeit ähnlich zwiespältig wie ihre Schwestern, die physikalischen Konstanten. Zu den Geheimnissen der Weltformelsuche gehören auch diese Naturkonstanten, von denen es elf kosmologische der Makrowelt und sechsundzwanzig teilchenphysikalische der Mikrowelt gibt. Sie werden mit immer größerer Genauigkeit gemessen, aber niemand kann bisher diese Werte einheitlich erklären, die die Welt zusammenhalten im ewig veränderlichen Fluss der Ereignisse.

V1 Die Weltformel – ein Phantom?

Es ist ein uralter mythologischer und philosophischer Traum der Menschheit, die Weltformel, den Schlüssel zum Bau des Universums, zu finden. Die Zahlenwelt hat ein Doppelgesicht. Von ihrem Ursprung her ist sie mit realen Naturprozessen und menschlichen Bedürfnissen verbunden. Schon vor den Pythagoräern aber entschwebte sie in mystische Gefilde, als die babylonischen Priester den Göttern Zahlennamen verliehen. In den Schöpfungsmythen der Mesopotamier werden Ordnungen für Zeit, Raum, Wetter, Webkunst und die Zerstörung des Unzerstörbaren festgelegt. *Inama,* Priesterkönigin von Uruk, überlistet und bestiehlt den Gottkönig *Enki* von Eridu, der die Weisheits- und Gesetzestafeln besitzt und damit dafür sorgt, dass Saat und Ernte rechtzeitig erfolgen. Im Sumerischen, Altbabylonischen und Ägyptischen wird die Götterwelt mit der Dreiheit und Neunheit strukturiert. Die Zahl wird zum Medium der Schöpfungsbotschaft. Gleichsam Symbol einer universalen Formel ist die Waage in Ägypten mit der Göttin *Ma'at.* Im griechischen Olymp entscheidet *Zeus* mit der goldenen Waage das Schicksal Trojas, wie *Homer* in der Ilias berichtet. Bei den Chinesen bietet das „I Ging" einen zahlenmäßigen Raster aller möglichen Wandlungen der Welt und des Menschen. Im irischen Ganggrab T von Loughcrew und in anderen Anlagen gibt es eine große Zahl verschiedener Gravierungen mit kosmologischer Bedeutung, Punkten, Kreise, radiale Linien, Kreuze, Bögen, Spiralen, Sonnenuhren wie ein abstraktes Weltornament.

Für die Griechen ist der Logos das Ordnungsprinzip des Kosmos. Das Wort ist von λέγειν abgeleitet, das insbesondere zählen und sagen bedeutet. Berühmt ist die Weltformel, eine Art universale Entropie, von *Anaximandros* aus Milet (611-546), der feststellt: „Woraus die Dinge entstanden sind, darein müssen sie auch wieder untergehen, nach dem Maß der Schuldigkeit. Denn sie zahlen Strafe und Buße für ihr Unrecht nach der Ordnung der Zeit." Für *Philolaos* aus Kroton (um 400 v) bestimmt die Zehnzahl die Welt, denn sie ist groß, allvollendend, allwirkend und Urgrund und Führer des göttlichen und himmlischen Lebens wie auch des menschlichen. Überhaupt war den Pythagoräern das ganze Weltgebäude Zahl, deren Prinzipien oder Formeln sie, wie *Aristoteles* (384-322) berichtet, in korrespondierenden Reihen einander gegenüberstellen. *Platon* (427-347) hat unter dem Einfluss seines Freundes, des Mathematikers *Theaithetos* (413-369) im Dialog *Timaios* seine Kosmogonie dargelegt. Die Elementarkörper sind danach letztlich alle reduzierbar auf Ur-Dreiecke der drei Typen gleichschenklig, ungleichschenklig und gleichseitig (aus den ungleichschenkligen abgeleitet). Drei der vier Elemente Erde, Wasser, Luft und Feuer sind aus ungleichschenkligen Dreiecken aufgebaut, das vierte aus gleichschenkligen. Aus den Urdreiecken lassen sich die berühmten fünf platonischen Körper zusammensetzen, der Kubus, das Oktaeder, das Dodekaeder, das Ikosaeder und die Pyramide. Der Umlauf des Alls umfasst alle verschiedenen Gattungen, weil er kreisförmig ist und wieder in sich selbst zurückläuft. Es ist eine Weltformel des Seins, während *Heraklit* aus Ephesos (550-480) das

Gesetz des Weltwerdens und der ständigen Veränderung postulierte. Seit den alten Griechen gibt es also gewissermaßen die Mathematik in drei Aggregatzuständen, einem reellen, einem mystischen und einem logisch sublimierten Aggregatzustand.

Eines der ältesten mathematischen Weltmodelle war die Vorstellung eines kugelförmigen Universums mit der Erde als Mittelpunkt. Sonne, Mond und Sterne bewegten sich danach in einem Rhythmus auf einer Kreisbahn am Himmelsrund. Die frühen Priesterastronomen entdeckten jedoch in der Bewegung der Planeten Unregelmäßigkeiten, schleifenartige Abweichungen vom Modell der gleichmäßigen Kreisbahn. Der Mathematiker und Astronom *Apollonios* von Perge (um 262-190 v) aus Alexandria fand ein neues Modell. Er ging davon aus, dass ein Planet wie der Mars sich auf einem kleinen Kreis bewegt, dessen Mittelpunkt sich selbst wieder auf dem Großkreis der Hauptbahn bewegt. Durch Verbindung von Hauptkreis (Deferenz) und Aufkreis (Epizykel) mit verschiedenen Drehrichtungen und Umlaufgeschwindigkeiten sowie durch Annahme zentrischer oder exzentrischer Bewegung des Hauptkreises entstand ein vorzügliches formales mathematisches Kreismodell, mit dem man auch Finsternisse zuverlässig voraussagen konnte. Das Kreismodell verwendete noch *Copernicus* 1543, wobei er jedoch anstelle der Erde eine andere fiktive Mitte in der Nähe der Sonne wählte. Die astronomischen Beobachtungen wurden schließlich immer genauer und die Epizyklenmodelle komplizierter und damit ihre Grenzen aufzeigender.

Den Mythos der Weltformel finden wir in den Hochreligionen wieder. Im Buch *Hiob* des Alten Testaments wird berichtet, dass Gott der Welt das Maß gesetzt und über die Erde die Richtschnur gezogen hat. In der dritten Sure des Korans heißt es: „Allah ist schnell im Rechnen … und er berechnet alle Dinge an Zahl“. Ein buddhistisches Kosmogramm aus Nepal zeigt Dreiecks-, Quadrat- und Kreisstruktur als universale Darstellung von Zeitenwandel und Raumbezug. Im Hochmittelalter entwickelt *Raimundus Lullus* (1232-1315) eine Ars generalis oder Universalwissenschaft mit absoluten und relativen Prinzipien, deren Zusammenhang mit Kombinationsgesetzen in formelhafter Weise hergestellt wird. Dem dienen Figuren mit drehbaren Dreiecken und Vierecken. Später wurden *Cusanus, Bruno* und *Leibniz* auf diese Kombinatorik aufmerksam.

