Bastian Rückel

Optimierung der Staffeleinteilung in der Fußball Landesliga Bayern in der Saison 2013/14 und Konzipierung vereinsfreundlicher Spielpläne

disserta Verlag

Rückel, Bastian: Optimierung der Staffeleinteilung in der Fußball Landesliga Bayern in der Saison 2013/14 und Konzipierung vereinsfreundlicher Spielpläne, Hamburg, disserta Verlag, 2015

Buch-ISBN: 978-3-95425-934-2
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95425-935-9
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015
Covermotiv: © Uladzimir Bakunovich – Fotolia.com

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Hermannstal 119k, 22119 Hamburg
http://www.disserta-verlag.de, Hamburg 2015
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

In den professionellen Sportligen der ganzen Welt werden jährlich Milliarden umgesetzt. Für die Spielzeit 2013/2014 erhält die deutsche Fußball Bundesliga beispielsweise 560 Millionen Euro an Fernsehgeldern, 2014/2015 sind es 615 Millionen und in der Saison 2015/2016 beläuft sich die Summe auf 663 Millionen. Dieser Betrag wird ausschließlich unter den 36 Profiklubs der 1. und 2. Bundesliga aufgeteilt. Zusätzlich können die Vereine noch Einnahmen in Millionenhöhe durch Merchandising und Marketingmaßnahmen erwarten (vgl. [WEL13]). Ganz anders ist die Situation im Breitensport. Der Deutsche Fußball Bund (DFB) beschreibt die Situation im Amateurfußball als „Problemdruck im Bereich Finanzierung ([DFB12])“. Als Ausgaben sind dabei vor allem Aufwandsentschädigungen für Spieler, Honorare für Trainer und Ablösesummen für wechselwillige Spieler zu nennen. 54,3 % der Sechstligisten zahlen Aufwandsentschädigungen und 49 % aller Sechstligisten wären bereit für Neuzugänge eine Ablösesumme zu bezahlen (vgl. [DFB12]). Im Rahmen dieser Arbeit geht es um eben diese 6. Liga in Bayern. Ziel ist es, anhand der aufgezeigten Ergebnisse, einige Erleichterungen für die zum Teil stark belasteten Vereine mit ihren größtenteils ehrenamtlich tätigen Verantwortlichen und den voll berufstätigen Spielern zu schaffen.

Im Jahr 2012 entstand durch eine vom Bayerischen Fussball-Verband (BFV) durchgeführte Strukturreform der Spielklassen im Amateurbereich die neue Landesliga Bayern, welche nun nicht länger die fünfthöchste, sondern ab sofort die sechsthöchste Liga im deutschen Fußball ist. Schirmherr über diese Spielklasse ist der BFV (vgl. [BFV14 (1)]). „Die Landesliga der Herren spielt im Verbandsgebiet in fünf Gruppen, die in der Regel bis zu 18 Mannschaften umfassen ([BFV14 (1)])“. In der Spielzeit 2013/2014 spielen somit insgesamt 90 Vereine auf 5 Staffeln verteilt in der Landesliga Bayern. Diese Anzahl soll auch in den kommenden Jahren bestand haben, es kann jedoch durch Auf- und Abstiegsszenarien passieren, dass die Normzahl von 90 Teams über- bzw. unterschritten wird. Eine mögliche Abweichung wird in der jeweils nachfolgenden Spielzeit korrigiert (vgl. [BFV13 (1)]). Die fünf Staffeln der Landesliga Bayern werden anhand der Attribute „Nordwest“, „Nordost“, „Mitte“, „Südwest“ und „Südost“ unterschieden (vgl. [BFV14 (2)]).

1.2 Problemstellung

Das Ziel dieser Abhandlung ist es, eine Einteilung der 90 Landesligisten in die fünf Staffeln zu bestimmen, so dass in jeder Staffel gleich viele Teams sind. Des Weiteren soll jedem der 90 Vereine garantiert werden, dass seine Mannschaft, an keinem Spieltag, der unter der Woche statt findet, länger als eine Stunde fahren muss. Die Fahrtzeit soll demnach an allen Wochentagsspielen höchstens 60 Minuten betragen. Diese Forderung ist vor allem deshalb sinnvoll, da die meisten Spieler und Trainer voll berufstätig sind oder studieren und bei weiten Auswärtsfahrten unter der Woche stets Probleme haben, rechtzeitig vom Arbeitsplatz bzw. von der Universität zum Spielort zu gelangen. Die Summe aller Fahrten aller Teams im Verlaufe der Saison soll aus Umweltschutzgründen und aufgrund einer Kosten- und Aufwandsminimierung für die Vereine und deren Spieler möglichst gering sein. Als mögliche Kriterien eignen sich hierbei die gesamte Fahrtstrecke bzw. die gesamte Fahrtzeit. Für die dadurch gegebene Gruppeneinteilung soll schließlich für jede der fünf Staffeln ein Spielplan konzipiert werden, der möglichst „fair“ ist, Wünsche der Vereine berücksichtigt und an Wochenspieltagen kein einziges Spiel enthält, bei dem die Gastmannschaft länger als eine Stunde anreisen muss. In Kapitel 4 wird diese Problemstellung mit allen ihren Bedingungen nochmals aufgegriffen und als ein binäres Programm formuliert.

