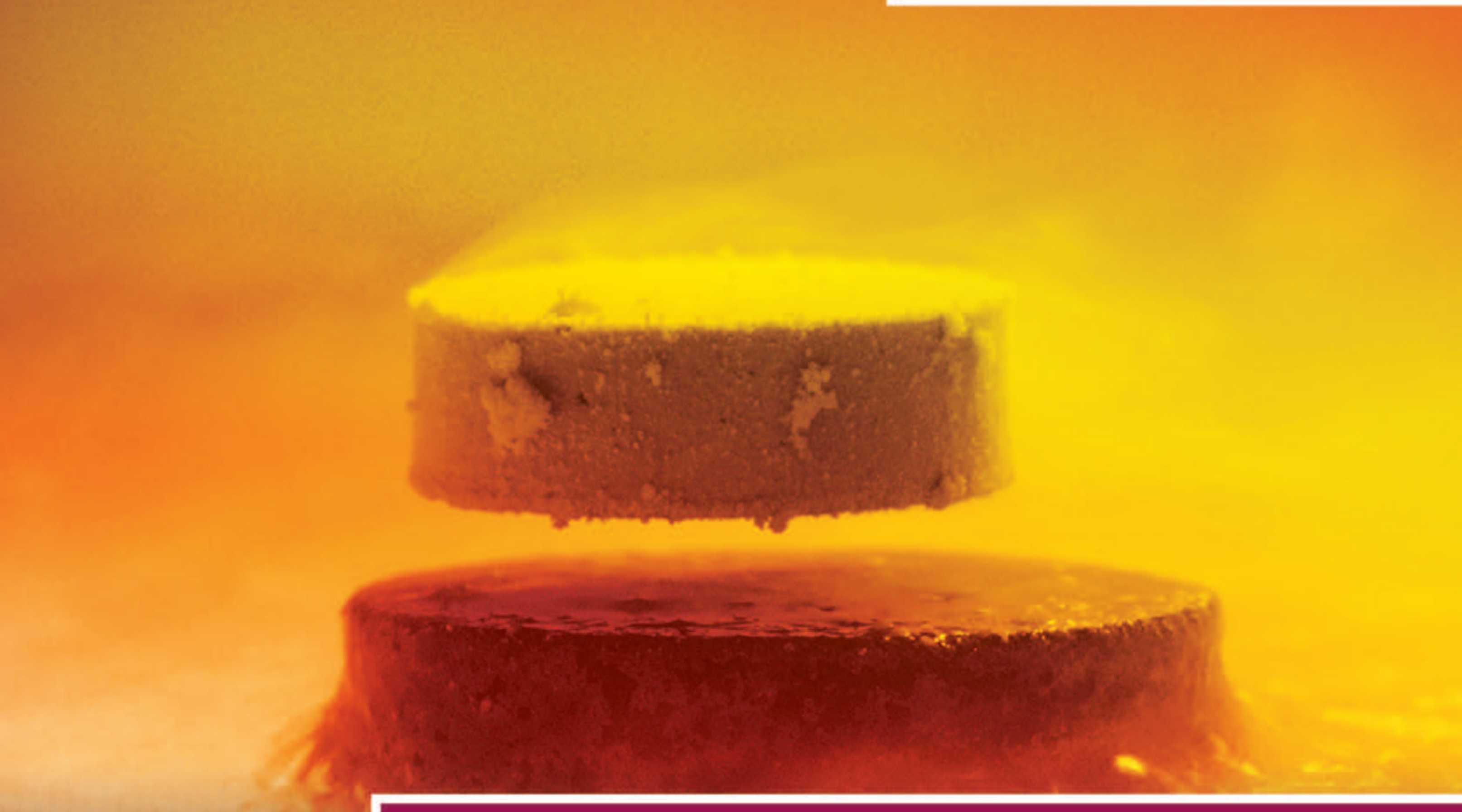
- Mit über 3.000 Aufgaben
- Ausführliche Lösungswege im Internet zum Download



Physik

Lehr- und Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Douglas C. Giancoli

WWW.PEARSON-STUDIUM.DE CWS COMPANION WEBSITE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Physik

3., erweiterte Auflage

Douglas C. Giancoli

Physik

Lehr- und Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Aus dem Amerikanischen von Micaela Krieger-Hauwede,
Karen Lippert, Ulrike Pahlkötter und Detlef Scholz

Bearbeiter der deutschen Ausgabe
Oliver Eibl, Jörg Ihringer und Ulrich Behn

PEARSON

Higher Education

München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney

a part of Pearson plc worldwide

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

10 9 8 7

20 19 18 17

ISBN 978-3-86894-023-7 (Buch)
ISBN 978-3-86326-569-4 (E-Book)

www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide
Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Übersetzung: Dipl.-Phys. Micaela Krieger-Hauwede, Leipzig (Kapitel 37–45);
Dr. Karen Lippert, Leipzig (Kapitel 22–36);
Dipl.-Übers. Ulrike Pahlkötter, Hilter (Kapitel 2–14);
Dipl.-Phys. Detlef Scholz, München (Kapitel 1, 15–21)
Fachlektorat: Prof. Dr. Oliver Eibl (Institut für Angewandte Physik, Universität Tübingen);
Prof. Dr. Jörg Ihringer (Institut für Angewandte Physik, Universität Tübingen);
Prof. Dr. Ulrich Behn (Institut für Theoretische Physik, Universität Leipzig)

Korrektorat: Martin Asbach, München
Einbandgestaltung: adesso 21, Thomas Arlt, München
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Allgemeiner Ansatz

Dieses Buch bietet eine detaillierte Darstellung der physikalischen Zusammenhänge. Im Gegensatz zur üblichen trockenen, dogmatischen Herangehensweise, bei der Themen zunächst formal und abstrakt behandelt werden und der Stoff erst später in Beziehung zu den eigenen Erfahrungen des Lesers gesetzt wird, basiert die Herangehensweise in diesem Buch auf der Erkenntnis, dass die Physik eine Beschreibung der Realität ist. Daher stehen am Beginn der Behandlung eines jeden Themas konkrete Beobachtungen und Erfahrungen, zu denen der Leser einen direkten Bezug herstellen kann. Dann gehen wir weiter zu den Verallgemeinerungen und einer formaleren Behandlung des Themas. Das macht den Stoff nicht nur interessanter und leichter verständlich, sondern es kommt der Art und Weise, wie die Physik tatsächlich praktiziert wird, näher.

Dieses Lehrbuch zielt darauf ab, die Physik lesbar und interessant sowie verständlich und klar zu erklären. Die Studenten sollen unterrichtet werden, indem man ihre Bedürfnisse und Schwierigkeiten vorhersieht, ohne zu stark zu vereinfachen. Physik umgibt uns ständig. Ziel dieses Buches ist es folglich, Studenten dabei zu helfen, „die Welt mit den Augen der Physik zu sehen".

Das Buch enhält ein breites Spektrum an Beispielen und Anwendungen aus der Technologie, Technik, Architektur, den Geowissenschaften, der Umwelt, Biologie, Medizin und dem Alltagsleben. Einige Anwendungen dienen lediglich als Beispiele, die physikalische Gesetze illustrieren. Andere werden ausführlich behandelt. Aber die Anwendungen dominieren den Text nicht – dies ist schließlich ein Lehrbuch für Physik. Sie sind sorgfältig ausgesucht und in den Text integriert worden, damit sie die Entwicklung der physikalischen Themen nicht stören, sondern sie erläutern. Sie finden hier keine Zusatzinformationen. Die Anwendungen sind direkt in die physikalischen Zusammenhänge integriert. Damit man die Anwendungen leicht erkennen kann, wurde ein Randvermerk *Angewandte Physik* eingeführt.

Es wird vorausgesetzt, dass die Studenten bereits mit der Integralrechnung vertraut sind. Die Integralrechnung wird jedoch zu Beginn sehr behutsam behandelt, damit die Studenten nicht überfordert werden. Im Text werden durchgehend SI-Einheiten (SI = *Système International*) verwendet. Auf signifikante Stellen muss besonders geachtet werden. Wenn ein bestimmter Wert, z. B. 3, mit seinen Einheiten angegeben ist, meinen wir 3, nicht 3,0 oder 3,00. Wenn wir 3,00 meinen, schreiben wir 3,00. Das ist insbesondere bei Aufgaben wichtig, damit die Studenten sich der Ungenauigkeit eines Messwertes bewusst sind und die Genauigkeit eines numerischen Ergebnisses nicht überschätzen.

Dieses Physikbuch beginnt nicht mit einem Kapitel über Mathematik; stattdessen sind viele mathematische Werkzeuge, wie z. B. Addition und Multiplikation von Vektoren, dort direkt in den Text eingefügt, wo sie zum ersten Mal angewendet werden. Außerdem enthält der Anhang eine Übersicht über viele mathematische Themen, wie z. B. trigonometrische Gleichungen, Integrale und die binomischen (und andere) Reihen. Ein Thema für Fortgeschrittene befindet sich ebenfalls im Anhang: Integrieren zur Bestimmung der auf die Massenverteilung einer Kugel zurückzuführenden Gravitationskraft.

Es ist notwendig, genau und ausführlich vorzugehen, insbesondere bei der Herleitung eines wichtigen Ergebnisses. Wir haben uns bemüht, alle Schritte bei einer Herleitung einzubeziehen und deutlich zu machen, welche Gleichungen allgemeingültig sind und welche nicht. Die Einschränkungen wichtiger Gleichungen sind in Klammern direkt neben der Gleichung angegeben, z. B.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \,. \quad \text{(konstante Beschleunigung)}$$

Die ausführlichere Einführung der Newton'schen Axiome und ihrer Anwendung ist von entscheidender didaktischer Bedeutung. Die zahlreichen ausgearbeiteten Beispiele sind anfangs recht einfach und beinhalten eine genaue, schrittweise Analyse der Vorgehensweise bei der Lösung von Aufgaben aus dem Gebiet der Dynamik. Bei jedem folgenden Beispiel wird ein neuer Aspekt oder eine Änderung hinzugefügt und so eine größere Komplexität erreicht. Wir hoffen, dass dieses Vorgehen auch weniger gut vorbereiteten Studenten die Möglichkeit eröffnet, die Fertigkeiten für die richtige Anwendung der Newton'schen Axiome zu erwerben. Wenn Studenten diese entscheidende Hürde nicht überwinden, bleibt die restliche Physik unter Umständen unerreichbar.

Struktur

Im Allgemeinen behält dieses Lehrbuch die traditionelle Reihenfolge der Themen bei: Mechanik (Kapitel 1 bis 12), Fluide, Schwingungen, Wellen und Schall (Kapitel 13 bis 16), Kinetik und Thermodynamik (Kapitel 17 bis 20). Der Text wird mit Elektrizität und Magnetismus (Kapitel 21 bis 32), Licht (Kapitel 33 bis 36) und moderner Physik (Kapitel 37 bis 45) fortgesetzt. Es sind damit fast alle Themen, die normalerweise in Einführungskursen zur Physik behandelt werden, abgedeckt.

Die Tradition, mit der Mechanik zu beginnen, ist vernünftig, weil die Mechanik historisch als erster Themenbereich entwickelt wurde und weil so viele andere Dinge in der Physik von ihr abhängen. Innerhalb der Mechanik gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Themen in einer bestimmten Reihenfolge zu präsentieren. Dieses Buch bietet aber auch eine große Flexibilität. Wir behandeln z. B. zwar die Statik nach der Dynamik, zum Teil, weil viele Studenten Schwierigkeiten damit haben, ohne Bewegung mit Kräften zu arbeiten. Außerdem ist die Statik ein spezieller Fall der Dynamik – wir befassen uns mit der Statik, um zu verhindern, dass Gefüge dynamisch werden (zusammenfallen) – und dieses Gefühl, sich an der Grenze der Dynamik zu befinden, ist intuitiv hilfreich. Dennoch kann das Thema Statik (Kapitel 12), falls gewünscht, nach einer kurzen Einführung in die Vektoraddition auch früher, d. h. vor der Dynamik, durchgenommen werden. Eine andere Wahlmöglichkeit bietet das Thema Licht, das wir hinter Elektrizität und Magnetismus sowie elektromagnetische Wellen platziert haben. Licht könnte aber auch direkt nach den Kapiteln über Wellen (Kapitel 15 und 16) behandelt werden. Spezielle Relativität ist das Thema in Kapitel 37, könnte aber stattdessen zusammen mit der Mechanik – z. B. nach Kapitel 9 – erörtert werden.

Einige Lehrkräfte halten dieses Buch möglicherweise für zu umfangreich, weil es mehr Material enthält, als sie in ihren Kursen behandeln können. Aber der Text bietet bezüglich der Auswahl der Themen eine große Flexibilität. Es gibt viele Abschnitte mit Stoff aus Bereichen der Physik für etwas fortgeschrittenere Studenten oder Material, das normalerweise nicht in typischen Kursen behandelt wird, sowie interessante Anwendungen. Diese Abschnitte enthalten keinen Stoff, auf den in späteren Kapiteln zurückgegriffen wird. Für einen Schnellkurs können große Teile der Kapitel 11, 13, 16, 26, 30, 31 und 36 und ausgewählte Teile der Kapitel 9, 12, 19, 20, 32, 34 sowie der Kapitel über Moderne Physik weggelassen werden. Nicht in der Vorlesung behandelte Themen können eine wertvolle Quelle für spätere Studien sein. In der Tat stellt dieses Buch ein nützliches Nachschlagewerk dar, das Studenten auf Grund seines breiten Spektrums jahrelang benutzen können.

Moderne Didaktik

Die Didaktik dieses Lehrbuchs basiert auf modernen Untersuchungen darüber, wie Studenten lernen. Für die Vermittlung der anspruchsvollen Inhalte der klassischen und modernen Physik sind folgende Elemente entwickelt worden:

Beispiele zur Begriffsbildung typischerweise 1 oder 2 pro Kapitel, manchmal auch mehr, sind eine Art kurzes, sokratisches Frage- und Antwortspiel. Sie sollen den Leser durch die Frage zum Nachdenken oder Überlegen und zum Finden einer Antwort anregen – bevor er die gegebene Antwort liest. Hier einige Beispiele:

- Anwendung von Symmetrie (Kapitel 1, 44 u. a.)
- Was übt die Kraft aus, die ein Auto in Bewegung setzt? (Kapitel 4)
- Welcher Körper rollt eine schiefe Ebene schneller hinunter? (Kapitel 10)
- Dehnen sich Löcher thermisch aus? (Kapitel 17)
- Ladung im Innenraum eines Leiters (Kapitel 22)
- Überlastung eines Motors (Kapitel 29)
- Wie groß muss ein Vollspiegel sein? (Kapitel 33)

Abschätzungsbeispiele ca. 10% aller Beispiele, sollen die Fähigkeit fördern, Abschätzungen bezüglich der Größenordnung vorzunehmen, selbst wenn die Angaben nur spärlich sind und man sich nicht hat vorstellen können, dass überhaupt ein Ergebnis möglich ist.

Problemlösungskästen sind in den ersten Kapiteln konzentrierter zu finden, kommen aber im ganzen Buch vor. Jeder von ihnen gibt einen Überblick über ein schrittweises Vorgehen bei der Lösung von Problemen im Allgemeinen und/oder speziell für das behandelte Thema. Die leistungsstarken Studenten mögen diese Kästen unnötig halten (sie können sie überspringen), aber viele Studenten werden es hilfreich finden, an die allgemeine Herangehensweise und an Schritte erinnert zu werden, die sie zum Einstieg in die Problemlösung ergreifen können. Außerdem sollen diese Kästen helfen, Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten aufzubauen. So ist z. B. der allgemeine Problemlösungskasten in Abschnitt 4.8 an einer Stelle platziert, nachdem die Studenten schon einige Erfahrung mit der Bearbeitung von Aufgaben haben, so dass sie in starkem Maße motiviert sind, den Kasten mit großer Aufmerksamkeit durchzulesen.

Beispiele Dieses Lehrbuch enthält viele durchgerechnete Beispiele, die alle mit Überschriften versehen sind, um das Interesse zu wecken und sich leicht auf ein bestimmtes Beispiel beziehen zu können. Es gibt sogar zwei besondere Kategorien von Beispielen: Beispiele zur Begriffsbildung und Abschätzungen, wie oben beschrieben, sowie normale Beispiele, die als Übungsaufgaben dienen. Der Hauptgedanke ist, „mit den Studenten laut zu denken“ und sie so dazu zu bringen, ein Verständnis für die Aufgaben zu entwickeln. Die Anzahl der durchgerechneten Beispielen ist in den ersten Kapiteln wesentlich höher als in späteren. Dort ist Übung zur Entwicklung von Fertigkeiten und einer Vielzahl von Herangehensweisen besonders wichtig. Das Niveau der durchgerechneten Beispiele steigt für die meisten Themen allmählich an. Dabei haben die schwierigeren Beispiele denselben Schwierigkeitsgrad wie die schwierigsten Aufgaben am Ende jedes Kapitels, so dass die Studenten lernen können, wie man an komplexe Aufgaben herangeht. Viele Beispiele zeigen wichtige Anwendungen für die Technik, andere verwandte Bereiche sowie für den Alltag auf.

Aufgaben Jedes Kapitel enthält eine große Anzahl von Aufgaben, die nach Abschnitten und nach Schwierigkeitsgrad unterteilt sind: Aufgaben des Schwierigkeitsgrades I sind einfach und sollen den Studenten Sicherheit geben. Aufgaben der Stufe II sind „normale“ Aufgaben, die eine größere Herausforderung darstellen und häufig die Kombination zweier verschiedener Begriffe beinhalten. Stufe III umfasst die kompliziertesten Aufgaben, in denen typischerweise verschiedene Probleme kombiniert sind. Dieser Schwierigkeitsgrad stellt auch für leistungsstarke Studenten eine Herausforderung dar. Die Unterteilung nach Abschnitten bedeutet lediglich, dass sich diese Aufgaben auf die bis zu und in dem jeweiligen

Abschnitt behandelten Themen beziehen; auch zuvor behandelte Punkte können einbezogen werden. Lösungen zu den Aufgaben mit ungerader Nummerierung finden sich in Anhang E. Den kompletten Lösungsweg zu den Aufgaben finden Sie auf der zum Buch gehörenden Webseite. Siehe Punkt Zusatzmaterialien im Web.

Allgemeine Aufgaben Ungefähr 70% der Aufgaben sind nach Schwierigkeitsgrad (I, II, III) unterteilt und abschnittweise angeordnet. Am Schluss jedes Kapitels folgen noch allgemeine Aufgaben, die nicht unterteilt sind. Durchschnittlich hat jedes Kapitel ca. 90 Aufgaben. Im Anhang des Buches sind die Antworten für die Aufgaben mit ungerader Nummerierung aufgeführt.

Anwendungen Wichtige Anwendungen aus Alltagsleben, Technik und anderen Bereichen wie z. B. der Geologie und der Medizin, fördern die Motivation der Studenten und bieten der Lehrkraft die Möglichkeit, die Relevanz der Physik aufzuzeigen. Anwendungsbeispiele sind eine gute Antwort auf die Frage „Warum Physik studieren?".

Randvermerke Kurze Anmerkungen sind auf nahezu jeder Seite an den Rand gedruckt. Es gibt vier Arten: (a) normale Anmerkungen (die Mehrzahl), die als eine Art Übersicht über den Text dienen und Ihnen dabei helfen sollen, später wichtige Begriffe und Gleichungen wiederzufinden; (b) Anmerkungen, die sich auf die bedeutenden Gesetze und Prinzipien der Physik beziehen und zur Hervorhebung in Großbuchstaben gedruckt sind; (c) Anmerkungen, die sich auf einen Hinweis oder ein Verfahren zur Problemlösung beziehen, der bzw. das im Text behandelt wird – diese Anmerkungen haben den Titel „Problemlösung"; (d) Anmerkungen, die sich auf eine physikalische Anwendung im Text oder in einem Beispiel beziehen und als „Angewandte Physik" bezeichnet werden.

T

Verweise auf Tutorien zur Physik In vielen Kapiteln dieses Lehrbuches finden sich Verweise auf die bei uns im Verlag erschienenen *Tutorien zur Physik* von McDermott und Shaffer ISBN 978-38273-7322-9. Die Tutorien sind eine Sammlung von Arbeitsblättern, die als Ergänzung zu Lehrbuch, Vorlesung und Übungen gedacht sind und eine aktive Auseinandersetzung der Studierenden mit den grundlegenden Begriffen der Physik fördern. Sie basieren auf den Ergebnissen von Forschungsarbeiten zum qualitativen Verständnis der Physik, die seit etwa drei Jahrzehnten von der *Physics Education Group* an der *University of Washington* durchgeführt und an berühmten Universitäten wie Harvard eingesetzt werden. Da diese bewusst keine Lösungen enthalten, sollten die *Tutorien* im Rahmen einer Lehrveranstaltung von den Studierenden in Kleingruppen und unter Anleitung erfahrener Tutoren bearbeitet werden. Auch die Bearbeitung in informellen Lerngruppen ist ein idealer Weg. Wichtig ist jedoch in jedem Fall eine intensive Beschäftigung mit den Materialien, die über ein bloßes Lesen des Textes deutlich hinausgeht. Probeabschnitte finden Sie auf der CWS.

Anhänge Die Anhänge enthalten nützliche mathematische Formeln (wie z. B. Ableitungen und Integrale, trigonometrische Gleichungen, Flächen und Volumen, Erweiterungen) und eine Isotopentabelle mit Atommassen und anderen Angaben. Tabellen mit nützlichen Angaben befinden sich auch auf den Innenseiten des Bucheinbands.

Farbcode Dieses Buch ist durchgängig vierfarbig gedruckt – aber nicht nur, um es attraktiver zu machen. Die Farbe wird vor allem in den Abbildungen benutzt, damit sie für unsere Analyse deutlicher dargestellt werden und ein leichteres Lernen der jeweiligen physikalischen Prinzipien ermöglicht wird. Die nachfolgende Liste fasst die Verwendungsweise der Farben in den Abbildungen zusammen und zeigt, welche Farben für die verschiedenen Arten von Vektoren, für Feldlinien und für andere Symbole und Körper verwendet werden. Diese Farben werden durchgängig im ganzen Buch verwendet.

FARBCODE

Vektoren

Allgemeine Vektoren

Resultierende Vektoren (Vektoraddition)

Komponenten von Vektoren

Weg (**s**)

Geschwindigkeit (**v**)

Beschleunigung (**a**)

Kraft (**F**)

Kraft auf einen zweiten oder

dritten Körper in der gleichen Abbildung

Impuls (**p** oder $m\mathbf{v}$)

Drehimpuls (**L**)

Winkelgeschwindigkeit ($\boldsymbol{\omega}$)

Drehmoment (**M**)

Elektrisches Feld (**E**)

Magnetisches Feld (**B**)

Elektrizität und Magnetismus

Elektrische Feldlinien

Äquipotentiallinien

Magnetische Feldlinien

Elektrische Ladung (+) + oder +

Elektrische Ladung (–) – oder –

Stromkreis

Draht

Widerstand

Kondensator

Induktionsspule

Batterie

Optik

Lichtstrahlen

Objekt

Reales Bild

Virtuelles Bild

Sonstige

Energieniveau

Messlinien ⟵1,0 m⟶

Weg eines Körpers in Bewegung

Richtung einer Bewegung oder eines Stroms

Zusatzmaterialien im Web

Zu diesem Buch gibt es eine Companion Website. Unter *www.pearson-studium.de* finden Dozenten die Abbildungen und Tabellen aus dem Buch elektronisch zum Herunterladen. Ferner können sich die Leser hier über die kompletten Lösungen zu den gekennzeichneten Übungsaufgaben informieren und weitere Aufgaben zur Überprüfung ihres Lernerfolgs bearbeiten.

kompletter Lösungsweg

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Vor Ihnen liegt die erweiterte deutsche Ausgabe von Giancolis „Physics for scientists and engineers“, eine in sich geschlossene Einführung in die Physik, die auf anschauliche und verständliche Beschreibung großen Wert legt. Die englische Originalausgabe hat Beiträge von insgesamt 60 Dozenten in einem Buch zusammengefasst, woraus sich Kompetenz in der Darstellung bei großer inhaltlicher Breite ergibt. In den ersten Kapiteln werden mit Bildern von Menschen, Gegenständen und Abläufen, die dem Leser aus dem Alltag vertraut sind, zusammen mit einfach verständlichen Textelementen physikalische Inhalte und Zusammenhänge verdeutlicht. Viele Beispiele aus dem Bereich Sport sind für die Zielgruppe des Buches passend gewählt. In einem zweiten Schritt werden diese Inhalte in Gleichungen verpackt und damit mathematisch gefasst. Diese Zweistufigkeit ist didaktisch wichtig, der Leser wird im Vergleich zu anderen Publikationen dadurch nicht sofort mit einer großen Zahl von Gleichungen konfrontiert, die auf interessierte Anfänger abschreckend wirken. Im zweiten Schritt, in dem Physik in mathematische Gleichungen verpackt wird, wird der Leser anhand von Beispielen zu Formeln geleitet. Nicht die Gleichung bzw. Formel ist zuerst da, sondern das physikalische Problem und sein Verständnis.

Durch die gewählte Darstellung verfügt das Buch über eine Durchgängigkeit für die Lehre, die vom Physikunterricht im Gymnasium, bis zum Haupt und Nebenfachstudium an Universitäten und Hochschulen reicht. Wegen seiner guten Lesbarkeit und inhaltlichen Breite wird es auch erfolgreich zur Vorbereitung für Doktorprüfungen verwendet. Es kann in unterschiedlichen Tiefen gelesen bzw. studiert werden: (i) Lesen und Verstehen des Textes, (ii) Nachvollziehen der Rechenbeispiele und Beantworten der Fragen am Ende der Kapitel, (iii) Rechnen der Aufgabe der Stufe I (iv) Rechnen aller Aufgaben. Bei der Übersetzung ins Deutsche wurde zum Teil vom englischen Original abgewichen, vor allem in der Thermodynamik ergab sich ein erhöhter Anpassungsbedarf. Die physikalischen Einheiten werden in der englischen Originalausgabe freizügiger verwendet, für eine physikalische Größe werden mehrere Einheiten verwendet. Wir haben darauf geachtet, SI-Einheiten zu verwenden und andere Einheiten, die im angelsächsischen Raum noch Verwendung finden, zu unterdrücken. Auch haben wir im Anhang zusätzliche Tabellen eingefügt, die die Symbolik und die Einheiten in übersichtlicher Weise darstellen. Bei der Übersetzung physikalischer Begriffe verwenden wir möglichst eindeutige, in Standardwerken benutzte Ausdrücke.

Überzeugend ist das Lehrbuch auch, weil es eine große Zahl an Anwendungen thematisiert, teilweise auch außerhalb der Physik und der Ingenieurwissenschaften. Es sind nicht zuletzt diese Anwendungen, die zeigen, welche direkten und weit reichenden Auswirkungen die dargestellten Inhalte der Physik haben.

Neu in dieser erweiterten Auflage ist, dass sich der komplette Lösungsweg zu den gekennzeichneten Aufgaben auf der Webseite zum Buch befindet. Das wird den Studenten im Selbststudium eine wichtige Hilfe bei der Übung und Vertiefung des Stoffes sein. Dazu eine weitere neue und hilfreiche Erweiterung sind die Verknüpfungen zu den *Tutorien der Physik*. Diese fördern über das bloße Rechnen hinaus die aktive Auseinandersetzung mit der Physik und eignen sich somit perfekt für Haupt- und Nebenfach der Physik, Begriffe und Zusammenhänge zu erkennen. Vielen Dank an dieser Stelle an den Bearbeiter und Mitentwickler der Tutorien, Herrn Christian Kautz, der diese Erweiterung hier vorgenommen hat.

Müheloses Lernen ist eine Illusion, Lernen ist jedenfalls für die meisten Studierenden (harte) Arbeit. Trotzdem hoffen wir, dass viele Leser an diesem Buch wegen seiner didaktischen Stärken und des Bezugs zu Anwendungen Freude finden werden und damit die Physik bei Schülern und Studenten an Attraktivität gewinnt.

Tübingen und Leipzig — Oliver Eibl , Jörg Ihringer, Ulrich Behn

Einführung, Messungen, Abschätzungen

1

ÜBERBLICK

In diesem Kapitel werden Sie Grundlegendes über Wissenschaft und ihre Theorien sowie über Messungen und Einheiten kennen lernen. Außerdem erfahren Sie, wie man anhand von alltäglichen Beobachtungen etwas abschätzt – beispielsweise den Erdradius. Das Foto der Erde hier wurde aus etwa 36 000 km *Entfernung aufgenommen. Nord- und Südamerika sind klar unter den Wolken zu erkennen. Die Aufnahme wurde mittels Computer nachbearbeitet.*

1. Einführung, Messungen, Abschätzungen

Physik ist die grundlegendste aller Wissenschaften. Sie handelt von dem Verhalten und der Struktur der Materie und Strahlung. Gewöhnlich unterteilt man die Physik in die Gebiete klassische Mechanik, Strömungslehre, Thermodynamik, Akustik, Optik, Elektrizität und Magnetismus – die klassische Physik. Hinzu kommt die moderne Physik mit den Bereichen Quantenmechanik, Relativitätstheorie, Atom-, Festkörper-, Kern-, Teilchen- und Astrophysik.

Die Grundlagen der Physik müssen von all jenen verstanden werden, die einen wissenschaftlichen oder technischen Beruf ergreifen wollen: Physiker, Ingenieure, Chemiker, Astronomen, Mathematiker, Geologen und Biologen. Alle Wissenschaften nutzen die Physik als fundamentale Basis, auch die Ingenieurwissenschaften. Beispielsweise müssen Ingenieure wissen, wie man sich die Gesetze der Thermodynamik zunutze macht, um eine Heizung zu entwerfen; sie müssen etwas von Optik und Elektromagnetismus verstehen, um medizinische Abbildungssysteme zu konstruieren; und sie müssen die in einem Bauwerk wirksamen Kräfte berechnen können, damit es nicht einstürzt (▶ Abbildung 1.1). In Kapitel 12 werden wir anhand eines Beispiels sehen, wie eine einfache physikalische Rechnung – oder gar auf einem Verständnis physikalischer Kräfte basierende Intuition – das Leben Hunderter Menschen gerettet hätte. Wir werden in diesem Buch anhand vieler Beispiele die Nützlichkeit der Physik in anderen Wissenschaften und im alltäglichen Leben aufzeigen.

(a)

(b)

(c)

Abbildung 1.1 (a) Dieses römische Aquädukt wurde vor 2000 Jahren gebaut und steht noch immer. (b) Ebenso die Golden Gate Bridge, gebaut 1937. (c) Eingestürztes Bürgerzentrum (Civic Center) in Hartford, zwei Jahre nach Bauende.

Das grundlegende Ziel aller Wissenschaften inklusive der Physik wird allgemein als die Suche nach Ordnung in den Beobachtungen der uns umgebenden Welt angegeben. Viele Menschen glauben, dass Wissenschaft nur aus einem mechanischen Prozess der Wissensansammlung und Theoriebildung besteht. Doch ganz so einfach ist es nicht. Wissenschaft ist eine kreative Aktivität, die in vielerlei Hinsicht anderen kreativen Aktivitäten des menschlichen Geistes ähnelt.

1.1 Das Wesen der Wissenschaft

Beobachtung

Ein wichtiger Aspekt der Wissenschaft ist die **Beobachtung** von Ereignissen, was das Ersinnen und Ausführen von Experimenten mit einschließt. Doch erfordern Beobachtung und Experiment Vorstellungskraft, da Wissenschaftler niemals alles, was sie beobachten, auch beschreiben können. Somit müssen Wissenschaftler Entscheidungen darüber treffen, was relevant ist in ihren Beobachtungen und Experimenten. Betrachten Sie zum Beispiel, wie zwei Geistesgrößen, Aristoteles (384–322 v.C.) und Galileo (1564–1642), die Bewegung entlang einer ebenen Fläche interpretierten. Aristoteles sagte, dass auf einer Fläche liegende Körper, die einen Stoß erhalten, mit der Zeit langsamer werden und schließlich ganz zur Ruhe kommen. Konsequenterweise argumentierte Aristoteles, dass der natürliche Zustand eines Körpers die Ruhe ist. Als Galileo die Fragestellung der geradlinigen Bewegung fast 2000 Jahre später wieder aufnahm, ging er von der idealisierten Annahme einer reibungsfreien Bewegung aus. Galileos Gedanke war, dass wenn Reibung ausgeschlossen werden könnte, ein Körper mit einem anfänglichen Stoß auf einer geraden Fläche sich endlos weiter bewegen würde – ohne je von allein anzuhalten. Er zog den Schluss, dass für einen Körper die Bewegung ein ebenso natürlicher Zustand ist wie die Ruhe. Durch diesen neuen Denkansatz begründete Galileo unsere moderne Bewegungstheorie (Kapitel 2, 3 und 4). Es war ein großer Sprung in seiner Vorstellungskraft. Er machte ihn rein konzeptionell, ohne tatsächlich die Reibung zu eliminieren.

Theorien

Beobachtung, umsichtige Experimente und Messungen sind eine Seite der Wissenschaft. Die andere Seite ist das Ersinnen oder Kreieren von **Theorien**, die die Beobachtungen erklären und ordnen. Theorien, das muss betont werden, werden nicht direkt aus Beobachtungen abgeleitet. Diese mögen eine Theorie inspirieren, und Theorien werden auf der Basis von Beobachtung und Experiment akzeptiert oder verworfen.

Prüfen (kann niemals erschöpfend sein)

Die großen wissenschaftlichen Theorien lassen sich als kreative Errungenschaften mit großen Werken aus Kunst und Literatur vergleichen. Doch wie unterscheidet sich Wissenschaft von anderen kreativen Tätigkeiten? Ein wichtiger Unterschied ist, dass Wissenschaft die **Prüfung** ihrer Ideen oder Theorien erfordert, um zu sehen, ob deren Vorhersagen dem Experiment standhalten.

Obgleich das Überprüfen ihrer Theorien ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal der Wissenschaft von anderen kreativen Disziplinen ist, sollte man doch nicht glauben, dass eine überprüfte Theorie schon bewiesen ist. Zunächst einmal ist kein Messinstrument perfekt, somit ist eine exakte Bestätigung unmöglich. Zweitens lässt sich eine Theorie niemals unter allen möglichen Umständen überprüfen. Folglich kann eine Theorie nicht absolut verifiziert werden. Die Wissenschaftsgeschichte zeigt uns vielmehr, dass langlebige Theorien durch neue ersetzt werden können.

1.2 Modelle, Theorien und Gesetze

Modelle

Wenn Wissenschaftler eine Ansammlung von Phänomenen verstehen wollen, machen sie häufig Gebrauch von Modellen. Im wissenschaftlichen Sinn ist ein **Modell** eine Art von Analogie oder mentalem Bild eines Phänomens in der Sprache von etwas uns Bekanntem. Ein Beispiel dafür ist das Wellenmodell des Lichts. Wir können Lichtwellen nicht so sehen wie Wasserwellen. Doch es ist sinnvoll sich

Licht als aus Wellen bestehend vorzustellen, da Experimente zeigen, dass sich Licht in vielerlei Hinsicht wie Wasserwellen verhält.

Der Zweck eines Modells ist es, uns eine näherungsweise mentale oder visuelle Vorstellung zu geben – etwas, woran wir uns orientieren können –, wenn wir nicht sehen können, was tatsächlich geschieht. Modelle vermitteln uns oft ein tieferes Verständnis: Aus der Analogie zu einem bekannten System (wie im obigen Beispiel Wasserwellen) ergeben sich neue durchführbare Experimente und Ideen, welche anderen Phänomene sonst noch auftreten können.

Vielleicht fragen Sie sich nun, was der Unterschied zwischen einer Theorie und einem Modell ist. Manchmal werden die Begriffe synonym gebraucht. Normalerweise aber ist ein Modell relativ simpel und liefert uns eine strukturelle Ähnlichkeit mit dem in Frage stehenden Phänomen. Eine **Theorie** dagegen ist breiter angelegt und detaillierter, sie versucht einen ganzen Satz von Problemen zu lösen, oftmals mit großer Präzision. Es gibt auch Fälle, in denen ein Modell weiter entwickelt und modifiziert wird und bei einer großen Anzahl von Phänomenen sehr gut mit dem Experiment übereinstimmt. Dann kann man sich darauf auch als Theorie beziehen. Ein Beispiel dafür ist die Atomtheorie der Materie, ebenso die Wellentheorie des Lichts.

Theorien (vs. Modelle)

Modelle können sehr hilfreich sein, oft führen sie zu wichtigen Theorien. Doch ist es wichtig, ein Modell oder eine Theorie nicht mit dem realen System oder den Phänomenen selbst zu verwechseln.

Wissenschaftler verleihen bestimmten prägnanten, doch allgemeinen Aussagen über das Verhalten der Materie den Titel **Gesetz** (beispielsweise dass die Energie erhalten bleibt). Manchmal nimmt die Aussage die Form einer Beziehung oder Gleichung zwischen Größen an (so wie Newtons zweites Axiom $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Gesetze

Wissenschaftliche Gesetze unterscheiden sich von politischen Gesetzen darin, dass letztere *präskriptiv* sind: Sie sagen uns, wie wir uns zu verhalten haben. Wissenschaftliche Gesetze sind *deskriptiv*: Sie sagen nicht, wie sich die Materie verhalten sollte, sondern beschreiben, wie sie sich verhält. Wie Theorien lassen sich auch Gesetze nicht unter allen möglichen Umständen überprüfen. Wir können somit nicht sicher sein, dass irgendein Gesetz absolut wahr ist. Wir benutzen den Ausdruck „Gesetz“ dann, wenn seine Gültigkeit über einen breiten Bereich an Anwendungsfällen überprüft worden ist, und wenn jegliche Begrenzungen und der Gültigkeitsbereich selber klar verstanden sind. Und selbst dann können, wenn neue Informationen verfügbar sind, bestimmte Gesetze modifiziert oder verworfen werden.

Normalerweise tun Wissenschaftler so, als wären die akzeptierten Gesetze und Theorien wahr. Doch sind sie verpflichtet ein offenes Ohr für Informationen zu haben, die die Gültigkeit eines beliebigen Gesetzes oder einer beliebigen Theorie in Frage stellen könnten.

1.3 Messungen und Messfehler; signifikante Stellen

In dem Bestreben, die uns umgebende Welt zu verstehen, suchen Wissenschaftler nach Beziehungen zwischen messbaren physikalischen Größen.

Messfehler

Genaue Messungen sind ein wichtiger Teil der Physik. Doch keine Messung ist absolut genau. Mit jeder Messung ist ein Messfehler verbunden. Messfehler entstehen aus verschiedenen Ursachen. Die wichtigsten (Falschmessungen ausgenommen) sind die begrenzte Genauigkeit jedes Messinstruments und die Schwierigkeit, eine Instrumentenskala jenseits der kleinsten Einteilung abzulesen. Wenn Sie beispielsweise die Breite eines Holzbretts mit einem Zentimetermaß bestimmen wollen (▶ Abbildung 1.2), können Sie das Resultat mit einer Genauigkeit von 1 mm angeben, die kleinste Einteilung des Maßes (die Hälfte davon wäre auch noch in Ordnung). Der Grund dafür ist die Schwierigkeit des Beobachters, zwischen den

Jede Messung hat eine bestimmte Unsicherheit

Abbildung 1.2 Messung der Breite eines Holzbretts mit dem Zentimetermaß. Die Genauigkeit beträgt ± 1 mm.

kleinsten Teilstrichen zu interpolieren. Des Weiteren wird wohl auch das Zentimetermaß selbst mit einer Präzision hergestellt sein, die nicht viel besser ist als die angegebene Ungenauigkeit[1].