Mit der Renaissance beginnt der Übergang von der mythenbeladenen Spekulation zur exakten Naturwissenschaft, die die Frage nach dem wesenhaften Grund durch das Experiment und die quantitative Beziehung ersetzt. Und doch gibt es einen Nachklang der alten Botschaften. *Johannes Kepler* (1571-1630) hat in seinem „Mysterium Cosmographicum“ 1597 am Beginn seiner Laufbahn noch versucht, die Verhältnisse der Planetenbahnen mit dem Kreis und den fünf platonischen Polyedern zu erklären. Der dänische Astronom *Tycho Brahe* (1546-1601), dem er das Werk schickte, äußerte sich freundlich, empfahl ihm jedoch gründliche empirische Untersuchungen. Erst 1605 fand *Kepler* mit Hilfe der Daten Tychos von der Marsbahn seine Weltformel der elliptischen Planetenbahn.

Isaac Newton (1643-1727) hat sich in seinem langen Gelehrtenleben vierzig Jahre lang damit befasst, die biblische Chronologie mit den Ergebnissen der Astronomie und anderer Naturwissenschaften in Übereinstimmung zu bringen. Seine Arbeit war religiös motiviert, aber zugleich mit vielen Spezialstudien auf nahezu allen Wissensgebieten verbunden. Der

Erzbischof *James Ussher* hatte 1650 als genaues Datum der Schöpfung den 23. Oktober 4004 aus der Bibel abgeleitet. *Newtons* Werk von 400 Seiten „The Chronology of Ancient Kingdoms Amended …“, das ein Jahr nach seinem Tod publiziert wurde, kam zu dem Ergebnis, dass die Welt 534 Jahre jünger sei als die von *Ussher* berechnete.

Leibniz und *Newton* entdeckten im siebzehnten Jahrhundert eine neue Signatur und Stufe der Mathematik, die dem ganzen Gebiet der theoretischen und angewandten Physik und damit der Technik neue Wege eröffnete und gewissermaßen wie in einer geheimnisvollen Chiffre die Buchhaltung der sich in der Folge rasant entwickelnden kapitalistischen Wirtschaftsweise enthielt. Die Gedanken von *Leibniz* kreisten schon seit seiner Nürnberger Zeit 1666 weiter zur Schaffung einer characteristica generalis, eines universellen Verständigungsmittels bis zu einer allgemeinen Symbolsprache, also einer Art Formel der Formeln. Eine solche rationale und zugleich mystische Sehsucht nach einer Universalsprache entstand in einer zerschlagenen, zersplitterten Gesellschaft in Mitteleuropa nach den unglaublichen Verheerungen im Dreißigjährigen Krieg.

Auch im achtzehnten Jahrhundert finden wir Zeugnisse für diese Denkrichtung in Dichtung und Wissenschaft. *Goethe* suchte im Faust danach, was die Welt „im Innersten zusammenhält“. Er zitiert den Zauberspruch der Elementargeister, die die vier Elemente verkörpern , bemüht das Zeichen des Makrokosmos und das Weltzeichen des Pentagramma. Eine Weltformel glaubte der hochangesehene Wissenschaftler *Pierre-Louis Moreau de Maupertuis* (1698-1759), damals Präsident der Preußischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1744 gefunden zu haben. Ausgehend von dem Fermatschen Prinzip des kürzesten Lichtwegs (1629) fasste er im Newtonschen Sinne Licht als Korpuskel auf und errechnete für die Lichtausbreitung, dass das Integral $\int mvds$ (m Masse, v Geschwindigkeit, s Weg), das *Leibniz* „Aktion“ genannt hatte, minimal sei. Daraus entwickelte er zwei Jahre später ein universelles Prinzip der kleinsten Aktion: Tritt in der Natur irgendeine Änderung ein, so ist die für diese Änderung notwendige Aktionsmenge die kleinstmögliche. Er hob in vorauseilender Spekulation dieses Prinzip philosophisch immer höher und sah 1750 in seinem „Essai de Cosmologie“ darin sogar einen Beweis für das Dasein Gottes. In Wirklichkeit erscheinen aber in der Natur auch Maxima der Aktion, es kann also nicht als Universalprinzip akzeptiert werden. Außerdem wusste *Maupertuis* nicht, dass schon *Leibniz* in einem Brief viel präziser geschrieben hatte: „Sie [die Aktion] ist wie das Produkt aus Masse, Strecke und Geschwindigkeit oder aus Zeit und lebendiger Kraft [kinetische Energie]. Ich habe bemerkt, dass sie in den Bewegungsänderungen ständig zum Maximum oder zum Minimum wird“.(Thiele S. 79 f.) An keiner Stelle hat aber *Leibniz* versucht, daraus eine Weltformel zu machen.

Pierre Simon Laplace hat 1814 in seinem philosophischen Essay über die Wahrscheinlichkeit sein berühmtes mechanisch-deterministisches Credo einer universellen Formel der Analysis formuliert, die es ermöglichen würde, alle vergangenen und zukünftigen Zustände des Makro- und des Mikrokosmos zu erfassen. Es war ein Reflex der hochgespannten Erwartungen an die Infinitesimalmathematik, die ihren Siegeszug auch in den praktischen Anwendungen erlebt hatte. Die moderne Naturwissenschaft hat im neunzehnten Jahrhundert den spekulativen Weg der Naturphilosophie des achtzehnten Jahrhunderts verlassen,

obgleich deren allgemeine Fragestellungen nicht selten konkrete Forschungen anregten. So verlangte Schellings Werk von 1799, alle physikalischen Kräfte, die gravischen, elektrischen, magnetischen Aspekte und Entfaltungsformen einer universellen Dynamik in ihrer Einheit zu erfassen. Schellings Schüler *Hans Christian Oersted* (1777-1850) forschte lange Zeit systematisch zur Beziehung von Elektrizität und Magnetismus und entdeckte 1820 die magnetische Wirkung des elektrischen Stroms. 1865 hat der Schotte *James Clerk Maxwell* (1831-1879) die Teiltheorien von Magnetismus und Elektrizität vereinigt. Das nur qualitative Schließen der Philosophen war nicht geeignet, zu solch konkreten Resultaten zu gelangen.

Im 20. Jahrhundert hat *Albert Einstein* (1879-1955) ab 1923, angeregt durch den Erfolg seiner Allgemeinen Relativitätstheorie, vergeblich versucht, eine „Theorie von allem", das heißt eine einheitliche Feldtheorie zu entwickeln, die alle Wechselwirkungen der Materie umfasst. Mit seiner Weltformel, der „Einheitlichen Theorie der Elementarteilchen", scheiterte auch *Werner Heisenberg* (1901-1976) im Jahre 1958. Er wollte eine Grundgleichung der Materie, nicht aber für einzelne Elementarteilchen schaffen, aus der sich die Elementarteilchen etwa als Eigenlösung ergeben. Die von ihm 1925 gefundene Unschärferelation ist wahrscheinlich eine elementare Eigenschaft des Universums mit seinen vier Wechselwirkungskräften, sie wird aber in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht berücksichtigt. Man muss ferner hinzufügen, dass es auch kosmologische Theorien für den Anfang und das Ende des Universums gibt. Eine große Gruppe von Weltformeln im Pluralis sind die Erhaltungssätze im Bereich des Makro- und Mikrokosmos, beginnend mit dem Satz von der Erhaltung der Masse im achtzehnten Jahrhundert. Die Mathematikerin *Emmy Noether* (1882-1935) hat gezeigt, dass sich diese Sätze als Formeln der Unveränderlichkeit auf höhere Prinzipien zurückführen lassen, nämlich auf Symmetrieeigenschaften der Zeit und des Raumes. Die dialektische Ergänzung dazu sind die unzähligen Symmetrieverletzungen in der realen Welt.