1.3 Gang der Untersuchung

Nach einigen einführenden Worten und einer Erörterung der Problemstellung im Abschnitt Einleitung werden in Kapitel 2 die für diese Arbeit grundlegende Sätze und Definitionen dargestellt. Dabei wird immer wieder ein Bezug zur Problemstellung hergestellt. In Kapitel 3 wird die durchgeführte Datenerfassung, in deren Rahmen alle für diese Arbeit relevanten Daten zusammengetragen wurden, beschrieben. Anhand dieser Daten werden in den späteren Abschnitten die Optimierungsprozesse durchgeführt. Im Anschluss wird ein großes Modell vorgestellt, welches die soeben erläuterte Problemstellung in seiner Gesamtheit beschreibt. Da dieses Modell für handelsübliche Rechner zu groß ist, um es zu lösen, wird es in kleinere Teilprobleme aufgeteilt. Die Vorteile dieser Aufteilung werden in den entsprechenden Paragraphen beleuchtet. So wird zunächst eine optimale Gruppeneinteilung bestimmt. Anschließend wird das Spielplanerstellungsproblem gelöst. Als Abschluss dieser Arbeit findet im letzten Kapitel eine Zusammenfassung der Resultate statt. Den Kapiteln „Die optimale Staffeleinteilung“ und „Die Spielplanerstellung“ wird aufgrund ihres Umfangs eine kurze Übersicht über die dargelegten Inhalte vorausgestellt.

2 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden alle Definitionen und Aussagen formuliert, die für diese Ausarbeitung vorausgesetzt werden. Zur übersichtlicheren Darstellung findet eine Aufteilung in die Bereiche „sportspezifische Grundlagen“, „graphentheoretische Grundlagen“ und „Grundlagen der Optimierung“ statt.

2.1 Sportspezifische Grundlagen

In der Einleitung wurden bereits Begriffe wie Mannschaft oder Team und Liga oder Staffel verwendet. An dieser Stelle sollen für diese und weitere sportspezifische Begriffe Definitionen angegeben werden, die zu einer einheitlichen Auffassung des jeweiligen Begriffs führen.

Definition 2.1: Eine **Mannschaft** i besteht aus Personen, die zusammen ein sportliches Ziel erreichen wollen. Als Synonyme werden in dieser Arbeit auch Fußballmannschaft oder (Fußball-) Team verwendet. Die Mannschaft spielt unter dem Namen eines **Vereins** (vgl. [BAR01, S. 8]).

In einer Liga treten mehrere Mannschaften gegeneinander an. Dies bedeutet, dass eine bestimmte Anzahl an Mannschaften, im hier gegebenen Problem sind das 18, in einer Gruppe zusammengefasst werden. Etwas formaler wird dies in Definition 2.2 ausgedrückt:

Definition 2.2: Sei $N \in \mathbb{N}$. Eine **Liga** $\mathcal{L} = \{ i \mid i = 1, \dots, N \}$ ist eine Menge von N Mannschaften (vgl. [BAR01, S.9]).

Gibt es verschiedene Ligen, die eine annähernd gleiche Spielstärke der Mannschaften aufweisen, so werden hierfür im Folgenden die Begriffe **Staffel**, **Gruppe** oder auch **Division** synonym verwendet (vgl. [BAR01, S.29]). Für die Landesliga Bayern wird angenommen, dass die fünf Staffeln, welche alle sechstklassig sind, in etwa das gleiche sportliche Niveau aufweisen.
Der sportliche Vergleich zweier Mannschaften findet im Rahmen eines Spiels statt:

Definition 2.3: Ein **Spiel** $\omega = (i, j)$ ist ein 2-Tupel, welches sich aus den beiden Mannschaften $i, j \in \mathcal{L}$ $(i \neq j)$ zusammensetzt. Dabei gehören die beiden Mannschaften i und j der gleichen Liga an. Als Synonyme werden auch die Bezeichnungen **Paarung, Partie** oder **Begegnung** verwendet (vgl. [BAR01, S.9]).

Da das Tupel (i, j) geordnet ist, kann eine Aussage darüber getroffen werden, welche Mannschaft zu Hause spielt und welche Mannschaft auswärts antreten muss. Daher bezeichne im Nachfolgenden das Tupel (i, j) die Begegnung bei der die Mannschaft $i \in \mathcal{L}$ Heimrecht im Spiel gegen die Mannschaft $j \in \mathcal{L}$ hat. Dementsprechend spielt Mannschaft $j \in \mathcal{L}$ auswärts bei der Mannschaft $i \in \mathcal{L}$. Das sogenannte **Wettbewerbsprogramm** $\Omega = \{ \omega \mid \omega = 1, \dots, W \}$ ist eine Menge W von Spielen ω, die in einer Liga stattfinden. Spielt jedes Team genau zweimal gegen alle anderen Teams seiner Liga, so besteht das Wettbewerbsprogramm aus $W = N \cdot (N - 1)$ Spielen (vgl. [BAR01, S.10]).

Bemerkung 2.4: Für die Landesligen in Bayern bedeutet dies, dass das Wettbewerbsprogramm in jeder der fünf Staffeln, die jeweils 18 Mannschaften umfassen, $18 \cdot 17 = 306$ Begegnungen beinhaltet.

Definition 2.5: Ein **Spieltag $\boldsymbol{s}$** ist ein vorgegebener Zeitraum, in dem Spiele aus dem Wettbewerbsprogramm ausgetragen werden. An einem **Spieltag** trägt jede Mannschaft genau ein Spiel aus, sofern die Anzahl der Mannschaften gerade ist. Andernfalls hat genau eine Mannschaft kein Spiel an diesem Spieltag und ist somit **spielfrei.** Es ist üblich, dass die **Spieltage** fortlaufend, bei 1 beginnend, nummeriert werden. Für das Heimspiel von Team $i \in \mathcal{L}$ gegen Team $j \in \mathcal{L}$ an Spieltag s schreibt man auch $\big((i, j), s\big)$ (vgl. [BAR01, S.11]).

Ein Spieltag kann über mehrere Kalendertage verteilt ausgetragen werden. Auch die Uhrzeit, zu der die Spiele beginnen kann von Partie zu Partie variieren. Dies gilt für die 1.Bundesliga, in der üblicherweise ein Spiel am Freitag Abend, fünf Begegnungen Samstag nachmittags, eine Partie am Samstag Abend und zwei Spiele am Sonntag stattfinden, genauso, wie für die Landesligen (vgl. [BUN14]).