Die Angabe eines Messergebnisses sollte unbedingt auch die Genauigkeit oder den **geschätzten Fehler** der Messung enthalten. Beispielsweise könnte die Breite als $8{,}8 \pm 0{,}1$ cm aufgeschrieben werden. Die $\pm 0{,}1$ cm („plus oder minus 0,1 cm“) stehen für die abgeschätzten Messfehler der Messung, so dass die tatsächliche Breite höchstwahrscheinlich zwischen 8,7 und 8,9 cm liegt. Der **relative Messfehler** in Prozent ist einfach das Verhältnis des Messfehlers zum gemessenen Wert multipliziert mit 100. Lautet das Messergebnis beispielsweise 8,8 cm und beträgt der Messfehler etwa 0,1 cm, so ist der relative Messfehler

$$\frac{0{,}1}{8{,}8} \times 100\% \approx 1\%$$

wobei $\approx$ „ungefähr gleich“ bedeutet.

Angenommene Unsicherheit

Oft wird der Messfehler eines gemessenen Wertes nicht explizit angegeben. In solchen Fällen nimmt man an, dass der Messfehler eine, zwei (oder sogar drei) Einheiten der letzten angegeben Dezimalstelle des Messwertes beträgt. Wenn beispielsweise die Länge mit 8,8 cm angegeben wurde, so kann man von einem Messfehler von 0,1 cm (oder 0,2 cm) ausgehen. In so einem Fall ist es dann wichtig, nicht etwa 8,80 cm zu schreiben. Dies würde einen Messfehler in der Größenordnung von 0,01 cm implizieren; es würde suggerieren, dass die wahre Länge höchstwahrscheinlich zwischen 8,79 und 8,81 cm liegt, während Sie eigentlich den tatsächlichen Wert zwischen 8,7 und 8,9 cm vermuten.

Signifikante Stellen

Welche Ziffern sind signifikant?

Die Anzahl der sicheren Stellen einer Zahl wird die Anzahl **signifikanter Stellen** genannt. Es gibt demzufolge vier signifikante Stellen in der Zahl 23,21 cm und zwei in der Zahl 0,062 (die Nullen sind bloße Platzhalter, die dem Dezimalkomma seinen Platz zuweisen). Die Anzahl signifikanter Stellen muss nicht immer klar bestimmt sein. Nehmen Sie beispielsweise die Zahl 80. Ist es nur eine oder sind es zwei signifikante Stellen? Sagen wir, es liegen *ungefähr* 80 km zwischen zwei Städten, so gibt es nur eine signifikante Stelle (die 8), da die Null nur ein Platzhalter ist. Sind es jedoch exakt 80 km mit einem Messfehler von 1 oder 2 km, dann hat die 80 zwei signifikante Stellen. Beträgt der Messfehler 0,1 km, so schreiben wir 80,0 km.

Bei Messungen oder Berechnungen sollten Sie der Versuchung widerstehen, mehr Stellen im Endergebnis anzugeben als gerechtfertigt sind. Beispielsweise errechnet sich die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 11,3 cm und 6,8 cm zu 76,84 cm^2. Doch dieses Ergebnis hat ganz gewiss nicht den Messfehler 0,01 cm^2, da (man macht eine Fehlerrechnung und benutzt die Messfehler der Einzelmessungen) das Resultat zwischen $11{,}2\,\text{cm} \cdot 6{,}7\,\text{cm} = 75{,}04\,\text{cm}^2$ und $11{,}4\,\text{cm} \cdot 6{,}9\,\text{cm} = 78{,}66\,\text{cm}^2$ liegen könnte. Bestenfalls können wir das Ergeb-

1 Es gibt einen technischen Unterschied zwischen einem„zufälligen Fehler“ und einem „systematischen Fehler“. Der zufällige Fehler bezieht sich auf die Wiederholbarkeit einer Messung mit einem gegebenen Messinstrument. Wenn Sie zum Beispiel die Breite eines Holzbretts mehrere Male messen und Sie erhalten die Messwerte 8,81 cm, 8,85 cm, 8,78 cm, 8,82 cm (Interpolationen zwischen den Markierungen als jeweils beste Schätzung), können Sie sagen, dass der *relative Fehler* der Messreihe etwas besser ist als 0,1 cm. Der *systematische Fehler* bezieht sich dagegen darauf, wie nah eine Messung an den wahren Wert heranreicht. Wenn beispielsweise der Zentimeterstab aus ▶ Abbildung 1.2 mit einer Fehlertoleranz von 2% hergestellt wurde, so wäre der systematische Fehler der Messung der Breite (etwa 8,8 cm) rund 2% von 8,8 cm, also ungefähr 0,2 cm. Der abgeschätzte Messfehler berücksichtigt sowohl den systematischen als auch den zufälligen Fehler.

nis mit 77 cm^2 angeben, was mit einem Fehler von etwa 1 bis 2 cm^2 einhergeht. Die anderen beiden Ziffern der Zahl 76,84 fallen weg, da sie nicht signifikant sind. Als Faustregel (d. h. bei Außerachtlassung einer detaillierten Betrachtung von Messfehlern) gilt: *Das Endergebnis einer Multiplikation oder Division sollte nur so viele Stellen haben wie die Zahl mit der kleinsten in der Rechnung vorkommenden Signifikanz*. In unserem Beispiel hat 6,8 die kleinste Signifikanz, nämlich 2. Somit müssen wir das Ergebnis 76,84 cm^2 auf 77 cm^2 aufrunden.

PROBLEMLÖSUNG

Notieren Sie im Endergebnis nur die korrekte Anzahl signifikanter Stellen. Eine oder zwei Extrastellen können während der Rechnung mitgenommen werden.

Ganz ähnlich gilt: Wenn wir Zahlen addieren oder subtrahieren, so kann das Ergebnis nicht genauer sein als die Zahl mit der kleinsten Signifikanz in der Rechnung. Beispielsweise ist das Resultat der Subtraktion 3,6 minus 0,57 gleich 3,0 (und nicht 3,03).

Geben Sie in Antworten nur signifikante Stellen an

Behalten Sie bei Benutzung eines Taschenrechners im Hinterkopf, dass nicht alle Ziffern, die er herausgibt, signifikant sein können. Wenn Sie 2,0 durch 3,0 teilen, so lautet die korrekte Antwort 0,67 und nicht etwa so etwas wie 0,66666666. Stellen sollten nur dann im Endergebnis ausgeschrieben werden, wenn sie signifikant sind. Um aber ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, sollten Sie normalerweise eine oder zwei zusätzliche Stellen in der Rechnung berücksichtigen und nur das Ergebnis runden. Beachten Sie auch, dass Taschenrechner manchmal zu wenige signifikante Stellen angeben. Wenn Sie zum Beispiel $2{,}5 \cdot 3{,}2$ mit dem Rechner ausrechnen, so erhalten Sie als Antwort eine einfache 8. Doch das Ergebnis ergibt zwei signifikante Stellen, somit heißt das korrekte Ergebnis 8,0.

Bei Rechnungen sind eine oder zwei zusätzliche Stellen mitzunehmen

Wissenschaftliche Schreibweise

Zehnerpotenzen

Gewöhnlich notieren wir Zahlen in Potenzen von Zehn, oder in wissenschaftlicher Schreibweise – zum Beispiel 36 900 als $3{,}69 \cdot 10^4$ oder 0,0021 als $2{,}1 \cdot 10^{-3}$. Ein Vorteil der wissenschaftlichen Schreibweise ist, dass sie die Anzahl signifikanter Stellen klar auszudrücken gestattet. Beispielsweise sieht man der Zahl 36 900 nicht an, ob sie drei, vier oder fünf signifikante Stellen hat. In der Schreibweise mit Zehnerpotenzen lässt sich diese Mehrdeutigkeit vermeiden: Hat die Zahl drei signifikante Stellen, so schreiben wir $3{,}69 \cdot 10^4$, hat sie hingegen vier, so wird daraus $3{,}690 \cdot 10^4$.

Relativer Messfehler

Die Regel der signifikanten Stellen gilt nur näherungsweise und kann in einigen Fällen zu einer Unterschätzung der Genauigkeit einer Antwort führen. Nehmen Sie beispielsweise an, wir dividierten 97 durch 92:

$$\frac{97}{92} = 1{,}05 \approx 1{,}1\ .$$

Sowohl 97 als auch 92 haben zwei signifikante Stellen und so besagt die Regel, als Ergebnis 1,1 anzugeben. Doch die beiden Zahlen 97 und 92 implizieren einen Messfehler von ± 1, wenn kein anderer Messfehler angegeben ist. 92 ± 1 und 97 ± 1 implizieren jeweils eine Genauigkeit von 1% ($1/92 \approx 0{,}01 = 1\%$). Doch das Endergebnis mit zwei signifikanten Stellen ist 1,1, mit einem impliziten Messfehler von $\pm 0{,}1$, was einem relativen Messfehler von $(0{,}1/1{,}1 \approx 0{,}1) \approx 10\%$ entspricht. In diesem Fall ist es besser, als Antwort 1,05 anzugeben, was drei signifikanten Stellen entspricht. Warum? Weil 1,05 einem Messfehler von $\pm 0{,}01$ entspricht, was $(0{,}01/1{,}05) \times 100\% \approx 1\%$ ist, also gerade gleich dem ursprünglichen Fehler in den Zahlen 92 und 97.

VORSCHLAG: Benutzen Sie die Regel signifikanter Stellen, doch ziehen Sie auch den relativen Fehler in Betracht. Wenn sich eine realistischere Abschätzung des Messfehlers ergibt, fügen Sie eine zusätzliche Stelle hinzu.

Beispiel 1.1 · Begriffsbildung **Ist das Ihr Diamant?**

Eine Freundin bittet Sie, ihr Ihren kostbaren Diamanten für einen Tag zu leihen, um ihn ihrer Familie zeigen zu können. Sie sind etwas besorgt und so wiegen Sie den Diamanten und lesen 8,17 Gramm von der Waagenskala ab. Die Skalengenauigkeit wird mit ±0,05 Gramm angegeben. Am Tag darauf wiegen Sie den zurückgebrachten Diamanten erneut und wiegen 8,09 Gramm. Ist es Ihr Diamant?

Lösung

Das Ablesen der Waagenskala entspricht einer Messung, die nicht zwangsläufig den „wahren" Wert für die Masse ergibt. Jedes Messergebnis könnte um bis zu 0,05 Gramm höher oder niedriger liegen. Die tatsächliche Masse Ihres Diamanten liegt höchstwahrscheinlich zwischen 8,12 Gramm und 8,22 Gramm. Die Masse des zurückgebrachten Diamanten liegt zwischen 8,04 Gramm und 8,14 Gramm. Die beiden Bereiche überlappen sich, und so gibt es keinen Grund zu zweifeln, dass der zurückgebrachte Diamant Ihrer ist, zumindest nicht aufgrund seiner Masse.

1.4 Einheiten, Standards und das SI-System

Messungen aller physikalischen Größen enthalten zwei Angaben – Zahl und Einheit. Die Einheit muss zusammen mit der Zahl angegeben werden. Zum Beispiel können wir die Länge in den Einheiten Inch, Fuß, Meilen oder im metrischen System in Zentimeter, Meter und Kilometer messen. Die Längenangabe 18,6 für einen bestimmten Körper ist sinnlos. Die Angabe der Einheit ist zwingend erforderlich: 18,6 m ist etwas ganz anderes als 18,6 inches oder 18,6 mm.

Länge

Im SI-Einheitssystem ist die Längeneinheit das Meter, m. Der erste internationale Standard war der Meter (abgekürzt m), 1790 von der französischen Akademie der Wissenschaften eingeführt als Standard für die Länge. Im Geiste der Rationalität wurde der Meter ursprünglich festgelegt als der zehnmillionste Teil der Entfernung zwischen Äquator und den Polen[2]. Ein Platinstab dieser Länge wurde angefertigt. 1889 wurde das Meter etwas genauer definiert als der Abstand zwischen zwei fein eingravierten Markierungen auf einem Platin-Iridium-Stab. 1960 wurde die Definition des Meters auf eine vollkommen neue, wesentlich genauere Grundlage gestellt: Ein Meter ist das 1 650 763,73-fache einer Wellenlänge im orangefarbenen Bereich des sichtbaren Spektrums des Lichts, emittiert von dem Gas Krypton 86. 1983 schließlich wurde das Meter erneut definiert, dieses Mal in Begriffen der Lichtgeschwindigkeit (deren bester gemessener Wert in der alten Meterdefinition 299 792 458 m/s war, mit einem Messfehler von 1 m/s). Die neue Definition lautet: „Der Meter ist die Wegstrecke, die das Licht im Vakuum während einer Zeit von 1/299 792 458 Sekunde zurücklegt."[3]

Britische Längeneinheiten (Inch, Fuß, Meile) werden in Meter umgerechnet. Das Inch (in.) ist definiert als exakt 2,54 cm. Andere Umrechnungsfaktoren stehen in den Tabellen in den Buchdeckeln. Tabelle 1.1 gibt einige charakteristische Längen an. Beachten Sie auch ▶ Abbildung 1.3.

2 Die damals angenommene Länge weicht nur um rund ein Fünfzigstel eines Prozents von modernen Messungen des Erdumfangs ab. Nicht schlecht!

3 Die neue Definition des Meters ergibt, dass die Lichtgeschwindigkeit exakt den Wert 299 792 458 m/s hat.

Tabelle 1.1

Einige typische Längenabstände (Größenordnung)

Körper	Länge (oder Abstand)
Neutron oder Proton (Radius)	10^{-15} m
Atom	10^{-10} m
Virus (▶ Abbildung 1.3)	10^{-7} m
Papierbogen (Dicke)	10^{-4} m
Fingerdicke	10^{-2} m
Fußballfeldlänge	10^{2} m
Höhe des Mount Everest (▶ Abbildung 1.3)	10^{4} m
Erddurchmesser	10^{7} m
Erde – Sonne	10^{11} m
Nächster Fixstern	10^{16} m
Nächste Galaxie	10^{22} m
Fernste sichtbare Galaxie	10^{26} m

(a)

(b)

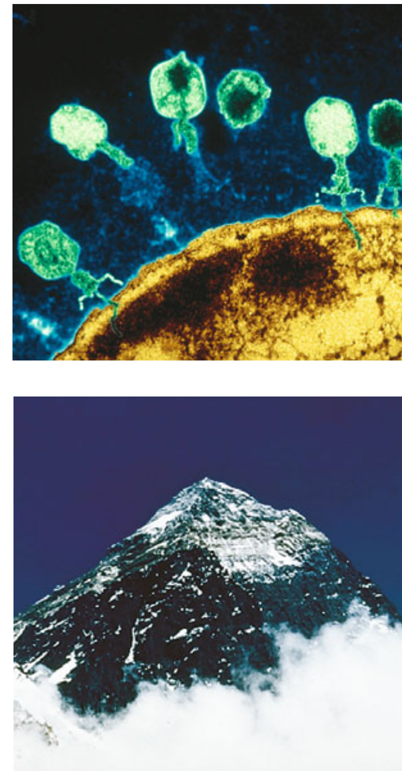


Abbildung 1.3 Einige Längen: (a) Viren (etwa 10^{-7} m lang) attackieren eine Zelle; (b) Die Höhe des Mount Everest liegt in der Größenordnung von 10^4 m (8850 m, um genau zu sein).

Zeit

Die Standardeinheit für die **Zeit** im SI-Einheitensystem ist die **Sekunde** (s). Viele Jahre lang war die Sekunde definiert als 1/86 400 eines mittleren Sonnentages. Die Standardsekunde ist heute genauer definiert mit Hilfe der Frequenz bzw. Periode der Strahlung von Cäsium-Atomen, die sie beim Übergang zwischen zwei bestimmten Elektronen-Zuständen aussenden. (Genauer: Eine Sekunde ist definiert als die Zeit von 9 192 631,770 Perioden der elektromagnetischen Strahlung beim Übergang zwischen zwei Elektronenzuständen des Cäsium 133). Es gibt per Definition 60 s in einer Minute (min) und 60 Minuten in einer Stunde (h, von engl. *hour*). In Tabelle 1.3 sind einige gemessene Zeitintervalle angegeben.

Masse

Die Einheit für die **Masse** im SI-Einheitensystem ist das **Kilogramm** (kg). Die Standardmasse ist ein besonderer Platin-Iridium-Zylinder (▶ Abbildung 1.4), der im internationalen Büro für Gewichte und Messungen in Sèvres bei Paris steht. Seine Masse ist definiert als 1 kg. Einige typische Massen sind in Tabelle 1.2 angegeben.

Wenn man Atom- und Molekülmassen ausdrücken will, wird gewöhnlich die **atomare Masseneinheit** (u) verwendet. In Kilogramm ausgedrückt ist

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,.$$

Die Definitionen anderer Einheiten folgen in den entsprechenden Kapiteln.

Dezimalvorsätze

Im metrischen System sind die größeren und kleineren Einheiten in Vielfachen von 10 in Bezug auf die Standardeinheit definiert. Das macht Berechnungen besonders einfach. Somit ist 1 Kilometer (km) 1000 m, 1 Zentimeter (cm) ist 1/100 m und 1 Millimeter (mm) ist 1/1000 m oder 1/10 cm, und so weiter. Die Vorsilben

Abbildung 1.4 Das Standardkilogramm.

Tabelle 1.2

Einige Massen

Körper	Masse (Näherungswerte)
Elektron	10^{-30} kg
Proton, Neutron	10^{-27} kg
DNA-Molekül	10^{-17} kg
Bakterium	10^{-15} kg
Mücke	10^{-5} kg
Pflaume	10^{-1} kg
Person	10^{2} kg
Schiff	10^{8} kg
Erde	$6 \cdot 10^{24}$ kg
Sonne	$2 \cdot 10^{30}$ kg
Galaxis	10^{41} kg

Tabelle 1.3

Einige typische Zeitintervalle

Zeitintervall	Sekunden (Näherungswerte)
Lebensdauer extrem instabiler subatomarer Teilchen	10^{-23} s
Lebensdauer radioaktiver Elemente	10^{-22} bis 10^{28} s
Lebensdauer eines Muon	10^{-6} s
Zeit zwischen Herzschlägen beim Menschen	10^{0} s (= 1 s)
Ein Tag	10^{5} s
Ein Jahr	$3 \cdot 10^{7}$ s
Menschliche Lebensspanne	$2 \cdot 10^{9}$ s
Aufgezeichnete Geschichte	10^{11} s
Menschen auf der Erde	10^{14} s
Alter der Erde	10^{17} s
Alter des Universums	10^{18} s

Tabelle 1.4

Metrische Vorsilben

Vorsilbe	Abkürzung	Wert
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deka	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

„Zenti-“, „Kilo-“ und weitere sind in Tabelle 1.4 aufgelistet. Sie können nicht nur auf die Längeneinheit, sondern auch auf die Einheiten Rauminhalt, Masse und jede weitere metrische Einheit bezogen werden. Beispielsweise ist ein Zentiliter (cl) 1/100 Liter (l) und ein Kilogramm (kg) sind 1000 Gramm (g).

Einheiten-Systeme

Wenn man mit den Gesetzen und Gleichungen der Physik zu tun hat, ist es sehr wichtig, ein konsistentes Einheiten-System zu benutzen. Mehrere Einheiten-Systeme sind über viele Jahre hinweg in Gebrauch gewesen. Das wichtigste System heutzutage ist das Système International (französisch für internationales System), abgekürzt SI. In SI-Einheiten ist die Einheit der Länge das Meter, die Einheit für die Zeit ist die Sekunde und die Einheit der Masse ist das Kilogramm. Man nennt dieses System das mks-System (Meter-Kilogramm-Sekunde).

Ein weiteres metrisches System ist das **cgs-System**. In ihm sind das Zentimeter, das Gramm und die Sekunde die Standardeinheiten für Länge, Masse und Zeit, wie die Abkürzung andeutet.

SI-Einheiten sind die heute in der Wissenschaft maßgeblich verwendeten Einheiten. Wir werden in diesem Buch daher fast ausschließlich von ihnen Gebrauch machen. Wir geben jedoch die cgs-Einheiten für verschiedene Größen an, wenn sie eingeführt werden.

Basisgrößen und abgeleitete Größen

Physikalische Größen lassen sich in zwei Kategorien einteilen: *Basisgrößen* und *abgeleitete Größen*. Die dazu korrespondierenden Einheiten heißen *Basiseinheiten* und *abgeleitete Einheiten*. Eine **Basisgröße** muss als Standard definiert werden. Wissenschaftler, stets an Einfachheit interessiert, wünschen die kleinste mögliche Anzahl an Basisgrößen, die konsistent mit einer vollständigen Beschreibung der physikalischen Welt ist. Es werden sieben Basisgrößen benötigt, und die im SI benutzten Größen zeigt Tabelle 1.5. Alle anderen Größen können mittels dieser

Basisgrößen[4] ausgedrückt werden und werden demnach als **abgeleitete Größen** bezeichnet. Ein Beispiel für eine abgeleitete Größe ist die Geschwindigkeit, die definiert ist als zurückgelegte Wegstrecke dividiert durch die Zeit, die während der Bewegung verstrichen ist.

1.5 Umrechnungseinheiten

Jede Größe, die wir messen – beispielsweise Länge, Geschwindigkeit oder elektrischer Strom – besteht aus einer Zahl und einer Einheit. Oft erhalten wir eine Größe in einer bestimmten Einheit, doch wir wollen sie in einer anderen ausdrücken. Nehmen Sie beispielsweise an, dass ein Tisch 21,5 inch breit ist, und wir wollen das in Zentimeter ausdrücken. Dann müssen wir einen Umrechnungsfaktor anwenden, der in diesem Fall

$$1\ \text{inch} = 2{,}54\ \text{cm}$$

beträgt. Anders ausgedrückt erhalten wir

$$1 = 2{,}54\ \text{cm/inch}\ .$$

Da Multiplizieren mit eins nichts verändert, ergibt sich für die Tischbreite in cm:

$$21{,}5\ \text{inch} = 21{,}5\ \cancel{\text{inch}} \cdot \left(2{,}54\,\frac{\text{cm}}{\cancel{\text{inch}}}\right) = 54{,}6\ \text{cm}$$

Beachten Sie, wie sich die Einheiten (hier inch) herauskürzen. Eine Tabelle mit zahlreichen Umrechnungsfaktoren befindet sich in den Innenseiten der Buchdeckel.

Tabelle 1.5

Basisgrößen

Größe	Einheit	Abkürzung der Einheit
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Elektrischer Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Beispiel 1.2 **100-Meter-Lauf**

Wie viel Yards legt ein 100-m-Läufer zurück?

Lösung

Wir nehmen an, dass die Distanz exakt bekannt ist mit vier signifikanten Stellen, also 100,0 m. Ein Yard (yd) ist exakt 3 Fuß (36 inch), somit können wir schreiben

$$1\ \text{yd} = 3\ \text{ft} = 36\ \text{inch} = 36\ \cancel{\text{inch}} \cdot \left(2,54\,\frac{\text{cm}}{\cancel{\text{inch}}}\right) = 91{,}44\ \text{cm} = 0{,}9144\ \text{m}\ .$$

Wir können dieses Ergebnis auch aufschreiben als

$$1\ \text{m} = \frac{1\ \text{yd}}{0{,}9144} = 1{,}094\ \text{yd}\ .$$

Damit wird

$$100\ \text{m} = 100\ \cancel{\text{m}}\left(1{,}094\,\frac{\text{yd}}{\cancel{\text{m}}}\right) = 109{,}4\ \text{yd}\ ,$$

somit ist ein 100-m-Lauf 9,4 yd länger als ein 100-yd-Lauf.

Wir hätten diese Umrechnung auch in einer Zeile schreiben können:

$$100\ \text{m} = 100\ \cancel{\text{m}}\left(\frac{100\ \cancel{\text{cm}}}{1\ \cancel{\text{m}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{inch}}}{2{,}54\ \cancel{\text{cm}}}\right)\left(\frac{1\ \text{yd}}{36\ \cancel{\text{inch}}}\right) = 109{,}4\ \text{yd}\ .$$

ANGEWANDTE PHYSIK

Wie viele Yards werden beim 100-m-Lauf zurückgelegt?

4 Die einzigen Ausnahmen gelten für Winkel (Bogenmaß – siehe Kapitel 10) und Raumwinkel (Steradiant). Es konnte keine Übereinkunft darüber erzielt werden, ob diese Größen abgeleitete oder Basisgrößen sind.

Beispiel 1.3 **Fläche eines Halbleiterchips**

Ein Siliziumchip hat eine Fläche von 1,25 Quadratinch. Drücken Sie das in Quadratzentimeter aus.

Lösung

Wegen 1 inch = 2,54 cm ist 1 inch^2 = (2,54 cm^2) = 6,45 cm^2. Somit wird

$$1{,}25\,\text{inch}^2 = 1{,}25\,\text{inch}^2\left(2{,}54\,\frac{\text{cm}}{\text{inch}}\right)^2 = 1{,}25\,\cancel{\text{inch}^2}\left(6{,}45\,\frac{\text{cm}^2}{\cancel{\text{inch}^2}}\right)$$
$$= 8{,}06\,\text{cm}^2\,.$$

Beispiel 1.4 **Höchstgeschwindigkeit**

Die vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit auf einer amerikanischen Autobahn beträgt 55 Meilen pro Stunde (mi/h oder mph). Wie groß ist diese Geschwindigkeit (a) in Meter pro Sekunde (m/s) und (b) in Kilometer pro Stunde (km/h)?

Lösung

a Wir schreiben 1 Meile als

$$1\,\text{mi} = 5280\,\cancel{\text{ft}}\left(12\,\frac{\cancel{\text{inch}}}{\cancel{\text{ft}}}\right)\left(2{,}54\,\frac{\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{inch}}}\right)\left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\cancel{\text{cm}}}\right) = 1609\,\text{m}\,.$$

Beachten Sie, dass jeder Umrechnungsfaktor gleich 1 ist. Wir wissen auch, dass 1 Stunde gleich (60 min/h) · (60 s/min) = 3600 s/h ist, also

Umrechnungsfaktoren = 1

$$55\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \left(55\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(1609\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{mi}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}}\right) = 24{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

b Nun nutzen wir die Beziehung 1 mi = 1609 m = 1,609 km aus:

$$55\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \left(55\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\text{h}}\right)\left(1{,}609\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{mi}}}\right) = 88{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

PROBLEMLÖSUNG

Die Umrechnung von Einheiten ist falsch, wenn Einheiten sich nicht herauskürzen.

Wenn Sie einen Wechsel der Einheiten in einer Berechnung vornehmen, müssen Sie nur darauf achten, dass sie sich genau herauskürzen, so vermeiden Sie Fehler. Wenn wir beispielsweise in der Umrechnung von 1 mi in 1609 m in Beispiel 1.4(a) den Faktor $\left(\frac{100\,\text{cm}}{1\,\text{m}}\right)$ anstelle von $\left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)$ verwendet hätten, so hätten sich die Meter-Einheiten nicht korrekt herausgekürzt. Am Schluss wären keine Meter dabei herausgekommen.

1.6 Größenordnung: Schnelle Abschätzung

Manchmal sind wir lediglich an einer groben Abschätzung einer Größe interessiert. Der Grund dafür könnte sein, dass eine genaue Berechnung zu viel Zeit beanspruchen oder zusätzliche Daten erfordern würde, die aber nicht verfügbar sind. In anderen Fällen könnten wir eine Grobabschätzung dazu nutzen, das Ergebnis einer genauen Rechnung mit dem Taschenrechner zu überprüfen, um sicher zu gehen, dass keine Fehler bei der Zahleneingabe passiert sind.

Bei einer Grobabschätzung werden alle Zahlen bis auf eine signifikante Stelle gerundet und als Zehnerpotenzen aufgeschrieben. Nach der Berechnung wird wiederum nur eine signifikante Stelle behalten. Solch eine Schätzung heißt **Abschätzung der Größenordnung** und ist innerhalb des Faktors 10 genau, oftmals sogar besser. Tatsächlich bezieht sich der Ausdruck „Abschätzung der Größenordnung" manchmal nur auf die Zehnerpotenz.

Wie sinnvoll und nützlich Grobabschätzungen sein können, wollen wir anhand einiger Beispiele aufzeigen.

PROBLEMLÖSUNG

Wie man eine Grobabschätzung macht

Beispiel 1.5 · Abschätzung

Volumen eines Sees

Schätzen Sie, wie viel Wasser ein bestimmter See enthält (▸ Abbildung 1.5a). Er ist näherungsweise kreisrund, hat etwa 1 km Durchmesser und eine durchschnittliche Tiefe von 10 m.

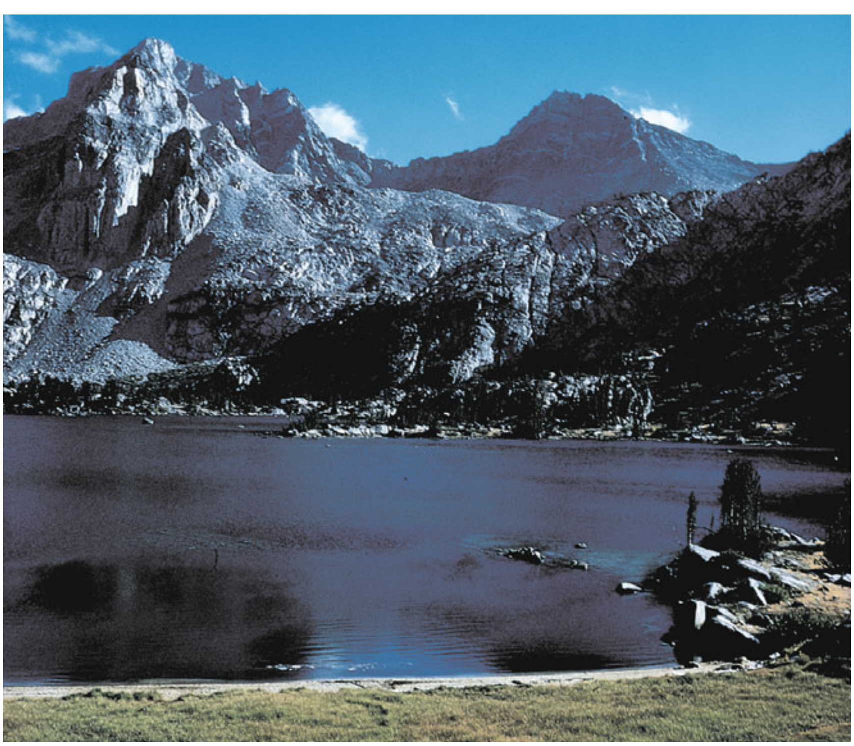
Lösung

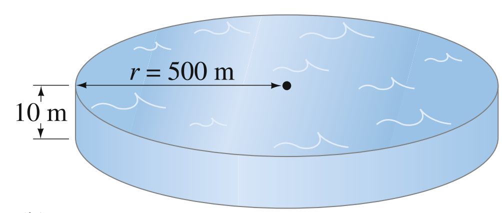
Kein See ist vollkommen kreisrund und hat einen perfekt flachen Grund. Wir schätzen lediglich ab. Um das Volumen abzuschätzen, legen wir ein Zylindermodell des Sees zugrunde: Wir multiplizieren die durchschnittliche Tiefe des Sees mit der näherungsweise kreisrunden Oberfläche, als wäre der See ein Zylinder (▸ Abbildung 1.5b). Das Volumen V eines Zylinders ist das Produkt seiner Höhe h mit seiner Grundfläche: $V = h\pi r^2$, wobei r der Radius der kreisrunden Grundfläche ist. Der Radius r ist $\frac{1}{2}$ km $= 500$ m, damit wird das Volumen näherungsweise

$$V = h\pi r^2 \approx 10\,\mathrm{m} \cdot 3 \cdot (5 \cdot 10^2\,\mathrm{m})^2 \approx 8 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3 \approx 10^7\,\mathrm{m}^3\ ,$$

ANGEWANDTE PHYSIK

Schätzung der Wassermasse eines Sees (siehe ▸ Abbildung 1.5)


(a)



(b)

Abbildung 1.5 (a) Wie viel Wasser enthält der See? (Die Abbildung zeigt einen der Rae Seen in der Sierra Nevada in Kalifornien.) (b) Modell des Sees als Zylinder. (Wir könnten einen Schritt weiter gehen und die Masse oder das Gewicht des Sees abschätzen. Später werden wir sehen, dass Wasser eine Dichte von circa 1000 kg/m^3 hat, womit dieser See eine Masse von ungefähr $(10^3\,\mathrm{kg/m^3})(10^7\,\mathrm{m^3}) \approx 10^{10}$ kg hat. Das sind 10 Milliarden kg.)

wobei π auf 3 abgerundet wurde. Somit liegt das Seevolumen in der Größenordnung von $10^7\ \mathrm{m}^3$, zehn Millionen Kubikmeter. Wegen all der Schätzungen in der Rechnung sollte man besser die Größenordnung ($10^7\ \mathrm{m}^3$) als die Zahl $8 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3$ notieren.

PROBLEMLÖSUNG

Benutzen Sie, wenn möglich, Symmetrien.

Abbildung 1.6 Eine Mikrometerschraube dient der Messung kleiner Dicken.

Beispiel 1.6 · Abschätzung — Dicke einer Seite

Schätzen Sie die Dicke einer Seite dieses Buchs.

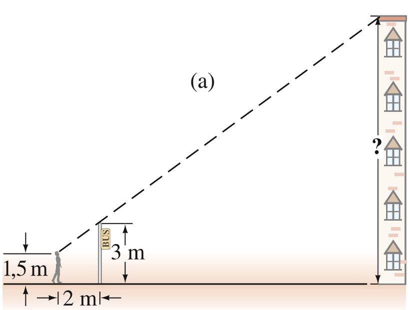
Lösung

Zunächst könnten Sie glauben, ein spezielles Messinstrument wie eine Schieblehre oder Mikrometerschraube sei notwendig, um die Seitendicke zu messen, da ein Lineal sich wohl kaum dafür eignen würde. Doch wir können einen Trick anwenden, oder, um es in physikalischen Begriffen auszudrücken, wir machen uns die *Symmetrie* zunutze: Dazu gehen wir von der vernünftigen Annahme aus, dass alle Buchseiten gleich dick sind. Dann können wir Hunderte von Blättern auf einmal mit einem Lineal messen. Wenn Sie die Dicke der ersten 500 Seiten (Seite 1 bis 500) messen, erhalten Sie einen Wert so um die 1,5 cm. Beachten Sie, dass eine Seitenzahl von 500 250 Blatt ergibt. Damit lässt sich die Dicke einer Seite zu ungefähr

$$\frac{1{,}5\ \mathrm{cm}}{250\ \mathrm{Blatt}} \approx 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm} = 6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mm}$$

oder dünner als ein Zehntel Millimeter (0,1 mm) bestimmen.

Nun wollen wir uns anhand eines einfachen Beispiels die Nützlichkeit einer Skizze für eine Schätzung klarmachen. Man kann nicht oft genug betonen, wie wichtig die Anfertigung einer Skizze für die Lösung physikalischer Probleme ist.



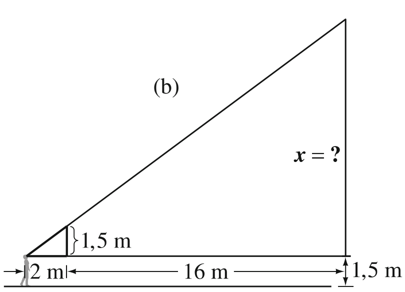


Abbildung 1.7 Beispiel 1.7. Skizzen sind äußerst nützlich!

Beispiel 1.7 · Abschätzung — Höhenbestimmung durch trigonometrische Berechnungen

Schätzen Sie die Höhe des Gebäudes, das in ► Abbildung 1.7a abgebildet ist. Benutzen Sie dazu ein Verkehrsschild und führen Sie eine trigonometrische Rechnung durch.

Lösung

Indem Sie Ihren Freund bitten, sich neben das Verkehrsschild zu stellen, schätzen Sie die Höhe des Schildes auf 3 m. Anschließend bewegen Sie sich so weit vom Verkehrsschild fort, bis die Spitze des Schildes und die Gebäudespitze auf einer Geraden liegen (► Abbildung 1.7a). Sie sind 1,68 m groß, somit beträgt Ihre Augenhöhe etwa 1,5 m. Ihr Freund ist größer als Sie und wenn er einen Arm ausstreckt und Sie mit den Fingerspitzen berührt, während der andere ausgestreckte Arm das Schild berührt, schätzen Sie den Abstand zwischen Ihnen und dem Schild auf 2 m (► Abbildung 1.7a). Dann schreiten Sie die Distanz vom Verkehrsschild bis zum Gebäude mit großen, etwa 1 m langen Schritten ab und zählen 16 Schritte. Nun fertigen Sie eine Skizze an, wie in ► Abbildung 1.7b gezeigt, und tragen Sie die geschätzten Zahlenwerte ein. Sie können jetzt direkt aus der Skizze die unbekannte Seite (Gebäudehöhe) mit etwa $x = 13$ m bestimmen. Alternativ lassen sich ähnliche Dreiecke zur Bestimmung der Höhe x nutzen:

$$\frac{1{,}5\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = \frac{x}{18\,\mathrm{m}} \Rightarrow x \approx 13{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Nun müssen Sie noch ihre Augenhöhe von 1,5 m dazurechnen um das Ergebnis zu erhalten: Das Gebäude ist etwa 15 m hoch.

Beispiel 1.8 · Abschätzung

Abschätzung des Erdradius

Um sich von der Kugelgestalt der Erde zu überzeugen, beobachte man, wie an einem windstillen Tag ein Schiff hinter der Horizontlinie verschwindet. Ob Sie es glauben oder nicht: Man kann den Erdradius abschätzen, ohne dafür in den Weltraum zu fliegen (siehe das Foto am Kapitelanfang). Sie können dabei folgendermaßen vorgehen: Sie messen, dass der Abstand des Decks eines vor Anker liegenden Segelboots zum Wasserspiegel 2,0 m beträgt. Dann begeben Sie sich an eine Stelle, wo Sie einen weiten Blick aufs Meer haben und etwa 4,4 km von dem Segelboot entfernt sind. Nun legen Sie sich direkt am Wasser hin und schätzen, dass Sie nur $\frac{1}{4}$ des Rumpfes vom Segelboot sehen können. Das bedeutet, $\frac{3}{4}$ des Segelbootes, das sind 1,5 m, sind hinter dem Horizont verschwunden. Mit ▸ Abbildung 1.8, in der $h = 1{,}5$ m beträgt, schätzen wir den Erdradius nun ab.

Lösung

Wir nutzen den Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke in ▸ Abbildung 1.8, wobei R der Erdradius, $h + R$ näherungsweise die Hypotenuse, $d = 4{,}4$ km und $h = 1{,}5$ m ist:

$$\begin{aligned} R^2 + d^2 &\approx (R+h)^2 \\ &\approx R^2 + 2hR + h^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R \approx \frac{d^2 - h^2}{2h} = \frac{(4400\,\mathrm{m})^2 - (1{,}5\,\mathrm{m})^2}{3{,}0\,\mathrm{m}} \approx 6500\,\mathrm{km}\,.$$

Präzise Messungen ergeben einen Radius von 6380 km. Doch erwägen Sie einmal Ihre Leistung: Mittels einiger grober Messungen und einfacher Geometrie können Sie eine recht gute Abschätzung des Erdradius durchführen. Sie müssen weder ins All fliegen, noch benötigen Sie ein riesiges Längenmaß.

