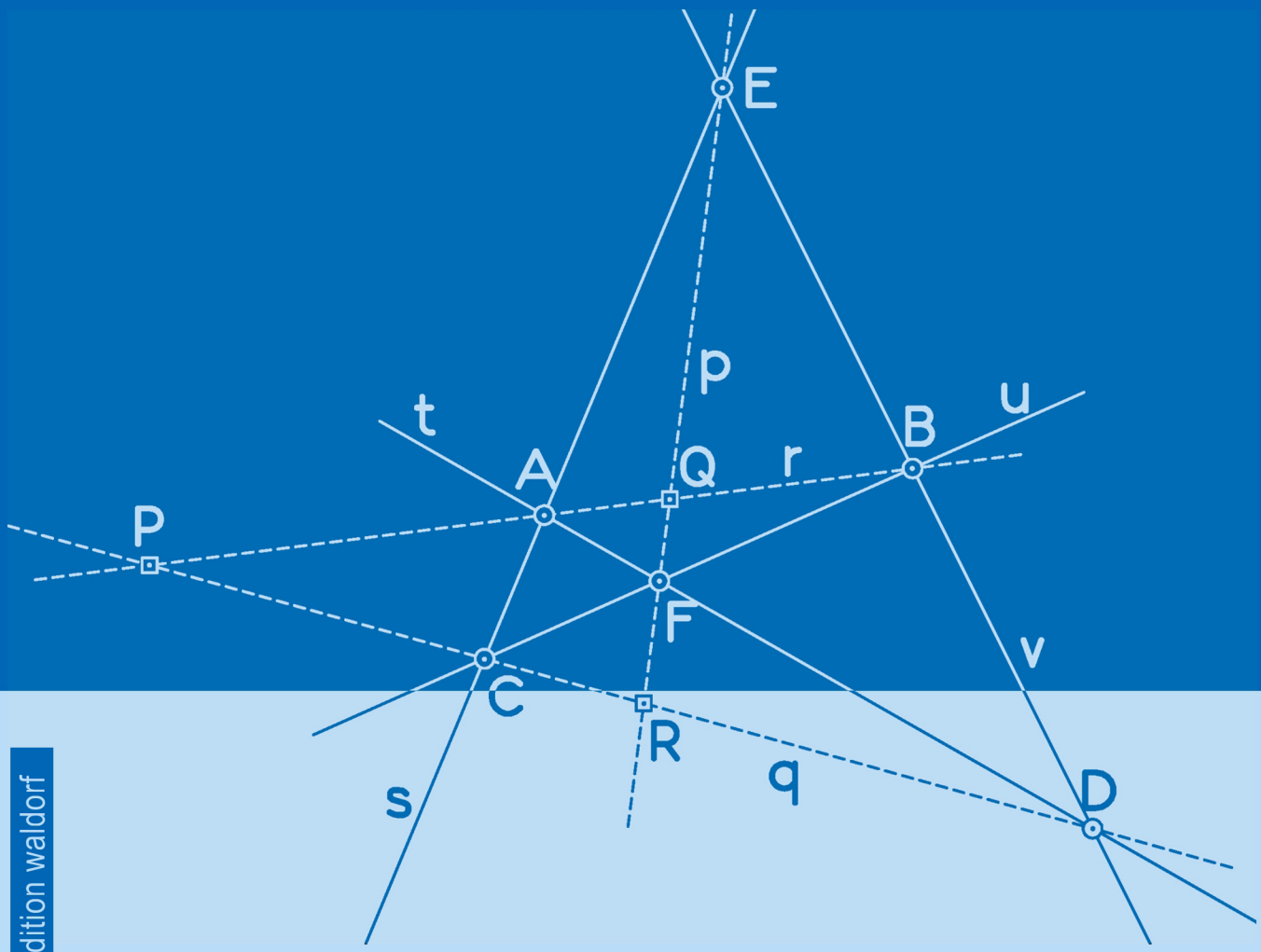
Alexander Stolzenburg

Übungsaufgaben zur Projektiven Geometrie

mit Lösungen



edition waldorf

Alexander Stolzenburg

Übungsaufgaben zur Projektiven Geometrie

mit Lösungen

edition waldorf

Pädagogische Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen
Wagenburgstraße 6 • 70184 Stuttgart

© edition waldorf
Stuttgart 2018

Sie finden uns im Internet unter
www.forschung-waldorf.de • www.waldorfbuch.de

ISBN 978-3-944911-57-1

Alle Rechte vorbehalten.
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung der Pädagogischen Forschungsstelle Stuttgart.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Vorwort

Noch ist die Projektive Geometrie als Unterrichtsgebiet im Mathematikunterricht der Waldorfschulen nicht ganz ausgestorben. Manche alten Kämpen pflegen sie trotz aller Anfechtungen und Erschwernisse durch zentrale Prüfungen noch weiter, aber erfreulicherweise finden auch immer wieder junge Kollegen Interesse und Geschmack daran. Sie stehen dann vor der besonderen Herausforderung, sich das Fachliche erarbeiten zu müssen.

Diesen Bemühungen, in das Fach einzudringen, soll die Aufgabensammlung entgegenkommen – mit einfachen Aufgaben, aber auch anspruchsvolleren. Natürlich kann man viele der Aufgaben auch als Übungsmaterial im Unterricht verwenden oder Aufgaben für Schüler daraus entwickeln.

Ich empfehle, Seiten mit Aufgaben zu kopieren und unverdrossen zu zeichnen bzw. zeichnen zu lassen; manchmal muss man es auch mehrfach versuchen. Natürlich kann man auch direkt ins Buch zeichnen.

Das Ganze hier gliedert sich in vier Teile:

Den Anfang bildet im **Teil 1** eine kurz gefasste Zusammenfassung von Definitionen, Sätzen, Grundkonstruktionen für die Themen, die in den Aufgaben auch vorkommen.

Es folgen als **Teil 2** die Aufgaben, thematisch gegliedert, mit einfacheren und Grund-Aufgaben anfangend, dann durchaus sich steigernd. Keine Angst vor der stofflichen Fülle: Wenn man die Projektive Geometrie unterrichten will, wird man auswählen müssen. Andererseits kann ich versichern, dass bei mir alles auch einmal Unterrichtsgegenstand gewesen ist, aber natürlich in immer anderen Kombinationen für die verschiedenen Klassen verschieden ausgewählt.

Rechnerische Aufgaben kamen bei mir natürlich nur in den 13. Klassen vor – in den Zeiten vor dem Zentralabitur, als in NRW noch eigene Inhalte möglich waren. Eine besondere Werbung mache ich hier für die homogenen Koordinaten: für die Schüler leicht zu erlernen, und die innere Symmetrie, wie sie sich in der Dualität ausprägt, findet sich hier auch in den Vektor- und Matrizengleichungen wieder.

Ob es noch jemanden gibt, der das in Unterricht behandelt?

Zur Freien Geometrie ebener Kurven findet man viele Aufgaben, auch mit Lösungen, in den "Mathematikthemen für die 12. Klasse – Band 2" [edition waldorf, Kassel 2015].

Im **Teil 3** sind für alle Aufgaben Lösungen angegeben, jeweils nur eine, obwohl es oft auch andere Wege zum Ziel gibt – durchaus eine Besonderheit der projektiven Geometrie.

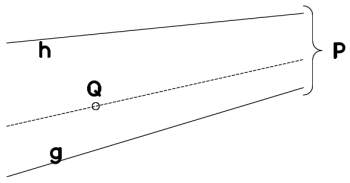
Dabei sind, wo sinnvoll, auch Konstruktionsbeschreibungen gegeben, manchmal auch nur einfach die richtigen Zeichnungen oder Beschreibungen bzw. die einigermaßen vollständigen Rechnungen.

Als letztes füge ich in **Teil 4** eine Sammlung von Druckfehlerberichtigungen für mein Buch an, auf das auch immer wieder verwiesen wird, und dessen Bezeichnungen und Symbole auch hier verwendet werden.

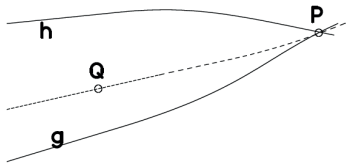
Für die Arbeit mit dieser Aufgabensammlung kann ich ja nur Vorschläge machen, etwa direkt ins Buch oder vielleicht besser in eine Kopie zu zeichnen. Oft bauen die hintereinander folgenden Aufgaben aufeinander auf, in der Regel mit steigendem Grad der Anforderung. Auch für Übungen oder Arbeitsblätter für die Schüler kann man einzelne Aufgaben herauskopieren. Oder, das ist dann der nächste Schritt, man wandelt Aufgaben etwas ab; oft genügt schon eine kleine Verschiebung eines Punktes oder einer Geraden, um eine Aufgabe zu erhalten, deren Lösung auf den ersten Blick ganz anders aussieht.

Die Aufgaben sind so vorbereitet, dass in der Regel alles Wichtige auf das Zeichenblatt fällt, aber es gehört zum Wesen der Projektiven Geometrie, dass Zeichnungen den Rahmen sprengen; so kommt es immer wieder einmal vor (besonders, wenn Geraden frei zu wählen sind), dass wichtige Punkte außerhalb des Zeichenblattes liegen.