Satz 2.6: Sei die Anzahl der Mannschaften N in Liga $\mathcal{L}$ gerade. Dann finden an einem Spieltag genau $\frac{N}{2}$ Paarungen statt. Für ungerades N sind $\frac{N-1}{2}$ Begegnungen anzusetzen. Zusätzliche erhält eine Mannschaft den Status spielfrei (vgl. [BAR01, S.11]).

Bemerkung 2.7: Für Ligen mit 18 Mannschaften, sind dies 9 Partien pro Spieltag.

Definition 2.8: Unter einer **Saison** $\mathfrak{J} = \{ s \mid s = 1, \dots, S \}$ versteht man eine Menge von S Spieltagen, an denen zusammen alle W Paarungen des Wettbewerbsprogramms Ω durchgeführt werden (vgl. [BAR01, S.11]).

In der Landesliga Bayern spielt im Verlauf einer Saison jede Mannschaft zwei Mal – ein Mal zu Hause und ein Mal auswärts – gegen jede andere Mannschaft seiner Staffel (vgl. [BFV14 (1)]).

Definition 2.9: Ein Spielplan $\mathfrak{R}$ ist eine Menge von W Spielen, welche auf S Spieltage verteilt angesetzt sind, so dass an jedem Spieltag jedes Team genau ein Spiel austrägt (1) und das gesamte Wettbewerbsprogramm Ω eingeplant wird (2). Formal muss demnach gelten (vgl. [BAR01, S.12]):

$$\forall\, i \in \mathcal{L}, \forall\, s \in S:\ \exists\, j \in \mathcal{L} \text{ mit } \big((i,j),s\big) \in \mathfrak{R} \text{ und } \forall\, j^* \neq j\ (j^* \in \mathcal{L}): \big((i,j),s\big) \notin \mathfrak{R} \quad (1)$$

$$\forall\, \omega = (i,j) \in \Omega:\ \exists\, s \in S \text{ mit } \big((i,j),s\big) \in \mathcal{R} \quad (2)$$

Definition 2.10: Ein Spielplan, bei dem jede Mannschaft $i \in \mathcal{L}$ genau zwei Mal gegen jedes andere Team $j \in \mathcal{L}$ $(j \neq i)$ seiner Liga spielt, wobei i in genau einem der beiden Spiele gegen j Heimrecht hat, nennt man ein **Double Round Robin Tournament (DRRT)** (vgl. [BRI10, S.366]).

Für eine Liga mit N Mannschaften bedeutet dies, daß jede Mannschaft $i \in \mathcal{L}$ zwei Spiele gegen jedes der anderen $N - 1$ Teams bestreitet, insgesamt also

$$2 \cdot (N-1) = 2N - 2$$

Partien. Daraus folgt aber nur unter der in Satz 2.11 dargestellten Einschränkung, dass eine Saison auch aus $2N - 2$ Spieltagen besteht.

Satz 2.11: Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann besteht eine Saison, die nach den Prinzipien des DRRTs ausgetragen wird, aus $2N - 2$ Spieltagen (vgl. [BRI10, S.366]).

Ist die Anzahl N der Mannschaft ungerade, so wird ein “Dummy-Team“ mit der Bezeichnung „Spielfrei“ als $(N+1)-$Team hinzugefügt (vgl. [BAR01, S.9]). Dies führt dazu, dass $\widehat{N} = N+1$ gerade ist. Daher werden

$$2\widehat{N} - 2 = 2 \cdot (N+1) - 2 = 2N$$

Spieltage ausgetragen. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass N gerade ist. Dies ist aufgrund der Möglichkeit des Hinzufügens eines “Dummy-Teams“ ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich (vgl. [BRI10, S.366]).

Bemerkung 2.12: In jeder Staffel der Landesliga Bayern gibt es in der Saison 2013/2014 genau 34 Spieltage. Diese werden nach dem Prinzip des im Nachfolgenden dargestellten gespiegelten DRRTs ausgetragen (vgl. [BFV14 (1)]).

Definition 2.13: Ein Spezialfall des DRRTs ist das **gespiegelte DRRT**. Hier findet das erste Spiel zwischen den Teams $i \in \mathcal{L}$ und $j \in \mathcal{L}$ $(i \neq j)$ in einer Liga $\mathcal{L}$ mit N Mannschaften an Spieltag s $(s \leq N-1)$ statt. Das zweite Spiel wird dann an Spieltag $s+N-1$ mit getauschtem Heimrecht ausgetragen. Hierdurch wird der Spielplan in zwei Hälften geteilt, welche man jeweils als **Single Round Robin Tournament (SRRT)** bezeichnet (vgl. [BRI10, S.366]).

Die beiden Hälften des gespiegelten DRRT nennt man auch **Hin-** und **Rückrunde.** Die Spieltage 1 bis $N-1$ bilden die Hinrunde. Die Rückrundenspieltage N bis $2N-2$ finden nach Definition 2.12 in der gleichen Reihenfolge wie die Hinrundenspieltage statt. Der Unterschied zwischen **Hin-** und **Rückrunde**, welche beim gespiegelten DRRT als **komplementär** bezeichnet werden, liegt einzig im getauschten Heimrecht (vgl. [BAR01, S. 11f.]). Durch das gespiegelte DRRT wird ein **Spielplan** dargestellt, der eine Aussage darüber trifft, wann welches Spiel ausgetragen wird. Zur Veranschaulichung ist in Beispiel 2.14 ein Spielplan für 4 Mannschaften nach den Prinzipien des gespiegelten DRRT dargestellt.