Es sind wohl diese Erkenntnisfortschritte, die immer wieder den Wunsch nach weiterer Verallgemeinerung nähren. Die Wissenschaft strebt danach, immer mehr Beobachtungen mit immer weniger Formeln zu erklären. Wer das weiterdenkt, kommt zur Idee der Weltformel. Bis heute ist es nicht gelungen, eine physikalische Weltformel im umfassenden Sinne zu finden. Aus der Zusammenarbeit einer Reihe von Physikern entstand im Jahre 1929 eine Verbindung zwischen modifizierter Maxwellscher Theorie des Elektromagnetismus und der neuen Quantentheorie der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, die man Quantenelektrodynamik QED nannte. Im Jahre 1967 haben *Abdus Salam* aus London und *Steven Weinberg* aus Harvard die Theorien der elektromagnetischen Kraft und der für die Radioaktivität verantwortlichen schwachen Wechselwirkung vereinigt. Der nächste Schritt war die Vereinigung mit der starken Wechselwirkung in der Grand Unified Theory. Diese Große Vereinheitlichte Theorie umfasst also von den vier Kräften des Universums den Elektromagnetismus, die starke Wechselwirkung des Atomkerns und die schwache Wechselwirkung des radioaktiven Zerfalls. Die noch unbewiesene Stringtheorie erklärt das Wesen und Verhalten der Grundbausteine der Welt. Je nachdem wie die Strings (winzige Schleifen) schwingen und oszillieren, entstehen vielfältige Schwingungsmuster, die einer

der vielen Arten von Teilchen wie Quarks, Antiquarks oder Elektronen entsprechen. Aber es ist bisher nicht gelungen, die Brücke zur vierten Kraft, der Gravitation zu schlagen. Sie ist sehr schwach, wirkt jedoch über sehr große Entfernungen. Nur beim Urknall und beim Schwarzen Loch sind alle vier Kräfte in Wechselwirkung vereint, aber bisher nicht beobachtbar. Eine Weltformel in reduktionistischer Weise, bei der alle Bewegungsformen oder Ordnungen der Materie von der atomaren, mechanischen, thermischen, chemischen, biologischen bis zur psychisch-geistigen und gesellschaftlichen Bewegung aus einem Prinzip der untersten Stufe quantitativ erklärt werden können, kann es nicht geben. Das hat bereits *Friedrich Engels* in seiner „Dialektik der Natur" von 1883 (S. 499, 517) festgestellt. Danach geht jede niedere Bewegungsform durch einen dialektischen Sprung in eine höhere Form über. Die höhere Bewegungsform enthält in sich als untergeordnetes Moment eine niedrigere Form, lässt sich aber nicht auf sie zurückführen. Ein Grundbegriff von *Engels* ist die universelle Wechselwirkung, wo Ursachen und Wirkungen fortwährend ihre Stellung wechseln, Quantität in Qualität und wiederum Qualität in Quantität umschlagen kann, ganz im Unterschied zur mechanisch-deterministischen Auffassung der Kausalität. Der Reduktionismus ignoriert die Dialektik der Ganzheitlichkeit. *Engels'* Bemerkungen zur Geschichtlichkeit der Naturprozesse und zur Fähigkeit der Selbstbewegung, Selbstorganisation sagen wir heute, sowie ihrem Gegenteil, der qualitativen und quantitativen „Einbuße an Bewegung" (S. 325, 505) gehen in die gleiche Richtung wie das Konzept und die Ergebnisse von *Ilya Prigogine,* Nobelpreisträger 1977 in seinem Buch „Dialog mit der Natur".

Eine separate Wissenschaft des Gesamtzusammenhangs der Welt wäre experimentell nicht überprüfbar, empirisch nicht erfassbar und hätte vor allem einen anderen Rationalitätsbegriff, der eine einheitliche Weltformel ausschließt. Ganzheitliches Denken als weltanschauliche Orientierung und Forschungsprinzip ist jedoch unabdingbar, wenn man die Sackgassen des Reduktionismus und des engen Spezialistentums des vergangenen Jahrhunderts überwinden will. Die neue englische evolutionistische Philosophie hat nun zum Ende des zwanzigsten Jahrhunderts einen Zentralbegriff geprägt, der den Grundgedanken von *Engels* mit einem anderen Wort, der Emergenz (von lat. emergere, auftauchen) benennt. Darunter versteht sie, dass Phänomene höherer Ordnung zwar aus niederen Ordnungen entstehen, jedoch aus diesen nicht erklärt werden können, da jede höhere Seinsstufe (Bewegungsform, Ordnung) durch neu auftauchende Qualitäten charakterisiert ist. (Enzyklopädie der Philosophie S. 95) Von diesem Ansatz geht auch *Robert B. Laughlin* aus, der 1998 den Nobelpreis für seine Arbeiten zum fraktionalen Quanten-Hall-Effekt erhielt und das Buch „Abschied von der Weltformel" veröffentlicht hat. Er zeigt zum Beispiel, dass die Gesetze der Hydrodynamik zwar aus Gesetzen niedriger Ordnung hervorgehen, von diesen aber letztlich unabhängig sind.

Die Bemühungen in Richtung auf eine Generalformel haben jedoch keineswegs aufgehört. Nehmen wir an, dass es eine solche Grundgleichung eines Tages gäbe, dann bedeutet das keinesfalls, dass die strenge Mathematik alle qualitativen Mannigfaltigkeiten der physikalischen Welt erschöpft. Die philosophische Deutung der Resultate ist für den Menschen unerlässlich, um sie einzuordnen in zukünftige Strategien. Das wird auch deutlich,

wenn wir in den späteren Abschnitten den historischen Spuren eines mathematischen Korpus folgen, der insgesamt durchaus eine Weltformel par excellence darstellt, weil er lebendig ist und stets ergänzt und erweitert wird. Dazu gehören auch jene Formeln, welche die Wechselwirkung von Chaos und Ordnung in einer sich stets verändernden Welt ausdrücken.

V2 Formeln des Chaos

Die abendländischen Wissenschaften haben über Jahrhunderte Regularitäten, stabile Gesetzmäßigkeiten und Gleichgewichte untersucht. Sie waren umso leichter zu entdecken, als man sich immer mehr spezialisierter Forschung widmete und weniger für das Ganze interessierte. Es dominierte der Reduktionismus, die Zurückführung auf einfache Erklärungen einer vielschichtigen Welt. Die Mathematik lieferte nicht selten schon im voraus die Mittel zur präzisen Beschreibung der speziellen Phänomene und ihrer funktionalen Beziehungen. Den mythologischen, religiösen und philosophischen Hintergrund bildeten ursprünglich die uralten Vorstellungen des Verhältnisses von Ordnung oder Harmonie zum Chaos oder der Wüstheit. In *Hesiod* „Theogonie“ (um 700 v) heißt es: „Zuerst von allem entstand das Chaos, dann aber die breitbrüstige Gaia, der ewig feste Halt für alle Dinge …“. Der Naturforscher und Naturphilosoph *Anaximandros* aus Milet, Zeitgenosse von *Thales,* hat im sechsten vorchristlichen Jahrhundert als απειρον (Unbegrenztes) den qualitativ unbestimmten und quantitativ schrankenlosen bewegten Urgrund bezeichnet, der also Stoff und Kraft vereint. Aus ihm entsteht die Ordnung der Dinge und in ihn fallen sie auch wieder zurück. Vielleicht ist *Anaximandros* der erste Schöpfer einer Weltformel. Er entwarf als erster eine rein physikalische Kosmogonie, das heißt eine auf Beobachtung und rationales Überlegen gegründete Entstehungsgeschichte unseres Kosmos. Als erster zeichnete er eine Erdkarte und einen Himmelsglobus. Mehr noch, er beschrieb eine frei im Weltraum schwebende Erde und arbeitete mit numerischen Beziehungen von Sonne, Erde und Mond. Die griechischen Atomisten, zum Beispiel *Epikur* aus Samos (341-270) und später *Lukrez* (*T. Lucretius Carus* 97-55) kannten und beschrieben natürliche Prozesse der Selbstorganisation, die zu Turbulenzen mit plötzlichen explosiven Veränderungen fern von Ordnung und Gleichgewicht führen.