Dann muss man es noch einmal versuchen – und sich der Gefahr aussetzen, dass nun andere Elemente außerhalb des Zeichenblattes zu liegen kommen. Man kann sich aber oft auch durch Andeutungen behelfen. Bewährt hat sich die geschweifte Klammer:
Hier P ist der Schnittpunkt von g und h; und r ist die Gerade durch Q und P.



Oder man ergänzt frei Hand: Geraden sind Geraden – nicht, weil sie gerade aussehen, sondern weil wir es wollen und wissen, dass es Geraden sind.



Die leistungsfähigeren Schülerinnen und Schüler lieben es, sich selbst auf diese Weise ihr gedankliches Durchdrungenhaben der vorliegenden Situation zu bestätigen.

Mit Dankbarkeit schaue ich zurück auf die Menschen, denen ich die Beschäftigung mit der Projektiven Geometrie zu verdanken habe. Das beginnt mit den Vorlesungen an der Technischen Hochschule Stuttgart von Prof. H. Brauner, der seinerzeit eine Fülle von geometrischen Vorlesungen gehalten hat, alle kunstvoll aufeinander bezogen und aufeinander verweisend. Hin und wieder klopfte das Auditorium Beifall – nur, weil er es so schön erklärt hatte. Weitere bedeutende Anregungen verdanke ich Prof. W. Burau an der Universität Hamburg, auch er ein Geometer durch und durch. Als nächstes denke ich an zahlreiche Kollegen aus der Gemeinschaft der Mathematiklehrer an Waldorfschulen, nenne hier nur P. Baum, K.-Fr. Georg, G. Glöckler, Dr. Chr. Gögelein, Kl. Labudde, Dr. W. Rauer, Dr. G. Unger. Wesentliche Unterstützung und Ermutigung bei der Buchproduktion verdanke ich den Herren Chr. Boettger und St. Sigler. Nicht zuletzt habe ich dankbar an viele Schulklassen zu denken, für die und mit denen ich vieles entwickelt habe und die sich (meist) mit Freude und Erfolg daran beteiligt haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt zuletzt Herrn Peter Baum für sein gründliches Korrekturlesen. Er hat alle (?) Fehler gefunden, wesentliche Korrekturen und Ergänzungen zur „harmonischen Grundfigur“ beigesteuert und an vielen Stellen für bessere Lesbarkeit gesorgt.

Essen, 25.06.2018

Ich freue mich über Anregungen und Kritik:

Alexander Stolzenburg
Schellstraße 49, 45134 Essen
eMail: a@stolzenburg-essen.de

Symbole und Bezeichnungen

A, B, P ...	Punkte
P_∞	Fernpunkt
a, b, g, ...	Geraden
u_∞	Ferngerade
α, β, ...	Ebenen
$\overline{AB}$	Verbindungsgerade der Punkte A, B
$\overline{AB}$	Strecke, die durch A, B begrenzt ist. (A und B bestimmen zwei Strecken)
	auch vorzeichenbehaftete Länge der Strecke [für einen gewählten Durchlaufungssinn]
$a \cdot b$	Schnittpunkt der Geraden a, b
$\overline{\alpha\beta}$	Schnittgerade der Ebenen α und β
$\overline{\overline{\wedge}}$	perspektiv – siehe „Projektive Abbildungen“
$\overline{\wedge}$	projektiv – siehe „Projektive Abbildungen“
$P * p$	Linienelement: Punkt P <u>und</u> Tangente p in P einer Kurve
$\beta \circ \alpha$	zusammengesetzte Abbildung aus α und β
$\mathbf{A}$	Matrix
$\mathbf{A}^T$	transponierte Matrix
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse Matrix, Inverse
$\mathbf{A}^{-P}$	inverse Matrix im Sinne der projektiven Geometrie
$\mathbf{x}$	(Spalten-)Vektor
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	Determinante der Matrix $\mathbf{A}$
EWA	Eigenwertaufgabe
LK	Linearkombination
la	linear abhängig
lu	linear abhängig
ZK	Zentralkollineation
$P[\mathbf{x}]$	Punkt mit dem Koordinatenvektor $\mathbf{x}$
$g\{\mathbf{u}\}$	Gerade mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{u}$ ihrer Gleichung $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = 0$
$\varepsilon\{\mathbf{u}\}$	Ebene mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{u}$ ihrer Gleichung $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = 0$

Symbole in den Zeichnungen

	Fernpunkt
	Ferngerade

Inhaltsverzeichnis

Teil 1 – Wichtige Erklärungen und Ergebnisse 1

Grundlegendes: Inzidenz, Fernelemente, … Satz von DESARGUES 1
vollständiges Viereck, Vierseit, harmonische Lage, Teil- und Doppelverhältnis 3
Perspektive und projektive Abbildungen 4
Kurven 2. Ordnung (2. Klasse) 6
Zentralkollineationen 9
Analytische Projektive Geometrie in homogenen Koordinaten 11
Freie Geometrie ebener Kurven 13

Teil 2 – Aufgaben und Teil 3 – Lösungen

	Aufgaben	Lösungen
Dualität	16	84
Gliederung der Ebene	17	86
Satz von DESARGUES	19	88
unzugänglicher Punkt	22	92
Harmonische Lage	24	93
Satz des PAPPOS	28	97
Aufgaben im 3-dimensionalen Raum	30	99
Tetraeder	30	100
Würfel	30	101
Oktaeder	32	103
perspektivische Ansichten	33	105
projektive Abbildungen	37	105
Ketten von perspektiven Abbildungen	37	109
Kreuzliniensatz	39	111
Kreuzpunktsatz	41	113
projektive Erzeugung von Kegelschnitten	43	115
Satz von PASCAL	47	119
Tangente	49	121
Satz von BRIANCHON	53	125
Berührpunkt	55	127
Aufgaben 2. Grades	59	131
Zentralkollineation, einfach	62	134
Quadrat	65	137
Parabel	68	139
Ellipse	69	141
Hyperbel	70	142
abstrakte Aufgabe	70	143
Zentralkollineation, komplexe Aufgaben	71	144
Homogene Koordinaten und Matrizen	73	152
Eigenwertaufgaben	74	159
Freie Geometrie ebener Kurven	77	170

Teil 4 – Druckfehlerverzeichnis

für A.Stolzenburg, Projektive Geometrie, Stuttgart 2009 181
Anhang zur harmonischen Grundfigur 182

Teil 1

Wichtige Erklärungen und Ergebnisse

[S. xxx] = Verweis auf das Buch A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Stuttgart 2009.

Inzidenz [S. 13]

Eine Gerade und ein Punkt „inzidieren“ wenn die Gerade durch den Punkt geht / der Punkt in der Geraden liegt.
Im Raum können Punkt und Gerade, Punkt und Ebene sowie Gerade und Ebene inzidieren.

Fernpunkte, -gerade, -ebene [S. 2]

Die Gemeinsamkeit zweier paralleler Geraden ist ihre Richtung; man sagt, sie haben einen Fernpunkt gemeinsam (einen idealen Punkt, unendlich fernen Punkt).

In der Ebene haben also zwei Geraden immer einen Punkt gemeinsam – und sei es ein Fernpunkt.

In jeder Geraden gibt es einen und nur einen Fernpunkt. Geraden sind dann in sich geschlossen.

Die Gesamtheit aller Fernpunkte einer Ebene ist die (einzige) Ferngerade dieser Ebene.

Im Raum bilden alle Fernpunkte und Ferngeraden die (einzige) Fernebene des Raumes.

Dualität [S. 15]

Wenn man in der Beschreibung eines gültigen Sachverhaltes die Begriffe Punkt und Gerade gegeneinander vertauscht und ebenso die abgeleiteten Begriffe verbinden und schneiden u.s.w., dann erhält man wieder einen gültigen Sachverhalt.

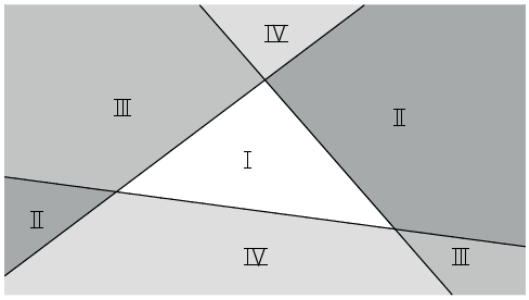
Im Raum stehen sich Punkt und Ebene dual gegenüber; die Gerade ist dual zu sich selbst.

Im Folgenden werden duale Tatsachen in zwei Spalten nebeneinander angegeben.