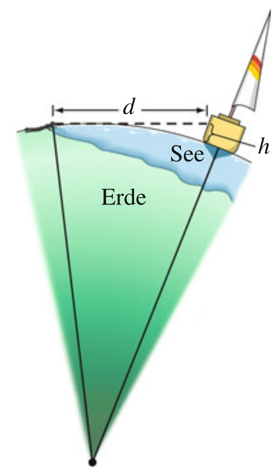


Abbildung 1.8 Ein Boot verschwindet hinter dem Horizont (nicht maßstabsgetreu). R ist der Radius der Erde. Sie befinden sich in einer Entfernung von $d = 4{,}4$ km vom Segelboot, wobei Sie nur $\frac{1}{4}$ seines Rumpfes sehen.

Eine andere Technik für das Abschätzen wurde von Enrico Fermi bekannt gemacht, der seinen Studenten zeigte, wie man die Anzahl der Klavierstimmer in einer Stadt wie Chicago abschätzt. Um die Größenordnung der Anzahl der Klavierstimmer heute in San Francisco, einer Stadt mit 700 000 Einwohnern, zu bestimmen, schätzen wir die Anzahl der funktionstüchtigen Klaviere, wie oft jedes Klavier gestimmt wird und wie viele Klaviere jeder Klavierstimmer stimmen kann. Für die Abschätzung der Anzahl der Klaviere bemerken wir zunächst, dass sicher nicht jeder ein Klavier besitzt. Die Annahme, dass eine von drei Familien ein Klavier besitzt, bedeutet, dass auf zwölf Personen ein Klavier kommt, wenn durchschnittlich vier Personen in einem Haushalt leben. Als Angabe für die Größenordnung können wir der einfacheren Rechnung halber von einem Klavier pro zehn Personen ausgehen. So gelangen wir dann zu dem Schätzwert, dass es 70 000 Klaviere in San Francisco gibt. Ein Klavierstimmer braucht eine oder zwei Stunden, um ein Klavier zu stimmen; er kann somit vier bis fünf Klaviere am Tag stimmen. Ein

Klavier muss ein oder zwei Mal im Jahr gestimmt werden, einigen wir uns auf ein Mal im Jahr. Ein Klavierstimmer, der vier Klaviere am Tag stimmt, fünf Tage in der Woche und 50 Wochen im Jahr arbeitet, kann 1000 Klaviere im Jahr stimmen. Damit benötigt San Francisco mit seinen 70 000 Klavieren grob geschätzt 70 Klavierstimmer. Das ist natürlich nur eine sehr grobe Schätzung[5]. Sie sagt uns aber, dass es viel mehr als zehn Klavierstimmer und sicher bedeutend weniger als 1000 geben muss.

1.7 Einheiten und Einheitenüberprüfung

Wenn wir von den Dimensionen einer Größe sprechen, beziehen wir uns auf die physikalische Einheit. Die Dimension einer Fläche beispielsweise ist immer das Längenquadrat, abgekürzt [m^2] und in eckige Klammern gesetzt. Die Geschwindigkeit kann in Einheiten von km/h, m/s oder anderen Einheiten gemessen werden, doch die Dimension ist immer Länge [m] geteilt durch Zeit [s]; also [m/s]. Die Formel für eine Größe kann je nach Fall verschieden sein, doch die Dimension bleibt unverändert. Beispielsweise ist die Fläche eines Dreiecks mit der Grundlinie b und der Höhe h gegeben durch $A = \frac{1}{2}bh$, wohingegen die Fläche eines Kreises mit dem Radius r durch $A = \pi r^2$ gegeben ist. Die Formeln sind in beiden Fällen unterschiedlich, doch die physikalische Einheit ist in beiden Fällen gleich: [m^2]

Wenn wir die physikalische Einheit einer Größe spezifizieren, so geben wir dafür normalerweise die Basisgrößen an, nicht aber die abgeleiteten Größen. Beispielsweise hat die Kraft, wie wir später sehen werden, die Einheiten Masse [kg] mal Beschleunigung [m/s^2], also [kg · m/s^2].

Einheiten können beim Herausfinden von Beziehungen zwischen physikalischen Größen nützlich sein, so einen Vorgang nennen wir **Einheiten-Analyse**[6]. Einheiten erweisen sich als sehr hilfreich, wenn man eine Gleichung oder Beziehung auf Richtigkeit überprüfen will. Hier gilt eine einfache Regel: Wir addieren oder subtrahieren Größen nur dann, wenn sie dieselben Einheiten haben (wir addieren nicht Zentimeter und Gramm). Das impliziert, dass die Größen auf beiden Seiten einer Gleichung dieselben physikalischen Einheiten haben müssen.

Betrachten Sie zum Beispiel die Gleichung $v = v_0 + \frac{1}{2}at^2$. Dabei ist v die Geschwindigkeit eines Körpers nach einer Zeit t, v_0 ist seine Anfangsgeschwindigkeit und a seine Beschleunigung. Wir wollen nun eine Einheitenüberprüfung anwenden, um die Korrektheit der Gleichung zu überprüfen. Wir schreiben dazu die Gleichung in ihren Einheit noch einmal auf und berücksichtigen, dass Geschwindigkeit die Einheit [m/s] und Beschleunigung die Einheit [m/s^2] hat (all das sehen wir noch in Kapitel 2):

$$\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] + \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \cdot [\mathrm{s}^2] = \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] + [\mathrm{m}] \ .$$

Wie man sieht, sind die Einheiten falsch: Auf der rechten Seite steht die Summe zweier Größen mit unterschiedlichen Einheiten. Somit können wir den Schluss ziehen, dass bei der Ableitung der Gleichung ein Fehler gemacht worden sein muss.

Wenn andererseits die Einheitenüberprüfung keine Fehler ergibt, beweist das noch nicht die Richtigkeit der Gleichung. Beispielsweise könnte ein dimensionsloser numerischer Faktor (wie $\frac{1}{2}$ oder 2π) falsch sein. Eine Einheitenüberprüfung

5 Ein Blick in die Gelben Seiten von San Francisco zeigt ungefähr 50 Einträge. Hinter jedem dieser Einträge mag sich mehr als ein Klavierstimmer verbergen. Auf der anderen Seite stimmen sie nicht nur Klaviere, sie führen auch Reparaturarbeiten aus. Jedenfalls ist unser Schätzwert realistisch.

6 Die in den nächsten Absätzen beschriebene Technik erschließt sich besser, nachdem man ein paar Kapitel des Buchs gelesen hat. Dieser Abschnitt soll zunächst einen Überblick über das Thema verschaffen, später kann man dann bei Bedarf darauf zurückgreifen.

sagt also nur, ob eine Beziehung falsch ist. Ist sie laut Einheiten-Analyse nicht falsch, so ist sie deswegen nicht notwendigerweise richtig.

Eine Einheitenüberprüfung kann man auch als Schnelltest für eine Gleichung benutzen, bei der Sie sich nicht sicher sind. Nehmen Sie beispielsweise an, Sie würden sich nicht mehr an die Formel für die Periode T (die Zeit für ein Mal hin- und herschwingen) eines eindimensionalen Pendels mit der Länge l erinnern. Lautet sie $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ oder $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$? g ist in dieser Gleichung die Fallbeschleunigung und hat wie alle Beschleunigungen die Dimension [m/s^2]. (Machen Sie sich keine Sorgen wegen dieser Formeln – sie werden in Kapitel 14 hergeleitet. Uns interessiert im Moment nur die Person, die nicht weiß, ob die Formel l/g oder g/l enthält.) Eine Einheitenüberprüfung zeigt, dass die erste Formel richtig ist:

$$[\mathrm{s}] = \sqrt{\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{m/s^2}]}} = \sqrt{[\mathrm{s^2}]} = [\mathrm{s}] \,.$$

Die zweite dagegen ist falsch:

$$[\mathrm{s}] \neq \sqrt{\frac{[\mathrm{m/s^2}]}{[\mathrm{m}]}} = \sqrt{\frac{1}{[\mathrm{s^2}]}} = \frac{1}{[\mathrm{s}]} \,.$$

Beachten Sie, dass die Konstante 2π dimensionslos ist und somit nicht zur Einheiten-Analyse beitragen kann.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Wissenschaftler ersinnen oft Modellvorstellungen für physikalische Phänomene. Ein **Modell** ist eine Art von Bild oder Analogie, die das Phänomen zu erklären scheint. Eine **Theorie** erwächst häufig aus Modellvorstellungen und ist gewöhnlich tiefer und komplexer als das einfache Modell.

Ein wissenschaftliches **Gesetz** ist eine prägnante Formulierung, oft in der Form einer Gleichung ausgedrückt, die einen bestimmten Bereich von Phänomenen, der sich über ein breites Spektrum von Anwendungsfällen erstreckt, beschreibt.

Messungen spielen eine entscheidende Rolle in der Physik, können jedoch niemals absolut präzise sein. Es ist wichtig den **Messfehler** eines Experiments anzugeben, entweder direkt durch die ± Angabe und/oder durch Einhaltung der korrekten Anzahl **signifikanter Stellen**.

Physikalische Größen werden immer relativ zu einer besonderen **Einheit** spezifiziert. Die benutzte Einheit sollte immer angegeben werden. Das allgemein akzeptierte Einheiten-System ist das **Système International** (SI). In ihm sind die Standardeinheiten von Länge, Masse und Zeit **Meter**, **Kilogramm** und **Sekunde**.

Die Grobabschätzung, vor allem die **Abschätzung der Größenordnung**, ist eine sehr nützliche Methode in der Wissenschaft wie auch im alltäglichen Leben.

Die **Einheit** einer physikalischen Größe bezieht sich auf die Kombination der Basisgrößen, die sie bilden. Zum Beispiel hat die Geschwindigkeit die Einheit [Länge/Zeit] oder [m/s]. Indem man nur die Einheiten der verschiedenen Größen einer gegebenen Beziehung betrachtet, kann man die Beziehung auf korrekte Form überprüfen. Dieser Test heißt auch **Einheiten-Analyse**.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Verständnisfragen

1 Es ist vorteilhaft, dass fundamentale Standards für Länge und Zeit leicht zugänglich (leicht vergleichbar), unveränderlich (sie bleiben gleich), unzerstörbar und reproduzierbar sind. Diskutieren Sie, warum das Vorteile sind und ob ein oder mehrere dieser Kriterien unvereinbar mit anderen sein können.

2 Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man den Fuß einer Person als Standard setzt? Diskutieren Sie das Problem im Hinblick auf die unter 1. erwähnten Kriterien. Betrachten Sie für das Problem sowohl (a) den Fuß einer bestimmten Person als auch (b) jedermanns Fuß.

3 Wenn Sie durch die Berge reisen, sehen Sie manchmal Schilder, auf denen Höhenangaben wie „914 m (3000 ft)“ zu lesen sind. Kritiker des metrischen Systems argumentieren, dass solche Zahlen die Kompliziertheit desselben beweisen. Wie würden Sie als Befürworter eines Wechsels zum metrischen System solche Schilder ändern?

4 Schlagen Sie eine Möglichkeit vor, die Distanz zwischen Erde und Sonne zu messen.

5 Was stimmt nicht mit folgendem Straßenschild: Memphis 7 mi (11,263 km)?

6 Können Sie einen kompletten Satz Basisgrößen wie in Tabelle 1.5 angeben, der nicht die Länge enthält?

7 Schreiben Sie die Annahmen auf, die nützlich sind für eine Abschätzung der Anzahl der Automechaniker in (a) San Francisco und (b) Ihrer Heimatstadt und geben Sie anschließend den Schätzwert an.

8 Schätzen Sie die Anzahl der Stunden, die Sie bis jetzt insgesamt in der Schule verbracht haben.

9 Diskutieren Sie, wie die Symmetrie dazu genutzt werden kann, die Anzahl der Murmeln in einem Ein-Liter-Glas zu schätzen.

10 Sie messen den Radius eines Rades und erhalten 4,16 cm. Wenn Sie, um den Durchmesser zu erhalten, mit 2 multiplizieren, sollte dann das Ergebnis eher als 8 cm oder als 8,32 cm aufgeschrieben werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgaben zu 1.3

kompletter Lösungsweg

Die Aufgaben am Ende jedes Kapitels sind unterteilt in I, II oder III, je nach ihrem voraussichtlichen Schwierigkeitsgrad. Dabei ist I die leichteste Stufe. Die Aufgaben sind nach Abschnitten geordnet. Das bedeutet, dass der Leser bis einschließlich des betreffenden Abschnittes alles gelesen haben sollte und nicht nur den betreffenden Abschnitt – Aufgaben bauen häufig auf früherem Stoff auf. Schließlich gibt es eine Gruppe „Allgemeine Aufgaben“, die nicht unterteilt und nicht nach Abschnitten geordnet sind.

1 (I) Das Alter des Universums beträgt etwa 10 Milliarden Jahre. Schreiben Sie diesen Ausdruck in Zehnerpotenzen (a) in Jahren und (b) in Sekunden. Gehen Sie von nur einer signifikanten Stelle aus.

2 (I) Wie viele signifikante Stellen hat jede der folgenden Zahlen: (a) 2142; (b) 81,60; (c) 7,63; (d) 0,03; (e) 0,0086; (f) 3236 und (g) 8700?

3 (I) Schreiben Sie die folgenden Zahlen als Zehnerpotenzen: (a) 1,156; (b) 21,8; (c) 0,0068; (d) 27,635; (e) 0,219; und (f) 22.

4 (I) Schreiben Sie die folgenden Zahlen voll aus mit Dezimalstellen und korrekter Anzahl der Nullen: (a) $8{,}69 \cdot 10^4$; (b) $7{,}1 \cdot 10^3$; (c) $6{,}6 \cdot 10^{-1}$; (d) $8{,}76 \cdot 10^2$ und (e) $8{,}62 \cdot 10^{-5}$.

5 (I) Wie groß ist der relative Messfehler in dem Messergebnis $3{,}26 \cdot 0{,}25$ m?

6 (I) Wie groß ist näherungsweise der relative Messfehler für ein Messergebnis von 1,28 m?

7 (I) Zeitmessungen mit einer Stoppuhr haben typischerweise eine Unsicherheit von 0,2 s, zurückführbar auf die menschliche Reaktionszeit zu Beginn und Ende der Messung. Wie groß ist die prozentuale Unsicherheit folgender handgestoppter Messungen: (a) 5 s; (b) 50 s; (c) 5 min?

8 (II) Multiplizieren Sie $2{,}079 \cdot 10^2$ mit $0{,}072 \cdot 10^{-1}$ unter Berücksichtigung der signifikanten Stellen.

9 (II) Addieren Sie $9{,}2 \cdot 10^3$ s $+ 8{,}3 \cdot 10^4$ s $+ 0{,}008 \cdot 10^6$ s.

10 (II) Wie groß sind die Fläche und der relative Messfehler eines Kreises mit dem Radius $3{,}8 \cdot 10^4$ cm?

11 (II) Wie groß ist der relative Messfehler des Volumens einer Kugel mit dem Radius $r = 2{,}86 \pm 0{,}08$ m?

Aufgaben zu 1.4 und 1.5

kompletter Lösungsweg

12 (I) Drücken Sie folgende Größen durch Präfixe aus Tabelle 1.4 aus: (a) 10^6 Volt; (b) 10^{-6} m; (c) $6 \cdot 10^3$ Tage; (d) $18 \cdot 10^2$ Dollar; und (e) $8 \cdot 10^{-9}$ Teile.

13 (I) Schreiben Sie die folgenden Größen als volle Dezimalzahlen mit Standardeinheiten: (a) 286,6 mm; (b) 85 µV; (c) 760 mg; (d) 60,0 Picosekunden; (e) 22,5 Femtometer; und (f) 2,50 Gigavolt.

14 (I) Wie viele Autos sind 50 Hektoautos? Was müssten Sie sein, um einen Megadollar pro Jahr zu verdienen?

15 (I) Bestimmen Sie Ihre Größe in Meter.

16 (I) Der Sonnenabstand von der Erde beträgt 93 Millionen Meilen. Wie viele Meter sind das? Drücken Sie das Ergebnis in (a) Zehnerpotenzen und mit (b) einem metrischen Präfix aus.

17 (I) Wie groß ist der Umrechnungsfaktor zwischen (a) ft^2 und yd^2; (b) m^2 und ft^2?

18 (II) Die Concorde flog mit circa 2300 km/h. Wie lange brauchte sie für eine Meile?

19 (II) Ein typisches Atom hat einen Durchmesser von ungefähr $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ m. (a) Wie viel inch sind das? (b) Wie viele Atome gibt es entlang einer 1,0 cm langen Geraden?

20 (II) Drücken Sie die folgende Summe mit der korrekten Anzahl signifikanter Stellen aus: $2{,}00\,\mathrm{m} + 142{,}5\,\mathrm{cm} + 7{,}24 \cdot 10^5\,\mu\mathrm{m}$.

21 (II) Bestimmen Sie den Umrechnungsfaktor zwischen (a) km/h und mi/h; (b) m/s und ft/s und (c) km/h und m/s.

22 (II) Um wie viel (prozentuell) ist ein Ein-Meilen-Rennen länger als ein 1500-m-Rennen („metrische Meile“)?

23 (II) Ein Lichtjahr ist die Distanz, die das Licht (Geschwindigkeit $= 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s) in einem Jahr zurücklegt. (a) Wie viele Meter sind 1,00 Lichtjahre? (b) Eine astronomische Einheit (AU) ist die Durchschnittsentfernung zwischen Erde und Sonne, sie beträgt $1{,}50 \cdot 10^8$ km. Wie viele AU enthält ein Lichtjahr? (c) Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit ausgedrückt in der Einheit AU/h?

24 (II) Der Durchmesser des Mondes beträgt 3480 km. Wie groß ist seine Oberfläche und wie groß ist sie verglichen mit der Erdoberfläche?

Aufgaben zu 1.6

kompletter Lösungsweg

(*Bemerkung*: Erinnern Sie sich daran, dass bei Grobabschätzungen sowohl in der Rechnung als auch im Endergebnis nur gerundete Zahlen verwendet werden.)

25 (I) Schätzen Sie die Größenordnung (Zehnerpotenz) von: (a) 2800; (b) $86{,}30 \cdot 10^2$; (c) 0,0076 und (d) $15{,}0 \cdot 10^8$.

26 (II) Schätzen Sie, wie viel Zeit ein guter Langstreckenläufer für die Strecke New York Kalifornien benötigen würde.

27 (II) Schätzen Sie den prozentualen Anteil einer Hauswand, die aus Fensterflächen besteht.

28 (II) Schätzen Sie, wie oft ein menschliches Herz im Leben schlägt.

29 (II) Geben Sie eine grobe Schätzung Ihres Körpervolumens in cm^3 an.

30 (II) Schätzen Sie die Zeit, um von Peking nach Paris zu fahren (a) heute und (b) 1906, als ein großes Autorennen zwischen den beiden Städten stattfand.

31 (II) Schätzen Sie die Anzahl der Zahnärzte (a) in San Francisco und (b) in Ihrer Heimatstadt.

32 (II) Schätzen Sie, wie lang eine Person mit einem Handrasenmäher brauchen würde, um ein Fußballfeld zu mähen.

33 (II) Der Reifenabrieb belastet mit Schmutzpartikeln die Atmosphäre. Schätzen Sie, wie viel Abrieb (in kg) jedes Jahr die Luft in den USA verschmutzt. Die Profiltiefe eines neuen Reifens misst schätzungsweise 1 cm. Die Dichte von Gummi beträgt etwa 1200 kg/m^3.

34 (II) Schätzen Sie, wie viele Bücher in eine Universitätsbibliothek mit 1500 Quadratmeter Regalfläche passen.

35 (III) Sie befinden sich in einem Heißluftballon 200 m über den flachen Ebenen von Texas. Sie blicken zum Horizont. Wie weit können Sie sehen, oder anders ausgedrückt: Wie weit ist der Horizont entfernt? Der Erdradius misst ungefähr 6400 km.

Aufgaben zu 1.7

kompletter Lösungsweg

36 (I) Die Geschwindigkeit v eines Körpers ist gegeben durch die Gleichung $v = At^3 - Bt$, wobei t die Zeit ist. Wie lauten die Dimensionen von A und B?

37 (I) Wie lauten die SI-Einheiten für die Konstanten A und B in Aufgabe 36?

38 (II) Drei Studenten leiten die folgenden Gleichungen ab, in denen x die zurückgelegte Entfernung, v die Geschwindigkeit, a die Beschleunigung (m/s^2), t die Zeit, der tiefgestellte Index $_0$ die Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnen: (a) $x = vt^2 + 2at$; (b) $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ und (c) $x = v_0 t + 2at^2$. Welche dieser Gleichungen ist möglicherweise korrekt gemäß einer Einheitenüberprüfung?

Allgemeine Aufgaben

kompletter Lösungsweg

39 Ein Angström (Symbol Å) ist eine alte Längeneinheit, definiert als 10^{-10} m. (a) Wie viele Nanometer hat ein Angström? (b) Wie viele Femtometer oder Fermi (die gebräuchliche Längeneinheit in der Kernphysik) hat ein Angström? (c) Wie viele Angström enthält ein Meter? (d) Wie viele Angström enthält ein Lichtjahr (siehe Aufgabe 23)?

40 Benutzen Sie Tabelle 1.2 für die Abschätzung der Gesamtzahl der Protonen oder Neutronen, die in (a) einem Bakterium, (b) einem DNA-Molekül, (c) im menschlichen Körper und (d) in unserer Galaxis enthalten sind.

41 (a) Wie viele Sekunden hat 1,00 Jahr? (b) Wie viele Nanosekunden hat 1,00 Jahr? (c) Wie viele Jahre sind in 1,00 Sekunde enthalten?

42 Ein Hektar ist definiert als 10^4 m^2. Ein Morgen ist $4 \cdot 10^4$ ft^2. Wie viele Morgen enthält ein Hektar?

43 Schätzen Sie die Anzahl der Busfahrer (a) in Washington D.C. und (b) in Ihrer Heimatstadt.

44 Computerchips (► Abbildung 1.9) werden auf kreisrunden Siliziumscheiben (Wafer) der Dicke 0,60 mm geätzt, die von einem zylinderförmigen Siliziumkristall mit einer Länge von 30 cm geschnitten werden. Wenn jeder Wafer 100 Chips enthalten kann, wie viele Chips können dann maximal aus einem Siliziumzylinder hergestellt werden?

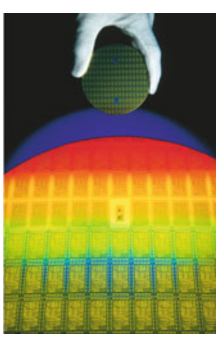


Abbildung 1.9 Aufgabe 44. Die in der Hand (oben) gehaltene Siliziumscheibe ist unten vergrößert und mit farbigem Licht ausgeleuchtet abgebildet. Man erkennt Reihen integrierter Schaltkreise (Chips).

45 Schätzen Sie, wie viel Liter Benzin sämtliche Autofahrer der USA pro Jahr verbrauchen.

46 Schätzen Sie die Menge der Kaugummikugeln in dem Automaten aus ► Abbildung 1.10.

47 Eine vierköpfige Durchschnittsfamilie verbraucht ungefähr 1200 Liter Wasser (etwa 300 Gallonen) pro Tag. (Ein Liter = 1000 cm^3) Wie viel an Tiefe würde ein See jährlich verlieren, wenn er eine gleichförmige Fläche von 50 Quadratkilometer hat und 40 000 Menschen mit Wasser versorgen müsste? Berücksichtigen Sie nur den Wasserbedarf der Bevölkerung, Verdunstung usw. wird vernachlässigt.

Abbildung 1.10 Aufgabe 46. Schätzen Sie die Menge der Kaugummikugeln.

48 Welchen Rauminhalt hat eine Tonne Fels? Schätzen Sie den Durchmesser eines Felsblocks, der eine Tonne wiegt. Machen Sie aber zuerst eine Spontanschätzung: Beträgt er 0,3 m, 0,6 m oder hat er die Größe eines Autos? (*Hinweis*: Fels hat etwa dreimal so viel Masse pro Volumen wie Wasser, dessen Dichte 1 kg pro Liter (10^3 cm^3) beträgt.)

49 Ein heftiger Regenschauer geht auf eine Stadt mit den Ausmaßen 5 km · 8 km nieder und bringt ihr in zwei Stunden 1 cm Regen. Wie viel kg Wasser sind auf die Stadt gefallen? (1 cm^3 Wasser hat eine Masse von 1 Gramm = 10^{-3} kg.)

50 Halten Sie einen Bleistift so vor ihren Augen, dass die stumpfe Spitze den Mond ausblendet (► Abbildung 1.11). Machen Sie nun passende Messungen, um den Durchmesser des Mondes zu bestimmen. Der Abstand Erde Mond beträgt $3{,}8 \cdot 10^5$ km.

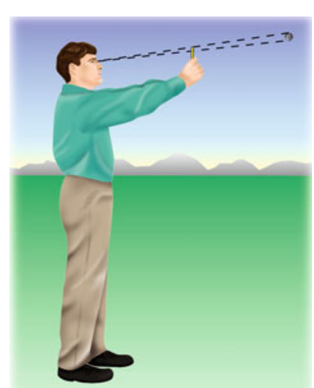


Abbildung 1.11 Aufgabe 50. Wie groß ist der Mond?

51 Schätzen Sie, wie lange es dauern würde, einmal um die Erde zu laufen.

52 Noahs Arche war 300 Ellen lang, 50 Ellen breit und 30 Ellen hoch. Die Elle war ein Einheitsmaß, das der Länge des menschlichen Unterarms einschließlich der Fingerspitzen entsprach. Drücken Sie die Abmessungen der Arche in Meter aus.

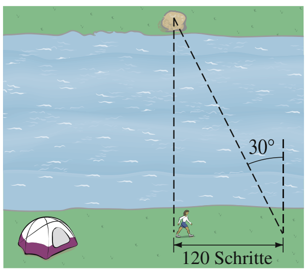


Abbildung 1.12 Aufgabe 53.

53 Jean campiert an einem breiten Fluss und fragt sich, wie breit er ist. Sie nimmt einen großen Felsen am anderen Ufer direkt ihr gegenüber als Bezugspunkt und geht dann flussaufwärts bis sie glaubt, dass der Winkel zwischen ihr und dem Felsen, den sie noch klar erkennen kann, nun 30° beträgt (▶ Abbildung 1.12). Jean nimmt ihre Schrittlänge als etwa ein Yard an. Auf dem Weg zurück zum Lager zählt sie 120 Schritte. Wie breit ist der Fluss (in Meter und Yards)?

54 Ein Liter ($1000\,\text{cm}^3$) Öl wird auf eine glatte Seeoberfläche gegossen. Nehmen Sie an, dass sich das Öl gleichförmig über die Wasserfläche ausbreitet, bis der Ölfilm nur noch eine Moleküllage dick ist, so dass sich die aneinander grenzenden Moleküle gerade noch berühren. Schätzen Sie den Durchmesser des Ölfilms unter der Annahme, dass Moleküle einen Durchmesser von $2 \cdot 10^{-10}$ m haben.

55 Vergleichen Sie die prozentuale Unsicherheit in θ und $\sin\theta$, wenn (a) $\theta = 15{,}0° \pm 0{,}5°$ und (b) $\theta = 75{,}0° \pm 0{,}5°$ ist.

56 Sie liegen auf dem Sand am Rande des Meeres und beobachten ein Segelboot. Wenn Sie wissen, dass die Entfernung von der Wasseroberfläche bis zum oberen Ende des Rumpfes 2,5 m beträgt, schätzen Sie, wie weit das Boot weg ist, wenn Sie den Rumpf nicht mehr sehen können (dazu benutzen Sie ein Fernrohr). Der Erdradius beträgt $6{,}38 \cdot 10^6$ m.

Beschreibung von Bewegungen – Kinematik in einer Raumrichtung

2

ÜBERBLICK

Ein Rennwagen hat einen Fallschirm ausgelöst, um seine Geschwindigkeit schnell zu reduzieren. Die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Fahrzeugs werden durch den grünen (v) bzw. durch den goldenen (a) Pfeil dargestellt. Beachten Sie, dass v und a in unterschiedliche Richtungen zeigen. Bewegung wird mithilfe der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung beschrieben. Wir sehen hier, dass die Beschleunigung a manchmal in die entgegengesetzte Richtung wie die Geschwindigkeit v verlaufen kann. Wir werden auch Bewegung mit konstanter Beschleunigung genau untersuchen, einschließlich der vertikalen Bewegung von Körpern, die unter dem Einfluss der Schwerkraft fallen.

2. Beschreibung von Bewegungen – Kinematik in einer Raumrichtung

Die Bewegung von Körpern – Bälle, Kraftfahrzeuge, Jogger und selbst Sonne und Mond – gehört zum alltäglichen Leben. Erst im 16. und 17. Jahrhundert etablierte sich unser modernes Verständnis von Bewegung. Viele trugen zu diesem Verständnis bei, insbesondere Galileo Galilei (1564–1642) und Isaac Newton (1642–1727).

Die Untersuchung der Bewegung von Körpern sowie der verwandten Begriffe Kraft und Energie bilden den Bereich der **Mechanik**. Die Mechanik wird normalerweise in zwei Bereiche unterteilt: die **Kinematik**, die die Bewegungen von Körpern beschreibt, und die **Dynamik**, die sich mit der Kraft und mit der Frage beschäftigt, warum sich Körper in einer bestimmten Art und Weise bewegen. Dieses und das nächste Kapitel befassen sich mit der Kinematik.

Wir beginnen mit der Erörterung von Körpern, die sich ohne Drehimpuls bewegen (▸ Abbildung 2.1a). Eine solche Bewegung nennt man **Translationsbewegung**. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Beschreibung eines Körpers, der sich an einer geraden Linie entlang bewegt. Hierbei handelt es sich um eine eindimensionale Bewegung. In Kapitel 3 untersuchen wir, wie Translationsbewegungen in zwei (oder drei) Raumrichtungen zu beschreiben sind.

Wir werden häufig von dem Begriff oder Modell eines **Massenpunktes** Gebrauch machen, der als mathematischer Punkt betrachtet wird und keine räumliche Ausdehnung (keine Größe) hat. Ein Massenpunkt kann ausschließlich eine Translationsbewegung ausführen. Die Abstraktion eines Körpers auf einen Massenpunkt ist für viele reale Situationen nützlich, bei denen uns nur die Translationsbewegung interessiert und die Größe des Körpers keine Rolle spielt. Wir könnten z. B. eine Billiardkugel oder auch ein Raumfahrzeug, das zum Mond fliegt, als Massenpunkt für viele Anwendungen betrachten.

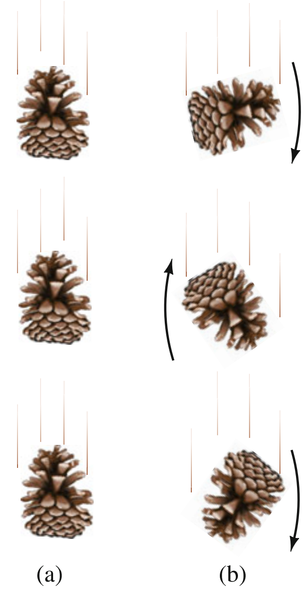


Abbildung 2.1 Der Kieferzapfen bei (a) erfährt beim Fallen eine reine Translationsbewegung, während er bei (b) sowohl eine Dreh- als auch eine Translationsbewegung macht.

2.1 Bezugssystem und Weg

Alle Messungen werden in Bezug auf ein Bezugssystem durchgeführt

Jede Messung eines Ortes, eines Weges oder einer Geschwindigkeit muss mittels eines **Bezugssystems** durchgeführt werden. Wenn Sie z. B. mit dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h reisen, könnten Sie eine Person bemerken, die mit einer Geschwindigkeit von z. B. 5 km/h in Richtung der Spitze des Zuges an Ihnen vorbeigeht (▸ Abbildung 2.2). Natürlich ist dies die Geschwindigkeit der Person in Bezug auf den Zug als Bezugssystem. In Bezug auf den Erdboden bewegt sich diese Person mit einer Geschwindigkeit von $80\,\text{km/h} + 5\,\text{km/h} = 85\,\text{km/h}$. Bei der Angabe einer Geschwindigkeit ist die Angabe des Bezugssystems immer wichtig. Im Alltag meinen wir „in Bezug auf die Erde“, ohne überhaupt darüber nachzudenken. Dort, wo Unklarheiten bestehen könnten, muss jedoch das Bezugssystem angegeben werden.

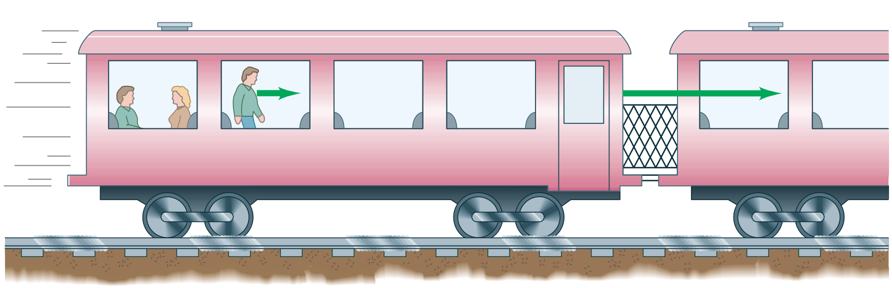


Abbildung 2.2 Eine Person bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h in Richtung des Anfangs eines Zuges. Der Zug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h in Bezug auf die Erde, so dass die Geschwindigkeit der gehenden Person in Bezug auf den Erdboden 85 km/h beträgt.

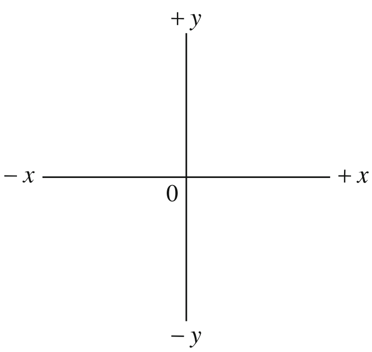


Abbildung 2.3 Ein Standardsystem mit x- und y-Koordinatenachsen.

Wenn wir die Bewegung eines Körpers angeben, ist nicht nur die Angabe der Geschwindigkeit, sondern auch die Angabe der Bewegungsrichtung wichtig. Wir können häufig eine Richtung mithilfe der Himmelsrichtungen Nord, Süd, Ost und West und durch „aufwärts“ und „abwärts“ angeben. In der Physik zeichnen wir zur Darstellung eines Bezugssystems ein **Koordinatensystem**, wie in ▸ Abbildung 2.3 veranschaulicht. Wir können den Ursprung 0 und die Richtungen der x- und y-Achse beliebig wählen. Die x- und die y-Achse stehen immer senkrecht zueinander. Für Körper, die rechts vom Koordinatenursprung (0) an der x-Achse positioniert sind, wählen wir normalerweise eine positive x-Koordinate. Dann haben Punkte links von 0 eine negative x-Koordinate. Die y-Koordinate ist positiv, wenn sich der Massenpunkt oberhalb von 0 befindet, und negativ, wenn er sich unterhalb von 0 befindet. Jeder Punkt in der Ebene kann durch Angabe seiner x- und y-Koordinate genau angegeben werden. Bei drei Raumrichtungen wird eine z-Achse, die senkrecht zur x- und y-Achse verläuft, hinzugefügt.

Bei einer Bewegung entlang nur einer Raumrichtung, einer eindimensionalen Bewegung, wählen wir häufig die x-Achse als die Gerade, entlang der die Bewegung stattfindet. Dann ist der **Ort** eines Massenpunktes in jedem beliebigen Moment durch seine x-Koordinate gegeben.

Weg

Der **Weg** ist eine Größe, die sowohl einen Betrag als auch eine Richtung hat. Solche Größen werden **Vektoren** genannt und in Diagrammen durch Pfeile dargestellt. In ▸ Abbildung 2.4 stellt der blaue Pfeil z. B. den Weg dar, der einen Betrag von 40 m besitzt und dessen Richtung nach rechts verläuft. Der Betrag eines Vektors ist seine Länge, also eine Zahl. Eine Zahl bezeichnet man auch als **Skalar**.

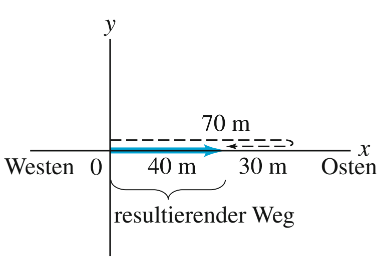


Abbildung 2.4 Eine Person geht 70 m nach Osten, dann 30 m nach Westen. Der gesamte resultierende Weg beträgt 100 m (schwarzer Pfeil), die Verschiebung (blauer Pfeil) beträgt 40 m in östlicher Richtung.

Wenn wir das Symbol für einen Vektor schreiben, verwenden wir immer Fettdruck. So schreiben wir für die Geschwindigkeit **v**. (Bei handschriftlich verfassten Arbeiten kann das Symbol für einen Vektor durch einen Pfeil über dem Buchstaben dargestellt werden, ein $\vec{v}$ für Geschwindigkeit.) Wenn wir es nur mit dem Betrag von Vektoren zu tun haben, schreiben wir einfach v in kursiver Schrift.

In Kapitel 3 werden wir uns ausführlicher mit Vektoren befassen. Vektoren haben stets so viele Komponenten wie die Zahl der für eine Aufgabenstellung betrachteten Raumrichtungen: eindimensional – eine Vektorkomponente, zweidimensional – zwei Vektorkomponenten, dreidimensional – drei Vektorkomponenten. Hier beschäftigen wir uns nur mit eindimensionaler Bewegung entlang einer Geraden, und in diesem Fall haben Vektoren, die in eine Richtung zeigen, ein positives Vorzeichen, während Vektoren, die in die entgegengesetzte Richtung zeigen, ein negatives Vorzeichen haben.

Betrachten wir die Bewegung eines Körpers über einen bestimmten Zeitraum. Nehmen wir an, dass sich ein Massenpunkt zu einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_1 am Punkt x_1 auf der x-Achse in dem in ▸ Abbildung 2.5 dargestellten Koordinatensystem befindet. Nehmen wir weiter an, dass sich der Massenpunkt zu einem späteren Zeitpunkt t_2 am Punkt x_2 befindet. Der Weg unseres Massenpunktes beträgt $x_2 - x_1$ und wird durch den Pfeil, der in ▸ Abbildung 2.5 nach rechts zeigt, dargestellt. Die folgende Schreibweise ist üblich:

$$s = x_2 - x_1 = \Delta x \,,$$

wobei das Symbol Δ (der griechische Buchstabe Delta) „Änderung in“ bedeutet. Dann bedeutet Δx „die Änderung in x“, die als Weg s bezeichnet wird. Beachten Sie, dass die „Änderung in“ einer Größe den Endwert dieser Größe minus dem Anfangswert bedeutet.

Nehmen wir als konkretes Beispiel $x_1 = 10{,}0\,\text{m}$ und $x_2 = 30{,}0\,\text{m}$. Dann gilt

$$s = x_2 - x_1 = 30{,}0\,\text{m} - 10{,}0\,\text{m} = 20{,}0\,\text{m} \,.$$

Siehe ▸ Abbildung 2.5.

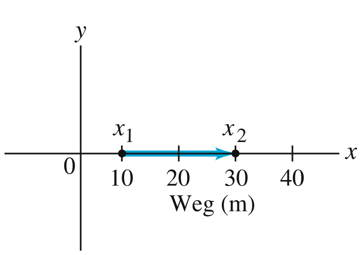


Abbildung 2.5 Der Pfeil stellt die Verschiebung $x_2 - x_1$ dar. Wege sind in m angegeben.