Einen anderen Ausgangspunkt haben im ersten vorchristlichen Jahrtausend die Chinesen. Nach ihnen ist das Dau (Tao), der rechte Weg oder das Gesetz der Harmonie der Urgrund alles Seins. Dazu heißt es im Daudedsching von Laudse im vierten vorchristlichen Jahrhundert: „ Aus Dau entstand das Eine. Aus dem Einen entstand Zwei. Aus Zwei entstand Drei. Aus Drei entstand all die Vielzahl der Dinge“. Das Daudedsching im vierten vorchristlichen Jahrhundert betont die Einheit der Natur, die sich selbst genügend, selbstschöpfend und spontan ist. Das ist wiederum eine Absage an eine mechanistische Verursachung der Prozesse und eine produktive Grundlage für die Naturwissenschaft. Nach dem chinesischen Buch der Wandlungen „I Ging“ ist die Welt ein Kosmos, kein Chaos. Sie ist ein Gefüge einheitlicher Beziehungen, höchster Ordnung und damit das sich Nichtwandelnde als Grundlage für alles sich Wandelnde. In der christlichen Religion ist Gott der Schöpfer der Ordnung (Römerbriefe 13).

Die Mathematik hat auf ihrem jahrtausendelangen Weg viele Hürden zwischen Chaos und Ordnung, Spontanität und Normalität nehmen müssen. Singularitäten im Sinne der

extremen Abweichungen von der Norm, der Verletzung der Stetigkeit, tauchten auf bei der Entdeckung irrationaler Zahlen, dem Erscheinen der Zenonschen Paradoxien, der Definition des Unendlichen, der imaginären Zahlen, des Tangentenproblems, des Großen Fermatschen Satzes, des Limesbegriffs, der unendlichen Reihen, der nichteuklidischen Geometrie, der stetigen Funktionen ohne Ableitung, des Dreikörperproblems und der Fraktale. Bereits *James Clerk Maxwell* (1831-1879) hat die Erscheinung der singulären Punkte in der Natur erkannt, wo eine winzige Kraft katastrophale Folgen auslösen kann. Heute gilt als Singularität auch ein theoretischer Punkt im vierdimendionalen Raum, in dem die bekannten physikalischen Gesetze nicht mehr gelten bzw. die Raumzeit unendlich gekrümmt wird (Schwarzes Loch).

In der Physik war die Entdeckung der Entropie im 19. Jahrhundert ein erster Anstoß zum erst viel späteren ganzheitlichen Umdenken der Naturwissenschaft, zur Analyse der Irreversibilität, der Geschichtlichkeit und spontanen Selbstorganisation des Natürlichen. *Sadi Carnot* hatte schon 1824 gezeigt, dass bei der Dampfmaschine ein Teil der Energie als Wärme verlorengeht und nicht vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann. *Rudolf Julius Emanuel Clausius* fand 1850 heraus, dass dies auch für andere Formen der Energieumwandlung zutrifft. *William Thomson (Lord Kelvin)* wandte diesen Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik 1852 in „On the Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy“ auf das Universum an. Bald schon entstand die Hypothese vom Wärmetod des Weltalls, wenn alle Prozesse sich dem gleichwahrscheinlichen Zustand nähern. Vor allem geriet diese Interpretation der Entropie in einen eklatanten Widerspruch zu anderen Bewegungsformen der Materie. In der Biologie zeigte die *Darwin*sche Evolutionslehre die Entstehung immer höher strukturierter Lebewesen. Die gravischen Wechselwirkungen und die Schwankungen der Bewegung von Sonne, Mond und Erde hat der Physiker, Astronom und Mathematiker *Jules Henri Poincaré* (1854-1912) Ende des 19. Jahrhunderts untersucht und nachgewiesen, dass es unmöglich ist, diese Dynamik in Form eines integralen Systems darzustellen. Seine Bemerkung in „Wissenschaft und Methode“, dass kleine Differenzen in den Anfangsbedingungen am Ende sehr große Differenzen verursachen können, wurde dann lange Zeit im wissenschaftlichen Dialog nicht weiter untersucht.

Eine zweite Stufe im fundamentalen Erkenntniszuwachs zum Thema Chaos und Ordnung, Zufall und Notwendigkeit brachte die Quantentheorie nach *Plancks* Entdeckung, dass der Austausch von Energie zwischen Stoff und Strahlung nur in diskreten kleinsten Schritten stattfindet. Seine Universalkonstante (Wirkungsquantum) misst den Betrag der Schritte in Joule pro Sekunde. *Einstein* nahm 1905 an, dass Licht sowohl Welle als auch Teilchen sein kann, diese Annahme wurde zwei Jahrzehnte später experimentell bestätigt. Vor allem die Heisenbergsche Unschärferelation von 1925 zeigte, dass der klassische mechanische Determinismusbegriff in der Teilchenphysik nicht mehr anwendbar ist und das Verhältnis von Notwendigkeit und Zufall hier anders interpretiert werden muss.

Die dritte Stufe nach der klassischen Physik mit ihren reversiblen Trajektorien in einem absoluten Raum-Zeit-Kontinuum entstand in den sechziger Jahren mit der Entdeckung dissipativer Strukturen oder evolvierender, irreversibler Prozesse durch *Ilya Prigogine*

(1917-2003) und andere Naturwissenschaftler. An der Freien Universität in Brüssel hat *Prigogine* ein theoretisches Modell der Prozesse an der Schwelle der chemischen Instabilität, den „Brüsselator“ entwickelt. Er zeigte, dass es ein indifferentes Chaos unter Gleichgewichtsbedingungen mit Schwankungen gibt, das man mit der Normalverteilung erfassen kann. Eine ganz andere Art ist das Chaos fern vom Gleichgewicht, das man nicht mit dem Gesetz der großen Zahl bestimmen kann und das extrem durch äußere Bedingungen beeinflusst werden kann. Die Geschichte des chemischen Systems wird durch eine mehrdimensionale Mischung aus Notwendigkeit und Zufall gelenkt, wobei das Ganze bestimmend ist, aber auch das Verhalten von Teilchen bestimmend werden kann. *Prigogine* begründete die Theorie der dissipativen Strukturen mit dem neuen Prinzip der Ordnung durch Fluktuation. Fluktuationen werden innerhalb des Systems durch Autokatalyse verstärkt und treiben das System über eine Instabilitätsschwelle in eine neue Struktur.