Gliederung [S.21]

3 Geraden gliedern die Punkte der Ebene in 4 3-seitig begrenzte Gebiete.

4 Geraden gliedern die Punkte der Ebene in 7 Gebiete: 4 3-seitig und 3 4-seitig begrenzte.

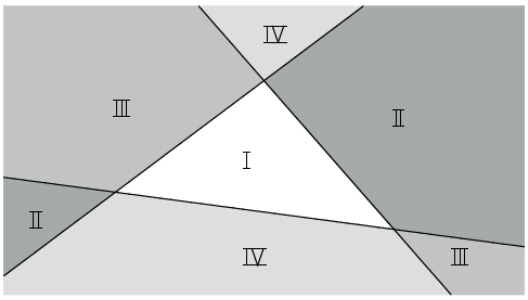


5 Geraden gliedern die Ebene in 11 Gebiete: 5 3-seitig, 5 4-seitig und 1 5-seitig begrenztes.

n Geraden gliedern die Ebene in $\binom{n}{2} + 1$ Gebiete.

3 Punkte gliedern die Geraden der Ebene in 4 3-eckig begrenzte Bereiche.

4 Punkte gliedern die Geraden der Ebene in 7 Bereiche: 4 3-eckig und 3 4-eckig begrenzte.



u.s.w.

EULER'sche Gleichung: $E + F - K = 1$
(mit E = Anzahl der Ecken, F = Anzahl der Flächen (Gebiete), K = Anzahl der Kanten, wobei Kanten die Strecken auf den Geraden sind).

Im Raum: [S. 30]

Die Ebenen gliedern die Punkte des Raumes in Zellen, die von (ebenen) Flächen und Kanten und Ecken (Punkten) begrenzt werden. Es gilt die EULER'schen Gleichung: $E - K + F - Z = 0$

Grundgebilde in der Ebene [S. 7]

Punktreihe – alle Punkte einer Geraden.

Punktfeld – alle Punkte einer Ebene.

Geradenbüschel – alle Geraden in einem Punkt.

Geradenfeld – alle Geraden in einer Ebene.

Grundgebilde im Raum

Punktreihe – alle Punkte einer Geraden.

Punktfeld – alle Punkte einer Ebene.

Geradenbündel – alle Geraden in einem Punkt.

Punktraum – der Raum als Träger von Punkten.

Ebenenbüschel – alle Ebenen durch eine Gerade.

Ebenenbündel – alle Ebenen durch einen Punkt.

Geradenfeld – alle Geraden in einer Ebene.

Ebenenraum – der Raum als Träger seiner Ebenen.

Ebenenraum – der Raum als Träger aller seiner Ebenen.

Geradenraum – der Raum als Träger aller seiner Geraden.

Geradenbüschel – alle Geraden in einem Punkt <u>und</u> in einer Ebene, wobei Punkt und Ebene inzidieren.

Geradengebüsch – alle Geraden, die eine feste Gerade treffen.

Punktreihe und Geradenbüschel sind Gebilde 1. Stufe; d.h. sie sind 1-dimensional, d.h. rechnerisch genügt eine Koordinate oder ein Parameter, um ein einzelnes Exemplar zu charakterisieren; man sagt auch: sie enthalten ∞^1 Elemente.

Punktfeld und Geradenfeld sind Gebilde 2. Stufe; d.h. sie sind 2-dimensional, enthalten ∞^2 Elemente.

Punktraum, Ebenenraum und Geradengebüsch sind 3-dimensional, der Geradenraum 4-dimensional.

Trennungsrelation (tritt an die Stelle des Zwischenbegriffs): [S. 19]

Zwei Paare (A_1, A_2) und (B_1, B_2) von verschiedenen Punkten in einer Gerade trennen sich, wenn sie abwechselnd aufeinander folgen, wenn man die Gerade durchläuft: $A_1B_1A_2B_2A_1$ oder $A_1B_2A_2B_1A_1$.

Strecke

Zwei Punkte bestimmen 2 Strecken; eine ist ganz im Endlichen, die andere enthält einen Fernpunkt.

Desargues'sche Konfiguration [S. 38]

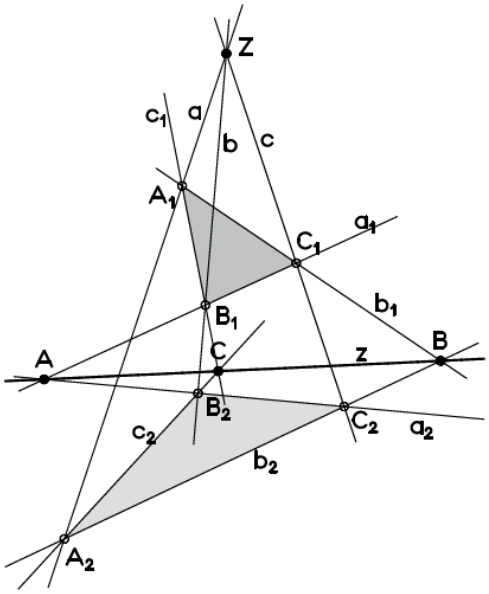
Wenn zwei Dreiecke A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 so liegen, dass die Verbindungsgeraden a, b, c entsprechender Punkte durch <u>einen</u> Punkt Z gehen, dann heißen sie zueinander zentral-perspektiv.

Dual: Wenn zwei Dreiseite a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 so liegen, dass die Schnittpunkte A, B, C entsprechender Seiten in <u>einer</u> Gerade z liegen, dann heißen sie zueinander axial-perspektiv.

Satz des Desargues:

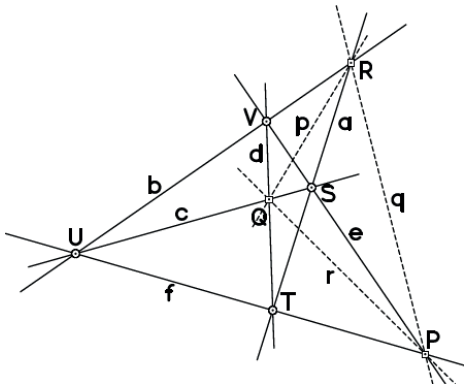
Wenn zwei Dreiecke zentral-perspektiv sind, dann sind sie auch axial-perspektiv.

Wenn zwei Dreiecke axial-perspektiv sind, dann sind sie auch zentral-perspektiv.

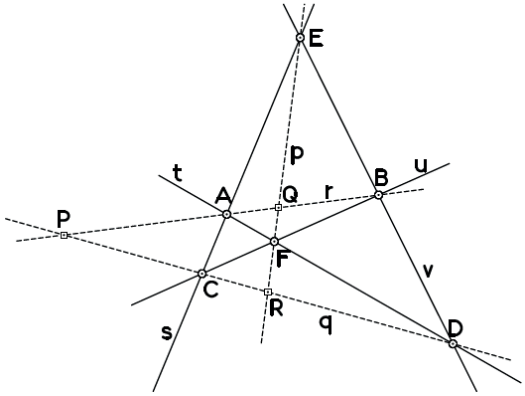


Vollständiges Viereck und vollständiges Vierseit [S. 43]

Ein vollständiges Viereck besteht aus
4 Punkten (S, T, U, V);
6 Seiten (allen Verbindungsgeraden) a, b, c, d, e, f;
3 Nebenecken (zusätzliche Schnittpunkte) P, Q, R;
3 Nebenseiten p, q, r.



Ein vollständiges Vierseit besteht aus
4 Seiten (s, t, u, v);
6 Punkten (allen Schnittpunkten) A, B, C, D, E, F;
3 Nebenseiten (zusätzliche Verb.geraden) p, q, r;
3 Nebenecken P, Q, R.



Harmonische Lage [S. 45]

Zwei Geradenpaare (a,b) und (p,q) in einem Punkt heißen harmonisch, wenn sie so liegen wie die Seiten und die Nebenseiten eines beliebigen vollständigen Vierecks.

Beispiel: (a,b) und (p,q) im Punkt R (s.o.).

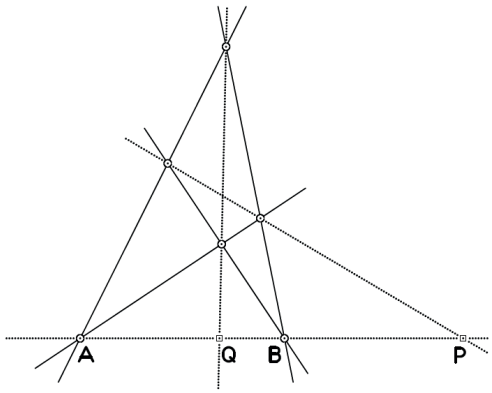
Zwei Punktepaare (A,B) und (P,Q) in einer Geraden heißen harmonisch, wenn sie so liegen wie die Ecken und die Nebenecken eines beliebigen vollständigen Vierseits.

Beispiel: (A,B) und (P,Q) in Gerade r (s.o.).

Konstruktion des 4. harmonischen Punkts

Gegeben seien drei Punkte A, B, P in einer Geraden. Gesucht ist der Punkt Q, sodass (A,B) und (P,Q) harmonische Punktepaare sind.

<u>Konstruktion</u>: Zwei Geraden (Seiten) durch A und eine dritte durch B können beliebig gewählt werden. Ihre Schnittpunkte sind weitere Ecken des vollständigen Vierseits mit den Ecken A und B. Eine dieser neuen Ecken wird mit P verbunden, dies ergibt eine weitere Ecke. Nun kann das vollständige Vierseit leicht vervollständigt werden.



Der vierte harmonische Punkt ist eindeutig bestimmt (unabhängig von der Wahl des Vierseits).