Jetzt betrachten wir einen Massenpunkt, der sich, wie in ▶ Abbildung 2.6 dargestellt, nach links bewegt. Hier ist der Ausgangspunkt eines Massenpunktes, z. B. das Fußende einer Person, bei $x_1 = 30{,}0\,\text{m}$. Die Person bewegt sich nach links bis zum Punkt $x_2 = 10{,}0\,\text{m}$. In diesem Fall gilt

$$s = x_2 - x_1 = 10{,}0\,\text{m} - 30{,}0\,\text{m} = -20{,}0\,\text{m}$$

und der blaue Pfeil, der den Weg darstellt, zeigt nach links. Dieses Beispiel veranschaulicht, dass bei der Betrachtung einer eindimensionalen Bewegung ein Vektor, der nach rechts zeigt, einen positiven Wert hat, während ein Vektor, der nach links zeigt, einen negativen Wert besitzt.

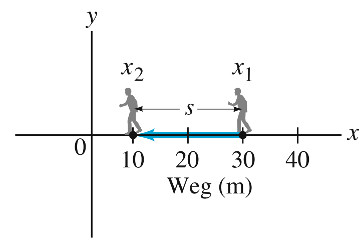


Abbildung 2.6 Bei dem Weg $s = x_2 - x_1 = 10{,}0\,\text{m} - 30{,}0\,\text{m}$ zeigt der Wegvektor nach links.

2.2 Durchschnittsgeschwindigkeit

T Geschwindigkeit, Grafische Darstellung von Bewegung

Bewegte Körper unterscheiden sich von ruhenden durch eine von null verschiedene Geschwindigkeit. Wie der Weg auch, ist die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe, jedoch wird im Deutschen für die Geschwindigkeit als Vektor und die Geschwindigkeit als Skalar (Zahl), die den Betrag des Vektors ausdrückt, **ein** Begriff, nämlich „Geschwindigkeit“, verwendet.

Im Englischen drückt „velocity“ die vektorielle Größe und „speed“ die skalare Größe aus. Im Unterschied zum Deutschen weiß man also durch die Wortwahl, ob die vektorielle oder skalare Größe gemeint ist.

Durchschnittsgeschwindigkeit (skalar)

Der Betrag der Geschwindigkeit bringt zum Ausdruck, wie schnell sich ein Körper in einem gegebenen Zeitraum unabhängig von der Richtung bewegt. Wenn ein Auto in 3 Stunden 240 Kilometer (km) zurücklegt, sprechen wir von einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h. Im Allgemeinen wird die **Durchschnittsgeschwindigkeit** eines Massenpunktes als *Quotient aus dem zurückgelegten Gesamtweg und der Zeit, die für diesen Weg benötigt wird*, definiert:

$$\text{Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}}\,. \tag{2.1}$$

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** ist anstatt mit dem zurückgelegten Weg mit dem *gesamten Weg* definiert:

$$\begin{aligned}\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} &= \frac{\text{gesamter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}}\\ &= \frac{\text{Endposition} - \text{Anfangsposition}}{\text{verstrichene Zeit}}\,.\end{aligned}$$

Für die Betrachtung der eindimensionalen Bewegung eines Körpers im Allgemeinen nehmen wir an, dass sich ein Massenpunkt zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 am Punkt x_1 auf der x-Achse in einem Koordinatensystem befindet, und zu einem späteren Zeitpunkt t_2 am Punkt x_2. Die verstrichene Zeit ist $t_2 - t_1$, und während dieses Zeitintervalls betrug der Weg unseres Massenpunktes $\Delta s = x_2 - x_1$. Dann kann die Durchschnittsgeschwindigkeit, die als *Quotient aus dem Wegelement (Weg) und dem verstrichenen Zeitintervall* definiert ist, geschrieben werden als

Durchschnittsgeschwindigkeit (vektoriell)

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,, \tag{2.2}$$

wobei v für Geschwindigkeit (velocity) steht und der Strich über dem v das Standardsymbol für „Durchschnitt“ ist.

Gewöhnlich wählt man die Koordinatenachsen so, dass die positive x-Achse nach rechts verläuft. Wenn nun x_2 kleiner als x_1 ist, sich der Massenpunkt also nach links bewegt, dann ist $\Delta s = x_2 - x_1$ kleiner als null. Das Vorzeichen des Weges und somit das Vorzeichen der Geschwindigkeit zeigt die Richtung an: bei einem Massenpunkt, der sich entlang der positiven x-Achse nach rechts bewegt, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit positiv, bei einem Massenpunkt, der sich nach links bewegt, negativ. Die Richtung der Durchschnittsgeschwindigkeit ist immer dieselbe wie die Richtung des Weges.

PROBLEMLÖSUNG

Das Zeichen + oder − kann die Richtung für eine lineare Bewegung anzeigen.

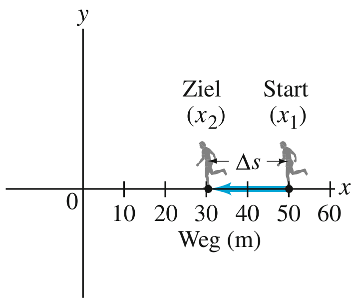


Abbildung 2.7 Beispiel 2.1. Eine Person läuft von $x_1 = 50{,}0$ m nach $x_2 = 30{,}5$ m. Der Weg beträgt $-19{,}5$ m.

Beispiel 2.1 Durchschnittsgeschwindigkeit eines Läufers

Der Ort eines Läufers in Abhängigkeit von der Zeit wird als Bewegung entlang der x-Achse eines Koordinatensystems aufgezeichnet. Während eines Zeitintervalls von 3,00 s verändert sich der Ort des Läufers von $x_1 = 50{,}0$ m zu $x_2 = 30{,}5$ m, wie in ▸ Abbildung 2.7 dargestellt. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit lief der Läufer?

Lösung

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Quotient aus dem Weg und dem verstrichenen Zeitintervall. Der Weg ist $\Delta s = x_2 - x_1 = 30{,}5\,\text{m} - 50{,}0\,\text{m} = -19{,}5\,\text{m}$. Das Zeitintervall beträgt $\Delta t = 3{,}00$ s. Somit beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-19{,}5\,\text{m}}{3{,}00\,\text{s}} = -6{,}50\,\text{m/s}\,.$$

Der Weg und die Durchschnittsgeschwindigkeit sind negativ. Diese Tatsache sagt uns (falls wir es nicht bereits wissen), dass sich der Läufer entlang der x-Achse nach links bewegt, wie der Pfeil in ▸ Abbildung 2.7 anzeigt. So können wir sagen, dass der Läufer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6,50 m/s nach links lief.

Beispiel 2.2 Weg, den eine Radfahrerin zurücklegt

Wie weit kann eine Radfahrerin in 2,5 h auf einer geraden Straße fahren, wenn sie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 18 km/h fährt?

Lösung

Wir möchten den zurückgelegten Weg berechnen, deshalb verwenden wir die Gleichung 2.2. Dabei ist Δs der Weg und $\overline{v}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit. Dies können wir schreiben als

$$\Delta s = \overline{v}\Delta t = (18\,\text{km/h})(2{,}5\,\text{h}) = 45\,\text{km}\,.$$

T **Geschwindigkeit, Grafische Darstellung von Bewegung**

2.3 Momentangeschwindigkeit

Wenn man mit einem Auto auf einer geraden Straße in 2,0 h 150 km fährt, dann ist der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit 75 km/h. Es ist allerdings unwahrscheinlich, dass man jederzeit genau 75 km/h gefahren ist. Zur Beschreibung dieser Situation benötigen wir den Begriff der *Momentangeschwindigkeit*, der die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Moment bezeichnet. (Hierbei handelt es sich um den Betrag, den ein Tacho normalerweise anzeigt.) Genauer gesagt, ist die **Momentangeschwindigkeit** in jedem beliebigen Moment definiert als *die Durchschnittsgeschwindigkeit über ein unendlich kleines Zeitintervall*. Das bedeutet, dass die Gleichung 2.2 unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Grenzwert von Δt extrem klein wird und gegen Null geht, berechnet werden muss. Wir können die Definition der Momentangeschwindigkeit v für eine eindimensionale Bewegung schreiben als

Momentangeschwindigkeit

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \tag{2.3}$$

Die Schreibweise $\lim_{\Delta t \to 0}$ bedeutet, dass der Quotient $\Delta s/\Delta t$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Grenzwert von Δt gegen Null geht, berechnet werden muss. Wir setzen in dieser Definition allerdings nicht einfach $\Delta t = 0$, denn dann wäre Δs ebenfalls Null und wir hätten eine nicht definierte Zahl. Wir betrachten vielmehr den *Quotienten* $\Delta s/\Delta t$ als Ganzes. Wenn wir Δt gegen Null gehen lassen, geht Δs ebenfalls gegen Null. Der Quotient $\Delta s/\Delta t$ nähert sich jedoch einem definierten Wert, der die Momentangeschwindigkeit in einem gegebenen Moment angibt.

Für die Momentangeschwindigkeit wird das Symbol v, für die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ mit einem Strich verwendet. Im weiteren Verlauf dieses Buches beziehen wir uns bei Verwendung des Begriffes „Geschwindigkeit" auf die Momentangeschwindigkeit. Wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit gemeint ist, werden wir dies durch Hinzufügen des Wortes „Durchschnitt" deutlich machen.

Wenn sich ein Massenpunkt mit gleichförmiger (d. h. konstanter) Geschwindigkeit über ein bestimmtes Zeitintervall bewegt, dann ist seine Momentangeschwindigkeit in jedem beliebigen Moment dieselbe wie seine Durchschnittsgeschwindigkeit (siehe ▶ Abbildung 2.8a). In vielen Situationen ist dies jedoch nicht der Fall. Ein Auto kann z. B. aus dem Stillstand starten, auf 50 km/h beschleunigen, für eine bestimmte Zeit mit dieser Geschwindigkeit weiterfahren, dann in einem Verkehrsstau auf 20 km/h abbremsen und schließlich an seinem Zielort anhalten, nachdem es insgesamt 15 km in 30 Minuten zurückgelegt hat. Diese Fahrt ist in der Kurve in ▶ Abbildung 2.8b aufgezeichnet. Die Durchschnittsgeschwindigkeit (gestrichelte Linie), die $\overline{v} = \Delta s/\Delta t = 15\,\text{km}/0{,}50\,\text{h} = 30\,\text{km/h}$ beträgt, ist ebenfalls in der Abbildung dargestellt.

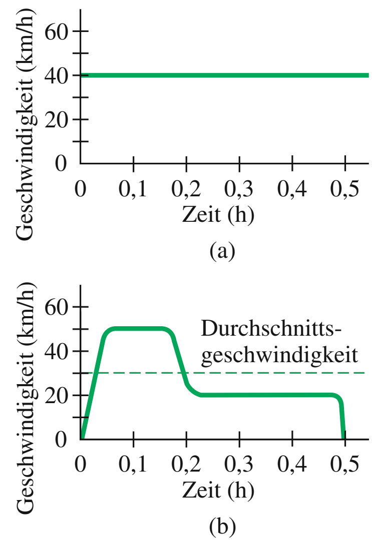


Abbildung 2.8 Geschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit von der Zeit:
(a) bei konstanter Geschwindigkeit;
(b) bei variierender Geschwindigkeit.

Zum besseren Verständnis der Momentangeschwindigkeit betrachten wir eine Weg-Zeit-Kurve, in der der Ort eines Massenpunktes im Verhältnis zur Zeit (x im Verhältnis zu t), wie in ▶ Abbildung 2.9 veranschaulicht, dargestellt wird. (Beachten Sie, dass diese Darstellung sich von der Darstellung der „Bahn" eines Massenpunktes in einer $x-y$-Kurve unterscheidet.) Zum Zeitpunkt t_1 befindet sich der Massenpunkt im Ort x_1 und zum Zeitpunkt t_2 im Ort x_2. In der Kurve stellen P_1 und P_2 diese beiden Punkte dar. Eine vom Punkt P_1 (x_1, t_1) zum Punkt P_2 (x_2, t_2) gezogene Gerade bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten Δs und Δt sind. Der Quotient $\Delta s/\Delta t$ ist die **Steigung** der Geraden P_1P_2. Aber $\Delta s/\Delta t$ ist auch die Durchschnittsgeschwindigkeit des Massenpunktes während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$. Daher folgern wir, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Massenpunktes während eines beliebigen Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ gleich der Steigung der Geraden (oder *Sehne*) ist, die die beiden Punkte (x_1, t_1) und (x_2, t_2) auf einer Weg-Zeit-Kurve verbindet.

Die Steigung der Sehne, die 2 Punkte auf einer Weg-Zeit-Kurve miteinander verbindet, entspricht der Durchschnittsgeschwindigkeit

Betrachten wir nun einen Zeitpunkt t_i in der Mitte zwischen t_1 und t_2, zu dem sich der Massenpunkt am Ort x_i befindet (▶ Abbildung 2.10). In diesem Fall ist die Steigung der Geraden P_1P_i kleiner als die Steigung von P_1P_2. Somit ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $t_i - t_1$ kleiner als die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $t_2 - t_1$.

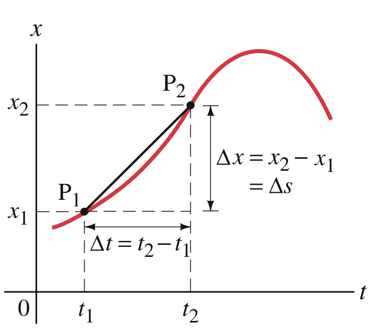
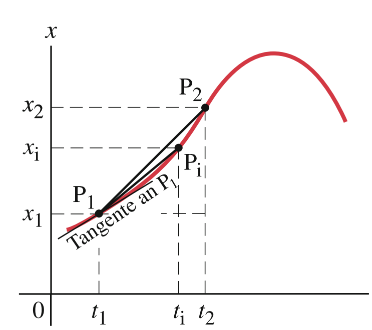


Abbildung 2.9 Weg-Zeit-Kurve eines Massenpunktes. Die Steigung der Geraden P_1P_2 stellt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Massenpunktes während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ dar.

Abbildung 2.10 Dieselbe Weg-Zeit-Kurve wie in Abbildung 2.9. Beachten Sie aber, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $t_i - t_1$ (Steigung von P_1P_i) kleiner ist als die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $t_2 - t_1$. Die Steigung der dünn eingezeichneten Tangente an der Kurve im Punkt P_1 ist identisch mit der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1.



Die Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve ist gleich der Momentangeschwindigkeit

Stellen wir uns nun vor, dass der Punkt P_i in ► Abbildung 2.10 immer näher an den Punkt P_1 heranrückt. Das bedeutet, dass wir das Zeitintervall $t_i - t_1$, das wir jetzt Δt nennen, immer kleiner werden lassen. Die Steigung der Geraden, die die beiden Punkte verbindet, nähert sich immer mehr der Steigung einer Tangente an die Kurve im Punkt P_1 an. Da wir Δt als immer kleiner annehmen, nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit (gleich der Steigung der Sehne) der Steigung der Tangente im Punkt P_1 an. Die Definition der Momentangeschwindigkeit (Gleichung 2.3) ist der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn Δt gegen Null geht. Somit *ist die Momentangeschwindigkeit gleich der Steigung der Tangente an die Kurve* in diesem Punkt (die wir einfach als „Steigung der Kurve" in diesem Punkt bezeichnen können).

In Gleichung 2.3 wird der Grenzwert als $\Delta t \to 0$ in Differentialschreibweise als $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ geschrieben und als *Ableitung* von x nach t bezeichnet. So können wir die Gleichung 2.3 in Differentialschreibweise schreiben als:

Momentangeschwindigkeit

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (2.4)$$

Diese Gleichung ist die Definition der Momentangeschwindigkeit für eindimensionale Bewegungen.

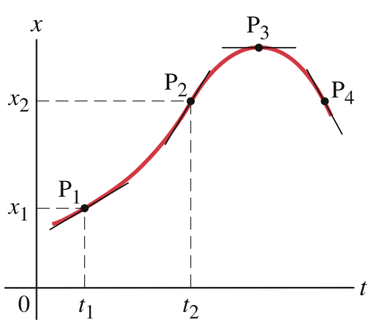


Abbildung 2.11 Dieselbe Weg-Zeit-Kurve wie in Abbildung 2.9 und Abbildung 2.10. Hier wird die Steigung allerdings in vier verschiedenen Punkten gezeigt: in P_3 ist die Steigung gleich Null, d. h. $v = 0$. In P_4 ist die Steigung negativ, d. h. $v < 0$.

Da die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Moment gleich der Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve in diesem Moment ist, ist die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Zeitpunkt aus einer solchen Kurve ersichtlich. So nimmt z. B. in ► Abbildung 2.11 (in der dieselbe Kurve wie in ► Abbildung 2.9 und ► Abbildung 2.10 dargestellt ist) die Steigung kontinuierlich zu, wenn unser Massenpunkt sich von x_1 nach x_2 bewegt. Somit nimmt auch die Geschwindigkeit zu. Für Zeiten nach t_2 nimmt die Steigung allerdings langsam ab und erreicht im Punkt P_3 in ► Abbildung 2.11, wenn x sein Maximum erreicht, null (d. h. $v = 0$). Nach diesem Punkt, z. B. im Punkt P_4, ist die Steigung negativ. Folglich ist die Geschwindigkeit negativ, was Sinn macht, da x jetzt abnimmt – der Massenpunkt bewegt sich auf abnehmende x-Werte zu, d. h. er bewegt sich in einer xy-Weg-Kurve nach links.

Wenn sich ein Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit über ein bestimmtes Zeitintervall bewegt, ist seine Momentangeschwindigkeit gleich seiner Durchschnittsgeschwindigkeit. In diesem Fall ist die Weg-Zeit-Kurve eine Gerade, deren Steigung gleich der Geschwindigkeit ist. Die Kurve in ► Abbildung 2.9 hat keine geraden Abschnitte, d. h. es gibt keine Zeitintervalle, in denen die Geschwindigkeit konstant ist.

Beispiel 2.3 Weg-Zeit-Funktion

Ein Düsentriebwerk bewegt sich auf einer Versuchsstrecke (die wir x-Achse nennen) wie in ► Abbildung 2.12a dargestellt. Wir behandeln das Triebwerk wie einen Massenpunkt. Sein Ort in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch die Gleichung $x = At^2 + B$, wobei $A = 2{,}10\,\mathrm{m/s^2}$ und $B = 2{,}80\,\mathrm{m}$. Diese Gleichung ist in ► Abbildung 2.12b dargestellt.

a Ermitteln Sie den Weg des Triebwerkes während des Zeitintervalls von $t_1 = 3{,}00\,\mathrm{s}$ nach $t_2 = 5{,}00\,\mathrm{s}$.

b Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit während dieses Zeitintervalls.

c Ermitteln Sie den Betrag der Momentangeschwindigkeit bei $t = 5{,}00\,\mathrm{s}$.

Lösung

a Bei $t_1 = 3{,}00$ s ist der Ort (Punkt P_1 in ► Abbildung 2.12b)

$$x_1 = At_1^2 + B = (2{,}10\,\mathrm{m/s^2})(3{,}00\,\mathrm{s})^2 + 2{,}80\,\mathrm{m} = 21{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Bei $t_2 = 5{,}00$ s ist der Ort (P_2 in ► Abbildung 2.12b)

$$x_2 = (2{,}10\,\mathrm{m/s^2})(5{,}00\,\mathrm{s})^2 + 2{,}80\,\mathrm{m} = 55{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Der Weg beträgt somit

$$\Delta s = 55{,}3\,\mathrm{m} - 21{,}7\,\mathrm{m} = 33{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

b Der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit kann dann berechnet werden als

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{33{,}6\,\mathrm{m}}{2{,}00\,\mathrm{s}} = 16{,}8\,\mathrm{m/s}\,.$$

Dies ist gleich der Steigung der Geraden, die die Punkte P_1 und P_2, wie in ► Abbildung 2.12b dargestellt, verbindet.

c Die Momentangeschwindigkeit bei $t = t_2 = 5{,}00$ s ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt P_2, wie in ► Abbildung 2.12b dargestellt, und wir könnten diese Steigung außerhalb des Graphen messen, um t_2 zu erhalten. Wir können v genauer und für jeden beliebigen Zeitpunkt t unter Verwendung der gegebenen Formel

$$x = At^2 + B$$

bestimmen. Dies ist der Ort x des Triebwerkes zum Zeitpunkt t. Wenn wir die Formeln für Ableitungen verwenden, ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ct^n) = nCt^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

wobei C jede beliebige Konstante ist. Dann gilt

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^2 + B\right) = 2At\,.$$

$A = 2{,}10\,\mathrm{m/s^2}$, daher gilt bei $t = t_2 = 5{,}00$ s

$$v_2 = 2At = 2(2{,}10\,\mathrm{m/s^2})(5{,}00\,\mathrm{s}) = 21{,}0\,\mathrm{m/s}\,.$$

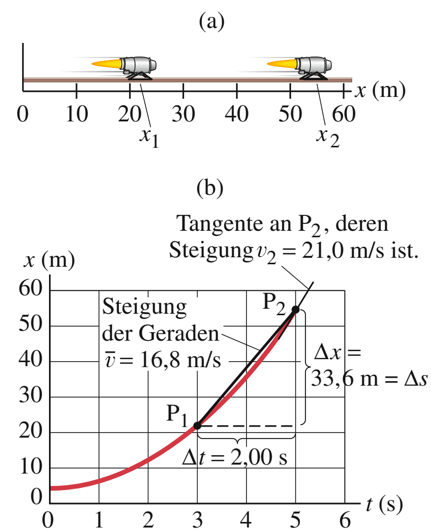


Abbildung 2.12 Beispiel 2.3. (a) Ein Triebwerk, das auf einer geraden Strecke fährt. (b) Weg-Zeit-Kurve: $x = At^2 + B$.

2.4 Beschleunigung

T Grafische Darstellung von Bewegung

Wenn ein Massenpunkt seine Geschwindigkeit ändert, spricht man von Beschleunigung. Ein Auto, dessen Geschwindigkeit betragsmäßig von Null auf 80 km/h ansteigt, beschleunigt. Das bedeutet, dass die Beschleunigung anzeigt, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Massenpunktes ändert.

Durchschnittsbeschleunigung

T Beschleunigung bei eindimensionaler Bewegung

Die **Durchschnittsbeschleunigung** ist definiert als Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung und der für diese Änderung benötigten Zeit:

Durchschnittsbeschleunigung

$$\text{Durchschnittsbeschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{verstrichene Zeit}}\,.$$

In Symbolen ist die Durchschnittsbeschleunigung $\overline{a}$ über ein Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$, in dem sich die Geschwindigkeit um $\Delta v = v_2 - v_1$ ändert, definiert als

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\,. \tag{2.5}$$

Bei der Beschleunigung handelt es sich auch um einen Vektor. Für eindimensionale Bewegungen benötigen wir allerdings nur ein Plus- oder Minuszeichen, um die Richtung in Bezug auf ein ausgewähltes Koordinatensystem anzugeben.

Beispiel 2.4 Durchschnittsbeschleunigung

Ein Auto beschleunigt auf einer geraden Straße in 5,0 s aus dem Stillstand auf 75 km/h, ► Abbildung 2.13. Welchen Betrag hat seine Durchschnittsbeschleunigung?

Lösung

Das Auto startet aus dem Stillstand, also gilt $v_1 = 0$. Die Endgeschwindigkeit beträgt $v_2 = 75$ km/h. Ausgehend von der Gleichung 2.5 ist die Durchschnittsbeschleunigung

$$\overline{a} = \frac{75\,\text{km/h} - 0\,\text{km/h}}{5{,}0\,\text{s}} = 15\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}} = 4{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Dies liest man als „fünfzehn Stundenkilometer pro Sekunde“ und es bedeutet, dass die Geschwindigkeit sich durchschnittlich um 15 km/h während jeder Sekunde geändert hat. Unter der Annahme, dass die Beschleunigung konstant war, heißt das, dass die Geschwindigkeit des Autos in der ersten Sekunde von Null auf 15 km/h zunahm. Während der nächsten Sekunde erhöhte sich die Geschwindigkeit um weitere 15 km/h auf 30 km/h etc., ► Abbildung 2.13. (Natürlich könnten diese Zahlen anders aussehen, wenn die Momentanbeschleunigung nicht konstant war.)

Achtung: Nicht Geschwindigkeit und Beschleunigung miteinander verwechseln

Bitte beachten Sie, dass die *Beschleunigung anzeigt, wie schnell die Geschwindigkeit sich ändert,* während *die Geschwindigkeit anzeigt, wie schnell sich der Ort ändert*. In diesem letzten Beispiel enthielt die berechnete Beschleunigung zwei verschiedene Zeiteinheiten: Stunden und Sekunden. Normalerweise verwenden wir eher nur Sekunden. Dafür können wir km/h in m/s umrechnen (siehe Abschnitt 2.5 und Beispiel 2.4):

$$75\,\text{km/h} = \left(75\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}}\right) = 20{,}8\,\text{m/s}\,.$$

Dann ergibt sich

$$\overline{a} = \frac{20{,}8\,\text{m/s} - 0{,}0\,\text{m/s}}{5{,}0\,\text{s}} = 4{,}16\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 4{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Wir schreiben diese Einheiten immer als m/s^2 (Meter pro Sekunde zum Quadrat). Entsprechend der obigen Berechnung änderte sich die Geschwindigkeit in Beispiel 2.4 (► Abbildung 2.13) durchschnittlich um 4,16 m/s während jeder Sekunde bei einer Gesamtänderung von 20,8 m/s über 5,0 s.

Beispiel 2.5 · Begriffsbildung Geschwindigkeit und Beschleunigung

(a) Wenn die Geschwindigkeit eines Massenpunktes null ist, bedeutet dies, dass auch die Beschleunigung null ist? (b) Wenn die Beschleunigung null ist, bedeutet dies, dass auch die Geschwindigkeit null ist?

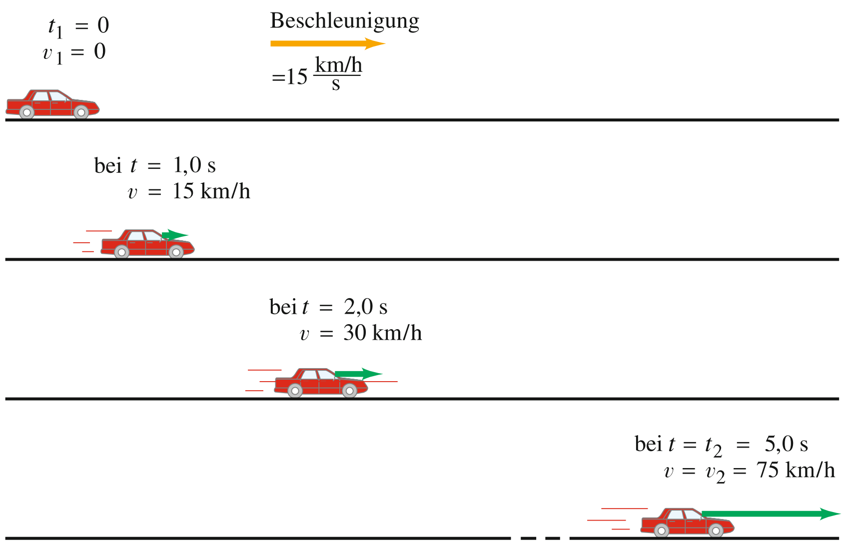


Abbildung 2.13 Beispiel 2.4. Das Auto wird am Start bei $v_1 = 0$ zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ gezeigt. Es wird weitere drei Male gezeigt, bei $t = 1{,}0$ s, bei $t = 2{,}0$ s und bei $t = t_2 = 5{,}00$ s. Wir nehmen an, dass die Beschleunigung konstant und gleich 15 km/h/s ($= 4{,}17\ \text{m/s}^2$) ist. Die grünen Pfeile stellen die Geschwindigkeitsvektoren dar. Ihre jeweilige Länge zeigt den Betrag der Geschwindigkeit in dem Zeitpunkt an. Der Beschleunigungsvektor ist der orangefarbene Pfeil. Wege können aus dieser Kurve nicht direkt bestimmt werden.

Lösung

Eine Geschwindigkeit von null bedeutet nicht zwangsläufig, dass auch die Beschleunigung null ist, und eine Beschleunigung von null bedeutet nicht, dass die Geschwindigkeit null ist.

a Wenn Sie z. B. mit dem Fuß das Gaspedal Ihres Autos, das sich im Stillstand befindet, betätigen, beginnt die Geschwindigkeit bei null, die Beschleunigung ist aber ungleich null, da sich die Geschwindigkeit des Autos verändert. (Wie sonst könnte sich Ihr Auto in Bewegung setzen, wenn sich seine Geschwindigkeit nicht verändern würde – d. h. wenn seine Beschleunigung null wäre?)

b Wenn Sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h auf einer geraden Straße fahren, ist Ihre Beschleunigung null.

Beispiel 2.6 Ein Auto wird langsamer

Ein Kraftfahrzeug bewegt sich auf einer geraden Straße nach rechts, die wir als positive x-Achse annehmen (▶ Abbildung 2.14) und der Fahrer betätigt die Bremse. Welche Durchschnittsbeschleunigung hatte das Auto bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_1 = 15{,}0\ \text{m/s}$, wenn das Auto 5,0 s benötigt, um auf $v_2 = 5{,}0\ \text{m/s}$ abzubremsen?

Lösung

Die Durchschnittsbeschleunigung ist gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung und der verstrichenen Zeit, Gleichung 2.5. Nennen wir den Anfangszeitpunkt $t_1 = 0$. Dann ist $t_2 = 5{,}0$ s. (Beachten Sie, dass unsere Wahl von $t_1 = 0$ die Berechnung von $\bar{a}$ nicht beeinflusst, da in der Gleichung 2.5 nur $\Delta t = t_2 - t_1$ erscheint.) Dann gilt

$$\bar{a} = \frac{5{,}0\ \text{m/s} - 15{,}0\ \text{m/s}}{5{,}0\ \text{s}} = -2{,}0\ \text{m/s}^2\ .$$

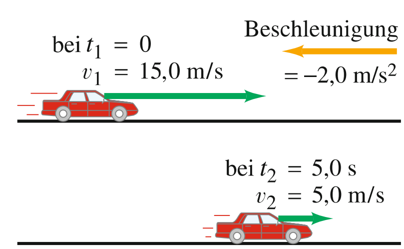


Abbildung 2.14 Beispiel 2.6, das den Ort des Autos zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 sowie die Geschwindigkeit des Autos zeigt, die durch die grünen Pfeile dargestellt ist. Der Beschleunigungsvektor (orange) zeigt nach links.

Das negative Vorzeichen ist dadurch begründet, dass die Endgeschwindigkeit kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit ist. In diesem Fall verläuft die Richtung der Beschleunigung nach links (in negativer x-Richtung) – obwohl die Geschwindigkeit immer nach rechts gerichtet ist. Wir sagen, dass die Beschleunigung $2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ nach links beträgt. In ▸ Abbildung 2.14 ist sie als orangefarbener Pfeil dargestellt.

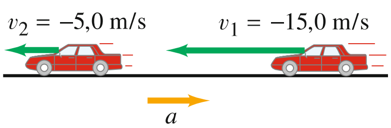


Abbildung 2.15 Dasselbe Auto wie in Beispiel 2.6, das sich jetzt aber nach links bewegt und bremst. Die Berechnung der Beschleunigung ist in der Abbildung dargestellt.

Wenn ein Massenpunkt langsamer wird, sprechen wir manchmal davon, dass er gebremst wird. Aber Vorsicht: Langsamer werden bedeutet *nicht*, dass die Beschleunigung zwangsläufig negativ ist. Bei einem Massenpunkt, der sich an der positiven x-Achse nach rechts bewegt und langsamer wird (wie in ▸ Abbildung 2.14), *ist* die Beschleunigung negativ. Aber wenn sich dasselbe Auto nach links bewegt (x wird kleiner) und langsamer wird, ist die Beschleunigung, die nach rechts gerichtet ist, positiv, wie in ▸ Abbildung 2.15 dargestellt. Wir haben immer dann ein Abbremsen, wenn die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in entgegengesetzte Richtungen gerichtet sind.

Momentanbeschleunigung

Die **Momentanbeschleunigung** a ist definiert als der *Grenzwert der Durchschnittsbeschleunigung, wenn* Δt gegen Null geht:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.6}$$

Dieser Grenzwert, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, ist die Ableitung von v nach t. Den Begriff „Beschleunigung“ verwenden wir für den momentanen Wert. Zur Erörterung der Durchschnittsbeschleunigung werden wir immer das Wort „Durchschnitt“ hinzufügen.

Wenn wir eine Kurve zeichnen, die die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der Zeit t darstellt, wie in ▸ Abbildung 2.16 veranschaulicht, dann wird die Durchschnittsbeschleunigung über ein Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ durch die Steigung der Geraden dargestellt, die die beiden Punkte P_1 und P_2, wie gezeigt, miteinander verbindet. [Vergleichen Sie diese Kurve mit der Weg-Zeit-Kurve aus ▸ Abbildung 2.9, bei der die Steigung der Geraden die Durchschnittsgeschwindigkeit darstellt.] Die Momentanbeschleunigung zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 ist die Steigung der Tangente an die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve zu diesem Zeitpunkt, die auch in ▸ Abbildung 2.16 gezeigt wird. Wir werden diese Tatsache für die in ▸ Abbildung 2.16 dargestellte Geschwindigkeit-Zeit-Kurve benutzen. Wenn wir uns von Zeitpunkt t_1 nach Zeitpunkt t_2 bewegen, steigt die Geschwindigkeit kontinuierlich an, die Beschleunigung (die Rate, mit der sich die Geschwindigkeit ändert) nimmt dagegen ab, da die Steigung der Kurve abnimmt.

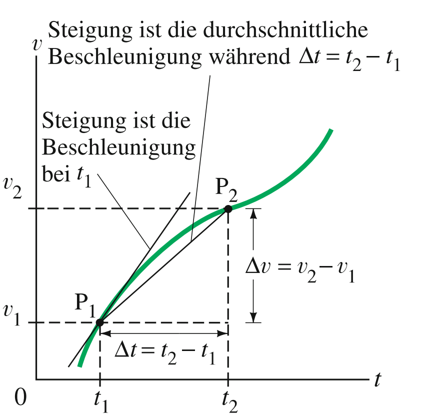


Abbildung 2.16 Geschwindigkeit-Zeit-Kurve eines Massenpunktes. Die Durchschnittsbeschleunigung während eines Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ ist die Steigung der Geraden P_1P_2: $\overline{a} = \Delta v/\Delta t$. Die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_1 ist die Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve zu diesem Zeitpunkt.

Beispiel 2.7 **Gegebene Beschleunigung $x(t)$**

Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Geraden, so dass sein Ort gegeben ist durch die Beziehung $x = (2{,}10\,\mathrm{m/s^2})t^2 + (2{,}80\,\mathrm{m})$, wie in Beispiel 2.3. Berechnen Sie (a) seine Durchschnittsbeschleunigung während des Zeitintervalls von $t_1 = 3{,}00\,\mathrm{s}$ bis $t_2 = 5{,}00\,\mathrm{s}$, und (b) seine Momentanbeschleunigung in Abhängigkeit der Zeit.

Lösung

a Wir haben in Beispiel 2.3c gesehen, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (4{,}20\,\mathrm{m/s^2})t$ ist. Daher ist bei $t_1 =$

3,00 s $v_1 = (4{,}20\,\text{m/s}^2)\,(3{,}00\,\text{s}) = 12{,}6\,\text{m/s}$ und bei $t_2 = 5{,}00$ s $v_2 = 21{,}0$ m/s. Daher gilt:

$$\overline{a} = \frac{21{,}0\,\text{m/s} - 12{,}6\,\text{m/s}}{5{,}00\,\text{s} - 3{,}00\,\text{s}} = 4{,}20\,\text{m/s}^2\,.$$

b Bei $v = (4{,}20\,\text{m/s}^2)t$ beträgt die Momentanbeschleunigung

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(4{,}20\,\text{m/s}^2)t\right] = 4{,}20\,\text{m/s}^2\,.$$

In diesem Beispiel ist die Beschleunigung konstant. Sie hängt nicht von der Zeit ab. ▶ Abbildung 2.17 zeigt Graphen, die folgendes darstellen: (a) Weg-Zeit-Kurve (dieselbe wie in ▶ Abbildung 2.12b), (b) Geschwindigkeit-Zeit-Kurve, wie oben berechnet, linear ansteigend, und (c) Beschleunigung-Zeit-Kurve, eine waagerechte Linie, da $a =$ konstant ist.

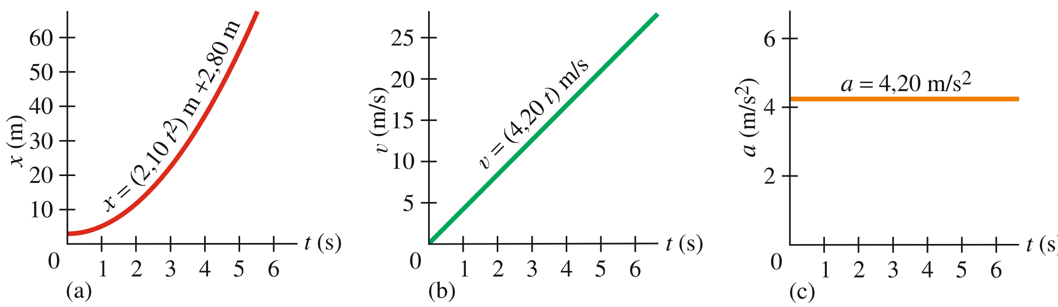


Abbildung 2.17 Graphen, die folgendes darstellen: (a) Weg-Zeit-Kurve, (b) Geschwindigkeit-Zeit-Kurve und (c) Beschleunigung-Zeit-Kurve für die Bewegung $x = At^2 + B$. Beachten Sie, dass v linear mit t ansteigt und dass die Beschleunigung a konstant ist. Außerdem ist v die Steigung der Weg-Zeit-Kurve und a die Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve.

Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes hängen voneinander ab. So wie die Geschwindigkeit die zeitliche Änderung des Ortes (Weges) mit der Zeit ist, so ist die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit. Diese Abhängigkeiten können durch folgende Gleichung ausgedrückt werden: da $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ und $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, gilt

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{d^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Hier ist $d^2x/\mathrm{d}t^2$ die *zweite Ableitung* von s, dem Ort eines Massenpunktes, nach der Zeit: zunächst nehmen wir die Ableitung von s nach der Zeit $(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$ und dann nehmen wir erneut die Ableitung nach der Zeit $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$, um die Beschleunigung zu erhalten.

2.5 Bewegung bei konstanter Beschleunigung

T Beschleunigung bei eindimensionaler Bewegung, Zweidimensionale Kinematik

Es gibt viele Anwendungen, in denen die Beschleunigung konstant oder nahezu konstant ist. Die Fallbeschleunigung nahe der Erdoberfläche ist ein solches Beispiel. Wir sprechen hier vom „freien Fall“ und nehmen an, dass der Betrag der Beschleunigung konstant ist und die Bewegung in einer geraden Linie verläuft. Im freien Fall sind die Momentanbeschleunigung und die Durchschnittsbeschleunigung identisch.