Beispiel 2.14: In diesem Beispiel wird ein möglicher Spielplan für ein gespiegeltes DRRT dargestellt. Die vier Mannschaften, die gegeneinander antreten sollen, seien der FC Chelsea London, der FC Schalke 04, der FC Basel und Steaua Bukarest. Das Wettbewerbsprogramm enthält 12 Partien, davon finden nach Satz 2.6 und Satz 2.11 genau 2 Begegnungen an jedem der 6 Spieltage statt.

	Spieltag 1	Spieltag 2	Spieltag 3	Spieltag 4	Spieltag 5	Spieltag 6
Spiel 1	Schalke – Chelsea	Basel – Schalke	Schalke – Bukarest	Chelsea – Schalke	Schalke – Basel	Bukarest – Schalke
Spiel 2	Bukarest – Basel	Chelsea – Bukarest	Basel – Chelsea	Basel – Bukarest	Bukarest – Chelsea	Chelsea – Basel

Abbildung 1: Gespiegeltes DRRT für 4 Mannschaften (eigene Darstellung)

Bei genauerer Betrachtung dieses Spielplans fällt auf, dass sowohl Basel als auch Bukarest mehrfach nacheinander zu Hause bzw. auswärts spielen.

Definition 2.15: Eine Mannschaft $i \in \mathcal{L}$ hat an Spieltag $s \in S$ ein **Heimbreak,** wenn sie an Spieltag $s-1$ und an Spieltag s zu Hause spielt. Analog liegt ein **Auswärtsbreak** an Spieltag $s \in S$ vor, wenn das Team $i \in \mathcal{L}$ sowohl an Spieltag $s-1$ als auch an Spieltag s auswärts antreten muss. Im Folgenden wird nicht mehr explizit zwischen **Heim-** und **Auswärtsbreaks** differenziert, sondern für beide einfach der Begriff **Break** verwendet (vgl. [BRI08, S.41]).

Betrachtet man nochmals Beispiel 2.14, so erkennt man, dass der FC Basel an den Spieltagen 3, 4 und 6 ein Break hat. Das Selbe gilt für Steaua Bukarest. Wann und wie viele Breaks in einem Spielplan auftreten, wird in Kapitel 6 beschrieben.

2.2 Graphentheoretische Grundlagen

Neben den sportspezifischen Begriffen werden im Laufe dieser Ausarbeitung auch immer wieder graphentheoretische Begriffe verwendet. Die wichtigsten Grundkenntnisse werden in diesem Abschnitt dargestellt.

Definition 2.16: Ein endlicher, schlichter, ungerichteter **Graph** G ist ein geordnetes Paar $\big(V(G), E(G)\big)$. Die Menge $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist endlich und nichtleer und enthält alle **Knoten** des Graphen G. Die Menge $E(G) \subseteq P_2(V) = \{\, (u,v) \mid u, v \in V, u \neq v \,\}$ ist möglicherweise leer und endlich. Jedes ungeordnete Paar $(u,v) \in E(G)$ wird als **Kante** des Graphen G bezeichnet. Es ist üblich statt $V(G)$ und $E(G)$ einfach kurz V und E zu schreiben (vgl. [CLA91, S.2]).

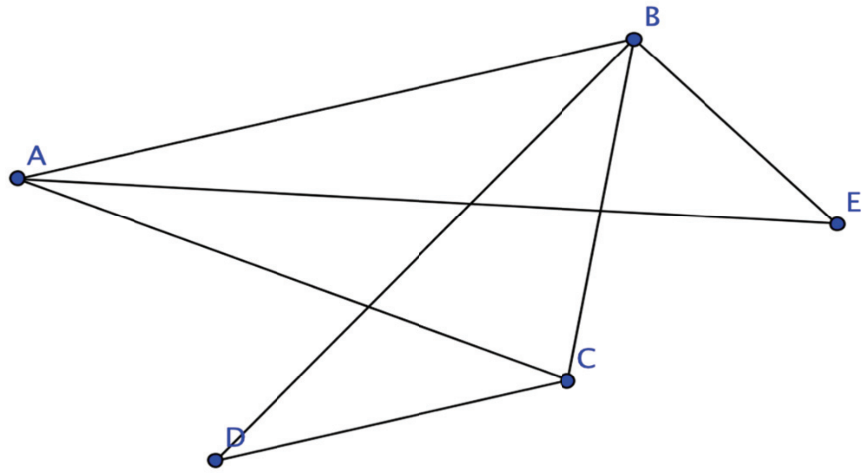

Abbildung 2: Ein Graph mit Knotenmenge $V = \{A, B, C, D, E\}$ und Kantenmenge $E = \{\,(A, B), (A, E), (A, C), (B, E), (B, D), (B, C), (C, D)\,\}$ (eigene Darstellung mit GeoGebra)

Ist im Folgenden nichts anderes angemerkt, so wird stets ein ungerichteter, schlichter, endlicher Graph betrachtet.

Definition 2.17: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $e = (u, v) \in E$. Dann heißen $u \in V$ und $v \in V$ **benachbart** oder auch **adjazent** in G. Die Kante $e = (u, v)$ ist dann **inzident** zu $u \in V$ und zu $v \in V$ (vgl. [CLA91, S.13ff.]).

Definition 2.18: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $v \in V$ ein Knoten in G. Der **Grad** $\deg(v)$ von Knoten $v \in V$ entspricht der Anzahl der Kanten in G, zu denen Knoten v inzident ist (vgl. [CLA91, S.14]):

$$\deg(v) = |\,\{\, e \in E \mid e \text{ ist inzident zu } v\}\,|$$

Definition 2.19: Sei G ein Graph. Eine Kantenfolge $p = \{e_1, \ldots, e_k\}$ mit $e_i \in E$ $(1 \le i \le k)$ heißt **Weg** von $u \in V$ nach $v \in V$, falls $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ mit $u_i \in V$ $(1 \le i \le k)$ und $u_0 = u$ sowie $u_k = v$ (vgl. [DOM07, S.2f.]). Geläufig ist für den Weg von u nach v auch die Schreibweise $u = u_0 - u_1 - \ldots - u_{k-1} - u_k = v$.
Die Definition eines Weges in einem ungerichteten Graphen führt nun unmittelbar zum Begriff des Kreises.