Sonderfall: Eine Strecke $\overleftrightarrow{AB}$ wird vom Mittelpunkt und dem Fernpunkt von $\overline{AB}$ harmonisch geteilt.

Harmonische Geradenpaare lassen sich dual konstruieren oder:

Der Schnitt von harmonischen Geradenpaaren mit einer beliebigen Geraden erzeugt harmonische Punktepaare auf dieser Geraden.

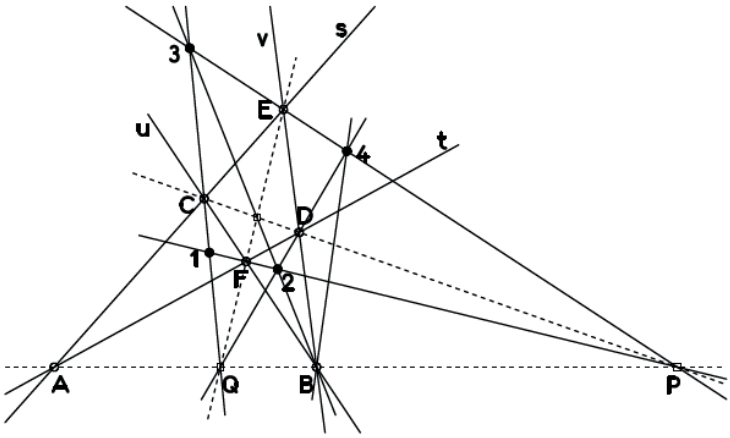
Der Schein von harmonischen Punktepaaren aus einem beliebigen Punkt erzeugt harmonische Geradenpaare in diesem Punkt.

Sonderfall: Zwei Geraden a, b bilden mit den beiden Winkelhalbierenden harmonische Geradenpaare.

Harmonische Grundfigur

{siehe S. 182 in diesem Buch}

Die harmonische Grundfigur, auch harmonische Fundamentalstruktur, besteht aus 13 Punkten und 13 Geraden Diese gliedern sich zu einem vollständigen Vierseit stuv und einem vollständigen Viereck 1234 mit einem gemeinsamen Nebendreieck/-dreiseit PQR bzw. pqr, wobei jede der 6 Seiten $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{23}$, $\overline{24}$, $\overline{34}$ des Vierecks mit genau einer der Ecken ABDEF des Vierseits inzidiert (und jede der 6 Ecken das Vierseits mit genau einer Seite des Vierecks inzidiert).



Zum Nachweis genügt es, zu zeigen:

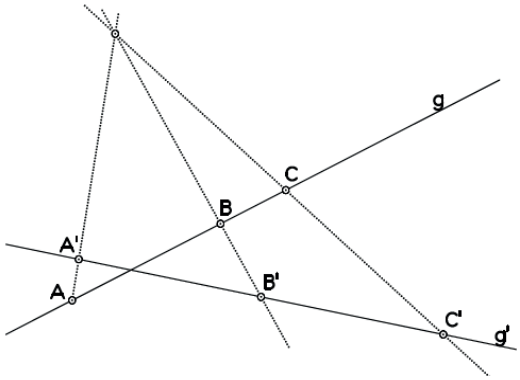
1. Ein vollständiges Vierseit und ein vollständiges Viereck haben das Nebendreiseit/-eck gemeinsam.
2. 3 Seiten des Vierecks inzidieren mit genau einer Ecke das Vierseits oder drei Ecken des Vierseits inzidieren mit genau einer Seite des Vierecks.

Je 4 Punkte in einer Geraden und je 4 Geraden durch einen Punkt bilden harmonische Paare.

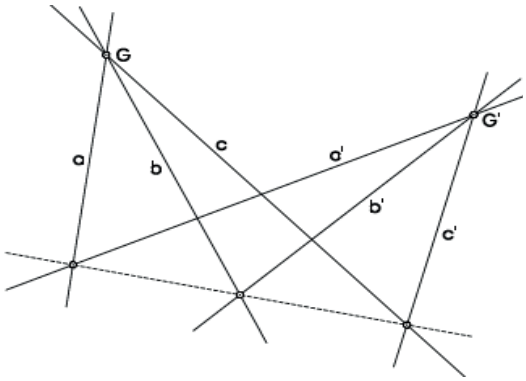
Perspektive Abbildungen

[S.59]

Zwei Punktreihen A, B, C, … und A', B', C', … heißen zueinander perspektiv, wenn sie Schnitte <u>eines</u> Geradenbüschels sind. Sie gehen durch eine perspektive Abbildung auseinander hervor.



Zwei Geradenbüschel a, b, c, … und a', b', c', … heißen zueinander perspektiv, wenn sie Scheine <u>einer</u> Punktreihe sind. Sie gehen durch eine perspektive Abbildung auseinander hervor



Man schreibt kurz (A,B,C) $\overline{\overline{\wedge}}$ (A',B',C') und (a,b,c) $\overline{\overline{\wedge}}$ (a',b',c') u.s.w.

Projektive Abbildungen

[S. 62]

Zwei Punktreihen A, B, C, … und A', B', C', … heißen zueinander projektiv, wenn sie durch eine Kette von perspektiven Abbildungen auseinander hervorgehen.

Zwei Geradenbüschel a, b, c, … und a', b', c', … heißen zueinander projektiv, wenn sie durch eine Kette von perspektiven Abbildungen auseinander hervorgehen.

Man schreibt kurz (A,B,C) $\overline{\wedge}$ (A',B',C') und (a,b,c) $\overline{\wedge}$ (a',b',c') u.s.w.

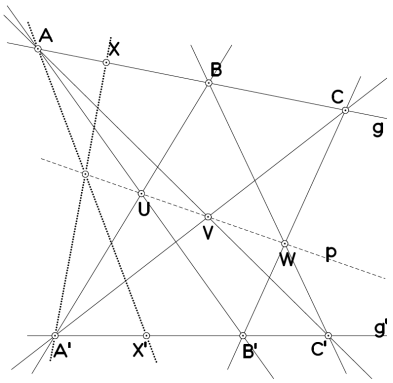
Kennzeichnung perspektiver Abbildungen

Eine projektive Abbildung zweier Punktreihen (zweier Geradenbüschel) ist genau dann eine perspektive Abbildung, wenn der Schnittpunkt der beiden Trägergeraden (die Verbindungsgerade der beiden Trägerpunkte) sich selbst zugeordnet ist.

Der bequemeren Konstruktion zugeordneter Elemente dienen folgende Sätze:

Kreuzliniensatz

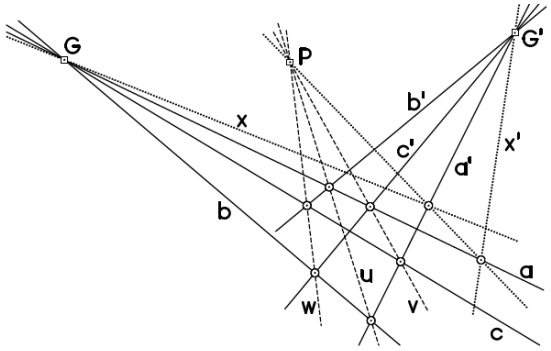
Die Schnittpunkte entsprechender Kreuzlinien zweier projektiv aufeinander bezogener Punktreihen liegen alle in einer Geraden, der „Perspektivitätsachse“ p der beiden projektiven Reihen.



„Entsprechende Kreuzlinien“ sind dabei z.B. $\overline{AB'}$ und $\overline{A'B}$, $\overline{AC'}$ und $\overline{A'C}$ u.s.w.

Kreuzpunktsatz [S. 65]

Die Verbindungsgeraden entsprechender Kreuzpunkte zweier projektiv aufeinander bezogener Geradenbüschel gehen durch einen Punkt, das „Perspektivitätszentrum“ P der beiden projektiven Büschel.



„Entsprechende Kreuzpunkte“ sind dabei z.B. a·b' und a'·b, a·c' und a'·c u.s.w.

Invarianten

Projektive Abbildungen sind

inzidenztreu	wenn P und g inzidieren, dann auch P' und g'
ordnungstreu	wenn sich (A,B) und (C,D) trennen, dann auch (A',B') und (C',D')
harmonizitätstreu	wenn (A,B) und (P,Q) in harmonischer Lage sind, dann auch (A',B') und (P',Q')
doppelverhältnistreu	DV(A',B',C',D') = DV(A,B,C,D) [S.76]

Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Projektiven Geometrie [S. 63, Beweis: S. 70]

Zwei Grundgebilde derselben n-ten Stufe (n = 1, 2, 3) seien gegeben. Dann ist durch je n+2 Elemente und deren Bildelemente in allgemeiner Lage eine projektive Zuordnung zwischen den beiden Grundgebilden eindeutig bestimmt.

Speziell ist die projektive Zuordnung zwischen zwei Punktreihen (zwei Geradenbüscheln) durch die Angabe von 3 Paaren zugeordneter Punkte (bzw. Geraden) eindeutig festgelegt.

Eine Zuordnung zwischen zwei Punktreihen (zwei Geradenbüscheln) mit drei Fixpunkten (drei Fixgeraden) ist die Identität.