Wir nehmen $a =$ konstant an

Zur Vereinfachung unserer Schreibweise nehmen wir an, dass die Anfangszeit null ist: $t_0 = 0$. (Bei t_0 beginnt praktisch eine Stoppuhr zu laufen.) Dann können wir $\Delta t = t$ als verstrichene Zeit annehmen. Der Anfangsort (x_1) und die Anfangsgeschwindigkeit (v_1) eines Körpers werden jetzt durch x_0 und v_0 dargestellt. Zum Zeitpunkt t werden der Ort und die Geschwindigkeit mit x und v bezeichnet (und nicht mit x_2 und v_2). Die Durchschnittsgeschwindigkeit während der Zeit Δt beträgt (siehe Gleichung 2.2)

$x(t = 0) = x_0$
$v(t = 0) = v_0$

$$\overline{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{t}$$

da $t_0 = 0$ ist. Und die Beschleunigung, die als konstant angenommen wird, beträgt (siehe Gleichung 2.5)

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} .$$

Eine allgemeine Aufgabenstellung ist die Bestimmung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes nach einer bestimmten Zeit, wenn die Beschleunigung gegeben ist. Wir können solche Aufgaben lösen, indem wir die letzte Gleichung nach v auflösen und erhalten:

v im Verhältnis zu a und t (a = konstant)

$$v = v_0 + at . \quad \text{[konstante Beschleunigung]} \tag{2.7}$$

Die Beschleunigung eines bestimmten Motorrades beträgt $4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. Wie schnell fährt es z. B. nach 6,0 s? Nehmen wir an, dass es von dem Ort ($v_0 = 0$) startet. Nach 6,0 s beträgt die Geschwindigkeit $v = at = 4{,}0\,\mathrm{m/s^2})(6{,}0\,\mathrm{s}) = 24\,\mathrm{m/s}$.

Nun untersuchen wir als nächstes, wie der Ort eines Massenpunktes nach einer Zeit t bei konstanter Beschleunigung zu berechnen ist. Die Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit (Gleichung 2.2) ist $\overline{v} = (x - x_0)/t$. Dies können wir umschreiben als

$$x = x_0 + \overline{v}t . \tag{2.8}$$

Da die Geschwindigkeit mit der Zeit gleichmäßig (linear) ansteigt, liegt die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ in der Mitte zwischen der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit:

Durchschnittsgeschwindigkeit (bei konstanter Beschleunigung)

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2} . \quad \text{[konstante Beschleunigung]} \tag{2.9}$$

(Achtung: Die Gleichung 2.9 ist nicht zwangsläufig gültig, wenn die Beschleunigung nicht konstant ist.) Wir fügen die beiden letzten Gleichungen mit Gleichung 2.7 zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \overline{v}t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right) t \end{aligned}$$

oder

x im Verhältnis zu a und t (a = konstant)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 . \quad \text{[konstante Beschleunigung]} \tag{2.10}$$

Die Gleichungen 2.7, 2.9 und 2.10 sind drei der vier nützlichsten Gleichungen für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung. Wir leiten jetzt die vierte Gleichung her, die in Situationen nützlich ist, in denen die Zeit t nicht bekannt ist. Wir beginnen mit Gleichung 2.8 und ersetzen in Gleichung 2.9:

$$x = x_0 + \overline{v}t = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t .$$

Dann lösen wir Gleichung 2.7 nach t auf und erhalten

$$t = \frac{v - v_0}{a} .$$

Wenn wir dies in die obige Gleichung einsetzen, ergibt sich

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} .$$

Wir lösen diese Gleichung nach v^2 auf und erhalten

v im Verhältnis zu a und x (a = konstant)

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) . \quad \text{[konstante Beschleunigung]} \tag{2.11}$$

Dies ist die brauchbare Gleichung, die wir gesucht haben.

Jetzt haben wir vier Gleichungen bezüglich Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit, wenn die Beschleunigung a konstant ist. Wir haben sie hier für die weitere Verwendung zusammengestellt (der blaue Hintergrund soll ihre Nützlichkeit unterstreichen):

$$v = v_0 + at \qquad a = [\text{konstant}] \tag{2.12a}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad a = [\text{konstant}] \tag{2.12b}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad a = [\text{konstant}] \tag{2.12c}$$

$$\overline{v} = \frac{v + v_0}{2} \qquad a = [\text{konstant}] \tag{2.12d}$$

Kinematische Gleichungen für konstante Beschleunigung (die wir häufig benutzen werden)

Diese Gleichungen sind nur gültig, wenn a konstant ist. In vielen Fällen können wir $x_0 = 0$ setzen, was die obigen Gleichungen vereinfacht. Beachten Sie, dass x den Ort, nicht den Weg, darstellt und $x - x_0$ den Weg darstellt.

Beispiel 2.8 Planung einer Start- und Landebahn

ANGEWANDTE PHYSIK
Technischer Entwurf

Sie planen einen Flughafen für kleine Flugzeuge. Ein Flugzeugtyp, der diesen Flugplatz möglicherweise benutzen wird, muss vor dem Abheben eine Geschwindigkeit von mindestens 27,8 m/s (100 km/h) erreichen und kann mit 2,00 m/s^2 beschleunigen. (a) Kann das Flugzeug die richtige Geschwindigkeit zum Abheben erreichen, wenn die Startbahn 150 m lang ist? (b) Wenn nicht, wie lang muss die Startbahn mindestens sein?

Lösung

a Die Beschleunigung des Flugzeugs ist uns bekannt ($a = 2{,}00\,\text{m/s}^2$) und wir wissen, dass das Flugzeug einen Weg von 150 m zurücklegen kann. Wir möchten seine Geschwindigkeit ermitteln, um herauszufinden, ob sie mindestens 27,8 m/s beträgt. Wir möchten v ermitteln und haben folgendes gegeben:

Bekannt	Gesucht
$x_0 = 0$	v
$v_0 = 0$	
$x = 150$ m	
$a = 2{,}00$ m/s^2	

PROBLEMLÖSUNG
Die Gleichungen 2.12a–2.12d sind nur gültig, wenn die Beschleunigung konstant ist, was wir für dieses Beispiel annehmen.

Von den obigen vier Gleichungen erhalten wir mithilfe von Gleichung 2.12c v, wenn v_0, a, x und x_0 bekannt sind:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 0 + 2(2{,}0\,\text{m/s}^2)(150\,\text{m}) = 600\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{600\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 24{,}5\,\text{m/s}\,.$$

Die Länge der Startbahn ist *nicht* ausreichend.

b Wir möchten jetzt $(x - x_0)$ ermitteln. Gegeben sind $v = 27{,}8\,\text{m/s}$ und $a = 2{,}00\,\text{m/s}^2$. Daher benutzen wir Gleichung 2.12c und schreiben diese um zu

$$s = (x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(27{,}8\,\text{m/s})^2 - 0}{2(2{,}0\,\text{m/s}^2)} = 193\,\text{m}\,.$$

2.6 Problemlösungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen weiter ausgearbeiteten Beispielen von Massenpunkten, die sich mit konstanter Beschleunigung bewegen. Zunächst wollen wir erörtern, wie man generell an eine Problemlösung herangeht. Wichtig ist festzustellen, dass die Physik *keine* Sammlung von Gleichungen ist, die man auswendig lernen muss. (Anstatt die sehr nützlichen Gleichungen 2.12a–2.12d auswendig zu lernen, ist es in der Tat besser zu verstehen, wie man sie aus den Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung herleitet, wie wir dies oben getan haben.) Die einfache Suche nach einer Gleichung, die passen könnte, kann verheerend sein und zu einem falschen Ergebnis führen. Ganz sicher hilft sie nicht dabei, Physik zu verstehen. Eine bessere Herangehensweise an das Lösen von Problemen ist die Verwendung des folgenden (grob umrissenen) Verfahrens, das wir in einem speziellen „Kasten“ aufgeführt haben:

Problemlösung

1. **Lesen** Sie die gesamte Aufgabenstellung *zweimal* sorgfältig durch, bevor Sie versuchen, die Lösung zu finden.
2. **Zeichnen** Sie eine **Kurve** oder eine Skizze von der Aufgabenstellung, wenn möglich, mit Koordinatenachsen. [Sie können den Koordinatenursprung und die Achsen nach Belieben so positionieren, dass ihre Berechnungen einfacher werden. Sie wählen auch, welche Richtung positiv und welche negativ ist. Normalweise wählen wir die x-Achse nach rechts als positiv, aber Sie könnten positiv auch nach links wählen.]
3. **Schreiben** Sie **auf**, welche Größen „bekannt“ oder „gegeben“ sind und was Sie wissen *wollen*.
4. Denken Sie darüber nach, welche Grundsätze der Physik auf diese Aufgabenstellung zutreffen. Planen Sie dann die Herangehensweise:
5. Überlegen Sie, welche Gleichungen (und/oder Definitionen) sich auf die jeweiligen Größen beziehen. Stellen Sie vor der Anwendung von Gleichungen sicher, dass ihr **Gültigkeitsbereich** Ihre Aufgabenstellung mit einschließt (die Gleichungen 2.12a–2.12d sind z. B. nur gültig, wenn die Beschleunigung konstant ist). Wenn Sie eine passende Gleichung finden, die nur bekannte Größen und eine gewünschte unbekannte Größe enthält, **lösen** Sie die Gleichung algebraisch nach der unbekannten Größe **auf**. In vielen Beispielen sind möglicherweise mehrere aufeinanderfolgende Rechenvorgänge oder eine Kombination von Gleichungen erforderlich. Häufig ist es von Vorteil, nach der gewünschten unbekannten Größe algebraisch aufzulösen, bevor numerische Werte eingesetzt werden.
6. Führen Sie die **Berechnung** durch, wenn es sich um eine numerische Aufgabenstellung handelt. Behalten Sie während der Rechenvorgänge eine oder zwei Extraziffern, aber runden Sie die endgültigen Antworten auf die richtige Anzahl signifikanter Zahlen auf oder ab (Abschnitt 1.3).
7. Denken Sie sorgfältig über das erhaltene Ergebnis nach: Ist es **plausibel**? Macht es nach Ihrem eigenen Empfinden und Ihrer eigenen Erfahrung Sinn? Ein gutes Prüfungsverfahren ist eine grobe Abschätzung, bei der nur Zehnerpotenzen verwendet werden, wie in Abschnitt 1.6 erörtert. Häufig ist es besser, zu *Beginn* einer Rechenaufgabe eine grobe Abschätzung durchzuführen, da dies helfen kann, die Aufmerksamkeit auf das Finden eines Lösungsweges zu lenken.
8. Ein sehr wichtiger Aspekt bei der Bearbeitung von Aufgaben ist, auf die **Einheiten** zu achten. Ein Gleichheitszeichen bedeutet, dass die Einheiten, wie auch die Zahlen, auf beiden Seiten gleich sein müssen. Wenn die Einheiten sich nicht ausgleichen, wurde ein Fehler gemacht. Dies kann zur **Überprüfung** Ihrer Lösung dienen (es zeigt Ihnen allerdings nur an, dass Sie einen Fehler gemacht haben, nicht, dass Sie richtig gerechnet haben). Und: benutzen Sie immer einen einheitlichen Satz Einheiten, möglichst die SI-Einheiten.

Beispiel 2.9 Beschleunigung eines Autos

Wie lange braucht ein Auto, um über eine 30,0 m breite Kreuzung zu fahren, nachdem die Ampel auf Grün geschaltet hat, wenn das Auto aus dem Stillstand mit konstanten 2,00 m/s^2 beschleunigt?

Lösung

Zunächst fertigen wir eine Skizze an, ▶ Abbildung 2.18. Dann machen wir eine Tabelle, die am Rand abgebildet ist und wählen $x_0 = 0$. Wir nehmen an, dass sich das Auto an der positiven x-Achse nach rechts bewegt, und beachten, dass „Starten bei Stillstand" bedeutet, dass $v = 0$ bei $t = 0$ ist. Das bedeutet, dass $v_0 = 0$ ist. Da a konstant ist, können wir die Gleichungen 2.12a bis 2.12d benutzen. Die Gleichung 2.12b passt perfekt, da die einzige unbekannte Größe t ist und wir diese Größe suchen. Wenn wir $v_0 = 0$ und $x_0 = 0$ setzen, können wir die Gleichung 2.12b, $s = \frac{1}{2}at^2$, nach t auflösen:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(30{,}0\,\mathrm{m})}{2{,}00\,\mathrm{m/s^2}}} = 5{,}48\,\mathrm{s}\,.$$

Wir können die Plausibilität unserer Antwort durch Berechnen der Endgeschwindigkeit v überprüfen: $v = a \cdot t = (2{,}00\,\mathrm{m/s^2})(5{,}48\,\mathrm{s}) = 10{,}96\,\mathrm{m/s}$, dann erhalten wir $x = x_0 + \overline{v}t = 0 + \frac{1}{2}(10{,}96\,\mathrm{m/s} + 0)\,(5{,}48\,\mathrm{s}) = 30{,}0\,\mathrm{m}$ heraus und das ist der zurückgelegte Weg s.

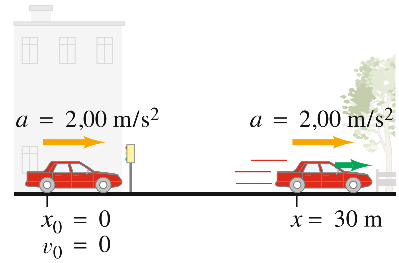


Abbildung 2.18 Beispiel 2.9.

Bekannt	Gesucht
$x_0 = 0$	t
$s = x = 30{,}0\,\mathrm{m}$	
$a = 2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$	
$v_0 = 0$	

ANGEWANDTE PHYSIK

Bremswege

Beispiel 2.10 · Abschätzung — Bremswege

Das Abschätzen eines minimalen Anhalteweges eines Autos ist sowohl für die Verkehrssicherheit, als auch für die Verkehrstechnik von Bedeutung. An die Aufgabenstellung geht man am besten in zwei Teilschritten heran: (1) die Zeit zwischen der Entscheidung, die Bremsen zu betätigen, und ihrer tatsächlichen Betätigung (die „Reaktionszeit"), während derer wir $a = 0$ annehmen; und (2) die tatsächliche Bremszeit, in der das Fahrzeug langsamer wird ($a \neq 0$). Der Anhalteweg hängt von der Reaktionszeit des Fahrers, von der Anfangsgeschwindigkeit des Autos (die Endgeschwindigkeit ist Null) und der Beschleunigung des Autos ab. Bei trockener Straße und guten Reifen können gute Bremsen ein Auto mit $5\,\mathrm{m/s^2}$ bis $8\,\mathrm{m/s^2}$ bremsen. Berechnen Sie den gesamten Anhalteweg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 50 km/h (14 m/s ≈ 31 mph) unter der Annahme, dass die Beschleunigung des Autos $-6{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ beträgt (das Minuszeichen erscheint, weil angenommen wird, dass die Geschwindigkeit in positiver x-Richtung verläuft und ihr Betrag abnimmt). Die Reaktionszeit für normale Fahrer liegt zwischen vielleicht 0,3 s und ca. 1,0 s. Nehmen wir an, sie beträgt 0,50 s.

Lösung

Das Auto bewegt sich nach rechts in positiver x-Richtung. Für den ersten Teil der Aufgabenstellung, in dem das Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit von 14 m/s während der Reaktionszeit (0,50 s) fährt, nehmen wir $x_0 = 0$ an. Siehe ▶ Abbildung 2.19 und Tabelle am Rand. Um s zu ermitteln, verwenden

Teil 1: Reaktionszeit

Bekannt	Gesucht
$t = 0{,}50\,\mathrm{s}$	s
$v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$	
$v = 14\,\mathrm{m/s}$	
$a = 0$	
$x_0 = 0$	

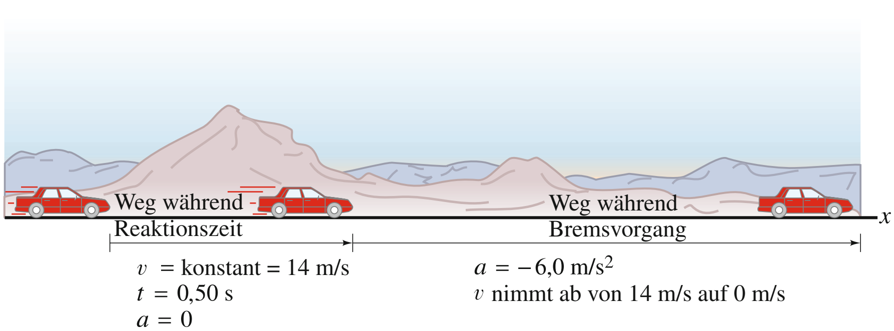
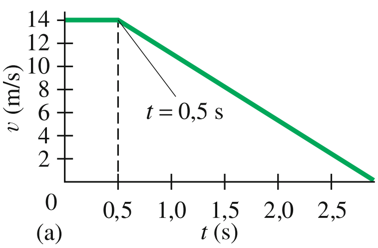


Abbildung 2.19 Beispiel 2.10: Anhalteweg für ein bremsendes Auto.

Teil 2: Bremsen

Bekannt	Gesucht
$x_0 = 7{,}0\,\text{m}$	s
$v_0 = 14\,\text{m/s}$	
$v = 0$	
$a = -6{,}0\,\text{m/s}^2$	



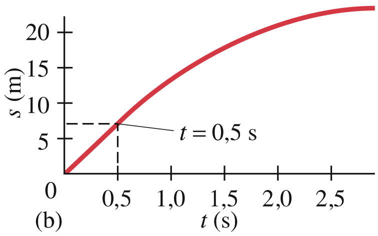


Abbildung 2.20 Geschwindigkeit-Zeit-Kurve und Weg-Zeit-Kurve für Beispiel 2.10.

wir die Gleichung 2.12b:

$$s = x = v_0 t + 0 = (14\,\text{m/s})(0{,}50\,\text{s}) = 7{,}0\,\text{m}\,.$$

Das Auto fährt während der Reaktionszeit des Fahrers bis zu dem Moment, in dem die Bremsen betätigt werden, 7,0 m.

Nun zum zweiten Teil, in dem die Bremsen betätigt werden und das Auto zum Stehen gebracht wird. Wir nehmen jetzt $x_0 = 7{,}0\,\text{m}$ (Ergebnis des ersten Teils) an: siehe Tabelle rechts. Die Gleichung 2.12a enthält x nicht. Die Gleichung 2.12b enthält x, aber auch die unbekannte Größe t. Die Gleichung 2.12c, $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$, ist das, was wir brauchen. Wir lösen nach s auf, nachdem wir $x_0 = 7{,}0\,\text{m}$ gesetzt haben:

$$\begin{aligned} s &= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= 7{,}0\,\text{m} + \frac{0 - (14\,\text{m/s})^2}{2(-6{,}0\,\text{m/s}^2)} = 7{,}0\,\text{m} + \frac{-196\,\text{m}^2/\text{s}^2}{-12\,\text{m/s}^2} \\ &= 7{,}0\,\text{m} + 16\,\text{m} = 23\,\text{m}\,. \end{aligned}$$

Während der Reaktionszeit des Fahrers fuhr das Auto 7,0 m und weitere 16 m während der Bremszeit, bevor es zum Stehen kam. Der gesamte zurückgelegte Weg s betrug also 23 m. Geschwindigkeit-Zeit-Kurve und Weg-Zeit-Kurve, siehe ► Abbildung 2.20.

Bei nassen oder vereisten Straßen kann der Wert für a nur ein Drittel des Wertes bei trockener Straße betragen, da die Bremsen wegen der Rutschgefahr nicht so stark betätigt werden können. Die Anhaltewege sind daher erheblich länger. Beachten Sie ebenfalls, dass sich der Anhalteweg nach Betätigung der Bremse um das *Quadrat* der Geschwindigkeit verlängert und nicht nur linear mit der Geschwindigkeit zunimmt: Wenn Sie doppelt so schnell fahren, ist der Anhalteweg viermal länger.

ANGEWANDTE PHYSIK

Sicherheit im Auto – Airbags

Beispiel 2.11 · Abschätzung — Airbags

Nehmen wir an, wir möchten ein Airbag-System entwerfen, das den Fahrer im Falle eines Frontalzusammenstoßes bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h schützen kann. Schätzen Sie ab, wie schnell der Airbag aufgeblasen werden muss, um den Fahrer effektiv zu schützen. Nehmen wir an, das Auto wird durch den Stoß über eine Entfernung von ca. 1 m zusammengedrückt. Wie wirkt sich die Benutzung eines Sicherheitsgurtes für den Fahrer aus?

Lösung

Das Auto verzögert in sehr kurzer Zeit und über eine sehr kurze Entfernung (1 m) von 100 km/h auf null km/h. Wenn wir beachten, dass $100\,\text{km/h} = 100 \cdot 10^3\,\text{m}/3600\,\text{s} = 28\,\text{m/s}$ sind, dann können wir die Beschleunigung aus der Gleichung 2.12c ermitteln:

$$a = -\frac{v_0^2}{2s} = -\frac{(28\,\text{m/s})^2}{2{,}0\,\text{m}} = -390\,\text{m/s}^2\,.$$

Diese starke Beschleunigung findet in einem Zeitraum statt, der gegeben ist durch (Gleichung 2.12a):

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 28\,\text{m/s}}{-390\,\text{m/s}^2} = 0{,}07\,\text{s}\,.$$

Der Airbag müsste, um wirksam zu sein, in kürzerer Zeit aufgeblasen sein.

Was macht der Airbag? Zunächst verteilt er die Kraft über eine größere Fläche im Brustbereich. Dies ist besser, als von der Lenksäule durchbohrt zu werden. Außerdem wird der Druck im Airbag kontrolliert, um die maximale Verzögerung, die auf den Kopf wirkt, zu minimieren. Der Sicherheitsgurt hält die Person in der richtigen Position gegenüber dem auslösenden Airbag.

Zwei Körper in Bewegung

Wir befassen uns jetzt mit einem Beispiel, das etwas komplizierter ist.

Beispiel 2.12 · Abschätzung **Ergreifung eines Rasers**

Ein Auto rast mit 130 km/h an einem versteckten Polizeifahrzeug vorbei, das sofort die Verfolgung aufnimmt. Schätzen Sie ab, wie lange es dauert, bis das Polizeifahrzeug den Raser überholt, unter der einfachen Annahme, dass dieser mit konstanter Geschwindigkeit weiterfährt. Schätzen Sie dann die Geschwindigkeit des Polizeifahrzeugs in dem Moment ab und entscheiden Sie, ob die Vermutungen plausibel waren.

Lösung

Wenn das Polizeifahrzeug losfährt, beschleunigt es, und die einfachste Vermutung ist, dass seine Beschleunigung konstant ist. Das ist möglicherweise nicht plausibel, aber schauen wir, was passiert. Auf Grund von Werbeanzeigen für Kraftfahrzeuge, die behaupten, dass Autos von null auf 90 km/h in 6 Sekunden beschleunigen können, können wir die Beschleunigung abschätzen. Somit könnte die mittlere Beschleunigung des Polizeifahrzeugs ca.

$$a_\mathrm{P} = \frac{90\,\mathrm{km/h}}{6\,\mathrm{s}} = 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h\cdot s}}$$

betragen. Wir sollten vielleicht die Einheiten in richtige SI-Einheiten umwandeln, aber sparen wir Zeit und arbeiten mit diesen gemischten Einheiten. Wir müssen die kinematischen Gleichungen aufstellen, um die unbekannten Größen zu bestimmen. Da es sich hier um zwei Körper in Bewegung handelt, benötigen wir zwei getrennte Gleichungssätze. Wir zeigen den Ort des rasenden Autos bei x_S und den Ort des Polizeifahrzeugs bei x_P an. Da wir eine Lösung für den Zeitpunkt, wenn die beiden Fahrzeuge an derselben Stelle auf der Straße eintreffen, möchten, verwenden wir für jedes Auto die Gleichung 2.12b:

$$x_\mathrm{S} = v_{0\mathrm{S}}t = \left(130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)t$$

$$x_\mathrm{P} = v_{0\mathrm{P}}t + \frac{1}{2}a_\mathrm{P}t^2 = \frac{1}{2}\left(15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h\cdot s}}\right)t^2$$

wobei wir $v_{0\mathrm{P}} = 0$ und $a_\mathrm{S} = 0$ gesetzt haben (es wird angenommen, dass der Raser mit konstanter Geschwindigkeit fährt). Wir möchten den Zeitpunkt ermitteln, an dem die Autos sich treffen und setzen deshalb $x_\mathrm{S} = x_\mathrm{P}$ und lösen nach t auf:

$$\left(130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)t = \left(7{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h\cdot s}}\right)t^2\,.$$

Die Lösungen lauten

$$t = 0 \text{ und } t = \frac{130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{7{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}} = 17{,}3\text{ s}\,.$$

Die erste Lösung gibt den Moment an, in dem der Raser an dem Polizeifahrzeug vorbeifährt. Das zweite Ergebnis zeigt an, wann das Polizeifahrzeug den Raser einholt, 17,3 s später. Dies ist unsere Antwort, aber ist sie plausibel? Die Geschwindigkeit des Polizeifahrzeugs bei $t = 17{,}3$ s beträgt

$$v_{\text{P}} = v_{0\text{P}} + a_{\text{P}}t = 0 + \left(15\,\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}\right)(17{,}3\text{ s}) = 260\text{ km/h}\,.$$

Vorsicht: Anfängliche Vermutungen müssen auf ihre Plausibilität überprüft werden

Nicht plausibel und in höchstem Maße gefährlich. Es ist vernünftiger, die Vermutung, dass die Beschleunigung konstant ist, aufzugeben. Das Polizeifahrzeug kann bei solchen Geschwindigkeiten sicherlich keine konstante Beschleunigung aufrechterhalten. Außerdem würde der Raser, wenn er vernünftig wäre, beim Bemerken der Polizeisirene langsamer werden. ► Abbildung 2.21 zeigt (a) die Weg-Zeit-Kurve und (b) die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve, und zwar ausgehend von der ursprünglichen Vermutung, dass a_{P} = konstant ist. (c) zeigt dagegen die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve unter plausibleren Annahmen.

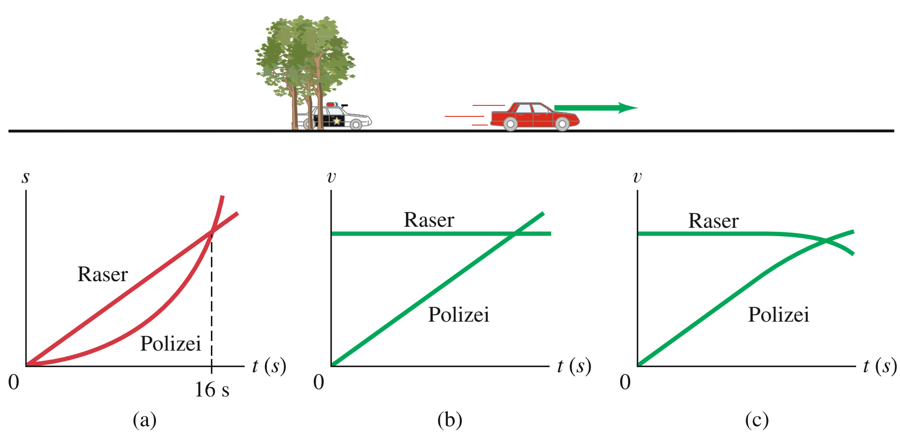


Abbildung 2.21 Beispiel 2.12.

2.7 Der freie Fall

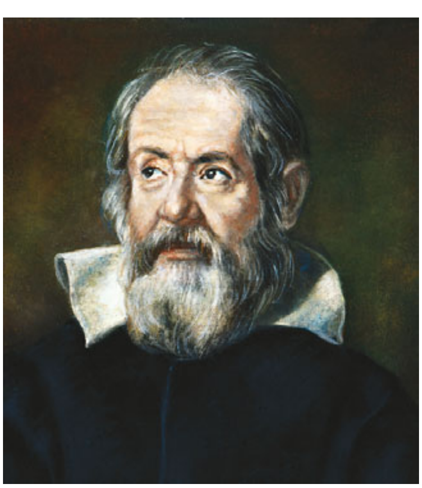


Abbildung 2.22 Galileo Galilei (1564–1642).

Eine der häufigsten Anwendungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist das Beispiel eines Massenpunktes, der nahe dem Erdboden im freien Fall fällt. Zunächst erscheint es nicht offensichtlich, dass ein fallender Massenpunkt eine Beschleunigung erfährt. Bis zu Galileis (► Abbildung 2.22) Zeit wurde angenommen, dass schwere Körper schneller fallen als leichte und dass die Fallgeschwindigkeit proportional zum Gewicht des Körpers ist. Dies ist aber falsch!

Galileis Analyse machte Gebrauch von seiner neuen und kreativen Methode, sich vorzustellen, was in idealisierten (vereinfachten) Fällen passieren würde. Für den freien Fall vertrat er die These, dass alle Körper ohne Luft- oder anderen Widerstand mit *derselben konstanten Beschleunigung* fallen würden. Er zeigte, dass diese These vorhersagt, dass bei einem Körper, der aus dem Stillstand fällt, der zurückgelegte Weg proportional zum Quadrat der Zeit sein wird (► Abbildung 2.23), d. h. d proportional t^2. Dies ist aus der Gleichung 2.12b ersichtlich, Galilei war jedoch der Erste, der diese mathematische Beziehung hergeleitet hat.

Um seine Behauptung, dass die Geschwindigkeit von fallenden Körpern während des Falls zunimmt, zu unterstützen, benutzte Galilei ein kluges Argument: ein schwerer Stein, der aus einer Höhe von 2 m fallen gelassen wird, drückt einen

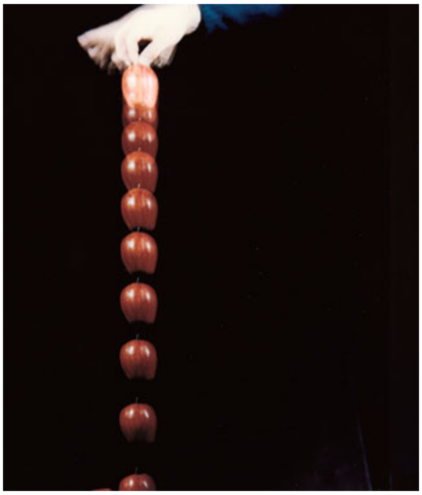


Abbildung 2.23 Mehrfach belichtete Blitzlichtaufnahme eines fallenden Apfels, der in gleichen Zeitintervallen fotografiert wurde. Beachten Sie, dass der Apfel in jedem folgenden Zeitintervall weiter fällt, was bedeutet, dass er eine Beschleunigung erfährt.

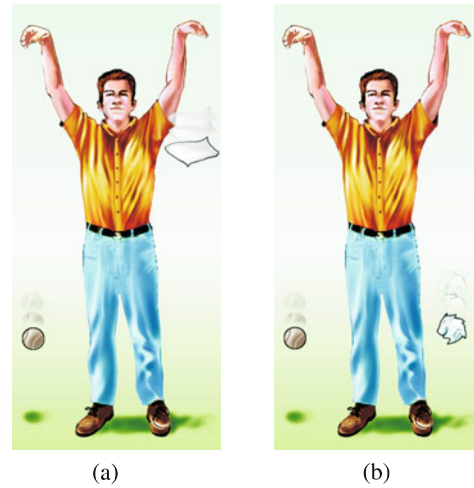


Abbildung 2.24 (a) Ein Ball und ein leichtes Stück Papier werden gleichzeitig fallen gelassen. (b) Wiederholung mit zusammengeknülltem Papier.

Pfahl wesentlich weiter in den Erdboden als derselbe Stein, der nur aus einer Höhe von 0,2 m fallen gelassen wird. Offensichtlich muss sich der Stein schneller bewegt haben, als er aus einer größeren Höhe fiel.

Wie wir sehen, hat Galilei auch behauptet, dass *alle* Körper, leicht oder schwer, mit *derselben* Beschleunigung fallen, zumindest beim Nichtvorhandensein von Luft. Wenn man ein Stück Papier waagerecht in einer Hand hält und ein schwererer Körper – z. B. einen Baseball – in der anderen und beide gleichzeitig loslässt, wie in ▸ Abbildung 2.24a, erreicht der schwerere Körper zuerst den Boden. Wenn man aber das Experiment wiederholt, jetzt aber das Papier zu einem kleinen Papierknäuel zusammenknüllt (siehe ▸ Abbildung 2.24b), sieht man, dass die beiden Körper fast gleichzeitig den Boden erreichen.

Galilei war sicher, dass Luft bei sehr leichten Körpern mit großer Oberfläche wie ein Widerstand wirkt. Unter vielen normalen Bedingungen kann dieser Luftwiderstand allerdings vernachlässigt werden. In einer Kammer, aus der die Luft abgepumpt wurde, fallen auch leichte Körper wie eine Feder oder ein waagerecht gehaltenes Stück Papier mit derselben Beschleunigung wie jeder andere Körper (siehe ▸ Abbildung 2.25). Eine solche Demonstration in einem Vakuum war zu Galileis Zeit natürlich nicht möglich, was Galileis Leistung nur größer macht. Galilei wird häufig als der „Vater der modernen Wissenschaft“ bezeichnet, und zwar nicht nur bezüglich des Inhalts seiner Wissenschaft (astronomische Entdeckungen, Trägheit, freier Fall), sondern auch wegen seiner Herangehensweise an die Wissenschaft (Idealisierung und Vereinfachung, Mathematisierung der Theorie, Theorien, die prüfbare Auswirkungen haben, Experimente, um theoretische Vorhersagen zu prüfen).

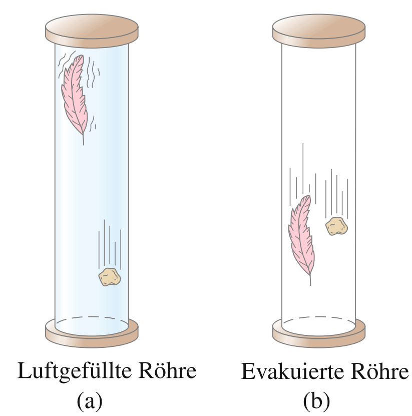


Abbildung 2.25 Ein Stein und eine Feder werden gleichzeitig fallen gelassen (a) in Luft, (b) in einem Vakuum.

Galileis spezieller Beitrag zu unserem Verständnis der Bewegung von fallenden Körpern kann wie folgt zusammengefasst werden:

An einem festen Ort auf der Erde und ohne Vorhandensein von Luftwiderstand fallen alle Körper mit derselben konstanten Beschleunigung.

Fallbeschleunigung

Wir nennen diese Beschleunigung **Fallbeschleunigung** (Erdbeschleunigung, Gravitationsbeschleunigung) und geben ihr das Symbol g. Sie beträgt ungefähr

$$g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}\ .$$

Tatsächlich schwankt g leicht je nach Breitengrad und Höhe über dem Meeresspiegel, aber diese Schwankungen sind so minimal, dass wir sie in den meisten Fällen ignorieren werden. Die Auswirkungen des Luftwiderstandes sind häufig gering, so dass wir sie zunächst vernachlässigen werden. Der Luftwiderstand wird allerdings selbst bei einem recht schweren Körper wahrnehmbar, wenn die Geschwindigkeit groß wird.[1] Die Fallbeschleunigung ist ein Vektor, wie jede Beschleunigung, und sie ist nach unten auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet.

Bei der Behandlung von frei fallenden Körpern können wir die Gleichungen 2.12a–2.12d verwenden, in denen wir für a den oben angegebenen Wert von g verwenden. Da die Bewegung vertikal ist, werden wir außerdem x durch y und x_0 durch y_0 ersetzen. Wenn nichts anderes angegeben ist, nehmen wir $y_0 = 0$ an. *Es spielt zunächst keine Rolle, ob wir y als positiv nach oben oder nach unten wählen. Wir müssen die getroffene Wahl aber während einer Problemlösung konsequent anwenden.*

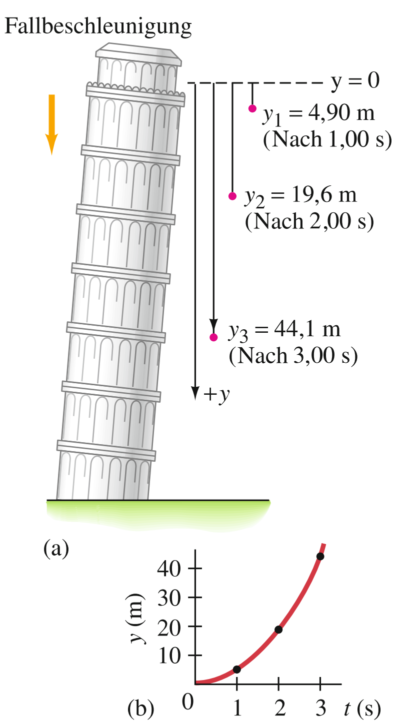


Abbildung 2.26 Beispiel 2.13. (a) Ein Körper (Massenpunkt), der von einem Turm fallen gelassen wird, fällt mit stetig ansteigender Geschwindigkeit und legt in jeder aufeinanderfolgenden Sekunde einen größeren Weg zurück. (siehe auch Abbildung 2.23). (b) Weg-Zeit-Kurve.

Beispiel 2.13 Freier Fall von einem Turm

Nehmen wir an, dass ein Ball von einem 70,0 m hohen Turm fallen gelassen wird. Wie weit wird er nach 1,00 s, 2,00 s und 3,00 s gefallen sein? Nehmen wir an, dass y positiv nach unten verläuft. Den Luftwiderstand vernachlässigen wir.

Lösung

Die Beschleunigung ist gegeben, $a = g = +9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Sie ist positiv, da wir abwärts als positiv gewählt haben. Da wir den Fallweg bei gegebener Zeit t bestimmen möchten, ist die Gleichung 2.12b die richtige mit $v_0 = 0$ und $y_0 = 0$. Dann ist der Weg des Balls nach 1,00 s

$$y_1 = s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}00)^2 = 4{,}90\,\mathrm{m}\,,$$

so dass der Ball nach 1,00 s einen Weg von 4,90 m gefallen ist. Ebenso nach 2,00 s

$$y_2 = s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(2{,}00)^2 = 19{,}6\,\mathrm{m}\,,$$

und nach 3,00 s

$$y_3 = s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(3{,}00)^2 = 44{,}1\,\mathrm{m}\,.$$

Beispiel 2.14 Wurf von einem Turm

Nehmen wir an, dass der Ball aus Beispiel 2.13 mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 3,00 m/s herunter*geworfen* und nicht fallen gelassen wird. (a) An welchem Ort befindet er sich nach 1,00 s und 2,00 s? (b) Wie groß wäre seine Geschwindigkeit nach 1,00 s und 2,00 s? Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den Geschwindigkeiten eines frei fallenden Balls.

Lösung

a Wir können an diese Lösung in gleicher Weise wie in Beispiel 2.13 herangehen und die Gleichung 2.12b verwenden. Dieses Mal ist allerdings v_0 nicht Null, sondern $v_0 = 3{,}00\,\mathrm{m/s}$. Somit ist der Ort des Balls zum

1 Die Geschwindigkeit eines in Luft (oder in einem anderen Fluid) fallenden Körpers nimmt nicht unbegrenzt zu. Wenn der Körper weit genug fällt, erreicht er eine maximale Geschwindigkeit, die die **Endgeschwindigkeit** genannt wird.