Definition 2.20: Ein Weg $p = (e_1, \dots, e_k)$ von $u \in V$ nach $v \in V$ ist ein **Kreis** in G, falls gilt:

$$u = v$$

Ein Kreis heißt **einfach**, falls in der Kantenfolge kein Knoten, ausgenommen Start- und Endknoten, mehr als ein Mal vorkommt (vgl. [GUR10, S.33]).

Die in den Definitionen 2.17 bis 2.20 vorgestellten Begriffe sollen durch das folgende Beispiel 2.21, welches sich auf Abbildung 2 bezieht, veranschaulicht werden.

Beispiel 2.21: Der Grad der Knoten des Graphen in Abbildung 2 beträgt:

$$\deg(A) = 3,\ \deg(B) = 4,\ \deg(C) = 3,\ \deg(D) = 2 \text{ und } \deg(E) = 2$$

Ein Weg von A nach D ist beispielsweise gegeben durch die Kantenfolge $A - B - C - D$. Die Kantenfolge $A - B - C - A$ stellt ein Beispiel für einen Kreis dar.

An dieser Stelle möchte ich noch einmal auf die Problemstellung aus Abschnitt 1.2 zurückkommen. Gegeben sind 90 Vereine, deren geografische Lage über ganz Bayern verteilt ist. Es ist natürlich möglich, mit dem PKW von jedem der 90 Orte zu jedem Anderen zu gelangen. Hierfür wird unterstellt, dass Hin- und Rückweg identisch sind. Modelliert man nun als Ausgangssituation den Spielort jedes Vereins durch einen Knoten $v \in V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ und den Fahrtweg zwischen je zwei Spielorten $v \in V$ und $w \in V$ $(w \neq v)$ durch eine ungerichtete Kante $e = (v, w) \in E$, und dies für alle $v \in V$ und $w \in V$ mit $v \neq w$, so erhält man einen Graphen G, in dem jeder Knoten $v \in V$ mit jedem anderen Knoten $w \in V \setminus \{v\}$ benachbart ist. Die beiden Knoten $v, w \in V$ $(v \neq w)$ sind inzident zur Kante $e = (v, w) \in E$. Spezifiziert wird diese Modellierung durch Definition 2.21:

Definition 2.22: Ein **vollständiger (ungerichteter) Graph** $G = (V, E)$ ist ein schlichter Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist:

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$E = \{ (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, 1 \leq i < j \leq n \}$$

Man schreibt für einen vollständigen Graphen mit n Knoten K_n (vgl. [LAU04, S.117]).

Der vollständige Graph K_{90} beschreibt demnach die oben dargestellte Ausgangssituation zur Staffeleinteilung in der Landesliga Bayern.

Satz 2.23: In einem vollständigen Graphen mit n Knoten ist die Anzahl der Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ (vgl. [LAU04, S.117]).

Beispiel 2.24: Gegeben sei der vollständige Graph K_{90}. In diesem Graphen gibt es $\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$ Kanten.

Der Graph, der die Ausgangsituation der Einteilung der fünf Landesligen in Bayern modelliert, ist vollständig und hat 4005 Kanten. Jedoch ist hierdurch noch kein Kriterium zur Einteilung von je 18 Teams in jede der fünf Staffeln der Landesliga gegeben. Um ein solches konstruieren zu können, muss man erst die Kanten gewichten.

Definition 2.25: Ein **gewichteter Graph** ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem jeder Kante $e \in E$ ein Gewicht zugeordnet wird. Hierzu wird eine Gewichtsfunktion

$$d\colon\ E \longrightarrow \mathbb{R}$$

verwendet. Für alle $e \in E$ bezeichnet $d(e)$ das Gewicht der jeweiligen Kante (vgl. [COR01, S.532]).

Als mögliche Kantengewichte für den oben beschriebenen vollständigen Graphen K_{90}, dessen Kanten den Fahrtweg beschreiben, eignen sich die Fahrtstrecken bzw. die Fahrtzeiten von Spielort zu Spielort. Wie man anhand der Kantengewichtung eine optimale Einteilung unter Einhaltung aller relevanten Restriktionen bestimmt, ist Inhalt von Kapitel 2.3 und von Kapitel 5.

Definition 2.26: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ und sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die Zuordnung jedes Knoten v der Knotenmenge V in genau eine von k paarweise disjunkten Mengen $V_1, \dots, V_k$ $(V_i \subseteq V \ \ \forall\, i = 1, .., k)$, wobei $|V_1| = m_1, \dots, |V_k| = m_k$ mit $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ gilt, bezeichnet man als **Partition** des Graphen. Haben alle m_i $(i = 1, \dots, k)$ gleiche Kardinalität, so spricht man von **Graph Equipartition** (vgl. [SOT12, S.1]).

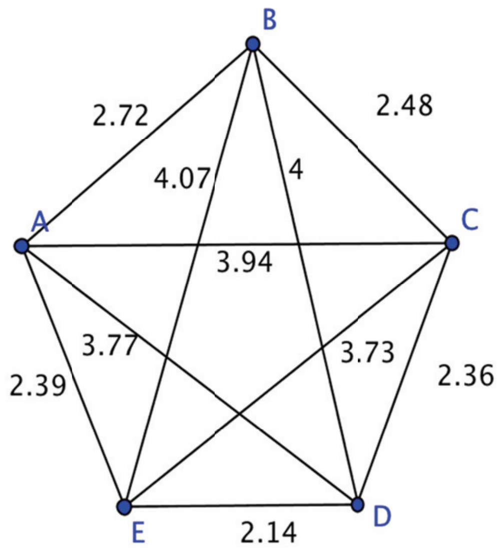

Abbildung 3: Der vollständige Graph K_5 mit Kantengewichten (eigene Darstellung mit GeoGebra)