Involutionen [S. 109]

Eine Abbildung ι eines Grundgebildes auf sich heißt eine Involution, wenn die Elemente wechselseitig zugeordnet sind: Wenn $A_2 = \iota(A_1)$, dann auch $A_1 = \iota(A_2)$.
Die zweimalige Hintereinanderausführung führt zum Ausgang zurück: $\iota \circ \iota = \mathrm{Id}$ (Identität);
ι stimmt dann mit ihrer Inversen überein: $\iota^{-1} = \iota$.

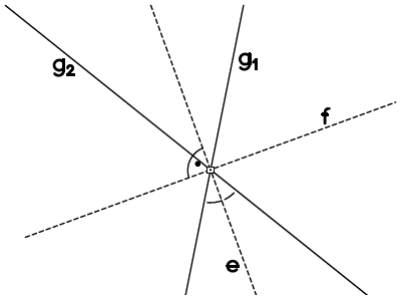
Sonderfall: die Pol-Polaren-Korrelation π, die jedem Punkt die Polare bezüglich eines festen Kegelschnitts zuweist und jeder Geraden den Pol bezüglich dieses Kegelschnitts.

Eine Korrelation ist dabei ganz allgemein eine inzidenztreue Abbildung, die jedem Punkt eine Gerade (im Raum: eine Ebene) zuordnet und jeder Gerade (jeder Ebene) einen Punkt.

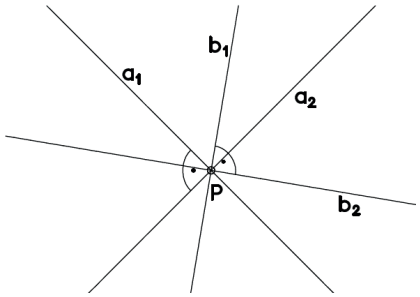
Eine Involution ist festgelegt durch die Angabe von zwei Paaren zugeordneter Elemente oder durch zwei Fixelemente oder durch ein Fixelement und ein Paar zugeordneter Elemente.

Standardbeispiele

Symmetrische Geraden-Involution

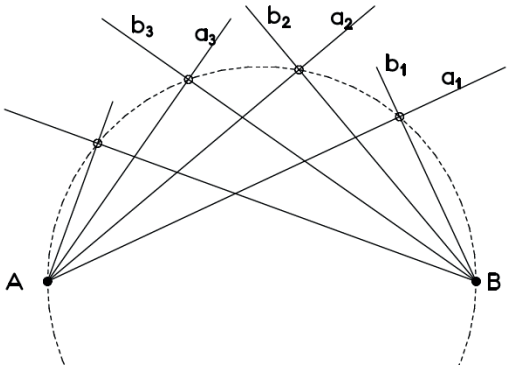


Rechtwinkel-Involution

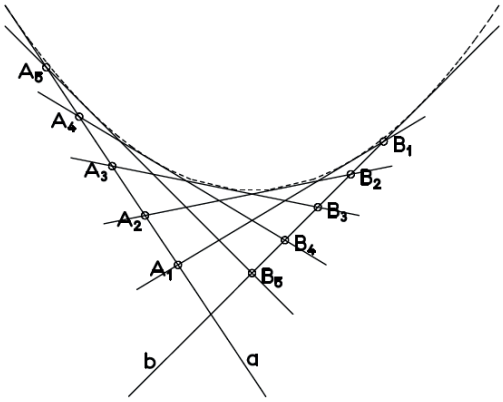


Projektive Erzeugung von Kurven 2. Ordnung (2. Klasse) [S. 81]

Gegeben seien zwei projektiv (aber nicht perspektiv) aufeinander bezogene Geradenbüschel mit voneinander verschiedenen Trägerpunkten. Dann bilden die Schnittpunkte zugeordneter Geraden eine Kurve 2. Ordnung (einen Kegelschnitt).



Gegeben seien zwei projektiv (aber nicht perspektiv) aufeinander bezogene Punktreihen mit voneinander verschiedenen Trägergeraden. Dann bilden die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte die Tangente einer Kurve 2. Klasse (eines Kegelschnitts).



Die Kurve ist dabei eine Ellipse (oder ein Kreis) / eine Parabel / eine Hyperbel, wenn 0 / 1 / 2 ihrer Punkte Fernpunkte sind.
Die Kurve ist eine Parabel, wenn die Ferngerade Tangente ist, sonst Ellipse (Kreis) oder Hyperbel.
Die Asymptoten einer Hyperbel sind die Tangenten in ihren Fernpunkten.

Satz von PASCAL und Satz von BRIANCHON [S. 89]

Satz von PASCAL: Für ein Sechseck, bestehend aus 6 Punkten eines Kegelschnitts, gilt:

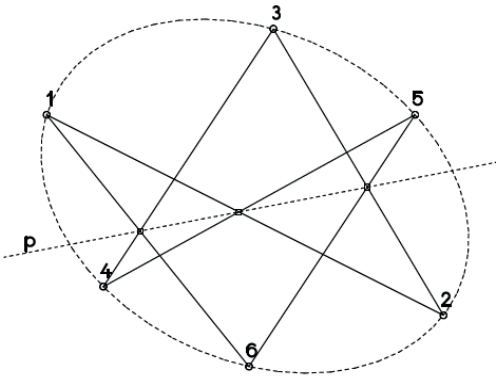
Die Schnittpunkte von gegenüberliegenden Seiten $\overline{12} \cdot \overline{45}$, $\overline{23} \cdot \overline{56}$, $\overline{34} \cdot \overline{61}$ liegen in einer Geraden, der PASCAL'schen Geraden dieses Sechsecks.

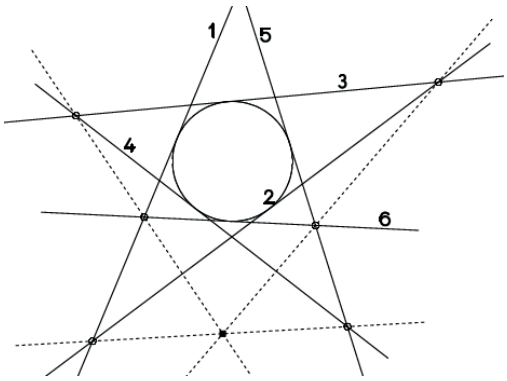
Dabei können auch zwei Punkte in einen zusammenfallen; die Verbindungsgerade zusammenfallender Punkt ist dann die Tangente in diesem Punkt.

Satz von BRIANCHON: Für ein Sechsseit, bestehend aus 6 Tangenten eines Kegelschnitts, gilt:

Die Verbindungsgeraden von gegenüberliegenden Ecken $\overline{1{\cdot}2\ 4{\cdot}5}$, $\overline{2{\cdot}3\ 5{\cdot}6}$, $\overline{3{\cdot}4\ 6{\cdot}1}$ gehen durch einen Punkt, den BRIANCHON'schen Punkt dieses Sechsseits.

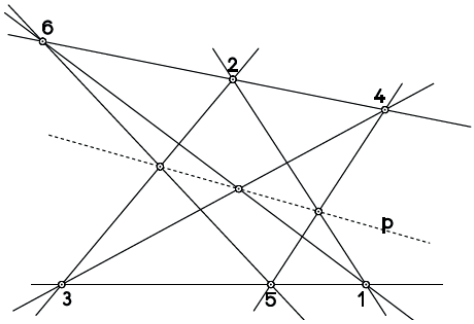
Dabei können auch zwei Tangenten in eine zusammenfallen; der Schnittpunkt zusammenfallender Tangenten ist dann der Berührpunkt dieser Tangenten.



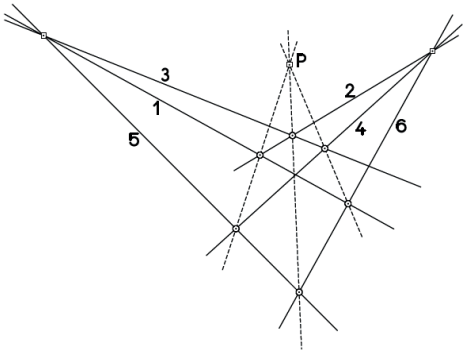


Wenn die 6 Punkte (Tangenten) nicht einem Kegelschnitt angehören, sondern abwechselnd in 2 Geraden liegen (durch 2 Punkte gehen) gelten ähnliche Sätze. Man sagt, dass die Kegelschnitte dann zerfallen.

Satz von PAPPOS: Liegen die sechs Ecken 123456 eines einfachen Sechsecks abwechselnd in zwei Geraden, so liegen die Schnittpunkte von einander gegenüberliegenden Seiten $\overline{12} \cdot \overline{45}$, $\overline{23} \cdot \overline{56}$, $\overline{34} \cdot \overline{61}$ in <u>einer</u> Geraden.