Zeitpunkt $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3{,}00\,\mathrm{m/s})(1{,}00\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}00)^2 = 7{,}90\,\mathrm{m}\,,$$

und zum Zeitpunkt $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3{,}00\,\mathrm{m/s})(2{,}00\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(2{,}00)^2 = 25{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Wie erwartet fällt der Ball in jeder Sekunde weiter, als im freien Fall, in dem er mit $v_0 = 0$ fällt.

b Die Geschwindigkeit erhält man ohne weiteres aus der Gleichung 2.12a:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 3{,}00\,\mathrm{m/s} + (9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}00\,\mathrm{s}) = 12{,}8\,\mathrm{m/s} \quad [\text{bei } t = 1{,}00\,\mathrm{s}] \\ &= 3{,}00\,\mathrm{m/s} + (9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(2{,}00\,\mathrm{s}) = 22{,}6\,\mathrm{m/s} \quad [\text{bei } t = 2{,}00\,\mathrm{s}] \end{aligned}$$

Wenn der Ball frei fällt ($v_0 = 0$), ist der erste Term in den obigen Gleichungen null, so dass gilt:

$$\begin{aligned} v &= 0 + at \\ &= (9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}00\,\mathrm{s}) = 9{,}80\,\mathrm{m/s} \quad [\text{bei } t = 1{,}00\,\mathrm{s}] \\ &= (9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(2{,}00\,\mathrm{s}) = 19{,}6\,\mathrm{m/s} \quad [\text{bei } t = 2{,}00\,\mathrm{s}] \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Geschwindigkeit eines frei fallenden Balls linear in Abhängigkeit der Zeit zunimmt. (In Beispiel 2.13 haben wir gesehen, dass der Fallweg als *Quadrat* der Zeit zunimmt.) Die Geschwindigkeit des hinuntergeworfenen Balls nimmt ebenfalls linear zu ($\Delta v = 9{,}80\,\mathrm{m/s}$ jede Sekunde), aber seine Geschwindigkeit ist in jedem beliebigen Moment stets $3{,}0\,\mathrm{m/s}$ (seine Anfangsgeschwindigkeit) höher als die eines frei fallenden Balls

Beispiel 2.15 Ein hochgeworfener Ball

Eine Person wirft einen Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $15{,}0\,\mathrm{m/s}$ *nach oben* in die Luft. Berechnen Sie, (a) wie hoch der Ball fliegt, und (b) wie lange der Ball in der Luft ist, bevor er in die Hand zurückfällt. Das Werfen als solches interessiert hier nicht, wir befassen uns nur mit der Bewegung des Balls, *nachdem* er die Hand des Werfers verlassen hat (► Abbildung 2.27).

Lösung

Wählen wir y als positiv aufwärts und negativ abwärts. (Achtung: Es gibt hier einen Definitionsunterschied zu den Beispielen 2.13 und 2.14.) Dann hat die Fallbeschleunigung ein negatives Vorzeichen, $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit des Balls, wenn er hochfliegt, abnimmt, bis der Ball den höchsten Punkt erreicht (B in ► Abbildung 2.27), an dem seine Geschwindigkeit für einen Moment null ist. Dann fällt er mit zunehmender Geschwindigkeit nach unten.

a Zur Bestimmung der maximalen Höhe berechnen wir den Ort des Balls, wenn seine Geschwindigkeit null ist ($v = 0$ am höchsten Punkt). Bei $t = 0$ (Punkt A in ► Abbildung 2.27) ist $y_0 = 0$, $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m/s}$ und $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Zum Zeitpunkt t (maximale Höhe) ist $v = 0$, $a =$

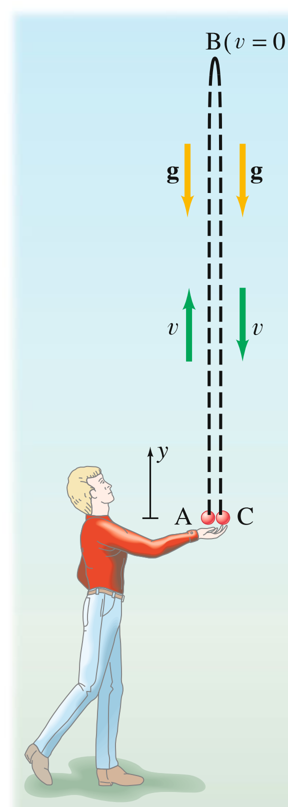


Abbildung 2.27 Ein Ball (Massenpunkt), der in die Luft geworfen wird, verlässt bei A die Hand der Werfers, erreicht bei B seine maximale Höhe und kehrt bei C zu seiner Ausgangshöhe zurück. Beispiel 2.15 Beispiel 2.16 und Beispiel 2.17

$-9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ und wir möchten y ermitteln. Wir wenden die Gleichung 2.12c an (und ersetzen x durch y) und lösen nach y auf:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay$$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (15{,}0\,\mathrm{m/s})^2}{2(-9{,}80\,\mathrm{m/s^2})} = 11{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Der Ball erreicht eine Höhe von 11,5 m über der Hand.

b Jetzt müssen wir berechnen, wie lange der Ball in der Luft ist, bevor er in die Hand zurückfällt. Wir könnten diese Rechnung in zwei Teilen durchführen und zuerst die Zeit ermitteln, die der Ball benötigt, bis er seinen höchsten Punkt erreicht hat, und dann die Zeit berechnen, die er braucht, um wieder zurückzufallen. Es ist allerdings einfacher, die Bewegung von A nach B nach C (▶ Abbildung 2.27) in einem Schritt zu betrachten und die Gleichung 2.12b zu benutzen. Dies können wir tun, da y (oder x) den Ort darstellt und nicht den zurückgelegten Gesamtweg. So ist an den beiden Punkten A und C $y = 0$. Wir verwenden die Gleichung 2.12b mit $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ und erhalten

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = (15{,}0\,\mathrm{m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}80\,\mathrm{m/s^2})t^2\,.$$

In dieser Gleichung können wir ein t ausklammern und erhalten dann

$$(15{,}0\,\mathrm{m/s} - 4{,}90\,\mathrm{m/s^2}\,t)t = 0\,.$$

Es gibt zwei Lösungen:

$$t = 0 \quad \text{und} \quad t = \frac{15{,}0\,\mathrm{m/s}}{4{,}90\,\mathrm{m/s^2}} = 3{,}06\,\mathrm{s}\,.$$

Die erste Lösung ($t = 0$) entspricht dem Anfangspunkt A in ▶ Abbildung 2.27, an dem der Ball zuerst geworfen wurde und $y = 0$ war. Die zweite Lösung, $t = 3{,}06\,\mathrm{s}$, entspricht dem Punkt C, an dem der Ball zu $y = 0$ zurückgekehrt ist. Somit ist der Ball 3,06 s lang in der Luft.

Beispiel 2.16 · Begriffsbildung — Zwei weit verbreitete falsche Annahmen

Erklären Sie den Fehler in diesen beiden weit verbreiteten falschen Annahmen: (1) Beschleunigung und Geschwindigkeit verlaufen immer in derselben Richtung und (2) ein in die Höhe geworfener Körper hat im höchsten Punkt (B in ▶ Abbildung 2.27) die Beschleunigung Null.

Lösung

Achtung: Geschwindigkeit und Beschleunigung haben nicht immer dieselbe Richtung

Achtung: $a \neq 0$ selbst im höchsten Punkt einer Flugbahn

Beide sind falsch. (1) Geschwindigkeit und Beschleunigung verlaufen *nicht* zwangsläufig in derselben Richtung. Wenn ein Ball nach unten fällt, haben seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung dieselbe Richtung. Aber wenn ein Ball nach oben geworfen wird, wie in Beispiel 2.15, ist seine Geschwindigkeit aufwärts gerichtet, während seine Beschleunigung abwärts in die entgegengesetzte Richtung verläuft. (2) Im höchsten Punkt (B in ▶ Abbildung 2.27) hat der Ball für einen Moment die Geschwindigkeit Null. Ist die Beschleunigung in diesem Punkt ebenfalls null? Nein. Die Schwerkraft wirkt auch hier, deshalb ist $a = -g = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Der Gedanke, dass $a = 0$ im Punkt B ist, würde zu der Schlussfolgerung führen, dass der Ball bei Erreichen von Punkt B schweben würde. Denn wenn die Beschleunigung (= die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit) null wäre, würde die Geschwindigkeit null bleiben und der Ball könnte dort oben bleiben, ohne herunterzufallen.

Beispiel 2.17 Ein hochgeworfener Ball II

Betrachten wir noch einmal den in die Höhe geworfenen Ball aus Beispiel 2.15 und stellen drei weitere Berechnungen an. Wir berechnen, (a) wie viel Zeit der Ball benötigt, um die maximale Höhe zu erreichen (Punkt B in ► Abbildung 2.27), (b) die Geschwindigkeit des Balls bei seiner Rückkehr in die Hand des Werfers (Punkt C) und (c) zu welchem Zeitpunkt t der Ball einen Punkt in einer Höhe von 8,00 m über der Hand der Person durchläuft.

Lösung

Wir nehmen y wieder als positiv aufwärts an.

a Beide Gleichungen 2.12a und 2.12b enthalten die Zeit t mit anderen bekannten Größen. Nehmen wir die Gleichung 2.12a mit $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$, $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m/s}$ und $v = 0$:

$$v = v_0 + at$$

so dass

$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{15{,}0\,\mathrm{m/s}}{-9{,}80\,\mathrm{m/s^2}} = 1{,}53\,\mathrm{s}\,.$$

Dies ist genau die halbe Zeit, die der Ball braucht, um hochzufliegen und an seinen Ausgangspunkt zurückzufallen [3,06 s in Teil (b) von Beispiel 2.15 berechnet]. Somit benötigt der Ball zum Erreichen der maximalen Höhe dieselbe Zeit wie für die Rückkehr zu seinem Ausgangspunkt.

b Wir verwenden die Gleichung 2.12a mit $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m/s}$ und $t = 3{,}06\,\mathrm{s}$ (die in Beispiel 2.15 für die Rückkehr des Balls in die Hand berechnete Zeit):

$$v = v_0 + at = 15{,}0\,\mathrm{m/s} - (9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(3{,}06\,\mathrm{s}) = -15{,}0\,\mathrm{m/s}\,.$$

Die Geschwindigkeit des Balls hat bei der Rückkehr des Balls zum Ausgangspunkt und zu Anfang denselben Betrag, verläuft aber in entgegengesetzter Richtung (das zeigt das negative Vorzeichen an). Somit sehen wir, wie wir aus Teil (a) gefolgert haben, dass die Bewegung symmetrisch um die maximale Höhe ist.

Achten Sie auf die Symmetrie: Die Geschwindigkeit ist in jeder beliebigen Höhe beim Hochfliegen und Herunterfallen dieselbe

c Wir möchten die Flugzeit t ermitteln, wenn $y = 8{,}00\,\mathrm{m}$, $y_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m/s}$ und $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ gegeben sind. Wir verwenden die Gleichung 2.12b:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$8{,}00\,\mathrm{m} = 0 + (15{,}0\,\mathrm{m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}80\,\mathrm{m/s^2})t^2\,.$$

Für die Lösung von quadratischen Gleichungen der Form $at^2 + bt + c = 0$, wobei a, b und c Konstanten sind, gibt die **quadratische Formel**

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

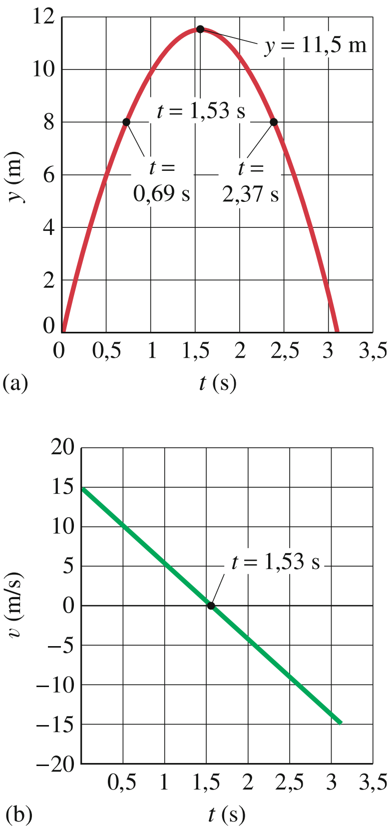


Abbildung 2.28 Weg-Zeit-Kurve (a) und (b) Geschwindigkeit-Zeit-Kurve für einen hochgeworfenen Ball, Beispiel 2.15 und Beispiel 2.17.

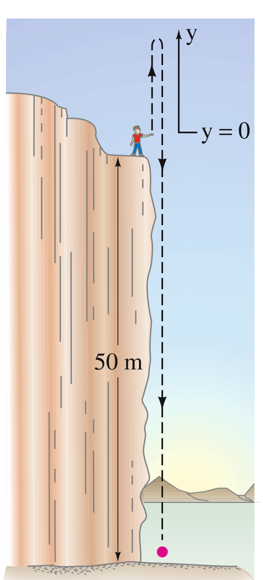


Abbildung 2.29 Beispiel 2.18: die Person in Abbildung 2.27 steht am Rand einer Klippe. Der Ball fällt zum Fuß der Klippe.

die zwei möglichen Lösungen an. Wir schreiben unsere Gleichung in der Standardform:

$$(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})t^2 - (15{,}0\,\mathrm{m/s})t + (8{,}00\,\mathrm{m}) = 0\,.$$

So ist der Koeffizient $a = 4{,}90\,\mathrm{m/s^2}$, b ist -15,0 m/s und c beträgt 8,00 m. Wenn wir diese Werte in die quadratische Formel einsetzen, erhalten wir

$$t = \frac{15{,}0\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(15{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 4(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})(8{,}00\,\mathrm{m})}}{2(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})}\,.$$

Somit ist $t = 0{,}69$ s und $t = 2{,}37$ s. Warum gibt es zwei Lösungen? Sind sie beide gültig? Ja, weil der Ball $y = 8{,}00$ m durchläuft, wenn er hochfliegt und wenn er hinunterfällt.

► Abbildung 2.28 zeigt die Weg-Zeit-Kurve und die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve für den Ball, der in ► Abbildung 2.27 hochgeworfen wird, sowie die Ergebnisse der Beispiele 2.15 und 2.17.

Beispiel 2.18 Ein Ball, der am Rand einer Klippe in die Höhe geworfen wird

Nehmen wir an, dass die Person aus den Beispielen 2.15 und 2.17 am Rand einer 50,0 m hohen Klippe steht, so dass der Ball zum Fuß der Klippe, wie in ► Abbildung 2.29 dargestellt, hinunterfallen kann. (a) Wie lange braucht der Ball, bis er den Fuß der Klippe erreicht? (b) Welchen Gesamtweg hat der Ball zurückgelegt?

Lösung

a Wir benutzen wieder die Gleichung 2.12b mit $a = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$, $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m/s}$ und $y_0 = 0$. Dieses Mal setzen wir allerdings $y = -50{,}0$ m, was dem unteren Ende der Klippe entspricht und 50,0 m unter der Ausgangsposition ($y = 0$) liegt:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$-50{,}0\,\mathrm{m} = 0 + (15{,}0\,\mathrm{m/s})t - \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})t^2\,.$$

Dies schreiben wir um in die Standardform und erhalten

$$(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})t^2 - (15{,}0\,\mathrm{m/s})t - (50{,}0\,\mathrm{m/s}) = 0\,. \tag{2.13}$$

Unter Verwendung der quadratischen Formel erhalten wir die Lösungen $t = 5{,}07$ s und $t = -2{,}01$ s. Die erste Lösung $t = 5{,}07$ s ist die Antwort für unsere Aufgabenstellung. Dies ist die Zeit, die der Ball benötigt, bis er seinen höchsten Punkt erreicht und dann zum Fuß der Klippe hinunterfällt. Die Zeit für das Hochfliegen und Zurückkehren bis zum oberen Ende der Klippe betrug 3,06 s (Beispiel 2.15). Dann dauerte es weitere 2,01 s, bis der Ball bis zum Fuß der Klippe hinuntergefallen war. Aber was bedeutet die andere Lösung $t = -2{,}01$ s? Hierbei handelt es sich um einen Zeitpunkt vor dem Beginn unserer Aufgabenstellung. Die Lösung ist daher für unsere Aufgabenstellung nicht relevant[2].

b Der Ball aus Beispiel 2.15 bewegt sich 11,5 m in die Höhe, fällt 11,5 m zurück bis zum oberen Ende des Klippe und dann weitere 50,0 m hinunter bis zum Fuß der Klippe und hat somit insgesamt einen Weg von 73,0 m zurückgelegt. Beachten Sie, dass die *Verschiebung* allerdings $-50{,}0\,\mathrm{m}$ betrug.

▸ Abbildung 2.30 zeigt die Weg-Zeit-Kurve für diese Situation.

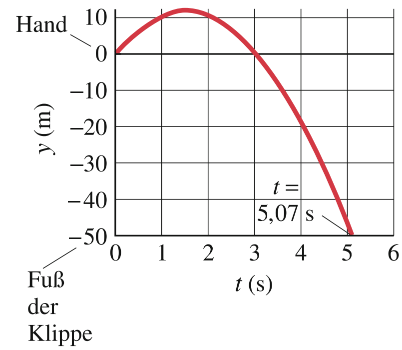


Abbildung 2.30 Beispiel 2.18, die Weg-Zeit-Kurve.

Die Beschleunigung eines Körpers, insbesondere von Raketen und schnellen Flugzeugen, wird häufig als ein Vielfaches von $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ angegeben. Ein Flugzeug z. B., das aus einem Sturzflug herauskommt und mit $3{,}00\,g$ fliegt, hätte eine Beschleunigung von $(3{,}00)(9{,}80\,\mathrm{m/s^2}) = 29{,}4\,\mathrm{m/s^2}$. Die in Beispiel 2.11 berechnete Beschleunigung bei einem Zusammenstoß könnte als $(390\,\mathrm{m/s^2})/(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}) = 40\,g$ ausgedrückt werden.

2.8 Einsatz der Integralrechnung; Ungleichförmige Beschleunigung

In diesem kurzen Abschnitt verwenden wir die Integralrechnung, um die kinematischen Gleichungen für konstante Beschleunigung, die Gleichungen 2.12a und 2.12b, herzuleiten. Wir zeigen außerdem, wie die Integralrechnung verwendet werden kann, wenn die Beschleunigung nicht konstant ist. Wenn Integration in Ihrem Mathematikkurs noch nicht behandelt wurde, können Sie diesen Abschnitt auch auf später verschieben.

Herleitung der kinematischen Gleichungen unter Verwendung der Integralrechnung

Zunächst leiten wir die Gleichung 2.12a her und beginnen dabei mit der Definition der Momentanbeschleunigung, $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Dies schreiben wir um zu

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t\,.$$

Wir nehmen das bestimmte Integral beider Seiten dieser Gleichung und verwenden dabei dieselbe Schreibweise wie in Abschnitt 2.5 ($v = v_0$ bei $t = 0$):

$$\int_{v=v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t=0}^{t} a\,\mathrm{d}t\,.$$

Das ergibt, da $a =$ konstant ist,

Gleichung 2.12a

$$v - v_0 = at\,.$$

Dies ist die Gleichung 2.12a, $v = v_0 + at$.

Dann leiten wir die Gleichung 2.12b her und beginnen dabei mit der Definition der Momentangeschwindigkeit, Gleichung 2.4, $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Wir schreiben dies um zu

Gleichung 2.12b

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s\,.$$

Wir ersetzen die obige Gleichung 2.12a, $v = v_0 + at$, und integrieren:

$$\int_{x=x_0}^{x} \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{t} (v_0 + at)\,\mathrm{d}t$$

$$s = x - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_0\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t} at\,\mathrm{d}t$$

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

2 Die Lösung $t = -2{,}01\,\mathrm{s}$ könnte in einer anderen physikalischen Situation von Bedeutung sein. Nehmen wir an, dass eine Person, die oben an einer $50{,}0\,\mathrm{m}$ hohen Klippe steht, sieht, wie ein Stein zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $15{,}0\,\mathrm{m/s}$ nach oben an ihr vorbeifliegt. Wann hat der Stein den Fuß der Klippe verlassen und wann kam er wieder zum Fuß der Klippe zurück? Die Gleichungen sind genau dieselben wie für unser Ausgangsproblem und die Antworten $t = -2{,}01\,\mathrm{s}$ und $t = 5{,}07\,\mathrm{s}$ sind die richtigen Antworten. Beachten Sie, dass wir nicht sämtliche Informationen für eine Aufgabenstellung mathematisch verpacken können, deshalb müssen wir die relevanten Ergebnisse von den für die Aufgabenstellung nicht relevanten Ergebnissen unterscheiden können.

da v_0 und a konstant sind. Dieses Ergebnis stellt genau die Gleichung 2.12b, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, dar.

Lassen Sie uns zum Schluss die Integralrechnung benutzen, um Geschwindigkeit und Weg zu ermitteln, wenn eine Beschleunigung gegeben ist, die zeitlich nicht konstant ist, sondern in Abhängigkeit der Zeit variiert.

Beispiel 2.19 Integrieren mit zeitabhängiger Beschleunigung

Ein Versuchsfahrzeug startet vom Stillstand ($v_0 = 0$) bei $t = 0$ und beschleunigt mit einer angegebenen Beschleunigung von $a = (7{,}00\,\mathrm{m/s^3})t$. Wie groß ist (a) seine Geschwindigkeit und (b) sein Weg 2,00 s später?

Lösung

a Die Gleichungen 2.12a–2.12d können wir nicht benutzen, da a nicht konstant ist. Stattdessen ermitteln wir unter Verwendung der Integralrechnung v als Funktion von t. Aus der Definition der Beschleunigung, $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ergibt sich

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t\,.$$

Wir nehmen das Integral beider Seiten von $v = 0$ bei $t = 0$ für die Geschwindigkeit v bei einer beliebigen Zeit t:

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t a\ \mathrm{d}t$$

$$v(t) = \int_0^t (7{,}00\,\mathrm{m/s^3})\ t\ \mathrm{d}t$$

$$= (7{,}00\,\mathrm{m/s^3})\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t = (7{,}00\,\mathrm{m/s^3})\left(\frac{t^2}{2} - 0\right) = (3{,}50\,\mathrm{m/s^3})\,t^2\,.$$

Bei $t = 2{,}00$ s ist $v = (3{,}50\,\mathrm{m/s^3})(2{,}00\,\mathrm{s})^2 = 14{,}00\,\mathrm{m/s}$.

b Um den Weg zu ermitteln, nehmen wir $x_0 = 0$ an und beginnen mit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Das schreiben wir um zu $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$. Dann integrieren wir von $x = 0$ bei $t = 0$ zum Ort x zum Zeitpunkt t:

$$\int_0^x \mathrm{d}s = \int_0^t v\ \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \int_0^{2{,}00\,\mathrm{s}} (3{,}50\,\mathrm{m/s^3})\,t^2\,\mathrm{d}t = (3{,}50\,\mathrm{m/s^3})\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{2{,}00\,\mathrm{s}} = 9{,}33\,\mathrm{m} = s(t)\,.$$

Zusammengefasst gesagt ist bei $t = 2{,}00$ s $v = 14{,}00\,\mathrm{m/s}$ und $s = 9{,}33$ m.

ZUSAMMENFASSUNG

[Die Zusammenfassung, die am Ende jedes Kapitels in diesem Buch erscheint, gibt einen kurzen Überblick über die Hauptthemen des Kapitels. Die Zusammenfassung *kann nicht* zum Verstehen des Stoffes dienen. Dafür ist ein genaues Durchlesen des Kapitels unerlässlich.]

Die **Kinematik** befasst sich mit der Beschreibung der Bewegung von Körpern. Die Beschreibung der Bewegung von Körpern muss stets in Bezug auf ein spezielles **Bezugssystem** erfolgen.

Der **Weg** eines Körpers ist die Änderung im Ort des Körpers.

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** ist der Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der verstrichenen Zeit. Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** eines Körpers über ein bestimmtes Zeitintervall Δt ist der Quotient aus dem Weg Δs und Δt:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

Die **Momentangeschwindigkeit** ist die Durchschnittsgeschwindigkeit eines unendlich kurzen Zeitintervalls (Δt darf gegen Null gehen):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} ,$$

wobei $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ die Ableitung von x nach t ist.

Auf einer Weg-Zeit-Kurve ist die *Steigung* gleich der Momentangeschwindigkeit.

Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit. Die **Durchschnittsbeschleunigung** eines Körpers über ein Zeitintervall Δt beträgt

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} ,$$

wobei Δv die Änderung der Geschwindigkeit während des Zeitintervalls Δt ist.

Die **Momentanbeschleunigung** ist die durchschnittliche Beschleunigung über ein unendlich kurzes Zeitintervall:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} .$$

Wenn ein Körper sich auf einer Geraden mit konstanter Beschleunigung bewegt, stehen die Geschwindigkeit v und der Ort x in Beziehung zu der Beschleunigung a, der verstrichenen Zeit t, dem Ausgangsort x_0 und der Anfangsgeschwindigkeit v_0, siehe Gleichungen 2.12a– 2.12d:

$$v = v_0 + at , \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 ,$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) , \qquad \overline{v} = \frac{v + v_0}{2} .$$

Körper, die sich nahe der Erdoberfläche vertikal bewegen, sei es, dass sie frei fallen oder senkrecht nach oben oder unten geworfen wurden, bewegen sich mit konstanter nach unten gerichteter **Fallbeschleunigung** mit einem Betrag von ca. $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Verständnisfragen

1 Misst der Tacho eines Autos die Geschwindigkeit als Vektor, als skalare Größe oder beides?

2 Kann ein Körper eine variierende skalare Geschwindigkeit haben, wenn seine vektorielle Geschwindigkeit konstant ist? Wenn ja, führen Sie Beispiele an.

3 Unterscheidet sich die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Körpers während eines beliebigen Zeitintervalls von seiner Momentangeschwindigkeit, wenn sich dieser Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt?

4 Ist es bei einem Dragsterrennen möglich, dass das Auto mit der höchsten erreichten Geschwindigkeit das Rennen verliert? Erklären Sie warum.

5 Wenn ein Körper eine höhere Geschwindigkeit als ein zweiter Körper hat, hat der erste Körper dann auch zwangsläufig eine größere Beschleunigung? Erklären Sie und geben Sie Beispiele.

6 Vergleichen Sie die Beschleunigung eines Motorrades, das von 80 km/h auf 90 km/h beschleunigt, mit der Beschleunigung eines Fahrrades, das in derselben Zeit von Null auf 10 km/h beschleunigt.

7 Kann ein Körper eine nach Norden gerichtete Geschwindigkeit und eine nach Süden gerichtete Beschleunigung haben? Erklären Sie warum.

8 Kann die Geschwindigkeit eines Körpers negativ sein, wenn seine Beschleunigung positiv ist? Gilt auch die Umkehrung?

9 Geben Sie ein Beispiel, in dem sowohl die Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung negativ sind.

10 Zwei Autos fahren nebeneinander aus einem Tunnel heraus. Auto A fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h und hat eine Beschleunigung von 40 km/h/min. Auto B fährt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und einer Beschleunigung von 60 km/h/min. Welches Auto überholt das andere beim Herausfahren aus dem Tunnel? Erklären Sie Ihren Gedankengang.

11 Kann die Geschwindigkeit eines Körpers zunehmen, während seine Beschleunigung abnimmt? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel. Wenn nicht, erklären Sie dies.

12 Ein Körper, der senkrecht nach oben geworfen wird, kehrt mit derselben Geschwindigkeit, die er zu Anfang hatte, in seine Ausgangsposition zurück, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann. Ändert sich das Ergebnis, wenn der Luftwiderstand berücksichtigt wird, und wenn ja, wie? [*Hinweis*: Die auf Luftwiderstand zurückzuführende Beschleunigung verläuft immer in der entgegengesetzten Richtung zur Bewegung.]

13 Wie verändert sich die Fallbeschleunigung eines frei fallenden Körpers, während der Körper schneller wird? Nimmt die Fallbeschleunigung zu, nimmt sie ab oder bleibt sie gleich?

14 Wie würden Sie die maximale Höhe abschätzen, die Sie einen Ball senkrecht nach oben werfen könnten? Wie würden Sie die maximale Geschwindigkeit abschätzen, die Sie dem Ball geben könnten?

15 Ein Stein wird mit der Geschwindigkeit v vom Rand einer Klippe nach oben geworfen. Ein zweiter Stein wird mit derselben Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach unten geworfen. Welcher Stein hat bei Erreichen des unteren Endes der Klippe die größere Geschwindigkeit? Lassen Sie die Auswirkung des Luftwiderstandes außer Acht.

16 Sie fahren in einem Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit von 70 km/h von Punkt A nach Punkt B. Dann fahren Sie dieselbe Entfernung nach Punkt C, und zwar mit einer konstanten Geschwindigkeit von 90 km/h. Beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Fahrt von A nach C 80 km/h? Erklären Sie, warum oder warum nicht.

17 Beschreiben Sie in Worten die Bewegung, die in ▸ Abbildung 2.31 mit der Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Kurve dargestellt ist. [*Hinweis*: Versuchen Sie zunächst, die aufgezeichnete Bewegung durch Abschreiten oder Handbewegung nachzuahmen.]

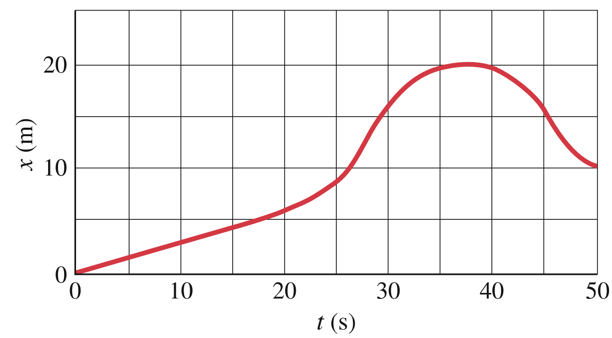


Abbildung 2.31 Frage 17, Aufgaben 11, 12 und 84.

18 Beschreiben Sie in Worten die Bewegung des Körpers, dessen Kurve in ▸ Abbildung 2.32 abgebildet ist.

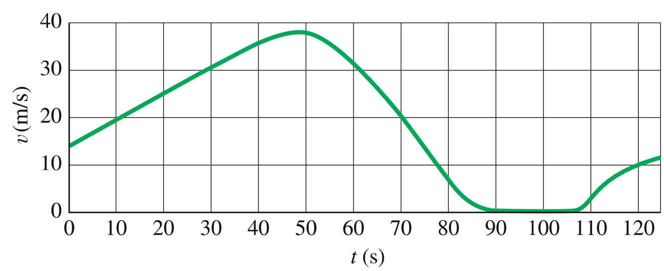


Abbildung 2.32 Frage 18 und Aufgabe 22.

Aufgaben zu 2.1 bis 2.3

kompletter Lösungsweg

[Die Aufgaben am Ende jedes Kapitels sind unterteilt in I, II oder III, je nach ihrem voraussichtlichen Schwierigkeitsgrad. Dabei ist I die leichteste Stufe. Die Aufgaben sind nach Abschnitten geordnet. Das bedeutet, dass der Leser bis einschließlich des betreffenden Abschnittes alles gelesen haben sollte und nicht nur den betreffenden Abschnitt – Aufgaben bauen häufig auf früherem Stoff auf. Schließlich gibt es eine Gruppe „Allgemeine Aufgaben", die nicht unterteilt und nicht nach Abschnitten geordnet sind.]

1 (I) Ein Vogel fliegt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Wie lange braucht er für 75 km?

2 (I) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muss Ihr Auto fahren, um in 3,2 h 280 km zurückzulegen?

3 (I) Wenn Sie mit 110 km/h auf einer geraden Straße fahren und für 2,0 s zur Seite schauen, wie weit fahren Sie während dieser Zeit der Unaufmerksamkeit?

4 (I) Ein rollender Ball bewegt sich zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 3{,}0$ s und $t_2 = 6{,}1$ s von $x_1 = 3{,}4$ cm nach $x_2 = -4{,}2$ cm. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

5 (I) Ein Massenpunkt ist zum Zeitpunkt $t_1 = -2{,}0$ s bei $x_1 = 3{,}4$ cm und zum Zeitpunkt $t_2 = 4{,}5$ s bei $x_2 = 8{,}5$ cm. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

6 (II) Sie fahren von der Schule ruhig mit 105 km/h 210 km nach Hause. Dann beginnt es zu regnen und Sie reduzieren die Geschwindigkeit auf 90 km/h. Nach 3 Stunden und 20 Minuten Fahrzeit kommen Sie zu Hause an. (a) Wie weit liegt Ihre Heimatstadt von der Schule entfernt? (b) Wie hoch war Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit?

7 (II) Nach einer Faustregel geben jeweils fünf Sekunden zwischen einem Blitz und dem darauffolgenden Donner die Entfernung eines Gewitters in Meilen an. Schätzen Sie die Geschwindigkeit des Schalls in m/s auf der Grundlage dieser Regel und unter der Annahme ab, dass das Blitzlicht ohne Verzögerung den Beobachter erreicht.

8 (II) Eine Person läuft acht komplette Runden auf einer Viertelmeilenbahn (402,3 m) in einer Gesamtzeit von 12,5 min. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in m/s.

9 (II) Ein Pferd galoppiert in einer geraden Linie in 17,0 s 160 m weit von seinem Trainer weg. Dann dreht es plötzlich um und galoppiert in 6,8 s die halbe Strecke zurück. Berechnen Sie seine Durchschnittsgeschwindigkeit für den gesamten Lauf.

10 (II) Zwei Lokomotiven nähern sich einander auf parallelen Spuren. Jede hat eine Geschwindigkeit von 95 km/h in Bezug auf den Erdboden. Wie lange dauert es, bis sie einander erreichen, wenn sie anfangs 8,5 km voneinander entfernt sind? (siehe ► Abbildung 2.33).

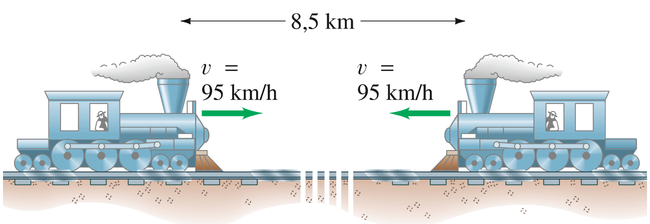


Abbildung 2.33 Aufgabe 10.

11 (II) Der Ort eines Kaninchens in einem geraden Tunnel ist in ► Abbildung 2.31 in Abhängigkeit der Zeit dargestellt. Wie groß ist seine Geschwindigkeit (a) bei $t = 10{,}0$ s und (b) bei $t = 30{,}0$ s? Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit (c) zwischen $t = 0$ und $t = 5{,}0$ s, (d) zwischen $t = 25{,}0$ und $t = 30{,}0$ s und (e) zwischen $t = 40{,}0$ s und $t = 50{,}0$ s?

12 (II) (a) Während welcher Zeitintervalle ist, falls zutreffend, die Geschwindigkeit des Kaninchens in ► Abbildung 2.31 konstant? (b) Zu welchem Zeitpunkt ist seine Geschwindigkeit am größten? (c) Zu welchem Zeitpunkt ist, falls zutreffend, die Geschwindigkeit Null? (d) Läuft das Kaninchen während der dargestellten Zeit in seinem Tunnel in eine oder in beide Richtungen?

13 (II) Ein Hund läuft in 8,4 s in einer geraden Linie 100 m von seinem Herrchen weg und dann in einem Drittel der Zeit die Hälfte der Strecke zurück. Berechnen Sie seine Durchschnittsgeschwindigkeit.

14 (II) Der Ort eines Balls, der in einer geraden Linie rollt, ist durch $x = 2{,}0 - 4{,}6\,t + 1{,}1\,t^2$ gegeben, wobei x in Metern und t in Sekunden angegeben sind. (a) Bestimmen Sie den Ort des Balls bei $t = 1{,}0$ s, 2,0 s und 3,0 s. (b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Intervalls zwischen $t = 1{,}0$ s und $t = 3{,}0$ s? (c) Wie groß ist seine Momentangeschwindigkeit bei $t = 2{,}0$ s und $t = 3{,}0$ s?

15 (II) Ein Auto, das mit 90 km/h fährt, fährt 100 m hinter einem Lkw, der mit 75 km/h fährt. Wie lange dauert es, bis das Auto den Lkw erreicht hat?

16 (II) Ein Flugzeug fliegt 2100 km mit einer Geschwindigkeit von 800 km/h und hat dann Rückenwind, der seine Geschwindigkeit für die nächsten 1800 km auf 1000 km/h ansteigen lässt. Wie lange dauert der Flug insgesamt? Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeugs auf diesem Flug? [*Hinweis*: Denken Sie sorgfältig nach, bevor Sie die Gleichung 2.12d benutzen.]

17 (II) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit einer Rundreise, bei der die ersten 200 km mit 90 km/h gefahren werden, dann eine einstündige Mittagspause gemacht wird und anschließend der Rückweg mit 50 km/h gefahren wird.

18 (II) Ein Kraftfahrzeug, das mit 90 km/h fährt, überholt einen 1,10 km langen Zug, der in derselben Richtung auf einer Spur fährt, die parallel zur Straße verläuft. Wie lange dauert es, bis das Auto den Zug überholt hat, wenn der Zug mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h fährt, und wie weit ist das Auto in dieser Zeit gefahren? Siehe ► Abbildung 2.34. Welche Ergebnisse ergeben sich, wenn das Auto und der Zug in entgegengesetzte Richtungen fahren?

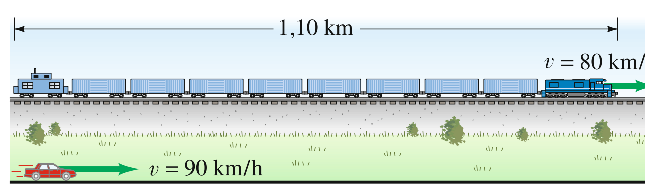


Abbildung 2.34 Aufgabe 18.

19 (II) Eine Bowlingkugel, die mit konstanter Geschwindigkeit rollt, trifft die Kegel am Ende einer 16,5 m langen Bowlingbahn. Der Bowlingspieler hört das Geräusch, mit dem der Ball die Kegel trifft, 2,50 s, nachdem er die Kugel losgelassen hat. Welche Geschwindigkeit hat die Kugel? Die Geschwindigkeit des Schalls beträgt 340 m/s.

Aufgaben zu 2.4

kompletter Lösungsweg

20 (I) Ein Sportwagen beschleunigt in 6,2 Sekunden von null auf 95 km/h. Welches ist seine Durchschnittsbeschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$?

21 (I) Bei Geschwindigkeiten, wie sie auf Bundesstraßen üblich sind, kann ein bestimmtes Kraftfahrzeug mit $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ beschleunigen. Wie lange dauert es mit dieser Beschleunigung, um von 80 km/h auf 110 km/h zu beschleunigen?

22 (I) ► Abbildung 2.32 zeigt die Geschwindigkeit eines Zuges in Abhängigkeit der Zeit. (a) Zu welchem Zeitpunkt war seine Geschwindigkeit am größten? (b) Während welcher Intervalle war, falls zutreffend, die Geschwindigkeit konstant? (c) Während welcher Intervalle, falls zutreffend, war die Beschleunigung konstant? (d) Wann war der Betrag der Beschleunigung am größten?

23 (II) Die Werbung für einen Sportwagen behauptet, dass dieser Wagen bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h innerhalb von 55 m anhalten kann. Welches ist seine Beschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$? Wie viele g sind das ($g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$)?

24 (II) Ein bestimmtes Kraftfahrzeug kann ungefähr so beschleunigen, wie es in der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve in ► Abbildung 2.35 gezeigt ist. (Die kurzen Unstetigkeiten in der Kurve stellen das Schalten dar.) Schätzen Sie die Durchschnittsbeschleunigung des Autos im zweiten und im vierten Gang ab.