Um 1963 befasste sich der Mathematiker und Meteorologe *Edward N. Lorenz* am MIT in den USA in seinem globalen mathematischen Wettermodell mit der Frage, warum die computergestützten Wetterprognosen höchstens für zwei bis drei Tage einigermaßen verlässlich sind. Mit seinen Strömungsgleichungen und ihren grafischen Darstellungen konnte er die erstaunlichen verborgenen Strukturen des Datenflusses der chaotischen Konvektionswirbel sichtbar machen. Das Bild dieser unendlich langen, nichtperiodischen und ∞-förmigen Schleifen glich einer Eulenmaske oder den runden Flügeln eines Schmetterlings, es zeigte die spontane Ordnung des Nichtgeordneten. Es erhielt später den Namen Lorenz-Attraktor oder seltsamer Attraktor. In den siebziger Jahren untersuchte der australische Physiker *Robert May* an der Princeton Universität in den USA ökologische Fragen des Wachstums von Fischpopulationen mit Hilfe der einfachen logistischen Differenzengleichung $x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)$, deren numerische Ergebnisse man grafisch mit der Abszisse r und der Ordinate x_n darstellen kann. Er entdeckte bei der schrittweisen Erhöhung des Parameters r die aufeinanderfolgenden Phasen monotones gleichgewichtiges Wachstum, periodische Oszillationen einer ersten Verzweigung mit 2-jähriger Periode, Periodenverdoppelung 4, 8, 16, … , chaotisches Verhalten, Stabilitätsfenster mit einer diesmal ungeraden Periode 3 oder 7 und schließlich erneutes Chaos. Die Dialektik von Chaos und Ordnung wurde bildhaft, weil man mit einer einfachen Differenzengleichung zeigen konnte, dass das Chaos selbst eine stabile Struktur hat. In der Mathematik ist Chaos das irreguläre, auf lange Sicht nicht prognostizierbare Verhalten einer nichtlinearen stetigen und differenzierbaren Funktion, die als Differentialgleichung vollkommen definiert ist, numerisch aber von den Anfangsbedingungen abhängt.

In den gleichen Jahren untersuchte der französische Forscher und spätere IBM-Mitarbeiter *Benoit Mandelbrot* die Abhängigkeit der Messergebnisse vom Maßstab geographischer Beziehungen. Bei der Analyse von Küstenlängen entdeckte er, dass sie immer länger wurden, je kleiner der verwendete Maßstab war. Im Fall eines gleichseitigen Dreiecks, auf dessen Seiten immer wieder kleinere Dreiecke nach dem gleichen Prinzip aufgesetzt werden und die Außenlänge gleich $3 \cdot (4/3) \cdot (4/3) \cdot (4/3) \cdot$ …ist (*Koch*sche Schneeflocke), kann man zeigen, dass sie als Linie (topologische Dimension 1) mit dem Faktor 4/3 gegen Unendlich geht, während ihre Fläche (topologische Dimension 2) zu einem end-

lichen Wert konvergiert, der kleiner ist als der um die „Schneeflocke“ umschriebene Kreis. Diesen Zwischenwert zwischen den ganzzahligen Dimensionen 1 und 2 berechnet Mandelbrot als fraktale oder gebrochene Dimension zu log 4 / log 3 = 1,2618 …Es entstehen selbstähnliche Muster mit immer kleinerer Stufenleiter, immer feineren Maßen, die gleichwohl konstante Parameter aufweisen.

Der Physiker mit einem Doktorat in Teilchenphysik *Mitchell Feigenbaum* begann in Los Alamos seine Untersuchungen mit der Parabelgleichung. Er beobachtete mit den Differenzengleichungen nichtlinearer Systeme das in Abhängigkeit von einem Ausgangsparameter entstehende reguläre, oszillierende oder chaotische Verhalten und bestimmte zwei Konstanten für das Verhältnis der Längen aufeinanderfolgender Parameterintervalle unterschiedlicher Perioden und die Breite der Gabelungen in der Verzweigungsphase. Insgesamt sind die Formeln der „Ordnung des Chaos“ als wissenschaftliches Ergebnis des selbst katastrophenbeladenen 20. Jahrhunderts ein Beitrag zur Weltformel im Sinne des nie abgeschlossenen mathematischen Erkenntniszuwachses. Dazu gehören auch die Ergebnisse der in den letzten Jahren entstandenen Komplexitätstheorie. Komplexe und komplizierte Prozesse in Natur und Gesellschaft sind nicht vorhersagbar. Das ist eine Art Pendant in der Makrowelt zur Unschärferelation der Mikrowelt. Ein Beispiel dafür ist das Pendel, das im Einzelbetrieb in seinem Verhalten berechenbar und vorhersagbar ist. Wenn man aber im Experiment die Komplexität erhöht und verschiedene Pendel so koppelt, dass sie sich gegenseitig beeinflussen, reagiert das System chaotisch. Auch die Wirkungen der Veränderungen des Kohlendioxidgehalts der Atmosphäre sind wegen des hochkomplexen Charakters dieses Kreislaufsystems nicht vorhersagbar. Wenn die globale Erwärmung zur größeren Verbreitung von Grünpflanzen führt, kann das mit einer globalen Abkühlung verbunden sein, weil die Pflanzen das Kohlendioxid absorbieren.

Aus heutiger Sicht kann man die Geschichte der Grundkonzepte der Mathematik in drei große Zeitalter einteilen. Das erste ist die voreuklidische Periode, in der die Mathematik vor allem ad-hoc-Aufgaben löste und nur sporadisch die Beweismethode versucht wurde, um die Allgemeingültigkeit zu bestätigen. Das zweite Zeitalter ist das euklidische, der lange Weg des Ausbaus der Mathematik und ihrer Gebiete auf der Grundlage weniger, nicht selbst aufgrund von anderen bewiesener Axiome, aus denen alle anderen Sätze des Systems als Theoreme logisch eindeutig abgeleitet wurden. Das erschien als Idealform der Erkenntnis und verlieh der Mathematik über Jahrhunderte eine Vorzugsstellung der wissenschaftlichen Reputation. Es führte zum Beispiel dazu, dass in der Wirtschaftswissenschaft im 20. Jahrhundert die Methode der mathematischen Gleichgewichtsmodelle Anerkennung bis zu Nobelpreisen erhielt, die dem Wesen der real evolutorischen Ökonomie nicht entspricht. Interessant ist *Goethes* Bemerkung in „Über die Mathematik und ihren Missbrauch“ von 1826: „Was ist an der Mathematik exakt als die Exaktheit? Und diese, ist sie nicht eine Folge des innern Wahrheitsgefühls?“

Das dritte Zeitalter der Grundkonzepte begann im Jahre 1931 mit einem kleinen Beitrag von *Kurt Gödel* (1906-1978) unter dem sehr fachspeziellen Titel „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I“ in den Monatsheften für Mathematik und Physik. Kaum einer verstand diese Arbeit und den in ihr vorhan-

denen Zündstoff für Mathematik und Erkenntnistheorie. Dabei hat sie sich als viel weitreichender erwiesen als manche opulenten Darstellungen der Chaosforschung, die mit ihren bunten Bildern viel mehr faszinieren konnten als es jemals logische Übungen vermögen. *Gödel* wies nach, dass man die Zahlentheorie niemals erschöpfend axiomatisch darstellen kann. Jedes Axiomensystem hat Schranken bei der Erfassung von Ganzheiten. Die Mathematik sagt nichts über die Wahrheit oder das Wesen ihrer Objekte, auch nichts über ihre Quantität, sie konstatiert nur, ob die behaupteten Folgesätze tatsächlich aus den ursprünglichen Festsetzungen logisch notwendig folgen. In der axiomatischen Methode liegt das Problem der Widerspruchsfreiheit. Die mathematisch wichtigen Axiome werden stets durch Modelle mit einer infiniten Zahl von Elementen interpretiert. Daher kann man ihre Wahrheit auch nicht durch eine unvermeidlich endliche Zahl von Beobachtungen beweisen. Wenn ein beliebiges widerspruchfreies Axiomensystem gegeben ist, gibt es immer wahre Sätze, die aus diesem System nicht abgeleitet werden können und den Rückgriff auf eine höhere Ebene erfordern. *Albert Einstein* hat das sehr prägnant ausgedrückt: „Insoweit die Gesetze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht gewiss, und insofern sie gewiss sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit“. (Cole S. 179)