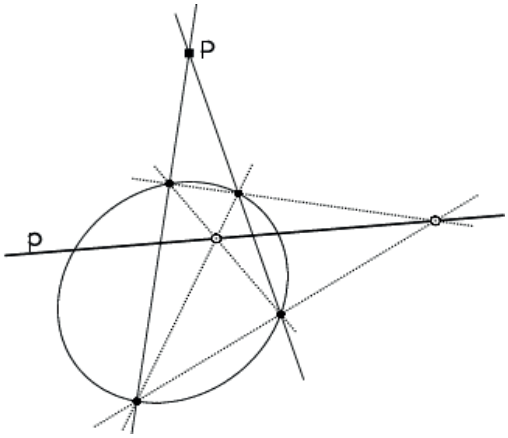
Satz: Gehen die sechs Seiten 123456 eines einfachen Sechsseits abwechselnd durch zwei Punkte, so gehen die Verbindungsgeraden von einander gegenüberliegenden Ecken $\overline{1{\cdot}2\ 4{\cdot}5}$, $\overline{2{\cdot}3\ 5{\cdot}6}$, $\overline{3{\cdot}4\ 6{\cdot}1}$ durch <u>einen</u> Punkt.



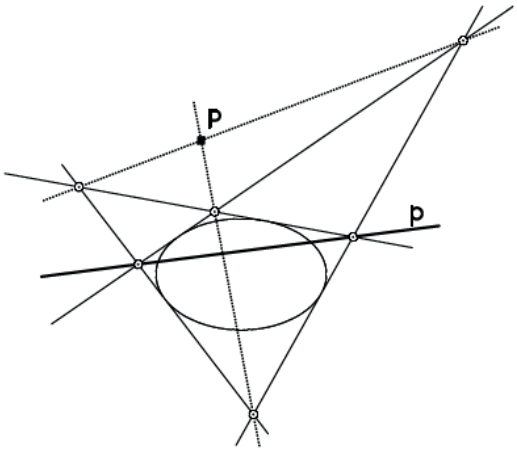
Pol und Polare

[S. 96]

Definition: Zwei beliebige Sekanten eines Kegelschnitts k durch einen gegebenen Punkt P schneiden denselben in den vier Ecken eines vollständigen Vierecks mit P als Nebenecke. Die der Nebenecke P gegenüberliegende Nebenseite p ist die „Polare“ des Punktes P bezüglich k.



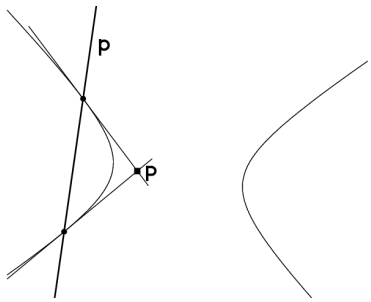
Definition: Zwei beliebige Punkte einer gegebenen Geraden p entsenden an einen Kegelschnitt k vier Tangenten als die Seiten eines vollständigen Vierseits mit p als Nebenseite. Die der Nebenseite p gegenüberliegende Nebenecke P ist der „Pol“ der Geraden p bezüglich k.



Oft verwendet man auch die folgenden vereinfachten Definitionen:

Gegeben sei ein Kegelschnitt k und ein Punkt P außerhalb von k. Die „Polare“ p zu P ist dann die Gerade durch die Berührpunkte der Tangenten, die man von P aus an k anlegen kann.

Wenn der gegebene Pol innerhalb des Kegelschnitts liegt, kann man zwei beliebige Geraden q und r durch P legen; die Verbindungsgerade von deren Polen Q,R ist dann die Polare p von P.



Gegeben sei ein Kegelschnitt k und eine Sekante p von k. Der „Pol“ P zu p ist dann der Schnittpunkt der Tangenten, die man in den Schnittpunkten von k und p an k anlegen kann.

Wenn die gegebene Polare eine Passante des Kegelschnitts ist, kann man zwei beliebige Punkte Q, R auf p wählen; der Schnittpunkt von deren Polaren q, r ist dann die Pol von p.

Hauptsatz der Polarentheorie: [S. 99]

Dreht sich eine Gerade q um einen festen Punkt P, dann wandert der Pol Q von q längs der Polaren von P.

Bewegt sich ein Punkt Q längs einer festen Geraden p, dann dreht sich die Polare q von Q um den Pol P von p.

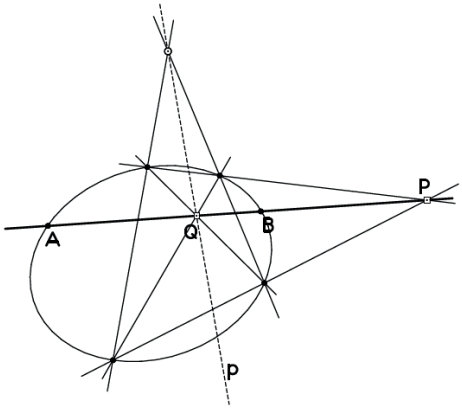
2. Formulierung des Hauptsatzes der Polarentheorie [S. 100]

Wenn ein Punkt P in einer Geraden q liegt, dann liegt der Pol Q von q in der Polaren p von P.

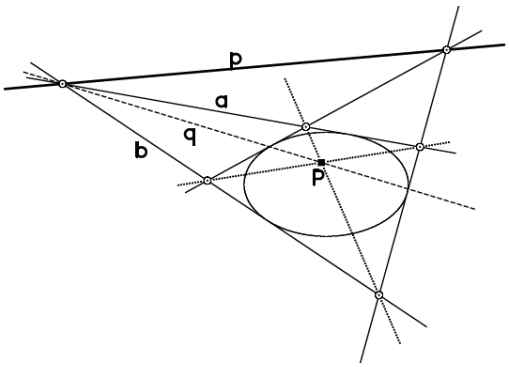
Wenn eine Gerade q durch einen Punkt P geht, dann geht die Polare p von P durch den Pol Q von p.

Harmonische Lage [S. 100]

In einer Sekante durch einen Pol liegen die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt einerseits und Pol und Polare andererseits harmonisch zueinander: (A,B) harmonisch zu (P,Q).



In einem Punkt in einer Polare liegen die Tangenten des Kegelschnitts einerseits und Polare und Pol andererseits harmonisch zueinander: (a,b) harmonisch zu (p,q).



Die Pol-Polaren-Relation bildet ein wichtiges Beispiel für eine Korrelation κ, d.h. eine projektive und damit auch inzidenztreue Abbildung, die jedem Punkt eine Gerade und jeder Geraden einen Punkt zuordnet. Wenn der Punkt P und die Gerade g inzidieren, dann inzidieren auch die Gerade κ(P) und der Punkt κ(g).

Eine Korrelation im Raum ordnet jedem Punkt eine Ebene und jeder Ebene einen Punkt zu, außerdem jeder Geraden wieder eine Gerade.

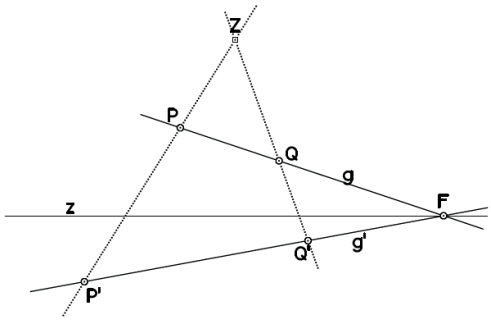
Zentralkollineationen [S. 191]

Def.: Eine Zentralkollineation (ZK) ist eine geradentreue und inzidenztreue Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich, für die es eine Fixpunktgerade oder Achse z (im Raum: eine Fixpunktebene) und einen Fixgeradenpunkt oder Zentrum Z gibt.

Eine ZK ist festgelegt durch die Angabe von Zentrum Z und Achse z sowie ein Paar zugeordneter Punkte P, P' (wobei P' in $\overline{ZP}$ liegen muss) bzw. durch Z und z und ein Paar zugeordneter Geraden g, g' (wobei g' durch z·g gehen muss).

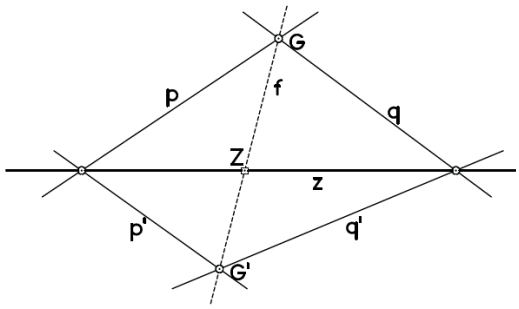
Grundkonstruktionen

Gegeben seien Z und z, sowie das Paar (P,P'). Gesucht ist das Bild Q' des gegebenen Punktes Q .



$g = \overline{PQ}$ hat den Fixpunkt $F = \overline{PQ} \cdot z$
$g' = \overline{FP'}$ und $Q' = \overline{ZQ} \cdot g'$

Gegeben seien Z und z, sowie das Paar (p,p'). Gesucht ist das Bild q' der gegebenen Gerade q.