Hat man nun eine Graph Equipartition der 90 Landesligisten in fünf Staffeln gefunden, so spielt im Laufe einer Saison jede Mannschaft gegen jedes andere Team seiner Gruppe. Da natürlich auch hier jeder Ort innerhalb einer Division von jedem anderen Ort dieser Division erreichbar ist, induziert die Gruppeneinteilung fünf vollständige Untergraphen $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, \dots, 5)$ des vollständigen Graphen K_{90}. Hierbei gilt:

$$|V_i| = 18 \quad \forall\, i = 1, \dots, 5$$
$$E_i = \{\, (u, v) \mid u, v \in V_i, u \neq v \,\} \quad \forall\, i = 1, \dots, 5$$

Etwas allgemeiner wird dies in Definition 2.27 und der nachfolgenden Erläuterung dargestellt:

Definition 2.27: Seien $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $U \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge von G. U heißt **Clique** in G, falls gilt (vgl. [GUR10, S.28]):

$$(u, v) \in E \text{ für alle } u, v \in U \text{ mit } u \neq v$$

Dies impliziert, dass eine Lösung des Problems aus 1.2 eine Partition des vollständigen Graphen K_{90} in Cliquen mit jeweils 18 Knoten ist, denn es sind nur noch Kanten relevant, die zwischen zwei Mannschaften der gleichen Staffel verlaufen. Zwischen Teams unterschiedlicher Staffeln finden keine Spiele statt. Daher sind diese Kanten für den im Laufe dieser Arbeit bestimmten Zielfunktionswert (vgl. Kapitel 2.3) uninteressant. Auch hierauf wird in den

Abschnitten 2.3 und 5 genauer eingegangen. Bei den obigen Ausführung wurde erneut unterstellt, dass Hin- und Rückweg identisch sind, so dass eine einzige ungerichtete Kante für die Modellierung des Fahrtwegs zwischen zwei Orten genügt. Dabei ist es zunächst unwesentlich, dass diese Kante während einer Saison eigentlich vier Mal (jede Mannschaft muss hin und zurück fahren und spielt ein Mal daheim und ein Mal auswärts gegen jeden Gegner) abgefahren wird. Es wird in der Modellierung zunächst von einer Fahrt über diese Kante ausgegangen und erst in der Interpretation der Ergebnisse mit dem Faktor 4 multipliziert.
Ein weiterer graphentheoretischer Begriff, der in dieser Ausarbeitung noch von Bedeutung sein wird, ist das Matching.

<u>*Definition 2.28:*</u> Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein **Matching** ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kantenmenge, so dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten haben. Ist jeder Knoten v der Knotenmenge V in genau einer Kante aus M, so nennt man M ein **perfektes Matching**. Die **Größe des Matchings** ist durch die Anzahl der Kanten in M gegeben (vgl. [GUR10, S.45]).

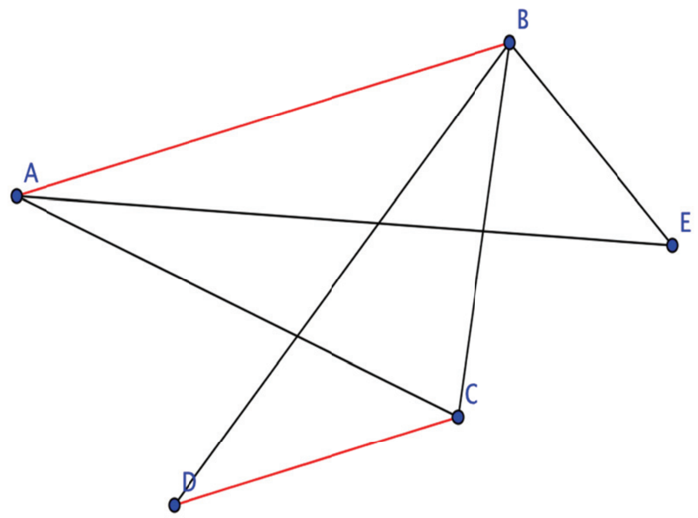

Abbildung 4: Ein mögliches Matching auf dem Graphen aus Abbildung 2 (eigene Darstellung mit GeoGebra)

Als Beispiel sei hier nochmals der Graph aus Abbildung 2 angeführt. Abbildung 4 zeigt durch die rot gekennzeichneten Kanten ein mögliches Matching auf diesem Graphen. Allerdings ist dieses nicht perfekt, da der Knoten E in keiner Kante des Matchings enthalten ist. Die Größe des Matchings beträgt zwei, da das Matching zwei Kanten enthält.

2.3 Grundlagen der Optimierung

In diesem Abschnitt sollen Grundlagen im Bereich Optimierung vorgestellt werden, welche zur Lösung des gegebenen Problems notwendig sind. Der erste Grundbegriff, der definiert werden soll, ist das kombinatorische Optimierungsproblem. Dieser Begriff soll zudem zur Beschreibung der Staffeleinteilung und der Spielplanerstellung verwendet werden.