Man kann also sagen, dass wir uns heute in einer Zeit der Veränderung der eigentlichen Grundlagen der Mathematik befinden. Der Begriff der mathematischen Strenge der Beweisführung muss überprüft werden. Die Sonderstellung der Mathematik als einer nichtexperimentellen Wissenschaft wird in Frage gestellt. Die Hilflosigkeit der axiomatischen Methode hatte sich bereits früher in solchen Wissenschaften wie Geschichte, Soziologie oder Ökonomie gezeigt. Das sind Wissenschaften, die seit jeher nicht ohne den Kontext zu ihrer Spezialstrecke auskommen. So ist die Cliometrie eine taube Blüte am Baum der historischen Erkenntnis, wenn sie sich nur an der mathematisch-statistischen Perfektion ihrer Ergebnisse erfreut. Auch für die Physik hat *Richard P. Feynman* (1918-1988) Grenzen der axiomatischen Methode nachgewiesen. Ein Physiker verbindet mit seinen Sätzen eine physikalische Bedeutung, er ist am speziellen Fall interessiert, der Allgemeinfall lässt ihn kalt. Vielleicht wird es in der zukünftigen Mathematik eine neue Grundlage als Kombination axiomatischer und heuristischer Methoden geben, darüber kann man heute nur spekulieren.

Die folgenden zehn historischen Kapitel werden jeweils durch Einführungen mit den Signaturen V3 bis V12 eröffnet, die den kulturgeschichtlichen Zusammenhang der Periode zwischen politischer, wirtschaftlicher und geistiger Entwicklung erläutern. Die nachfolgenden Formeln sind zeitlich geordnet und zeigen in der linken Spalte die mathematischen Beziehungen und in der rechten Spalte die spezielle Kulturgeschichte der Formel mit ihren historischen Protagonisten. Das bedeutet, dass im konkreten Fall auch Daten aus anderen Zeitperioden erscheinen. Das Namenregister und das Sachregister geben einen Gesamtüberblick. Im Namenregister findet man die Jahre und die Signaturen der dreizehn Perioden V0 bis V12, in denen die betreffende Person tätig war oder rezipiert wurde. Auch das Sachregister kann in dieser Weise genutzt werden. Im Registerteil ist auch eine Übersicht zu allen Formeln alphabetisch und nach Perioden und Jahren angegeben.

V3 Vorgeschichte

Symmetrie, Harmonie, Rhythmus, Regularität und ihre Gegensätze zum Chaotischen begegnen dem Menschen der Altsteinzeit in der Natur, sie prägen seinen Formensinn. Eine vorgeschichtliche Wurzel der Formeln ist die Erkenntnis, das Erfühlen der Formen in Raum, Zeit, Bewegung, Farben und Tönen. Man kann sagen, dass die Symmetrie in der Natur eine Quelle des späteren mathematischen Denkens ist und zu einem Eindruck wird, der den Menschen auf einer bestimmten Stufe befähigt, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu gestalten und unter seinesgleichen als Schmuck und zugleich Mitteilung weiterzugeben. Mimik und Laute waren erste Verständigungsmittel der Menschen. Später kam die Gestik hinzu, eine Vielzahl von Gesten mit unterschiedlicher Bedeutung, vielleicht auch zur Erfassung kleiner Mengen. Erst beim Homo habilis vor zwei Millionen Jahren erlaubte die Anatomie von Schädel und Mundhöhle die Sprachentwicklung im Unterschied zum Australopithecus, der seit 4,4 Millionen Jahren existierte. Dem Archanthropus vor 700 000 Jahren war die Artikulierung von maximal zehn Konsonanten und drei vokalähnlichen Lauten möglich. Differenzierte Worte und eine Art prälogisch-abstraktes Denken entstehen später. Das wohl früheste Zeugnis sind die regelmäßigen Ritzmuster auf polierten Tierknochen von der Fundstätte in Bilzingsleben, 300 000 Jahre v. h., die den Sinn für Proportionen bezeugen. Die Menschen des Mittelpaläolithikums 150 000 Jahre v. h. haben Steine und Muscheln durchbohrt und auf Ketten gereiht. Als es etwa ab 100 000 Jahre v. h. zu regulären Bestattungen und zur Ausrichtung der Toten nach Himmelsrichtungen kam, waren wahrscheinlich bereits Zeremonien mit regelmäßigen Wiederholungen der rituellen Handlungen verbunden. Die Strichzeichnungen auf den Fels- und Höhlenbildern haben eine kultische Bedeutung für die Jagd. Der bei bestimmten Arbeiten, beim Trommeln und beim Tanz entstehende Rhythmus und Tonfolgen der Tierwelt konditionierten das Aufnahmevermögen der Menschen für Mengenunterschiede. Zunächst gab es wahrscheinlich nur intuitive Schätzung von Mengen, später beginnen Reihung, Notierung ohne Zählung durch Zuordnung von Kerben, Ritzungen, Stäbchen, Kieseln oder Muscheln. In der Blombos-Höhle in der West-Kap-Provinz in Südafrika fand man 70 000 Jahre alte polierte Ockerstücke, auf denen ein geometrisches Muster sich kreuzender Linien eingeritzt ist.

Frühestes Zählen

Etwa 26 000 Jahre v. h. haben die Mammutjäger der Zeit des europäischen Gravettiens in Mähren uns das Zeugnis eines neuen Schrittes der Zählung hinterlassen. Der tschechische Paläontologe *Karel Absolon* fand 1935 einen Knochendolch von 33,5 cm aus der 6. oder 7. Mammutrippe mit 5, 10, 15, 20, 21 Kerben in Dolni Vestonice (früher Unter-Wisternitz) bei Brünn. Schon in den zwanziger Jahren wurden im mährischen Predmost geschnitzte

Löwenknochen mit Kerben gefunden, deren Zahl stets ein Vielfaches von 5 ist. Wir wissen nicht, was gezählt wurde. *Absolon* vermutete Notierung von Jagdbeuten. In den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts hat der belgische Archäologe *Jean de Heinzelin de Braucourt* (1920-1998) versteinerte Knochen untersucht, die in Ausgrabungen beim Dorf Ishango am Rande des Rutanzige-Sees im Kongo gefunden wurden und vermutlich 20 000 bis 30 000 Jahre alt sind. Sie enthalten drei Spalten mit Kerben links 11, 13, 17, 19, Summe 60; Mitte 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7, Summe 48; rechts 11, 21, 19, 9, Summe 60. Damit ergibt sich eine Gesamtsumme von 168, das sind sechs Mondmonate zu je 28 Tagen. Es ist nicht klar, ob dies eines oder mehrere Zahlsysteme der Basen 3, 4, 6, und 10 widerspiegelt.