G = p·q hat die Fixgerade $f = \overline{(p \cdot q)Z}$
G' = f·p' und $q' = \overline{(z \cdot q)G'}$

Flucht- und Verschwindungsgerade

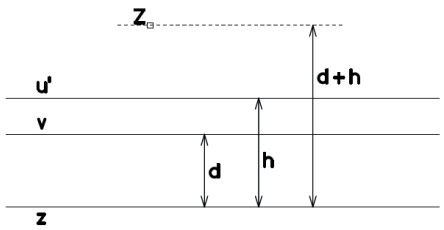
Die Bilder von Fernpunkten heißen Fluchtpunkte; das Bild der Ferngerade ist die Fluchtgerade, bezeichnet mit u'.

Die Urbilder von Fernpunkten heißen Verschwindungspunkte; das Urbild der Ferngerade ist die Verschwindungsgerade, bezeichnet mit v.

Fluchtgerade und Verschwindungsgerade sind parallel zur Achse z.

Der (mit Vorzeichen versehene) Abstand von z zu u' ist die Höhe h, diejenige von z zu v die Distanz d.
Die Summe d + h ist der (mit Vorzeichen versehene) Abstand von z zum Zentrum Z.

Eine ZK ist festgelegt durch z und Z sowie v oder u'.



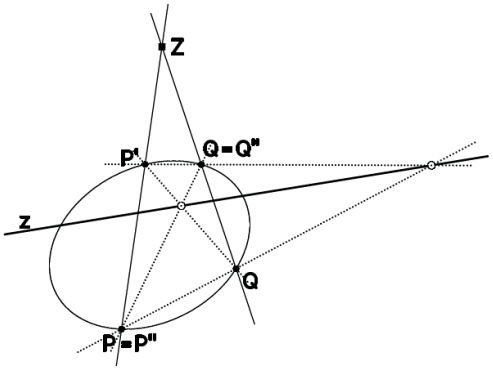
Involutorische Zentralkollineationen [S. 207]

Eine ZK α ist involutorisch, wenn $\alpha \circ \alpha$ = Id (Identität) bzw. wenn $\alpha^{-1} = \alpha$ (die zweimalige Ausführung führt auf den Ausgang zurück).

Notwendig und hinreichend dafür, dass eine ZK involutorisch ist, ist: u' = v.

Für eine involutorische ZK liegen Punkt und Bildpunkt harmonisch bezüglich Z und z.

Ein Kegelschnitt wird genau dann auf sich abgebildet, wenn die ZK involutorisch ist und wenn Z und z Pol und Polare für den Kegelschnitt sind.



Sonderfälle [S. 211]

Die meisten elementaren Konstruktionen sind Sonderfälle von Zentralkollineationen.

(Schiefe) Achsenspiegelung:	involutorische ZK, z ist endlich, Z ist Fernpunkt.
Gerade Achsenspiegelung:	zusätzlich gilt: Z ist Fernpunkt in Richtung $\perp$ z.
Punktspiegelung:	involutorische ZK, z ist Ferngerade, Z ist endlich.
Zentrische Streckung	nicht-involutorische ZK, z ist Ferngerade, Z ist endlich.
Translation:	nicht-involutorische ZK, z ist Ferngerade, Z ist Fernpunkt.
Scherung:	nicht-involutorische ZK, z ist endlich, Z ist Fernpunkt von z.
(Schiefe) Achsenaffinität:	nicht notwendig involutorische ZK, z ist endlich, Z ist Fernpunkt.
Gerade Achsenaffinität:	zusätzlich gilt: Z ist Fernpunkt in Richtung $\perp$z.

Abbildungsgleichungen der Zentralkollineation in kartesischen Koordinaten [S. 205]

Für die Zentralkollineation
- mit der x-Achse als Achse z … $y = 0$,
- mit dem Zentrum $Z(\alpha|d+h)$,
- mit der Verschwindungsgerade v … $y = d$,
- mit der Fluchtgerade u' ... $y = h$

gelten die Abbildungsgleichungen

1) der Abbildung $P(x|y) \to P'(x'|y')$:

$$x' = \frac{-dx+\alpha y}{y-d}$$

$$y' = \frac{hy}{y-d}$$

2) der Umkehrungsabbild. $P'(x'|y') \to P(x|y)$:

$$x = \frac{-hx'+\alpha y'}{y'-h}$$

$$y = \frac{dy'}{y'-h}$$

Für die Zentralkollineation
- mit der y-Achse als Achse z … $x = 0$,
- mit dem Zentrum $Z(d+h|\beta)$,
- mit der Verschwindungsgerade v ... $x = d$,
- mit der Fluchtgerade u' ... $x = h$

gelten die Abbildungsgleichungen

1) der Abbildung $P(x|y) \to P'(x'|y')$

$$x' = \frac{hx}{x-d}$$

$$y' = \frac{\beta x-dy}{x-d}$$

2) der Umkehrungsabbild. $P'(x'|y') \to P(x|y)$:

$$x = \frac{dx'}{x'-h}$$

$$y = \frac{\beta x'-hy'}{x'-h}$$

Zentralkollineationen im 3-dimensionalen Raum [S. 219]

Eine Zentralkollineation (ZK) ist eine geradentreue und inzidenztreue Abbildung des Raumes auf sich, für die es eine Fixpunktebene ζ und einen Fixgeradenpunkt oder Zentrum Z gibt.

Eine ZK ist festgelegt durch die Angabe von Zentrum Z und Fixpunktebene ζ sowie einem Paar zugeordneter Punkte P, P' (wobei P' auf $\overline{ZP}$ liegen muss) bzw. durch Z und ζ und ein Paar zugeordneter Ebenen α, α' (wobei α' durch die Gerade $\overline{\alpha\zeta}$ gehen muss).

Ist P ein beliebiger Punkt und $P' \neq P$ sein Bildpunkt und ist Z' der Schnittpunkt der Geraden $\overline{PP'}$ mit der Fixpunktebene, so ist das Doppelverhältnis DV(P,P',Z,Z') konstant, d.h. unabhängig von P und daher eine charakteristische Größe für die vorliegende Zentralkollineation.

Axiale Kollineationen im Raum [S. 261]

Eine axiale Kollineation besitzt zwei Fixpunktgeraden, genannt die Achsen, die zueinander windschief sein müssen. Jede Gerade, die einen Punkt mit seinem Bildpunkt verbindet, trifft auch beide Fixpunktgeraden. Das Doppelverhältnis dieser Schnittpunkte einerseits und von Punkt und Bildpunkt andererseits hat einen einheitlichen Wert. Ist dieser $= -1$, ist die Kollineation involutorisch.

Die involutorischen Zentralkollineationen und die involutorischen axialen Kollineationen sind unter den 3-dimensionalen projektiven Abbildungen die einzigen Involutionen.

Analytische Projektive Geometrie in homogenen Koordinaten [S. 214, 228]

Punkt P(x|y) hat die homogenen Koordinaten $(x_0:x_1:x_2)$ mit $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ für $x_0 \neq 0$.

Es kommt nur auf das Verhältnis an: $(x_0:x_1:x_2) = (\lambda\cdot x_0 : \lambda\cdot x_1 : \lambda\cdot x_2)$ für $\lambda \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ ist der Punkt $(0:x_1:x_2)$ der Fernpunkt in der Richtung der Geraden mit $m = \frac{x_2}{x_1}$ für $x_1 \neq 0$.

$(0:0:x_2)$ der Fernpunkt der y-Achse.

(0:0:0) ist nicht zugelassen [der „Unpunkt“ oder „das Nichts“].

Darstellung von Punkten durch Vektoren

Zu Punkt $P(x_0:x_1:x_2)$: kurz P[**x**] gehört der Koordinatenvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Darstellung von Geraden durch Vektoren

Zur Geraden g mit der Koordinatengleichung $u_0\cdot x_0 + u_1\cdot x_1 + u_2\cdot x_2 = 0$ oder $\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{x} = 0$, kurz g{**u**}, gehört der Koeffizientenvektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gleichung in Parameterform: $\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ für die Gerade durch $P_1[\mathbf{p}_1]$ und $P_2[\mathbf{p}_2]$.

Im Raum beschreibt die Gleichung $\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{x} = 0$ eine Ebene mit dem gegebenen Koeffizientenvektor **u**.

Zur analytischen Lösung der elementaren geometrischen Aufgaben des Verbindens und Schneidens der Grundgebilde hat man die entsprechenden Gleichungen aufzustellen, oft auch in Parameterform, und Gleichungssysteme zu lösen.

Gleichung der Geraden durch 2 Punkte A[**a**] und B[**b**]: in Parameterform $\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{a} + \mu\cdot\mathbf{b}$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.
Durch Elimination der Parameter kann man sich daraus eine Gleichung in Koordinatenform erzeugen.
Schnittpunkte zweier Geraden mit den Gleichungen $\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{x} = 0$ und $\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{x} = 0$: man hat das Gleichungssystem zu lösen, das aus diesen beiden Gleichungen besteht.

Abbildungsgleichungen der Zentralkollineation [S. 218]

$\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -d & 0 & 1 \\ 0 & -d & \alpha \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -h & 0 & 1 \\ 0 & -h & \alpha \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ für die Achse z … $x_2 = 0$,

mit Verschwindungsgerade v … $-dx_0 + x_2 = 0$, Fluchtgerade u' … $-hx_0 + x_2 = 0$ und Zentrum $Z(1:\alpha:\beta)$, wobei $\beta = d + h$.