Definition 2.29: „Ein kombinatorisches Optimierungsproblem Π ist charakterisiert durch vier Komponenten:

- $\mathcal{D}$: die Menge der (Problem)-Instanzen, Eingaben
- $S(I)$ für $I \in \mathcal{D}$: die Menge der zu Eingabe I zulässigen Lösungen
- Die Bewertungs- oder Maßfunktion $f: S(I) \longrightarrow \mathbb{N}^{\neq 0}$
- ziel $\in \{min, max\}$

Gesucht ist zu $I \in \mathcal{D}$ eine zulässige Lösung $\sigma_{opt} \in S(I)$, so dass

$$f\left(\sigma_{opt}\right) = \text{ziel}\,\{\, f(\sigma) \mid \sigma \in S(I)\}.$$

$f(\sigma)$ ist der Wert der zulässigen Lösung σ ([WAN06, S.8f.]).“

Das Hauptziel dieser Arbeit ist das Lösen zweier kombinatorischer Optimierungsprobleme. Es soll zunächst eine Gruppeneinteilung gefunden werden, in der die Summe aller Fahrtstrecken (alternativ die Fahrtzeiten) minimiert wird und die jeder Mannschaft garantiert, dass sie an keinem Wochenspieltag länger wie 60 Minuten fahren muss. Anschließend soll ein Spielplan konzipiert werden, der die Fahrtbedingung unter der Woche einhält. Diese beiden Optimierungsprobleme sollen in den Beispielen 2.30 und 2.32 anhand von Definition 2.29 beschrieben werden.

Beispiel 2.30: Gesucht ist eine Einteilung der 90 Teams in fünf Staffeln zu je 18 Teams, welche die Spieltagsbedingungen (Fahrtzeiten sind alle maximal eine Stunde) unter der Woche einhält. Dieses Problem wird im Folgenden als **(KWAYRES)** bezeichnet. Dabei wird an dieser Stelle noch kein Minimierungsziel spezifiziert. Im weiteren Verlauf dieses Beispiels werden allerdings noch zwei mögliche Varianten von Zielfunktionen vorgestellt.

Wie in der Datenerfassung in Kapitel 3 ausgeführt wird, gibt es genau 2 Spieltage, die nicht am Wochenende ausgetragen werden.

- $\mathcal{D} = \{ < K_{90},\ d,\ t > \mid\ K_{90}$ ist vollständiger Graph auf 90 Knoten,
  $d\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ Kantengewichtung bzgl. Fahrtstrecken,
  $t\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ Kantengewichtung bzgl. Fahrtzeiten }

- $S(< K_{90},\ d,\ t >) = \{\ G^* \mid G^*$ besteht bezüglich der Kantengewichtung $d\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ (alternativ bezüglich $t\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$)[1] aus 5 paarweise disjunkten Cliquender Kardinalität 18 und es existieren auf $G^*|_{(V,\, E_{60})}$ zwei disjunkte, perfekte Matchings bezüglich der Kantengewichtung $t\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ }

Hierbei bezeichnet $G^*|_{(V,E_{60})}$ den Teilgraphen von G^*, den man erhält, wenn man die Kanten der fünf Cliquen, aus denen G^* besteht, mit den Fahrtzeiten gewichtet und alle Kanten weglässt, die eine Fahrtzeit von mehr als 60 Minuten aufzeigen. Die beiden perfekten, disjunkten Matchings auf $G^*|_{(V,E_{60})}$ induzieren die beiden Spieltage, die unter der Woche stattfinden. Zur Veranschaulichung sollen die Abbildungen 5 und 6 dienen.

- [1] Die Wahl von $d\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ als Kantengewichte von G^* ist für das auf S.18f. erläuterte Problem **(KWAYRESDIS)** nötig, die Wahl von $t\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ als Kantengewichte von G^*braucht man für das auf S.18f. erläuterte Problem **(KWAYRESTIM)**. Im Fall **(KWAYRESTIM)** genügt als Eingabe $\mathcal{D} = \{ < K_{90},\ t > \mid\ K_{90}$ ist vollständiger Graph auf 90 Knoten, $t\colon\ E \longrightarrow \mathbb{N}$ Kantengewichtung bzgl. Fahrtzeiten }

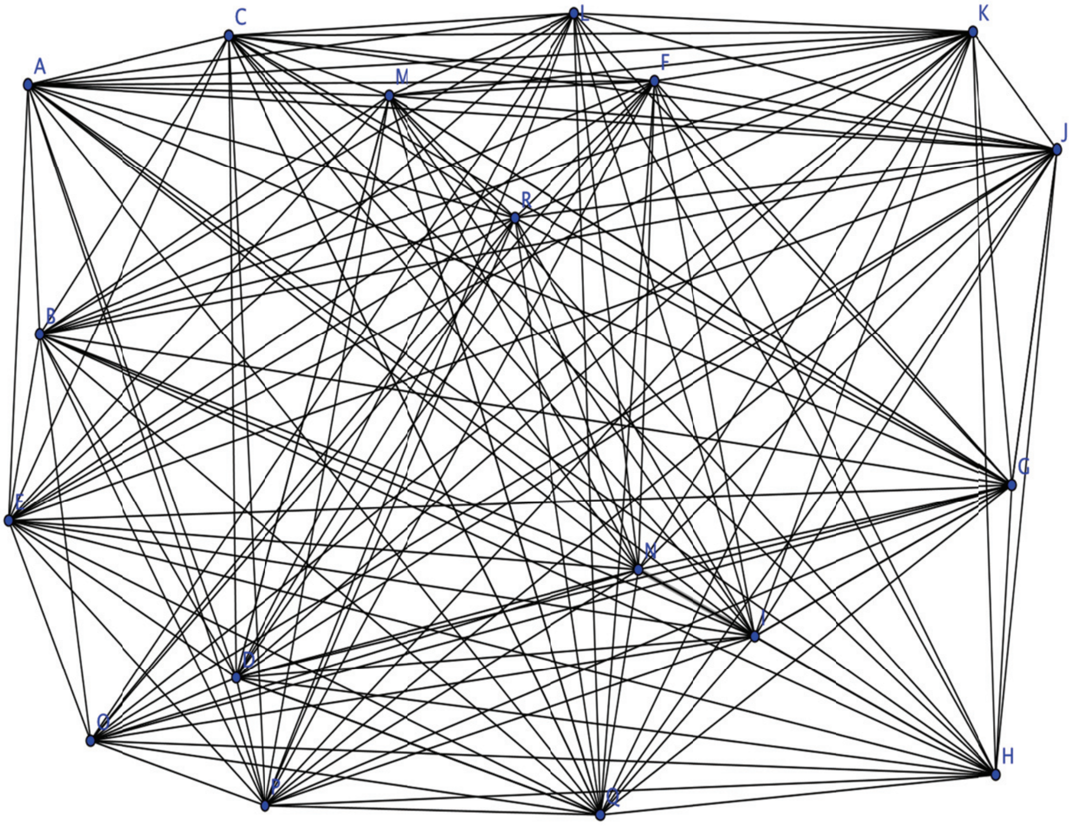

Abbildung 5: Der K_{18} (mit gedachten Fahrtstrecken als Kantengewichte, eigene Darstellung mit GeoGebra)