Im Jahre 1964 hat *Alexander Marshack* (USA) vom Archäologischen Museum der Harvard Universität Felszeichnungen vom Abri de las Viñas in Spanien aus dem Azilien oder Spätpaläolithikum und frühen Mesolithikum 12000-10000 v. h. untersucht. Das ist eine Zeit der Jägerkulturen. Er fand 30 Markierungen für die Mondphasen mit einem anthropomorphen Gotteszeichen, eingeteilt in 7 (Neumond bis zum Halbmond), 6 (bis zum Vollmond), 4 (Vollmond), 7 (bis zum Halbmond), 6 (bis zum Neumond). Ferner analysierte er Kerben im Mammut-Elfenbein aus einer früheren Periode, gefunden 1926/27 in Gontzi in der Ukraine von *V. Schtscherbakowskij,* indem er ihr Muster mit dem Modell der Mondphasen verglich. In der Vorgeschichte gab es keine verallgemeinerte Zeitvorstellung. Ereignisse markierten die Abfolge des Geschehens. Die Dauer wurde in der Gemeinschaft mit bestimmten sozialen Tätigkeiten oder Naturprozessen und Naturereignissen verbunden. Zu den Naturprozessen gehörten die Bewegung von Sonne, Mond und Sternen, die Gezeiten oder wiederkehrende Überschwemmungen. Zu den sozialen Tätigkeiten mit einem gewissen zeitlichen Takt gehörten Jagd, Sammeln und kultische Verrichtungen. Die frühen Mondkalender machen deutlich, dass später der Tag zur Basis jeglicher Kalender und der Ausgangspunkt für kürzere Unterteilungen wurde.

Die Geschichte der menschlichen Mengenbestimmung wird von den Paläontologen, Archäologen und Ethnologen erforscht. Ergebnisse der Untersuchungen in den Naturvölkern seit dem 19. Jahrhundert lassen gewisse Rückschlüsse auf die Vorgeschichte zu. In den letzten Jahren entwickelte sich dieses Gebiet der Ethnomathematik. Als Stufen kann man die intuitive Mengenunterscheidung ohne Zahlbegriff, die Verwendung von Hilfsmengen, die Benutzung gegenstandskonkreter Zahlworte und schließlich die einheitlichen Zahlworte der späteren Kulturen nennen. Bei der Nutzung von Hilfsmengen werden erst die Zählobjekte identifiziert, dann werden sie oder ihre umkehrbar eindeutig zugeordneten Stellvertreter (Muscheln, Stäbchen, Kerben oder ähnliches) in eine Reihe gebracht. Schließlich wird das vereinfacht durch Bündel von 2 oder einer größeren Zahl.

Zahlsysteme

Die schon erwähnte Basis 5 bietet sich als Fingerzahl der Hand ebenso an wie die 10. Bei den Naturvölkern der Neuzeit war das Fünfersystem auf Kamtschatka, bei den Eskimos, auf den Salomon-Inseln und in Afrika gefunden worden. Im alten Griechenland bedeutete

πεμπαζω (fünfern) zählen. Die Tukano in Südamerika hatten ein Hand-Fußsystem des Zählens. Außer der 5 gab es viele andere Zahlenbasen oder auch Direktzählungen wie bei den Papuas. Bei ihnen wurden Körperteile bis zu 22 umkehrbar eindeutig den Zahlen zugeordnet. Nicht selten hat das Zahlsystem auch eine rituelle Bedeutung. So diente das Vierersystem bei den Sandwich-Insulanern für religiöse Zwecke und bei den Mohave-Indianern in Kalifornien spielte die Vier in den Mythen und im Kult eine große Rolle. Die Bündelung führt weiter zu einer Reihe von Bündeln, die ihrerseits wieder als höheres Bündel zusammengefasst werden können. Aber dazu gibt es keine vorgeschichtlichen Spuren. Später hatte das alte Sumer ein Fünfersystem neben anderen und in Indien wurde die Fünf bis in die Neuzeit als Fingerzahlbasis benutzt, das heißt man hatte Namen für die Zahlen 1 bis 5 und für die Mehrfachen von 5, so hieß 13 bei ihnen zwei-fünf- und-drei. Unser heutiger angeborener und nicht angelernter Zahlensinn funktioniert in der Wahrnehmung bei größeren Mengen logarithmisch, wie unser Gehör, das Lautstärken nach logarithmisch gestaffelten Dezibeln erfasst. Es wurde auch aus den Untersuchungen des Umgangs von Naturvölkern mit dem Abtragen von Zahlengrößen auf einem Geradenstück nachgewiesen.

In den vorgeschichtlichen Jäger- und Sammlergemeinschaften glaubte man an die Geister der toten Vorfahren, an das sozialreligiöse Totem, das naturverbundene Zeichen einer Gruppe, Sippe oder Person und achtete die Regeln, das Stammestabu. Die Schamanen oder Medizinmänner waren die Träger und Hüter der Geheimnisse der Natur und ihrer Elemente Erde, Luft, Feuer und Wasser. Vielleicht ist das ein Schlüssel, warum die Zahl Vier als magische Zahl bei den Naturvölkern gilt.

Zu den Merkmalen des vorgeschichtlichen Umgangs mit Quantitäten, einer Art Prämathematik, gehören: Das Einhalten von Symmetrien beim Zeichnen, Weben, Perlensticken, Musizieren; das Messen ohne Standardmaße mit den gemessenen konkreten Objekten selbst; das Teilen nach Ermessen oder Bedarf; die Reziprozität des Gebens und Nehmens; das elementare Zahlensystem ohne oder mit verschiedenen Basen; die Einhaltung bestimmter Zahlen beim Ritus, der Bestattung oder Opferung; die Verwendung von gegenstandskonkreten Zahlworten. Aus praktischen Erfahrungen bei jagdlicher Orientierung und Beuteaufteilung in der Horde entstehen Routinen oder Regeln, die nach dem Entstehen der Zahl- und Textschrift formelhaft normiert werden und wiederum viel später als reguläre Formel in algebraischer Schreibweise erscheinen.

Archaische Formeln

In der frühen Vorgeschichte gab es keine Zählung im heutigen Sinne, aber die intuitive und gegenstandskonkrete Mengenwahrnehmung als archaisches Zählen. Die archaische Formel können wir mit den Synonymen des allgemeinen Formelbegriffs wie Regel, Norm, Kanon, Routine charakterisieren. Die Verhaltensregeln der Hausgruppe, Sippe oder des Stammes mit Totem, Tabu und magischen Ritualen und Tänzen sind formelhaft und ersetzen zumindest teilweise das nur instinktive Verhalten. Das stärkt die Kommunikation und das gemeinsame Lernen. Kommunikation erfordert Signalbildung und Signalnutzung, am besten

sind dafür einfache symbolische Zeichen von Gebärden, Lauten bis zu Gravierungen geeignet, wiederum ein Schritt zur Formel. Viel später wiederholt sich das in den frühen Hochkulturen beim Übergang von der Bilderschrift zu ikonisch-hieroglyphischen Zeichen für Begriffe oder Begriffskomplexe bis zur Buchstabenschrift. Dieser Prozess der Elementarisierung der Schrift geschah in Jahrhunderten, in denen die Kulturen immer komplexer wurden, genauer gesagt, er trug dazu in starkem Maße bei. Herstellung von Symbolen und Reaktion auf Symbole sind Eigenschaften, die Menschen mit Primaten gemeinsam haben, die also weit in die Vorgeschichte reichen. Zeremonien und Tänze, deren Spuren in paläolithischen Höhlen nachgewiesen wurden, deuten ebenfalls auf Verhaltensroutinen, die wie Formeln wiederholt werden können.