$\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -d & 1 & 0 \\ 0 & h & \alpha \\ 0 & \beta & -d \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -h & 1 & 0 \\ 0 & d & \alpha \\ 0 & \beta & -h \end{pmatrix}$ für die Achse z … $x_1 = 0$,

mit Verschwindungsgerade v … $-dx_0 + x_1 = 0$, Fluchtgerade u' … $-hx_0 + x_1 = 0$ und Zentrum $Z(1:\alpha:\beta)$, wobei $\alpha = d + h$.

Allgemeine Projektive Abbildungen [S. 235]

Punktabbildung P[**x**] → P[**x'**]: $\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ mit der Abbildungsmatrix **A**.

Die Geraden g (oder Ebenen ε in räumlichen Fall) werden dann kontragredient transformiert:
g (oder ε) mit der Gleichung $\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{x} = 0$ hat als Bild g' (oder ε') mit der Gleichung $\mathbf{u'}^T\cdot\mathbf{x} = 0$ mit
$\mathbf{u'} = (\mathbf{A}^{-1})^T\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T)^{-1}\cdot\mathbf{u}$;
$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ heißt die zu **A** kontragrediente Matrix.

Auf einen Faktor kommt es dabei nicht an, d.h. die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\lambda\cdot\mathbf{A}$, $\lambda \neq 0$, beschreiben dieselbe Abbildung.
$\mathbf{A}^{-P} = \lambda\cdot\mathbf{A}^{-1}$ ist für jedes $\lambda \neq 0$ eine im Sinne der projektiven Geometrie inverse Matrix, entsprechend $(\mathbf{A}^{-P})^T = (\mathbf{A}^T)^{-P}$ eine im Sinne der projektiven Geometrie kontragrediente Matrix.

Fixelemente [S. 236]

Für die Fixpunkte F[$\mathbf{x}$] einer Punktabbildung $\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ gilt $\mathbf{x'} = \lambda\cdot\mathbf{x}$ für ein $\lambda \neq 0$.

Das führt auf die Eigenwertaufgabe (EWA): $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Nicht-triviale Lösungen gibt es für solche λ, die der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ genügen. Die Lösungen heißen die Eigenwerte.

Für diese Eigenwerte hat die EWA nicht-triviale Lösungen $\mathbf{x}$, sog. Eigenvektoren. Diese sind dann die Koordinatenvektoren der Fixpunkte. Zu doppelten Eigenwerten gibt es in der Regel eine ganze Fixpunktgerade.

Zur Berechnung der Fixgeraden mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{u}$ ist die EWA $(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{o}$ zu lösen; sie hat dieselben Eigenwerte. Die Eigenvektoren sind dann die Koeffizientenvektoren der Fixgeraden. Zu doppelten Eigenwerten gibt es in der Regel einen Fixgeradenpunkt.

Gleichung von Kegelschnitten in Matrizenform [S. 244]

Allgemeine Kurve 2. Ordnung k … $k_{00}x_0^2 + k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + 2k_{01}x_0x_1 + 2k_{02}x_0x_2 + 2k_{12}x_1x_2 = 0$,

in Matrizenform: $\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$ mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, wobei also

$k_{10} = k_{01}$, $k_{20} = k_{02}$, $k_{21} = k_{12}$.

$\mathbf{A}$ ist regulär für nicht-zerfallende Kegelschnitte, singulär für zerfallende Kegelschnitte, und zwar zerfällt der Kegelschnitt in ein Paar von <u>zwei</u> verschiedenen Geraden, wenn der Rang von $\mathbf{A} = 2$ ist, in <u>eine</u> (doppelt zu zählende) Gerade, wenn Rang von $\mathbf{A} = 1$ ist.

Matrix des Bildkegelschnittes

Für eine beliebige Punktabbildung $\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ hat dann das Bild eines durch $\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$ gegebenen Kegelschnitts k, also k', die Gleichung $\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{K'}\cdot\mathbf{x} = 0$, wobei $\mathbf{K'} = (\mathbf{A}^{-1})^T\cdot\mathbf{K}\cdot(\mathbf{A}^{-1})$ oder $\mathbf{K'} = (\mathbf{A}^{-P})^T\cdot\mathbf{K}\cdot(\mathbf{A}^{-P})$.

Gleichung von Tangente und Polare [S. 246]

Für einen Kegelschnitt mit der Gleichung $\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$

hat die Polare p zu einem gegebenen Punkt P mit dem Koordinatenvektor $\mathbf{p}$ – kurz zu P[$\mathbf{p}$] – die Gleichung $(\mathbf{K}\cdot\mathbf{p})\cdot\mathbf{x} = 0$.
Also: Zu Punkt P[$\mathbf{p}$] gehört die Polare q{$\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}$}.

Falls P auf dem Kegelschnitt liegt ist seine Polare die Tangente in P,

hat der Pol P zu einer gegebenen Gerade q mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{q}$ – kurz q{$\mathbf{q}$} – den Koordinatenvektor $\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{q}$.
Also: Zur Polare q{$\mathbf{q}$} gehört der Pol P[$\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{q}$].

Falls q Tangente an den Kegelschnitt ist, ist ihr Pol der Berührpunkt von q.

Freie Geometrie ebener Kurven [S. 268]

Zur Erinnerung: Ein Linienelement ist ein Punkt P einer Kurve samt der Tangente t in diesem Punkt. Es wird bezeichnet mit $P * t$.

Reguläre / (lokal) singuläre Linienelemente [S. 273]

Man betrachte ein Linienelement, welches die Kurve durchläuft und dabei das zu untersuchende Element passiert und achte auf die Umkehr der Bewegungsrichtung von Punkt und Tangente.

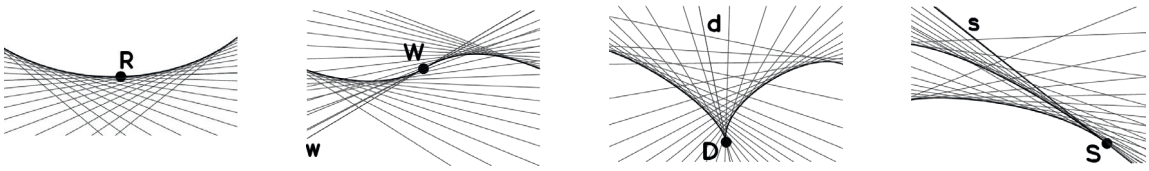
Regulär: Keine Umkehrung von Punkt- und Tangentenbewegung

Wendestelle: Umkehrung der Tangentenbewegung, keine Umkehrung der Punktbewegung.

Dornspitze: Umkehrung der Punktbewegung, keine Umkehrung der Tangentenbewegung.

Schnabelspitze: Umkehrung sowohl der Punkt- als auch der Tangentenbewegung.

Reguläres Element: Wendestelle: Dornspitze: Schnabelspitze:



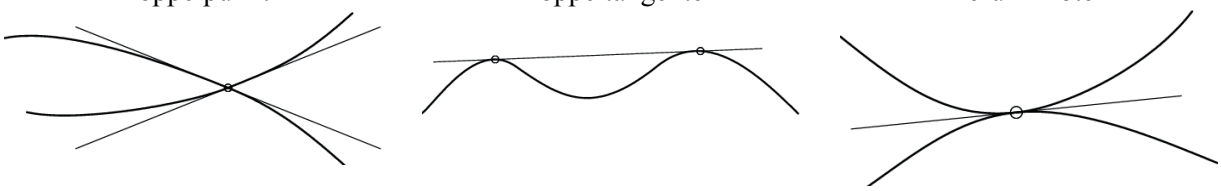
Globale Singularitäten

Doppelpunkte, Dreifachpunkte, …ein Punkt der Kurve wird mehrfach passiert.

Doppeltangenten, Dreifachtangenten,…: Eine Gerade berührt die Kurve an mehreren Stellen.

Berührknoten: Ein Doppelpunkt mit gemeinsamer Tangente der beiden Zweige.

Doppelpunkt Doppeltangente Berührknoten



Gliederung [S. 290]

Die Kurve gliedert zusammen mit den Wendetangenten und den Schnabelspitztangenten die Punkte der Ebene in Gebiete; innerhalb eines Gebietes senden deren Punkte eine charakteristische Anzahl von Tangenten an die Kurve. Beim Überschreiten der Grenzen ändert sich die Charakteristik um ±2 (oder allgemeiner um gerade Zahlen, wenn die Grenzen mehrfach zu zählen sind).

Ordnung und Klasse

Alle Gebietscharakteristiken einer Kurve sind von der gleichen Parität (gerade oder ungerade).

Die Ordnung einer Kurve ist die maximale Anzahl von Schnittpunkten mit einer Geraden.

Die Klasse einer Kurve ist die maximale Anzahl von Tangenten, die von einem Punkt aus an die Kurve gehen; das ist die maximale Gebietscharakteristik.

Form und Gegenform [S. 290]

Dual zueinander sind Wendetangente und Dornspitze, Doppelpunkt und Doppeltangente. Reguläre Elemente und Schnabelspitze sind dual zu sich selbst, ebenso der Berührknoten.