25 (II) Schätzen Sie die Durchschnittsbeschleunigung des Autos in der vorhergehenden Aufgabe (► Abbildung 2.35) ab, wenn es (a) im ersten Gang, (b) im dritten Gang und (c) im fünften Gang fährt.

26 (II) Der Ort eines Rennwagens, der aus dem Stillstand zum Zeitpunkt $t = 0$ startet und sich in einer geraden Linie bewegt, wurde in Abhängigkeit der Zeit gemessen, wie in der nachstehenden Tabelle aufgeführt. Schätzen Sie (a) seine Geschwindigkeit und (b) seine Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit ab. Erstellen Sie für beide Größen eine Tabelle und fertigen Sie Kurven an.

t(s)	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50
x(m)	0	0,1	0,46	1,06	1,94	4,62	8,55	13,75
t(s)	3,00	3,50	4,00	4,50	4,00	5,50	6,00	
x(m)	20,36	28,31	37,65	48,37	60,30	73,26	87,16	

27 (II) Ein Massenpunkt bewegt sich entlang der x-Achse. Seine Weg-Zeit-Kurve ist gegeben durch $x = 6{,}0\,\mathrm{t} + 8{,}5\,\mathrm{t}^2$, wobei t in Sekunden und x in Metern angegeben ist. Wie groß ist die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit?

28 (II) Der Ort eines Körpers ist gegeben durch $x = At + 6Bt^3$, wobei x in Metern und t in Sekunden angegeben ist. (a) Welche Einheiten haben A und B? (b) Wie groß ist die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit? (c) Wie groß sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bei $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$? (d) Wie groß ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit, wenn $x = At + Bt^{-3}$?

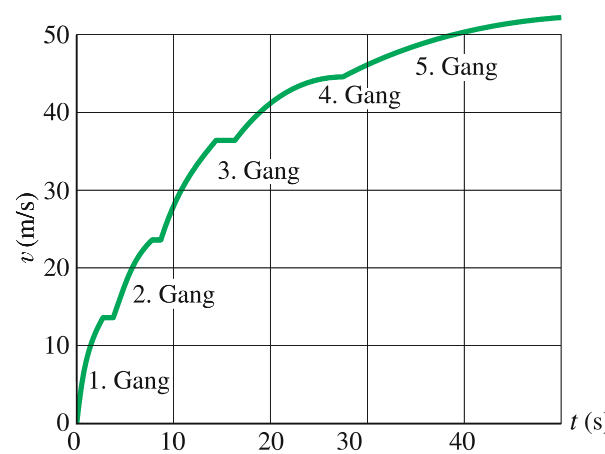


Abbildung 2.35 Die Geschwindigkeit eines Rennwagens als Funktion der Zeit, beginnend an einem Anschlag. Die Unstetigkeiten in der Steigung der Kurve stellen die Schaltvorgänge dar. Aufgaben 24 und 25.

Aufgaben zu 2.5 und 2.6

kompletter Lösungsweg

29 (I) Ein Auto beschleunigt in 6,0 s von 12 m/s auf 21 m/s. Wie groß war seine Beschleunigung? Wie weit ist es in dieser Zeit gefahren? Nehmen Sie eine konstante Beschleunigung an.

30 (I) Ein Auto kommt innerhalb eines Weges von 75 m von 25 m/s zum Stehen. Wie groß war seine Beschleunigung unter der Voraussetzung, dass die Beschleunigung konstant war?

31 (I) Ein Leichtflugzeug muss zum Abheben eine Geschwindigkeit von 32 m/s erreichen. Wie lang muss die Startbahn sein, wenn die (konstante) Beschleunigung $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ beträgt?

32 (II) Beim Baseball wird ein Ball mit einer Geschwindigkeit von 44 m/s losgeworfen. Schätzen Sie die Durchschnittsbeschleunigung des Balls während der Wurfbewegung ab. Der Baseball wird über einen Weg von3,5 m von einem Punkt hinter dem Körper bis zum dem Punkt, an dem der Werfer ihn loslässt, beschleunigt (► Abbildung 2.36).

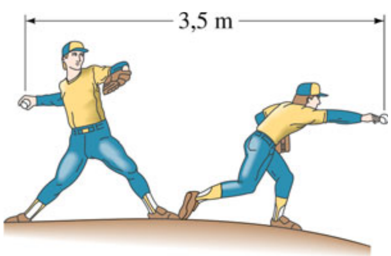


Abbildung 2.36 Aufgabe 32.

33 (II) Eine Weltklassesprinterin kann auf den ersten 15,0 m eines Laufes eine Spitzengeschwindigkeit (von ca. 11,5 m/s) erreichen. Wie groß ist die Durchschnittsbeschleunigung dieser Sprinterin und wie lange braucht sie, um diese Geschwindigkeit zu erreichen?

34 (II) Zeigen Sie, dass $\overline{v} = (v + v_0)/2$ (siehe Gleichung 2.12d) nicht gültig ist, wenn die Beschleunigung $a = A + Bt$ ist, wobei A und B Konstanten sind.

35 (II) Ein Auto bremst in 5,00 s gleichmäßig von einer Geschwindigkeit von 22,0 m/s bis zum Stillstand ab. Wie weit ist es in dieser Zeit gefahren?

36 (II) Beim Anhalten hinterlässt ein Auto Bremsspuren von 75 m Länge auf der Bundesstraße. Schätzen Sie die Geschwindigkeit des Autos direkt vor dem Bremsmanöver unter der Annahme einer Verzögerung von 7,00 m/s^2 ab.

37 (II) Ein Auto, das mit 55 km/h fährt, wird mit konstanten 0,50 m/s^2 abgebremst, indem „der Fahrer den Fuß vom Gas nimmt". Berechnen Sie (a) die Entfernung, die das Auto dahinrollt, bevor es zum Stehen kommt, (b) die Zeit, die es zum Anhalten braucht, und (c) den Weg, den es zwischen der ersten und der fünften Sekunde zurücklegt.

38 (II) Ein Auto, das mit 95 km/h fährt, fährt an einen Baum. Das vordere Ende des Autos wird zusammengedrückt und der Fahrer kommt nach 0,80 m zum Stehen. Wie groß war die Durchschnittsbeschleunigung des Fahrers während des Zusammenstoßes? Drücken Sie die Antwort in g aus, wobei 1,00 $g \mathrel{\widehat{=}} 9{,}80$ m/s^2.

39 (II) Bestimmen Sie die Anhaltewege für ein Kraftfahrzeug mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 90 km/h und einer menschlichen Reaktionszeit von 1,0 s: (a) bei einer Beschleunigung von $a = -4{,}0$ m/s^2; (b) bei $a = -8{,}0$ m/s^2.

40 (II) Ein Raumfahrzeug beschleunigt gleichmäßig von 65 m/s bei $t = 0$ auf 162 m/s bei $t = 10{,}0$ s. Wie schnell hat es sich zwischen $t = 2{,}0$ s und $t = 6{,}0$ s bewegt?

41 (II) Ein 75 m langer Zug beschleunigt gleichmäßig aus dem Stillstand. Wenn das vordere Ende des Zuges an einem Bahnarbeiter 140 m weiter an der Spur mit 25 m/s vorbeifährt, wie groß ist dann die Geschwindigkeit des letzten Wagens, wenn dieser den Arbeiter passiert?

42 (II) Zeigen Sie, dass die Gleichung für den Anhalteweg eines Autos $d_S = v_0 t_R - v_0^2/(2a)$ ist, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Autos, t_R die Reaktionszeit des Fahrers und a die konstante Beschleunigung (und negativ) ist.

43 (II) Bei der Planung von Ampeln muss das gelbe Licht lange genug leuchten, damit ein Fahrer anhalten oder weiter- und dabei über die ganze Kreuzung fahren kann. So muss, wenn ein Fahrer weniger als den Anhalteweg d_S (berechnet in Aufgabe 42) von der Kreuzung entfernt ist, das Licht lange genug leuchten, damit er diesen Weg plus die Breite der Kreuzung d_I zurücklegen kann. (a) Zeigen Sie, dass das gelbe Licht für eine Zeit $t = t_R - v_0/(2a) + d_I/v_0$ leuchten sollte, wobei v_0 eine typische zu erwartende Geschwindigkeit eines Autos, das sich der Kreuzung nähert, ist und a und t_R wie in Aufgabe 42 definiert anzusehen sind. (b) Ein Verkehrsingenieur nimmt an, dass sich Autos einer 14,4 m breiten Kreuzung mit Geschwindigkeiten zwischen 30,0 und 60,0 km/h nähern. Aus Sicherheitsgründen berechnet er die Zeit für beide Geschwindigkeiten und nimmt $t_R = 0{,}5$ s und $a = -4{,}00$ m/s^2 an. Aus Gründen der Sicherheit wählt er die längste Zeit. Wie lautet sein Ergebnis?

44 (II) Ein ziviles Polizeifahrzeug, das mit einer konstanten Geschwindigkeit von 95 km/h fährt, wird von einem Raser, der 140 km/h fährt, überholt. Genau 1,00 s, nachdem der Raser überholt hat, tritt der Polizist auf das Gaspedal. Wie viel Zeit vergeht, bevor das Polizeifahrzeug den Raser (unter der Annahme, dass dieser sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt) überholt, wenn die Beschleunigung des Polizeifahrzeugs 2,00 m/s^2 beträgt?

45 (III) Nehmen wir für Aufgabe 44 an, dass die Geschwindigkeit des Rasers nicht bekannt ist. Wie groß war die Geschwindigkeit des Rasers, wenn das Polizeifahrzeug gleichmäßig, wie oben angegeben, beschleunigt und den Raser nach einer Beschleunigungszeit von 6,0 s überholt?

46 (III) Ein Läufer hofft, den 10 000 m Lauf in weniger als 30,0 min zu absolvieren. Nach genau 27,0 min, in denen er mit konstanter Geschwindigkeit gelaufen ist, sind noch 1100 m zu laufen. Für wie viele Sekunden muss der Läufer um 0,20 m/s^2 beschleunigen, damit er die gewünschte Zeit erreicht?

Aufgaben zu 2.7

kompletter Lösungsweg

47 (I) Wie lange braucht ein Auto, das sanft ($v_0 = 0$) eine senkrechte Klippe hinunterrollt, um 100 km/h zu erreichen?

48 (I) Ein Stein wird vom oberen Ende einer Klippe fallen gelassen. Man sieht, dass er nach 2,75 s auf dem Boden aufschlägt. Wie hoch ist die Klippe?

49 (I) Berechnen Sie, (a) wie lange King Kong brauchte, um vom Empire State Building (380 m hoch) herunterzufallen, und (b) wie groß seine Geschwindigkeit direkt vor der „Landung" war.

50 (II) Ein Baseball wird mit einer Geschwindigkeit von ca. 20 m/s nahezu gerade hoch in die Luft geschlagen. (a) Wie hoch fliegt er? (b) Wie lange ist er in der Luft?

51 (II) Ein Känguru springt 2,55 m senkrecht in die Luft. Wie lange ist es in der Luft, bis es auf den Erdboden zurückkehrt?

52 (II) Ein Ballspieler fängt einen Ball 3,1 s, nachdem er ihn senkrecht hochgeworfen hat, auf. Mit welcher Geschwindigkeit hat er ihn geworfen und welche Höhe hat der Ball erreicht?

53 (II) Schätzen Sie die maximale Geschwindigkeit ab, mit der Sie einen Körper gerade hoch in die Luft werfen können. Beschreiben Sie ihre Vorgehensweise, wie Sie zu der Abschätzung gekommen sind.

54 (II) Die besten Rebounder im Basketball haben eine senkrechte Sprunghöhe (d. h. die senkrechte Bewegung eines Fixpunktes an ihrem Körper) von ca. 120 cm. (a) Welches ist ihre anfängliche Absprunggeschwindigkeit? (b) Wie lange sind sie in der Luft?

55 (II) Ein Hubschrauber steigt mit einer Geschwindigkeit von 5,60 m/s senkrecht nach oben. In einer Höhe von 115 m über dem Erdboden wird ein Päckchen aus einem Fenster fallen gelassen. Wie lange dauert es, bis das Päckchen den Erdboden erreicht?

56 (II) Zeigen Sie, dass bei einem aus dem Stillstand frei fallenden Körper der während jeder aufeinanderfolgenden Sekunde zurückgelegte Weg im Verhältnis der aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen (1, 3, 5, etc.) zunimmt. (Galilei hat dies als erster gezeigt) Siehe ► Abbildung 2.23 und ► Abbildung 2.26.

57 (II) Zeigen Sie (algebraisch) unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, dass ein mit einer Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfener Ball dieselbe Geschwindigkeit v_0 hat, wenn er zu seinem Ausgangspunkt zurückfällt.

58 (II) Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von 23,0 m/s senkrecht nach oben geworfen. (a) Wie schnell bewegt er sich, wenn er eine Höhe von 12,0 m erreicht? (b) Wie viel Zeit ist erforderlich, um diese Höhe zu erreichen? (c) Warum gibt es bei (b) zwei Antworten?

59 (II) Schätzen Sie die Zeit zwischen jeder Blitzlichtaufnahme des Apfels in ► Abbildung 2.23 (oder Anzahl der Blitze pro Sekunde) ab. Nehmen Sie an, dass der Apfel einen Durchmesser von ca. 10 cm hat.

60 (II) Eine Rakete steigt senkrecht aus dem Stillstand mit einer Beschleunigung von 3,2 m/s^2, bis sie in einer Höhe von 1200 m ausgebrannt ist. Nach diesem Punkt ergibt sich ihre Beschleunigung als die nach unten gerichtete Fallbeschleunigung. (a) Welche Geschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihr der Treibstoff ausgeht? (b) Wie lange dauert es, bis dieser Punkt erreicht ist? (c) Welche maximale Höhe erreicht die Rakete? (d) Wie lange dauert es (insgesamt), bis die maximale Höhe erreicht ist? (e) Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf der Erde auf? (f) Wie lange ist sie (insgesamt) in der Luft?

61 (II) Ein hinunterfallender Stein braucht 0,30 s, um an einem 2,2 m großen Fenster vorbeizufliegen (► Abbildung 2.37). Aus welcher Höhe über dem Fenster begann der freie Fall des Steins?

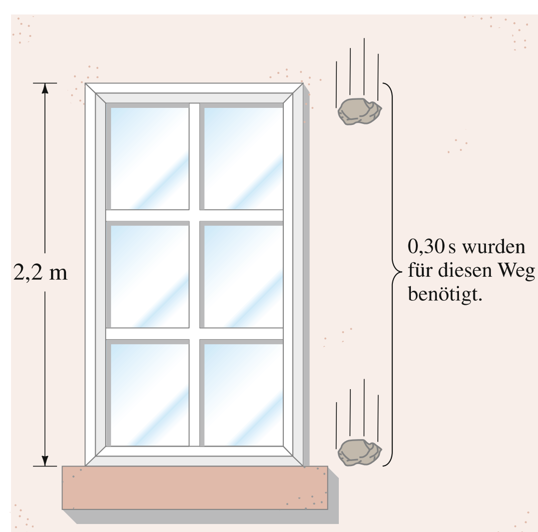


Abbildung 2.37 Aufgabe 61.

62 (II) Nehmen wir an, Sie stellen die Düse Ihres Gartenschlauches auf einen harten Wasserstrahl ein. Sie richten die Düse in einer Höhe von 1,5 m über dem Boden senkrecht nach oben (► Abbildung 2.38). Wenn Sie die

Düse schnell aus der vertikalen Position herausbewegen, hören Sie weitere 2,0 s das Wasser neben sich auf den Boden prasseln. Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus der Düse aus?

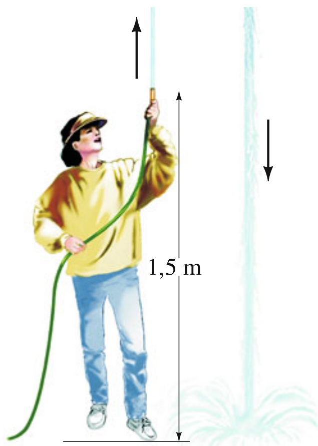


Abbildung 2.38 Aufgabe 62.

63 (III) Ein Stein wird von einer Meeresklippe fallen gelassen und das Geräusch, wie er auf das Wasser auftrifft, ist 3,4 s später zu hören. Wie hoch ist die Klippe, wenn die Geschwindigkeit des Schalls 340 m/s beträgt?

64 (III) Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von 12,0 m/s senkrecht in die Höhe geworfen. Genau 1,00 s später wird ein Ball mit einer Geschwindigkeit von 20,0 m/s auf derselben Wurfbahn senkrecht nach oben geworfen. (a) Wann treffen sie aufeinander? (b) In welcher Höhe wird der Zusammenstoß erfolgen? (c) Beantworten Sie (a) und (b) unter umgekehrten Voraussetzungen: der Ball wird 1,00 s vor dem Stein geworfen.

65 (III) Eine Spielzeugrakete fliegt an einem 2,0 m hohen Fenster vorbei, dessen Sims sich 10,0 m über dem Boden befindet. Die Rakete benötigt 0,15 s, um die Fensterhöhe von 2,0 m zu passieren. Wie groß war die Abschussgeschwindigkeit der Rakete und wie hoch fliegt sie? Nehmen Sie an, dass der Treibstoff sehr schnell während des Zündens verbrennt.

Aufgaben zu 2.8

kompletter Lösungsweg

66 (II) Gegeben ist $v(t) = 25+18t$, wobei v in m/s und t in s angegeben ist. Verwenden Sie die Integralrechnung, um den gesamten Weg zwischen $t_1 = 1{,}5$ s und $t_2 = 3{,}5$ s zu bestimmen.

67 (III) Der Luftwiderstand, der auf einen fallenden Körper wirkt, kann durch die Näherungsbeziehung für die Beschleunigung berücksichtigt werden:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv\,,$$

wobei k eine Konstante ist. (a) Leiten Sie eine Formel für die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit der Zeit her und nehmen Sie dabei an, dass er aus dem Stillstand ($v = 0$ und $t = 0$) startet. [*Hinweis*: Ändern Sie die Variablen, indem Sie $u = g - kv$ setzen.] (b) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Endgeschwindigkeit, die den Maximalwert, den die Geschwindigkeit erreicht, darstellt.

68 (III) Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist gegeben durch $a = A\sqrt{t}$, wobei $A = 2{,}0\,\mathrm{m/s^{5/2}}$ ist. Bei $t = 0$ ist $v = 10$ m/s und $x = 0$. (a) Wie groß ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit? (b) Wie groß ist der Weg in Abhängigkeit der Zeit? (c) Wie groß sind die Beschleunigung, Geschwindigkeit und der Weg bei $t = 5{,}0$ s?

Allgemeine Aufgaben

kompletter Lösungsweg

69 Die Fallbeschleunigung beträgt auf dem Mond ungefähr ein Sechstel der Fallbeschleunigung auf der Erde. Wie viel Mal höher würde ein Körper, der auf dem Mond senkrecht nach oben geworfen würde, als auf der Erde bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit fliegen?

70 Eine Person springt 15,0 m über dem Sprungtuch der Feuerwehr aus einem Fenster im vierten Stock. Die überlebende Person dehnt das Tuch 1,0 m, bevor beide zur Ruhe kommen, ► Abbildung 2.39. (a) Welche durchschnittliche Verzögerung hat die überlebende Person erfahren, als sie vom Tuch aufgefangen wurde? (b) Was würden Sie tun, um das Tuch „sicherer" zu machen (d. h. um eine geringere Verzögerung zu erzeugen): würden Sie es versteifen oder dehnbarer machen? Erklären Sie.

71 Eine Person, die ordnungsgemäß durch einen Schultergurt gesichert ist, hat gute Chancen, einen Fahrzeugzusammenstoß zu überleben, wenn die Verzögerung nicht größer als 30 g ($1{,}00\,g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$) ist. Berechnen Sie unter der Annahme einer gleichmäßigen Ab-

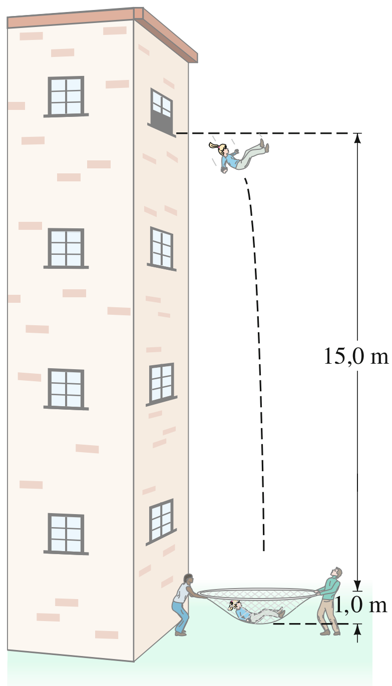


Abbildung 2.39 Aufgabe 70.

nahme dieses Wertes die Knautschzone für das vordere Ende des Autos, wenn ein Zusammenstoß das Auto von 100 km/h zum Stehen bringt.

72 Ein Rennwagenfahrer muss während eines Zeittestes, der zehn Runden dauert, durchschnittlich 200,0 km/h fahren. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muss für die letzte Runde aufrechterhalten bleiben, wenn die ersten neun Runden mit 199,0 km/h gefahren wurden?

73 Ein Autohersteller testet seine Fahrzeuge bezüglich Frontalzusammenstößen, indem er sie an einem Kran hochzieht und sie aus einer bestimmten Höhe fallen lässt. (a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit direkt vor dem Aufschlagen des Autos auf dem Boden, das aus dem Stillstand eine senkrechte Entfernung H hinuntergefallen ist, gegeben ist durch $\sqrt{2gH}$. Welche Höhe entspricht einem Zusammenstoß bei (b) 50 km/h? (c) 100 km/h?

74 ► Abbildung 2.40 ist eine Weg-Zeit-Kurve für die Bewegung eines Körpers entlang der x-Achse. Wenn sich der Körper von A nach B bewegt: (a) Bewegt sich der Körper in positiver oder negativer Richtung? (b) Wird der Körper schneller oder langsamer? (c) Ist die Beschleunigung des Körpers positiv oder negativ? Dann für das Zeitintervall von D bis E: (d) Bewegt sich der Körper in positiver oder negativer Richtung? (e) Wird der Körper schneller oder langsamer? (f) Ist die Beschleunigung des Körpers positiv oder negativ? (g) Beantworten Sie schließlich dieselben drei Fragen für das Zeitintervall von C bis D.

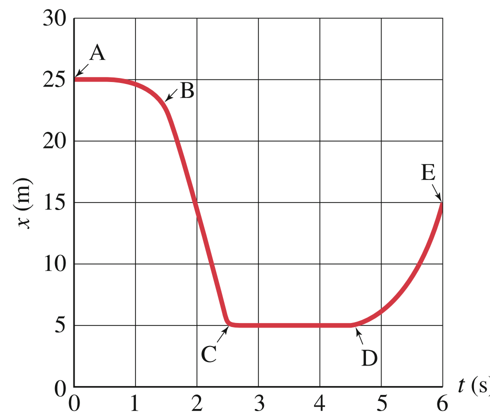


Abbildung 2.40 Aufgabe 74.

75 Zwei Kinder spielen auf zwei Trampolinen. Das erste Kind kann anderthalb Mal so hoch springen wie das zweite Kind. Die anfängliche Geschwindigkeit nach oben des zweiten Kindes beträgt 5,0 m/s. (a) Ermitteln Sie die maximale Höhe, die das zweite Kind erreicht. (b) Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit des ersten Kindes? (c) Wie lange war das erste Kind in der Luft?

76 Ein 90 m langer Zug beschleunigt aus dem Stillstand gleichmäßig. Das vordere Ende des Zuges hat eine Geschwindigkeit von 20 m/s, wenn es an einem Bahnarbeiter vorbeifährt, der 180 m von der Stelle, an der das vordere Ende des Zuges losgefahren ist, entfernt steht. Welche Geschwindigkeit hat der letzte Wagen, wenn er an dem Arbeiter vorbeifährt? (Siehe ► Abbildung 2.41).

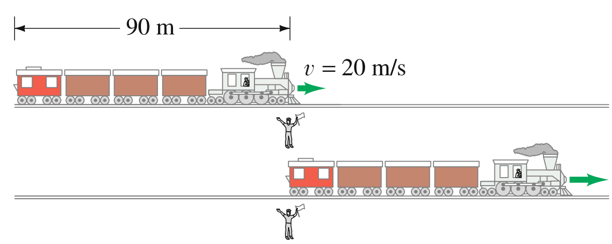


Abbildung 2.41 Aufgabe 76.

77 Ein erster Stein wird vom Dach eines Gebäudes fallen gelassen. 2,00 s später wird ein zweiter Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 30,0 m/s gerade nach unten geworfen. Man sieht, dass die beiden Steine gleichzeitig auf dem Boden aufkommen. (a) Wie lange brauchte der erste Stein, bis er auf dem Boden aufkam? (b) Wie hoch ist das Gebäude? (c) Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Steine direkt vor dem Auftreffen auf dem Boden?

78 Ein Polizeifahrzeug im Stillstand wird von einem Raser, der mit einer konstanten Geschwindigkeit von 110 km/h fährt, überholt und nimmt die Verfolgung auf. Unter Beibehaltung einer konstanten Beschleunigung holt der Polizeibeamte den Raser nach 700 m ein. (a) Zeichnen Sie die Weg-Zeit-Kurve für beide Autos vom Zeitpunkt, zu dem das Polizeifahrzeug losfährt, bis zum Einholpunkt. (b) Berechnen Sie, wie lange es gedauert hat, bis der Polizeibeamte den Raser überholt hat, (c) berechnen Sie die erforderliche Beschleunigung des Polizeifahrzeugs und (d) berechnen Sie die Geschwindigkeit des Polizeifahrzeugs am Überholpunkt.

79 Bei der Planung eines S-Bahn-Systems muss die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Zuges an die Entfernungen zwischen den Haltestellen angepasst werden. Je mehr Haltestellen es gibt, desto geringer ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges. Um eine Vorstellung von dieser Aufgabenstellung zu bekommen, berechnen Sie, wie lange ein Zug braucht, um eine 36 km lange Fahrt zu machen, und zwar in zwei Situationen: (a) die Stationen, an denen die Züge halten müssen, liegen 0,80 km auseinander; und (b) die Stationen liegen 3,0 km auseinander. Nehmen Sie an, dass der Zug an jeder Station mit 1,1 m/s^2 beschleunigt, bis er 90 km/h erreicht, dann auf dieser Geschwindigkeit bleibt, bis seine Bremsen wegen der Ankunft in der nächsten Station betätigt werden und er mit −2,0 m/s^2 abbremst. Nehmen Sie an, dass er an jeder Zwischenstation 20 s hält.

80 Betrachten Sie die Straßenanordnung in ▸ Abbildung 2.42. Jede Kreuzung hat eine Ampel und die Geschwindigkeitsbegrenzung beträgt 50 km/h. Nehmen Sie an, Sie kommen aus Richtung Westen, und wenn Sie 10 m von der ersten Kreuzung entfernt sind, schalten alle drei Ampeln auf grün. Jede Ampel ist 13 s lang auf grün. (a) Schaffen Sie es, alle drei Ampeln zu überqueren ohne anzuhalten? (b) Ein anderes Auto stand an der ersten Ampel, als alle Ampeln auf grün schalteten. Es kann mit 2,0 m/s^2 bis zum Tempolimit beschleunigen. Kann das zweite Auto alle drei Ampeln überqueren ohne anzuhalten?

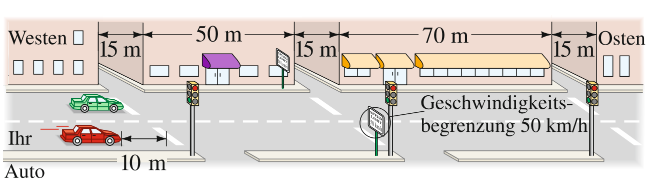


Abbildung 2.42 Aufgabe 80.

81 Ein Baseball fliegt mit einer vertikalen Geschwindigkeit von 14 m/s nach oben an einem Fenster vorbei, das sich 25 m über der Straße befindet. Der Ball wurde von der Straße aus geworfen. (a) Wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit? (b) Welche Höhe erreicht er? (c) Wann wurde er geworfen? (d) Wann erreicht er wieder die Straße?

82 Eine flüchtige Person versucht, einen Güterzug zu erreichen, der mit einer konstanten Geschwindigkeit von 6,0 m/s fährt. Gerade als ein leerer Güterwagen an der flüchtigen Person vorbeifährt, fängt diese aus dem Stillstand an zu laufen und beschleunigt mit $a = 4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ bis zu ihrer Maximalgeschwindigkeit von 8,0 m/s. (a) Wie lange braucht die Person, bis sie den leeren Güterwagen erreicht? (b) Welchen Weg legt sie zurück, um den Güterwagen zu erreichen?

83 Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von 10,0 m/s vom Rand einer 65,0 m hohen Klippe senkrecht nach oben geworfen (▸ Abbildung 2.43). (a) Wie viel später erreicht er das untere Ende der Klippe? (b) Welche Geschwindigkeit hat er direkt vor dem Aufschlagen? (c) Welchen Gesamtweg hat er zurückgelegt?

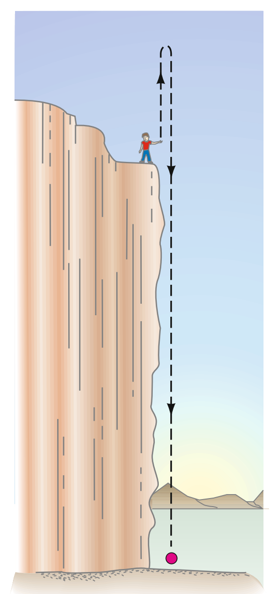


Abbildung 2.43 Aufgabe 83.

84 Zeichnen Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve für einen Körper, dessen Weg-Zeit-Funktion durch ▸ Abbildung 2.31 gegeben ist.

85 Eine Person, die ihr Auto mit 50 km/h fährt, nähert sich einer Kreuzung, als die Ampel auf gelb schaltet. Sie weiß, dass das gelbe Licht nur 2,0 s leuchtet, bevor die Ampel auf rot umschaltet, und sie ist 30 m von der nächstgelegenen Seite der Kreuzung entfernt (▸ Abbildung 2.44). Sollte sie versuchen anzuhalten oder sollte sie durchfahren? Die Kreuzung ist 15 m breit. Die maximale Verzögerung ihres Autos beträgt −6,0 m/s^2, während das Auto in 6,0 s von 50 km/h auf 70 km/h beschleunigen kann. Vernachlässigen Sie die Länge ihres Autos sowie ihre Reaktionszeit.

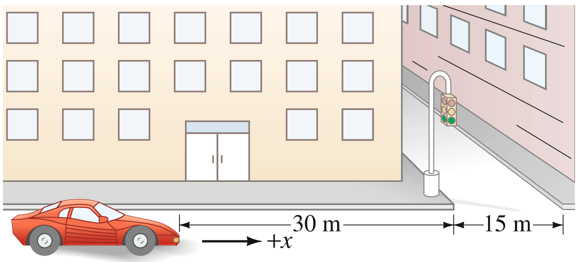


Abbildung 2.44 Aufgabe 85.

86 Pelikane verstecken ihre Flügel und fallen im freien Fall senkrecht nach unten, wenn sie nach Fischen tauchen. Nehmen Sie an, ein Pelikan beginnt seinen Sturzflug in einer Höhe von 16,0 m und kann seine einmal eingeschlagene Flugbahn nicht ändern. In welcher Mindesthöhe muss ein Fisch, der 0,20 s braucht, umein Ausweichmanöver durchzuführen, den Pelikan entdecken, um zu entkommen? Nehmen Sie an, dass sich der Fisch an der Wasseroberfläche befindet.

87 Beim Einlochen wird die Kraft, mit der ein Golfspieler einen Ball schlägt, so berechnet, dass der Ball in geringer Entfernung, z. B. 1,0 m, vor oder hinter dem Loch liegen bleibt, falls der Putt verfehlt wird. Dieses Einlochen ist aus einer bergauf gelegenen Position (d. h. Einlochen bergab, siehe ► Abbildung 2.45) schwieriger als aus einer bergab gelegenen Position. Um herauszufinden, warum, nehmen wir an, dass auf einem bestimmten Grün der Ball bei der Abwärtsbewegung konstant mit 2,0 m/s^2 und bei der Aufwärtsbewegung mit konstant 3,0 m/s^2 abbremst. Nehmen wir eine bergauf gelegene Position, die 7,0 m vom Loch entfernt ist, an. Berechnen Sie den Toleranzbereich für die Anfangsgeschwindigkeit, die wir dem Ball geben dürfen, damit er in dem Bereich von 1,0 m vor oder hinter dem Loch liegen bleibt. Führen Sie dieselbe Berechnung durch für eine bergab gelegene Position, die 7,0 m von dem Loch entfernt ist, durch. Welche Details in Ihren Ergebnissen lassen vermuten, dass das Einlochen abwärts schwieriger ist?

88 Ein Auto befindet sich hinter einem Lkw, der mit 25 m/s auf der Bundesstraße fährt. Der Fahrer wartet auf eine Gelegenheit zum Überholen. Er nimmt an, dass sein Auto mit 1,0 m/s^2 beschleunigen kann, und er schätzt, dass er den 20 m langen Lkw, plus 10 m Abstand hinter dem Lkw und weitere 10 m vor dem Lkw zurückzulegen hat. Auf der Gegenfahrbahn sieht er ein Auto kommen, das wahrscheinlich auch mit 25 m/s fährt.Er schätzt, dass das Auto ca. 400 m entfernt ist. Sollte er ein Überholmanöver versuchen? Geben Sie Einzelheiten an.

89 Ein Stein wird vom Dach eines hohen Gebäudes fallen gelassen. Ein zweiter Stein wird 1,50 s später fallen gelassen. Wie weit sind die Steine voneinander entfernt, wenn der zweite eine Geschwindigkeit von 12,0 m/s erreicht hat?

90 James Bond steht auf einer Brücke 10 m über der Straße, die darunter verläuft, und seine Verfolger kommen ihm bedrohlich nah. Er bemerkt einen Pritschenwagen, der mit Matratzen beladen ist und sich mit 30 m/s nähert. Er rechnet dies aus, weil er weiß, dass die Telegrafenmasten, an denen der Pritschenwagen vorbeifährt, in diesem Land jeweils 20 m auseinander stehen. Die Pritsche des Wagens befindet sich 1,5 m über der Straße. Bond rechnet schnell aus, wie viele Masten der Wagen entfernt sein sollte, wenn er von der Brücke auf den Wagen springt, um zu entkommen. Wie viele Masten sind es?

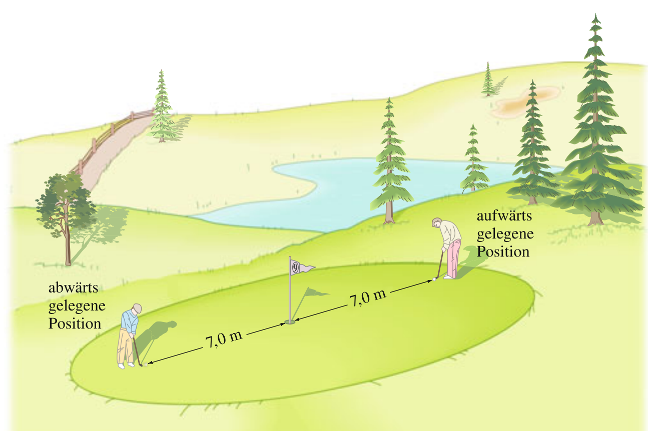
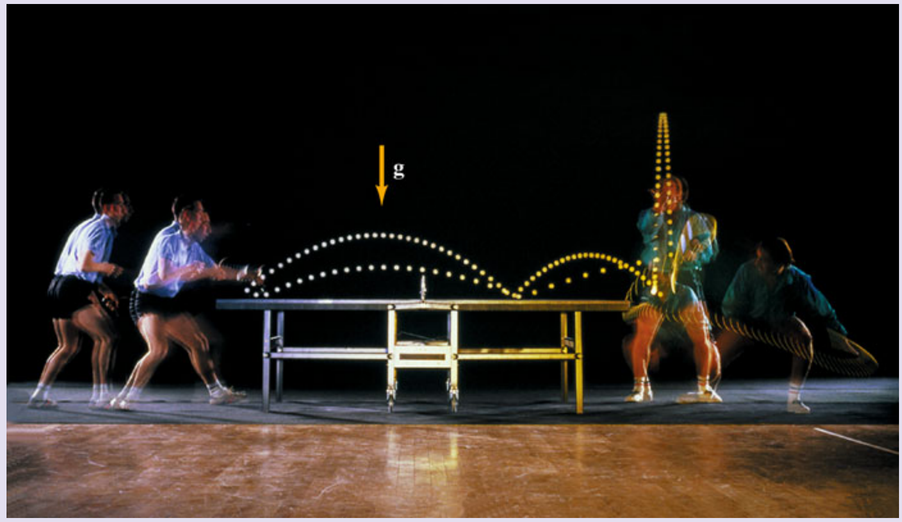


Abbildung 2.45 Aufgabe 87. Golf an einem Mittwoch morgen.

Kinematik in zwei Raumrichtungen; Vektoren

3

ÜBERBLICK



*Diese mehrfach belichtete Aufnahme eines Tischtennisballs zeigt eine Bewegung in zwei Raumrichtungen. Die Flugbahnen des Tischtennisballs sind Parabeln, die eine „Wurfbewegung" darstellen. Galilei analysierte die Wurfbewegung in ihren horizontalen und vertikalen Komponenten unter der Einwirkung der Schwerkraft (der goldene Pfeil zeigt die abwärts gerichtete Fallbeschleunigung **g** an). Wir werden erörtern, wie Vektoren zu behandeln und zu addieren sind. Neben der Untersuchung von Wurfbewegungen werden wir außerdem gleichförmige Kreisbewegungen analysieren und untersuchen, wie man mit Relativgeschwindigkeiten arbeitet.*

3. Kinematik in zwei Raumrichtungen; Vektoren

In Kapitel 2 haben wir uns mit Bewegungen entlang einer Geraden befasst. Jetzt betrachten wir die Beschreibung der Bewegung von Körpern, die sich auf Bahnen in zwei (oder drei) Raumrichtungen bewegen. Dafür müssen wir uns zunächst mit Vektoren und ihrer Addition beschäftigen. Anschließend werden wir die Beschreibung von Bewegung im Allgemeinen untersuchen und danach uns mit einigen interessanten Anwendungen beschäftigen, einschließlich der Bewegung von Geschossen nahe der Erdoberfläche und von Körpern, die gezwungen sind, sich entlang eines Kreises zu bewegen.

3.1 Vektoren und Skalare

In Kapitel 2 haben wir darauf hingewiesen, dass sich der Begriff *Geschwindigkeit* nicht nur darauf bezieht, wie schnell sich etwas bewegt, sondern auch, in welche Richtung. Eine Größe wie die Geschwindigkeit, die sowohl *Richtung* als auch *Betrag* besitzt, ist eine **Vektor**größe. Andere Größen, die auch Vektoren sind, sind Verschiebung, Kraft und Impuls. Viele Größen wie z. B. Masse, Zeit und Temperatur haben allerdings keine mit ihnen in Zusammenhang stehende Richtung. Sie sind allein durch zugewiesene Zahlen und Einheiten gekennzeichnet. Solche Größen heißen **Skalare.**

In der Physik ist es immer hilfreich, von einer bestimmten physikalischen Aufgabenstellung eine Zeichnung anzufertigen. Dies gilt insbesondere, wenn man es mit Vektoren zu tun hat. In einer Zeichnung wird jeder Vektor durch einen Pfeil dargestellt. Der Pfeil wird immer so gezeichnet, dass er in die Richtung der Vektorgröße zeigt, die er darstellt. Die Länge des Pfeils wird proportional zum Betrag der Vektorgröße gezeichnet. In ▶ Abbildung 3.1 z. B. wurden Pfeile gezeichnet, die die Geschwindigkeit eines Autos an verschiedenen Punkten beim Durchfahren einer Kurve darstellen. Der Betrag der Geschwindigkeit in jedem Punkt kann aus dieser Abbildung abgelesen werden, indem man unter Verwendung des angegebenen Maßstabes (1 cm = 90 km/h) die Länge des jeweiligen Pfeils misst.