Die archaische Formel hat ihre Quelle in Regularitäten der Natur, die der Frühmensch zunächst nur wahrnimmt, bis er sie auf einer späteren Stufe registriert wie die Mondphasen. Er erfasst allmählich die Zusammenhänge und kann dadurch Naturphänomene voraussagen. Die archaische Formel der Zukunftsbestätigung erfährt eine hohe soziale und individuelle Bewertung in der Gemeinschaft. Die zweite Quelle ist der Arbeitsprozess, indem dessen Resultate seinen formelhaften Ablauf bekräftigen und Ansatzpunkte der Verbesserung bieten. Werkzeugvorbereitung, gemeinsame Elefantenjagd, Zerlegung der Beute und Aufteilung der verwendbaren Teile sind schon ablesbar für den Homo habilis anhand der Skizze des Fundplatzes in Bed I der Olduvai-Schlucht in Tansania. Drittens sind es die sozialen Regeln der Gemeinschaft von der Gabe und Reziprozität bis zum viel späteren stummen Tausch.

Schon die Ausbreitung von Faustkeil-Techniken zeigt, dass es dafür sprachliche Verständigung und soziale, ästhetische und gewissermaßen technische Normen gab. Erstaunlich ist die Kongruenz und Gleichheit von Merkmalen der Faustkeile aus weit voneinander entfernten Fundstätten, die auf gleiche Arbeitsroutinen schließen lassen. Dabei gibt es Qualitätsstufen, die rückschließend eine Hierarchie von Fertigkeiten bezeugen. Die Kreis- und Kugelformel der frühen Hochkulturen und Antike hat einen archaischen Vorläufer im Sphäroid als Schlagstein, dessen älteste Form aus der 1,8 Millionen jahre alten Schicht II in der Olduvai-Schlucht stammt. Es besteht aus Quarz in einer fast vollkommenen Kugelform, die durch Bearbeitung erreicht wurde. Die Formgliederung der Geräte vom Oldowan- und Achuléen-Typ wie zweiseitig bearbeitete Werkzeuge (Faustkeil, Haumesser, Spitze), Geräte aus Kernsteinen (scheibenförmiger Schlagstein, Chopper, Vielseiter, Sphäroid, Schaber) und Werkzeuge aus Abschlägen wie Stichel ist Zeugnis für Herstellungsroutinen, den archaischen Formeln der frühen Arbeitsprozesse anhand verfügbarer Muster, vorhandener Erfahrungen bzw. Fertigkeiten und Zielvorstellungen. Es begann vor 500 000 Jahren mit einer von den Archäologen ermittelten Schnittflächenlänge der Werkzeuge aus einem Kilogramm Feuerstein von etwa zehn Zentimeter und erhöhte sich bis um 11 000 v auf vierzig Meter. Im Jungpleistozän in Europa (250 000 bis 100 000 v. h.) erreicht die Faustkeilbearbeitung die Stufe der Levallois-Technik, bei der Abschläge, Klingen und Spitzen vorher festgelegter Form entstehen, die sich an anderen Fundorten wiederholen. Es entstehen neue reguläre Formen, wie zum Beispiel elliptisch-flache oder gezähnte Werkzeuge. Die Pfeilspitzenfunde von der Sahara aus der Zeit des Neolithikums überraschen

durch ihre geometrische Einheitlichkeit in solchen Gruppen wie dreieckige Geräte mit gerader oder modifizierter Basis, blattförmige Geräte, gestielte und rautenförmige Geräte. Einheitliche Werkzeuge sind vergegenständlichte Erfahrung, die gewissermaßen zu einem Kanon geworden ist, zu einer archaischen Formel. Harpunen aus Stein und Knochen sowie Pfeile sind erste zusammengesetzte Werkzeuge, denen ein Konstruktionsplan zugrunde gelegen haben muss. Der Neandertaler musste sein bildlich-anschauliches Gedächtnis mit sehr hohem Speicherbedarf immer wieder nutzen und seine Hirnvergrößerung auf 1400 bis 1600 cm^3 hat vielleicht damit zu tun. Dies mag eine Barriere für die weitere begrifflich-logische Denkentwicklung bei dieser Menschenart gewesen sein.

Neben der Werkzeugherstellung gab es auch archaische Formeln der Nahrungsbereitung und sogar der chemisch-stofflichen Bearbeitung. In Dolni-Věstonice bei Brünn wurde ein etwa 25 000 Jahre alter Ofen zum Brennen von Ton gefunden. Es ist aber nicht einfach Lehm oder Schlamm gebrannt worden. Man mischte Knochenmehl unter die Erde, damit sich die Hitze besser verteilte, den Ton gleichmäßig härtete und damit haltbarer machte, wohl eine erste archaische chemische Formel.

Die Archäologen haben in den vorgeschichtlichen Grabstätten Nachweise der archaischen Formel der Bestattung gefunden mit den Merkmalen Zeremoniell, Grube bestimmter Größe, Ausrichtung des Leichnams nach Himmelsrichtungen, schützender Stein über der Grube und Speise- und Schmuckopfer. Der Vergleich von Bestattungsfunden der Neandertalerkultur offenbart Regeln für die Beigabe von Nahrungsmitteln, Schmuck, Waffen oder Gebrauchsgegenständen. Auf den Beginn eines religiösen Sinns deutet der Fund von Bestattungsgruben mit benachbarten Gruben tierischer Knochen als Opfer. Zu den Grabstätten gehören auch die Megalithen nach der Zeit der Neandertaler, die an den Küsten des Mittelmeers, Atlantiks, der Nord- und Ostsee entdeckt wurden. Sie wurden errichtet durch sesshafte Kulturen von Viehzüchtern und Bauern und dienten auch dem Kult, der Opferung, den religiösen Festen, der Opferung, der Ausrichtung nach der Sonnenbahn und repräsentierten einen Kanon von sozialen Regeln. Zu den Eigenschaften der archaischen Formel gehört ihre Rolle bei der ständigen Konfrontation mit den oft unheimlichen Kräften der Natur, hinter denen Geister, Dämonen und Götter am Werke seien. Außerdem ist es die Gebundenheit an die Normen und Tabus der Gemeinschaft und nicht zuletzt die archaische Glaubensformel, die eine Schutzfunktion in der Gemeinschaft ausübt. So kann bei einem der Naturvölker der Gewinn eines begehrten Mädchens einem Mann nur gelingen, wenn er nach Anrufen des Wächtergeistes der Herden eine ganz bestimmte Kletterpflanze zu einer Zeit ausgräbt, zu der die Sonne in einer genau festgelegten Stellung steht. Dabei ist auch die eigene Körperhaltung genau vorgeschrieben.

Reziprozität und Tausch

Das archaische Zählen hat drei Stufen, wie die Forschungen bei den Naturvölkern gezeigt haben. Auf der ersten Stufe werden Mengen wie zum Beispiel fünf Eichhörnchen mit einem Wort benannt, fünf Schmetterlinge aber mit einem ganz anderen. Die zweite Stufe