In Abbildung 5 ist eine der fünf Cliquen, die sich bei der Gruppeneinteilung ergeben, aufgezeigt. Da jeder Ort von jedem anderen Ort aus erreichbar ist, gibt es eine Kante zwischen je zwei Knoten dieser Clique. Als Kantengewichte werden die Fahrtstrecken (alternativ die Fahrtzeiten) zwischen den jeweiligen Knoten „gedacht". Diese wurden in der Abbildung weggelassen, um nicht an Übersichtlichkeit zu verlieren. In Abbildung 6 werden alle Kanten der in Abbildung 5 dargestellten Clique mit den Fahrtzeiten gewichtet und die Kanten mit einem Gewicht, welches echt größer als 60 ist, werden entfernt. Beispielsweise bedeutet das Gewicht 55 der Kante (A, C), dass die Fahrtzeit von Ort A nach C bzw. von C nach A 55 Minuten beträgt. Die Abbildung 6 spiegelt $G^*|_{(V,E_{60})}$ für lediglich eine Staffel wieder. Die roten und die grünen Kanten geben hierbei die zwei disjunkten, perfekten Matchings an. Die übrigen, schwarzen Kanten sind alle weiteren Kanten mit einem Gewicht von höchstens 60. Jede zulässige Lösung des Problems aus 1.2 muss in jeder der fünf Staffeln ein solches disjunktes, perfektes Matching bezüglich der Fahrtzeiten haben, denn die beiden Matchings stellen zwei mögliche Spieltage, die unter der Woche stattfinden können, dar. Die roten Kanten geben hierbei die Begegnungen des einen Spieltags an, die grünen Kanten liefern die Partien des anderen Spieltags. Die Interpretation der Matchingkanten ist wie folgt: Die beiden

Knoten, die zu einer Kante inzident sind, stellen zwei Teams dar, welche an einem Spieltag gegeneinander antreten.

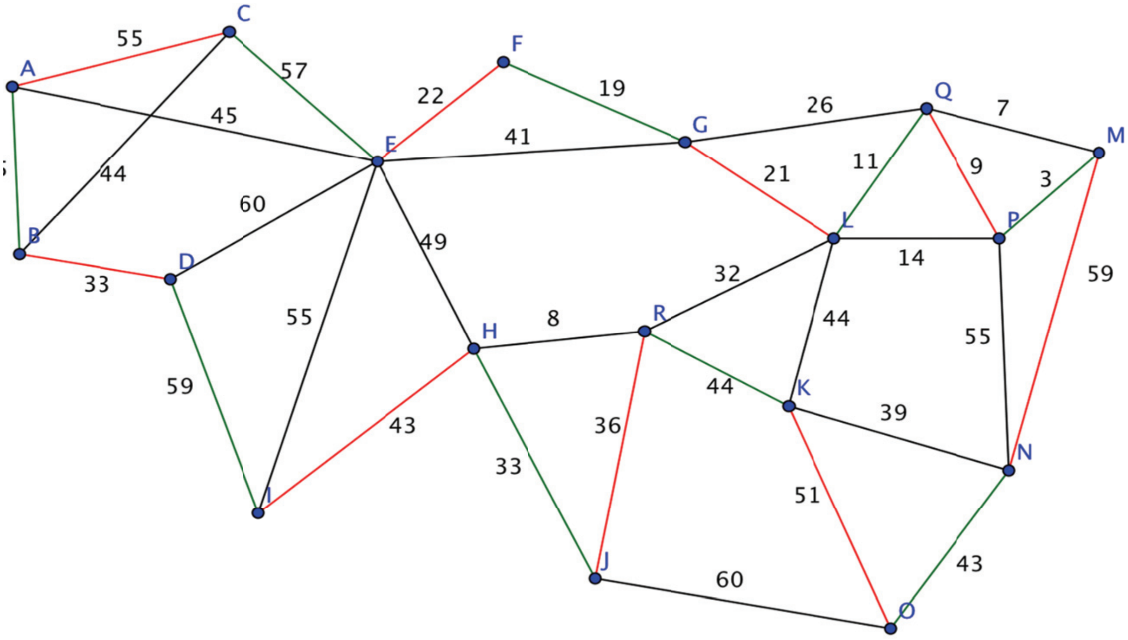

Abbildung 6: Der Graph K_{18} eingeschränkt auf Kanten mit einem Gewicht (Fahrtzeit) von höchstens 60 und die Darstellung zweier disjunkter, perfekter Matchings (eigene Darstellung mit GeoGebra)

Durch Abbildung 6 werden nun anhand der beiden disjunkten Matchings die zwei folgenden Spieltage (nur Paarungen, keine Aussage über Heimrecht) induziert:

Spieltag 1	Spieltag 2
$A - C$	$A - B$
$E - F$	$C - E$
$G - L$	$F - G$
$Q - P$	$L - Q$
$M - N$	$P - M$
$O - K$	$N - O$
$R - J$	$K - R$
$H - I$	$J - H$
$B - D$	$I - D$

Abbildung 7: Begegnungen aus Abbildung 6 (eigene Darstellung)

- Die Bewertungsfunktion (vgl. [OOS01, S.209]):