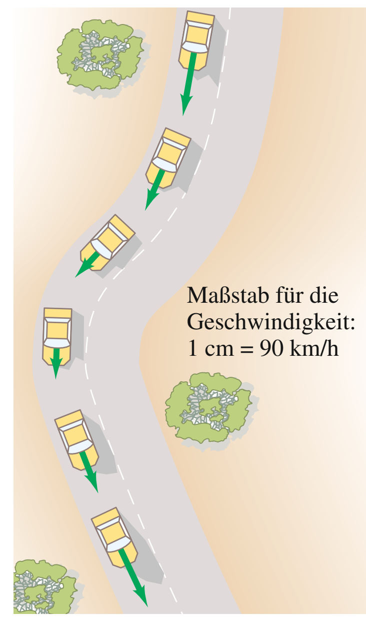


Abbildung 3.1 Ein Auto fährt auf einer Straße. Die grünen Pfeile stellen den Geschwindigkeitsvektor in jeder Position dar.

Vektorsymbole im Fettdruck

Wenn wir das Symbol für einen Vektor schreiben, benutzen wir immer Fettdruck. So schreiben wir für Geschwindigkeit **v**. (Bei handschriftlich verfassten Texten kann das Symbol für einen Vektor durch einen Pfeil über dem Symbol angezeigt werden, ein $\vec{v}$ für Geschwindigkeit.) Wenn wir uns nur mit dem Betrag des Vektors befassen, schreiben wir einfach v in Kursivschrift.

3.2 Vektoraddition – Grafische Methoden

Da Vektoren Größen sind, die sowohl eine Richtung als auch einen Betrag besitzen, müssen sie auf besondere Weise addiert werden. In diesem Kapitel werden wir uns hauptsächlich mit Ortsvektoren befassen, für die wir jetzt das Symbol **s** benutzen, sowie mit Geschwindigkeitsvektoren **v**. Die Ergebnisse gelten jedoch auch für andere Vektoren, die uns später begegnen werden.

Für das Addieren von Skalaren verwenden wir die einfache Arithmetik. Die einfache Arithmetik kann auch für die Addition von Vektoren benutzt werden, wenn sie dieselbe Richtung haben. Wenn eine Person z. B. an einem Tag 8 km nach Osten geht und am nächsten Tag 6 km nach Osten, befindet sich die Person 8 km + 6 km = 14 km vom Ausgangspunkt entfernt. Wir sagen, dass der *resultierende* Weg 14 km nach Osten beträgt (▶ Abbildung 3.2a). Wenn andererseits die Person am ersten Tag 8 km nach Osten geht und am zweiten Tag 6 km nach Westen (in die entgegengesetzte Richtung), dann befindet sich die Person schließlich 2 km

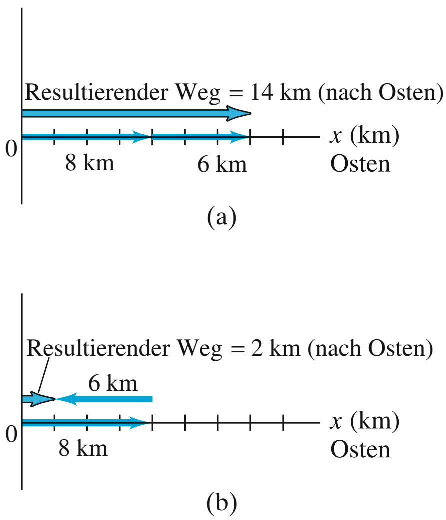


Abbildung 3.2 Kombination von Vektoren in einer Raumrichtung.

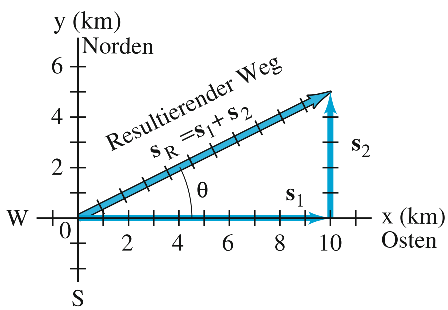


Abbildung 3.3 Eine Person geht 10,0 km nach Osten und dann 5,0 km nach Norden. Diese beiden Wege werden durch die Vektoren $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ dargestellt, die als Pfeile abgebildet sind. Der resultierende Weg $\mathbf{s}_R$, der die Vektorsumme aus $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ ist, ist ebenfalls abgebildet. Eine Messung in der Zeichnung mit Lineal und Winkelmesser zeigt, dass $\mathbf{s}_R$ einen Betrag von 11,2 km hat und in einem Winkel von $\theta = 27°$ nach Nordosten zeigt.

vom Ausgangspunkt entfernt (► Abbildung 3.2b), so dass der resultierende Weg 2 km nach Osten beträgt. In diesem Fall erhält man den resultierenden Weg durch Subtraktion: 8 km − 6 km = 2 km.

Einfache Arithmetik kann jedoch nicht benutzt werden, wenn die beiden Vektoren nicht an derselben Geraden verlaufen. Nehmen wir z. B. an, eine Person geht 10 km nach Osten und dann 5 km nach Norden. Diese Wege können in einem Graphen dargestellt werden, in dem die positive y-Achse nach Norden und die positive x-Achse nach Osten zeigt, ► Abbildung 3.3. In diesem Graphen zeichnen wir einen Pfeil, $\mathbf{s}_1$, um den Ortsvektor des Weges von 10,0 km nach Osten darzustellen. Dann zeichnen wir einen zweiten Pfeil, $\mathbf{s}_2$, um den Weg von 5,0 km nach Norden darzustellen. Beide Vektoren werden maßstabsgerecht gezeichnet, wie in ► Abbildung 3.3.

Nach diesem Spaziergang befindet sich die Person jetzt 10,0 km östlich und 5,0 km nördlich vom Ausgangspunkt entfernt. Der **resultierende Weg** ist durch den Pfeil mit der Bezeichnung $\mathbf{s}_R$ in ► Abbildung 3.3 dargestellt. Mit einem Lineal und einem Winkelmesser können Sie in dieser Zeichnung messen, dass die Person sich 11,2 km vom Ausgangspunkt in einem Winkel von 27° in nordöstlicher Richtung befindet. Mit anderen Worten, der resultierende Weg hat einen Betrag von 11,2 km und bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\theta = 27°$. Der Betrag (die Länge) von $\mathbf{s}_R$ kann in diesem Fall auch mithilfe des Satzes des Pythagoras ermittelt werden, da $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ und $\mathbf{s}_R$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\mathbf{s}_R$ als Hypotenuse bilden. Somit gilt

$$s_R = \sqrt{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2} = \sqrt{(10{,}0\,\text{km})^2 + (5{,}0\,\text{km})^2} = \sqrt{125\,\text{km}^2} = 11{,}2\,\text{km}\,.$$

Man kann den Satz des Pythagoras nur verwenden, wenn die Vektoren *senkrecht* zueinander stehen.

Der resultierende Weg $\mathbf{s}_R$ ist die Summe der Vektoren $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$. Das heißt

$$\mathbf{s}_R = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2\,.$$

Dies ist eine *Vektor*gleichung. Ein wichtiges Merkmal bei der Addition zweier Vektoren, die nicht entlang derselben Geraden verlaufen, ist die Tatsache, dass der Betrag des resultierenden Vektors nicht mit der Summe der Beträge der beiden einzelnen Vektoren identisch, sondern kleiner ist als ihre Summe:

$$s_R < s_1 + s_2\,. \qquad \text{[Vektoren verlaufen nicht entlang derselben Geraden]}$$

In unserem Beispiel (► Abbildung 3.3) ist $s_R = 11{,}2$ km, während $s_1 + s_2$ 15 km sind. In der Regel sind wir nicht an $s_1 + s_2$ interessiert. Uns interessiert vielmehr die *Vektor*summe der beiden Vektoren und ihr Betrag s_R. Beachten Sie auch, dass wir $\mathbf{s}_R$ nicht gleich 11,2 km setzen können, weil es sich um eine Vektorgleichung handelt und 11,2 km nur ein Teil des resultierenden Vektors, nämlich sein Betrag, ist. Wir könnten allerdings alternativ für $\mathbf{s}_R$ schreiben: $\mathbf{s}_R = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = (11{,}2\,\text{km}, 27°\,\text{NO})$.

► Abbildung 3.3 veranschaulicht die allgemeinen Regeln für die grafische Addition zweier Vektoren, um ihre Vektorsumme zu erhalten, unabhängig davon, welche Winkel sie bilden. Die Regeln lauten wie folgt:

1. Zeichnen Sie in einer Zeichnung einen der Vektoren – nennen Sie ihn $\mathbf{s}_1$ – maßstabsgerecht.

2. Zeichnen Sie dann den zweiten Vektor $\mathbf{s}_2$ maßstabsgerecht und setzen Sie dabei seinen Anfangspunkt an den Endpunkt des ersten Vektors. Stellen Sie sicher, dass seine Richtung korrekt ist.

3. Der Pfeil, der vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Endpunkt des zweiten Vektors gezeichnet wird, stellt die Summe oder **Resultierende** der beiden Vektoren dar.

Beachten Sie, dass Vektoren parallel zu sich selbst verschoben werden können, um diese Operationen durchzuführen. Die Länge der Resultierenden kann mit einem Lineal gemessen und mit dem Maßstab verglichen werden. Winkel können mit einem Winkelmesser gemessen werden. Dieses Verfahren bezeichnen wir als **Vektoraddition (Methode 1)**.

Beachten Sie, dass es unwichtig ist, in welcher Reihenfolge die Vektoren addiert werden. Ein Weg von 5,0 km in nördlicher Richtung, zu dem ein Weg von 10,0 km in östlicher Richtung addiert wird, ergibt z. B. eine Resultierende von 11,2 km und einen Winkel von $\theta = 27°$ (siehe ▸ Abbildung 3.4), dasselbe Ergebnis, als wenn sie in umgekehrter Reihenfolge (▸ Abbildung 3.3) addiert werden. Das heißt

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \,. \qquad \text{[Kommutativgesetz]} \qquad (3.1a)$$

Die **Vektoraddition (Methode 1)** kann auf drei oder mehr Vektoren ausgedehnt werden (▸ Abbildung 3.5) und, wie in der Abbildung veranschaulicht, gilt

$$\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 \,. \qquad \text{[Assoziativgesetz]} \qquad (3.1b)$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet, dass wir zunächst $\mathbf{V}_2$ und $\mathbf{V}_3$ und dann $\mathbf{V}_1$ zu dieser Summe addieren, um die Gesamtsumme zu ermitteln. Auf der rechten Seite wird $\mathbf{V}_1$ zu $\mathbf{V}_2$ addiert und diese Summe dann zu $\mathbf{V}_3$. Wir sehen, dass die Reihenfolge, in der zwei oder mehr Vektoren addiert werden, keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

Es gibt eine **zweite Methode für die Addition zweier Vektoren**. Ihr Ergebnis entspricht voll und ganz der ersten Methode der Vektoraddition. Bei dieser Methode werden die beiden Vektoren von einem gemeinsamen Ursprung aus gezeichnet. Mit diesen beiden Vektoren als nebeneinander liegende Seiten wird ein **Parallelogramm** konstruiert, wie in ▸ Abbildung 3.6b dargestellt. Die Resultierende ist die Diagonale, die von dem gemeinsamen Ursprung aus gezeichnet wird. In ▸ Abbildung 3.6a wird die Vektoraddition Methode 1 veranschaulicht, und es ist klar, dass beide Methoden dasselbe Ergebnis liefern. Es ist ein weit verbreiteter Fehler, den Summenvektor als Diagonale zwischen den Spitzen der beiden Vektoren zu zeichnen, wie in ▸ Abbildung 3.6c dargestellt. *Dies ist falsch*: Sie stellt nicht die Summe der beiden Vektoren dar. (Tatsächlich stellt sie deren Differenz $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ dar, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.)

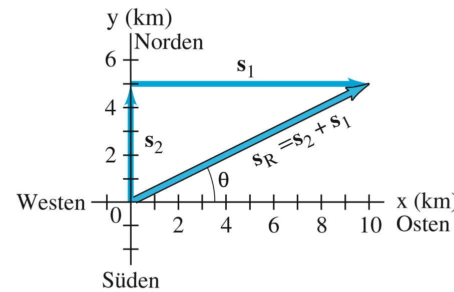


Abbildung 3.4 Wenn die Vektoren in umgekehrter Reihenfolge addiert werden, ist die Resultierende dieselbe (vgl. Abbildung 3.3).

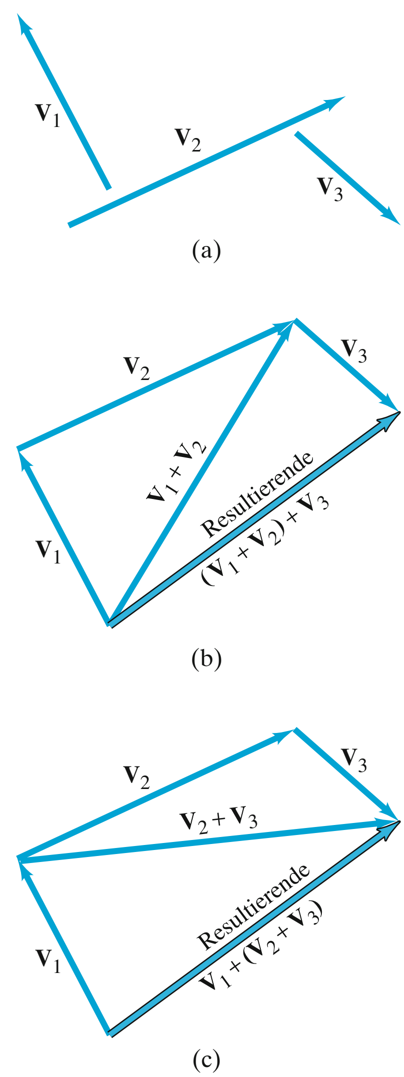


Abbildung 3.5 Die drei Vektoren in (a) können in beliebiger Reihenfolge addiert werden und liefern immer dasselbe Ergebnis, $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$. Es ist deutlich zu sehen, dass $\mathbf{V}_R = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3$ in (b) dasselbe Ergebnis liefert wie $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$ in (c). Das schreiben wir jetzt in vereinfachter Form ohne Klammern als $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

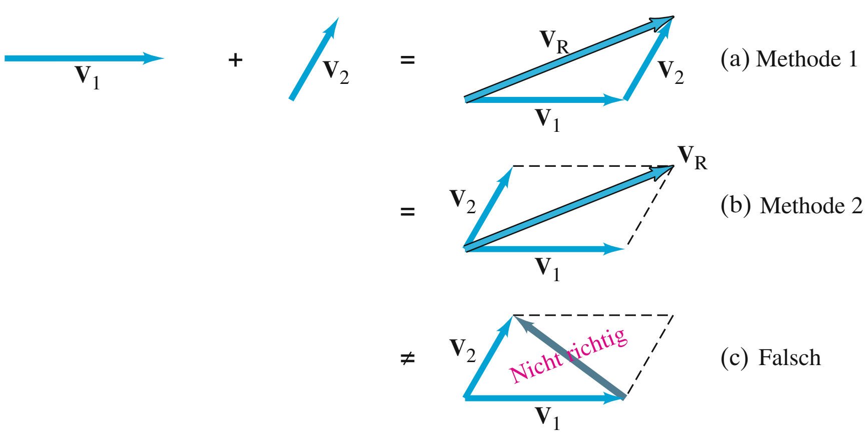


Abbildung 3.6 Vektoraddition mit zwei verschiedenen Methoden, (a) und (b). Teil (c) ist falsch.

3.3 Subtraktion von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Wenn ein Vektor $\mathbf{V}$ gegeben ist, definieren wir seinen *Negativen* $(-\mathbf{V})$ als einen Vektor, der denselben Betrag wie $\mathbf{V}$, aber die entgegengesetzte Richtung besitzt, ▸ Abbildung 3.7. Beachten Sie jedoch, dass kein Vektor jemals einen negativen

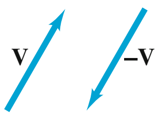


Abbildung 3.7 Der Negative eines Vektors ist ein Vektor, der dieselbe Länge, aber die entgegengesetzte Richtung besitzt.

Betrag hat: Der Betrag jedes Vektors ist positiv. Ein Minuszeichen zeigt lediglich seine Richtung an.

Jetzt können wir die Subtraktion eines Vektors von einem anderen definieren: die Differenz zwischen zwei Vektoren, $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$, ist definiert als

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + (-\mathbf{V}_1) \,.$$

Das heißt, dass die Differenz zwischen zwei Vektoren gleich der Summe des ersten plus dem Negativen des zweiten Vektors ist. Somit können unsere Regeln für die Addition von Vektoren, wie in ► Abbildung 3.8 gezeigt, mittels Vektoraddition angewendet werden.

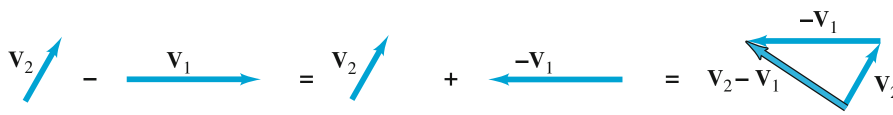


Abbildung 3.8 Subtraktion zweier Vektoren: $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$.

Ein Vektor **V** kann mit einem Skalar c multipliziert werden. Wir definieren dieses Produkt so, dass $c\mathbf{V}$ dieselbe Richtung wie **V** hat und der Betrag cV ist. Das bedeutet, dass die Multiplikation eines Vektors mit einem positiven Skalar c den Betrag des Vektors um einen Faktor c verändert, nicht jedoch die Richtung. Wenn c ein negativer Skalar ist, ist der Betrag des Produktes $c\mathbf{V}$ trotzdem cV (ohne das Minuszeichen), die Richtung ist allerdings zu der von **V** entgegengesetzt. Siehe ► Abbildung 3.9.

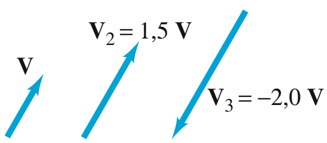


Abbildung 3.9 Die Multiplikation eines Vektors **V** mit einem Skalar c ergibt einen Vektor, dessen Betrag c-mal größer ist und der dieselbe Richtung besitzt wie **V** (oder die entgegengesetzte Richtung, wenn c negativ ist).

3.4 Vektoraddition in Komponentenschreibweise

Das grafische Addieren von Vektoren mit Lineal und Winkelmesser ist häufig nicht genau genug und nicht praktisch bei Vektoren in drei Raumrichtungen. Wir erörtern jetzt eine überzeugendere und genauere Methode der Vektoraddition.

Zunächst betrachten wir einen Vektor **V**, der in einer bestimmten Ebene liegt. Er kann als Summe zweier anderer Vektoren ausgedrückt werden, die die **Komponenten** des ursprünglichen Vektors genannt werden. Die Komponenten werden normalerweise so gewählt, dass sie senkrecht aufeinander stehen. Um die Komponenten eines Vektors zu bestimmen, **zerlegen** wir ihn in seine Komponenten.

Zerlegung eines Vektors in Komponenten

Ein Beispiel ist in ► Abbildung 3.10 dargestellt. Der Vektor **V** könnte ein Verschiebungsvektor sein, der in einem Winkel von $\theta = 30°$ in nordöstliche Richtung zeigt. Dabei haben wir die positive x-Achse als östliche Richtung und die positive y-Achse als nördliche Richtung gewählt. Dieser Vektor **V** wird in seine x- und y-Komponenten zerlegt, indem man gestrichelte Linien von der Spitze (A) des Vektors zeichnet und zwar senkrecht zur x- und zur y-Achse (Strecken AB und AC). Dann stellen die Strecken 0B und 0C die x- bzw. y-Komponente von **V** dar,

Vektorkomponenten

wie in ► Abbildung 3.10 zu sehen ist. Diese *Vektorkomponenten* werden als $\mathbf{V}_x$ und $\mathbf{V}_y$ geschrieben. Wir stellen Vektorkomponenten im Allgemeinen als Pfeile, wie Vektoren, dar, aber gestrichelt. Die *Komponenten* V_x und V_y sind Zahlen mit Einheiten, die ein positives oder negatives Vorzeichen haben, abhängig davon, ob sie entlang der positiven oder der negativen x- oder y-Achse verlaufen. Wie aus

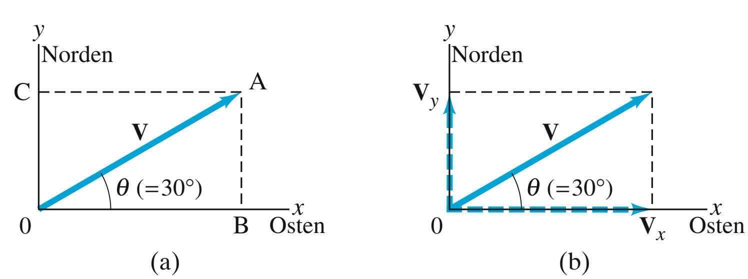


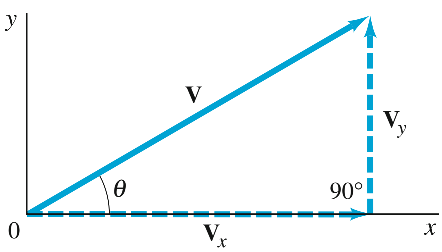
Abbildung 3.10 Zerlegung eines Vektors **V** in seine Komponenten entlang eines beliebig gewählten Koordinatensystems mit x- und y-Achse. Beachten Sie, dass die Komponenten, wenn sie einmal gefunden sind, selbst den Vektor darstellen. Das heißt, die Komponenten enthalten so viel Information wie der Vektor selbst.

► Abbildung 3.10 ersichtlich ist, ergibt sich durch die Methode 2 für die Vektoraddition $\mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y = \mathbf{V}$.

Der uns umgebende Raum ist dreidimensional und manchmal ist es erforderlich, einen Vektor entlang dreier zueinander senkrechten Richtungen in Komponenten zu zerlegen. Im rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Komponenten $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ und $\mathbf{V}_z$ und es gilt

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z\,.$$

Die Zerlegung eines Vektors in drei Raumrichtungen ist lediglich eine Erweiterung des obigen Verfahrens. In den meisten Fällen haben wir es mit Situationen zu tun, in denen die Vektoren in einer Ebene liegen und nur zwei Komponenten notwendig sind.



$$\sin\theta = \frac{V_y}{V}$$

$$\cos\theta = \frac{V_x}{V}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

Abbildung 3.11 Das Finden der Komponenten eines Vektors mithilfe trigonometrischer Funktionen, wobei θ der Winkel mit der x-Achse ist.

Die Verwendung trigonometrischer Funktionen für das Finden der Komponenten eines Vektors ist in ► Abbildung 3.11 dargestellt. Hier kann man sehen, dass man sich einen Vektor und seine beiden Komponenten als rechtwinkliges Dreieck vorstellen kann. Wir können erkennen, dass der Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels θ wie in der Abbildung gegeben sind. Folglich sind die x- und y-Komponenten eines Vektors $\mathbf{V}$

Komponenten eines Vektors

$$V_y = V\ \sin\ \theta \tag{3.2a}$$

$$V_x = V\ \cos\ \theta\,. \tag{3.2b}$$

Beachten Sie, dass θ (üblicherweise) als der Winkel gewählt wird, den der Vektor mit der positiven x-Achse einschließt.

Die Komponenten eines gegebenen Vektors verändern sich, wenn unterschiedliche Koordinatensysteme gewählt werden. Es ist deshalb entscheidend, bei Angabe der Komponenten eines Vektors die Wahl des Koordinatensystems mit anzugeben. Beachten Sie, dass es zwei Methoden gibt, einen Vektor in einem gegebenen Koordinatensystem anzugeben:

Zwei Methoden zur Angabe eines Vektors

1. Wir können seine Komponenten V_x und V_y angeben.
2. Wir können seinen Betrag V und den Winkel θ angeben, den er mit der positiven x-Achse einschließt.

Unter Verwendung der Gleichungen 3.2a und b und für den umgekehrten Fall unter Verwendung des Satzes des Pythagoras[1] und der Definition des Tangens (siehe ► Abbildung 3.11) können wir von einer Beschreibung eines Vektors zur anderen wechseln:

Betrags- und richtungsabhängige Komponenten

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{3.3a}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}\,. \tag{3.3b}$$

1 In drei Raumrichtungen wird der Satz des Pythagoras zu $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, wobei V_z die Komponente entlang der dritten oder z-Achse ist.

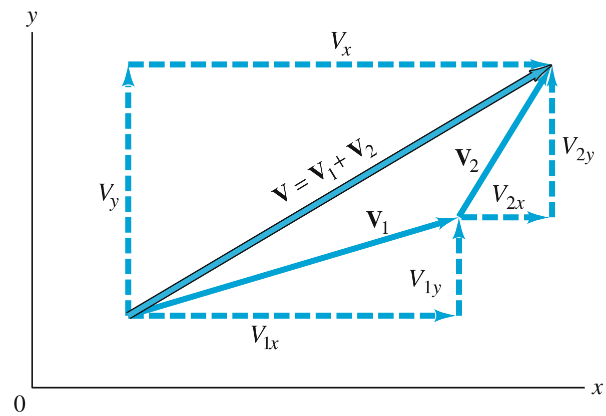


Abbildung 3.12 Die Komponenten von $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ sind $V_x = V_{1x} + V_{2x}$ und $V_y = V_{1y} + V_{2y}$.

Wir können jetzt die Vektoraddition mithilfe der Komponenten der Vektoren erörtern. Der erste Schritt ist die Zerlegung jedes Vektors in seine Komponenten. Danach können wir aus der ▸ Abbildung 3.12 sehen, dass die Addition zweier beliebiger Vektoren $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ zur Ermittlung einer Resultierenden, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ voraussetzt, dass

Analytische Vektoraddition (mit Komponenten)

$$V_x = V_{1x} + V_{2x}$$
$$V_y = V_{1y} + V_{2y} \tag{3.4}$$

Das heißt, dass die Summe der Komponenten in x-Richtung gleich der Komponente in x-Richtung der Resultierenden des Vektors ist. Gleiches gilt für die y-Richtung. Durch eine sorgfältige Untersuchung von ▸ Abbildung 3.12 kann überprüft werden, dass dieses gültig ist. Aber beachten Sie, dass wir alle x-Komponenten der Einzelvektoren addieren, um die x-Komponente des resultierenden Vektors zu erhalten. Ebenso addieren wir alle y-Komponenten, um die y-Komponente des resultierenden Vektors zu erhalten. Wir addieren *nicht* x-Komponenten zu y-Komponenten.

Der Betrag und die Richtung des resultierenden Vektors können mithilfe der Gleichungen 3.3a und 3.3b berechnet werden.

Die Wahl der Achsen kann Vereinfachung bedeuten

Die Wahl eines Koordinatensystems ist zunächst immer beliebig. Man kann häufig den Arbeitsaufwand bei der Vektoraddition durch eine geeignete Koordinatensystemwahl reduzieren – z. B. indem man eine der Achsen in derselben Richtung wählt, in der einer der Vektoren verläuft. Dann hat dieser Vektor nur eine Komponente ungleich null.

Beispiel 3.1 Weg einer Postbotin

Eine Postbotin auf dem Lande verlässt das Postamt und fährt 22,0 km in nördlicher Richtung in die nächste Stadt. Sie fährt dann 47,0 km weit 60,0° in südöstlicher Richtung in eine andere Stadt (▸ Abbildung 3.13a). Wie weit ist sie am Ende des zurückgelegten Weges vom Postamt entfernt?

Lösung

Wir wollen ihren resultierenden Weg vom Ausgangspunkt ermitteln. Wir wählen die positive x-Achse für die östliche Richtung und die positive y-Achse für die nördliche Richtung und zerlegen jeden Verschiebungsvektor in seine Komponenten (▸ Abbildung 3.13b). Da $\mathbf{s}_1$ den Betrag 22,0 km hat und nach Norden zeigt, hat er nur eine y-Komponente:

$$s_{1x} = 0, \;\; s_{1y} = 22{,}0\,\text{km}$$

während $\mathbf{s}_2$ sowohl eine x- als auch eine y-Komponente hat:

$$s_{2x} = (+47{,}0\,\text{km})(\cos 60°) = (+47{,}0\,\text{km})(0{,}500) = +23{,}5\,\text{km}$$
$$s_{2y} = (-47{,}0\,\text{km})(\sin 60°) = (-47{,}0\,\text{km})(0{,}866) = -40{,}7\,\text{km}\ .$$

Beachten Sie, dass s_{2y} negativ ist, da diese Vektorkomponente entlang der negativen y-Achse verläuft. Der resultierende Vektor $\mathbf{s}$ hat folgende Komponenten:

$$s_x = s_{1x} + s_{2x} = 0\,\text{km} + 23{,}5\,\text{km} = +23{,}5\,\text{km}$$
$$s_y = s_{1y} + s_{2y} = 22{,}0\,\text{km} + (-40{,}7\,\text{km}) = -18{,}7\,\text{km}\ .$$

Dadurch kann man den resultierenden Vektor genau angeben:

$$s_x = 23{,}5\,\text{km},\ s_y = -18{,}7\,\text{km}\ .$$

Unter Verwendung der Gleichungen 3.3a und 3.3b können wir den resultierenden Vektor auch durch Angabe seines Betrages und seines Winkels bezeichnen:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(23{,}5\,\text{km})^2 + (-18{,}7\,\text{km})^2} = 30{,}0\,\text{km}$$
$$\tan\theta = \frac{s_y}{s_x} = \frac{-18{,}7\,\text{km}}{23{,}5\,\text{km}} = -0{,}796\ .$$

Ein Taschenrechner mit einer INV TAN oder TAN^{-1} Taste gibt $\theta = \tan^{-1}(-0{,}796) = -38{,}5°$ an. Das Minuszeichen bedeutet $\theta = 38{,}5°$ unterhalb der x-Achse, ► Abbildung 3.13c.

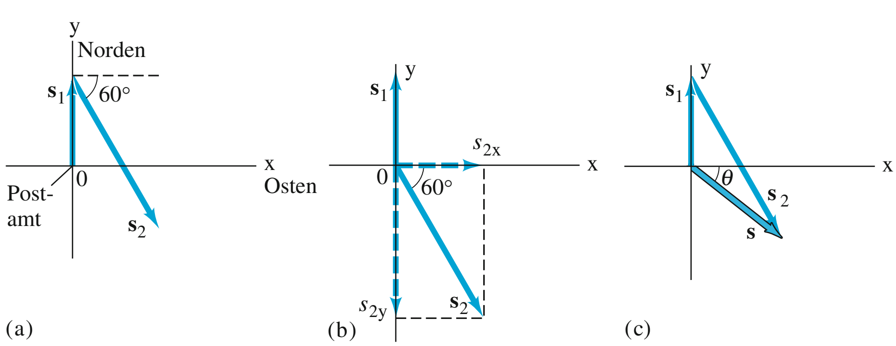


Abbildung 3.13 Beispiel 3.1

Die Vorzeichen von trigonometrischen Funktionen hängen davon ab, in welchen „Quadranten" der Winkel fällt: der Tangens ist z. B. im ersten und dritten Quadranten (zwischen 0° und 90° und zwischen 180° und 270°) positiv, im zweiten und vierten Quadranten negativ; siehe Anhang A. Die beste Methode, Winkel zu kontrollieren und ein Vektorergebnis zu überprüfen, ist immer das Zeichnen eines Vektordiagramms. Mit einem Vektordiagramm haben Sie etwas Greifbares vor Augen, wenn Sie eine Aufgabenstellung analysieren, das außerdem zur Überprüfung der Ergebnisse dient.

PROBLEMLÖSUNG

Überprüfung des Quadranten

Problemlösung — Vektoraddition in Komponentenschreibweise

Hier ist eine kurze Zusammenfassung, wie man zwei oder mehr Vektoren mithilfe der Komponenten addiert.

1 Fertigen Sie eine Zeichnung an und addieren Sie die Vektoren grafisch.

2 Wählen Sie die x- und y-Achse. Wählen Sie sie möglichst so, dass Sie ihre Arbeit vereinfachen. (Wählen Sie z. B. eine Achse entsprechend der Richtung eines der Vektoren, so dass dieser Vektor nur eine Komponente hat.)

3 Zerlegen Sie jeden Vektor in seine x- und y-Komponenten und stellen Sie jede Komponente entlang ihrer entsprechenden Achse (x oder y) als (gestrichelten) Pfeil dar.

4 Berechnen Sie jede Komponente (falls sie nicht gegeben ist) mithilfe von Sinus und Kosinus. Wenn θ_1 der Winkel ist, den der Vektor $\mathbf{V}_1$ mit der x-Achse bildet, dann gilt:

$$V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \; , V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \; .$$

Achten Sie auf die Vorzeichen: jede Komponente, die entlang der negativen x- oder y-Achse verläuft, bekommt ein Minuszeichen.

5 Addieren Sie die x-Komponenten, um die x-Komponente der Resultierenden zu erhalten. Gleiches gilt für y-Komponenten. n gibt die Anzahl der Vektoren an.

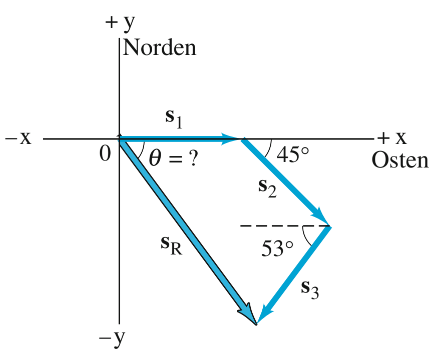
$$V_x = V_{1x} + V_{2x} + \ldots + V_{nx}$$
$$V_y = V_{1y} + V_{2y} + \ldots + V_{ny} \; .$$

V_x und V_y geben die Komponenten des resultierenden Vektors an.

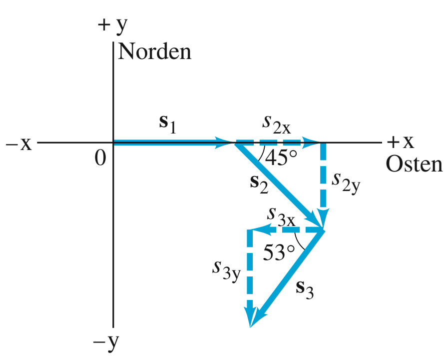
6 Wenn Sie den Betrag und die Richtung des resultierenden Vektors ermitteln möchten, verwenden Sie die Gleichungen 3.3a und 3.3b:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}.$$

Das Vektordiagramm, das Sie bereits gezeichnet haben, hilft bei der Ermittlung der richtigen Position (Quadrant) des Winkels θ.



(a)



(b)

Abbildung 3.14 Beispiel 3.2

	Komponenten	
Vektor	x (km)	y (km)
$\mathbf{s}_1$	620	0
$\mathbf{s}_2$	311	−311
$\mathbf{s}_3$	−331	−439
$\mathbf{s}_R$	600	−750

Beispiel 3.2 Drei Kurzflüge

Ein Flug besteht aus drei Teilstrecken mit zwei Zwischenlandungen, wie in ► Abbildung 3.14a dargestellt. Die erste Teilstrecke geht 620 km direkt nach Osten, die zweite 440 km nach Südosten (45°) und die dritte 550 km in einem Winkel von 53° Richtung Südwesten, wie abgebildet. Wie groß ist der Gesamtweg des Flugzeugs?

Lösung

Wir folgen den Schritten in dem obigen Kasten zur Problemlösung.

(1) und (2): Bereits in ► Abbildung 3.14a dargestellt, wo wir die x-Achse als östliche Richtung gewählt haben (dann hat $\mathbf{s}_1$ nur eine x-Komponente).

(3): Es muss unbedingt eine gute Zeichnung angefertigt werden. Die Komponenten sind aus ► Abbildung 3.14b ersichtlich. Wie Sie sehen, haben wir hier nicht alle Vektoren von einem gemeinsamen Ursprung aus gezeichnet, wie in ► Abbildung 3.13b, sondern stattdessen die erste Methode der Vektoraddition verwendet, die ebenso gültig ist und die Veranschaulichung vielleicht vereinfacht.

(4): Jetzt berechnen wir die Komponenten:

$$\mathbf{s}_1 : s_{1x} = +s_1 \cos 0^\circ = s_1 = 620\,\text{km}$$
$$s_{1y} = +s_1 \sin 0^\circ = 0\,\text{km}$$
$$\mathbf{s}_2 : s_{2x} = +s_2 \cos 45^\circ = +(440\,\text{km})(0{,}707) = +311\,\text{km}$$
$$s_{2y} = -s_2 \sin 45^\circ = -(440\,\text{km})(0{,}707) = -311\,\text{km}$$
$$\mathbf{s}_3 : s_{3x} = -s_3 \cos 53^\circ = -(550\,\text{km})(0{,}602) = -331\,\text{km}$$
$$s_{3y} = -s_3 \sin 53^\circ = -(550\,\text{km})(0{,}799) = -439\,\text{km} \; .$$

Beachten Sie, dass wir jede Komponente, die in ► Abbildung 3.14b in die negative x- oder y-Richtung zeigt, mit einem Minuszeichen versehen haben. Wir sehen, warum eine gute Zeichnung so wichtig ist. Wir fassen die Komponenten in der Tabelle am Rand zusammen.

(5) Das ist einfach:

$$s_x = s_{1x} + s_{2x} + s_{3x} = 620\,\text{km} + 311\,\text{km} - 331\,\text{km} = 600\,\text{km}$$
$$s_y = s_{1y} + s_{2y} + s_{3y} = 0\,\text{km} - 311\,\text{km} - 439\,\text{km} = -750\,\text{km} \; .$$

Die x- und y-Komponenten sind 600 km und -750 km. Sie zeigen nach Osten bzw. Süden. Dies ist eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen.

(6): Wir können die Antwort auch wie folgt geben:

$$s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2}\, b\text{km} = 960\,\text{km}$$

$$\tan\theta = \frac{s_y}{s_x} = \frac{-750\,\text{km}}{600\,\text{km}} = -1{,}25\ , \quad \text{so dass} \quad \theta = -51°\ ,$$

wobei wir nur zwei signifikante Stellen annehmen. Somit hat der Gesamtweg den Betrag 960 km und verläuft 51° unterhalb der x-Achse (südöstlich), wie es in unserer ursprünglichen Skizze, ▶ Abbildung 3.14a, dargestellt war.

3.5 Einheitsvektoren

Ein **Einheitsvektor** ist als ein Vektor definiert, der gerade den Wert eins (1) besitzt. Es ist zweckmäßig, Einheitsvektoren zu definieren, die entlang Koordinatenachsen verlaufen. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem werden diese Vektoren mit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ bezeichnet. Sie zeigen entlang der positiven x- bzw. y- bzw. z-Achse, wie in ▶ Abbildung 3.15 dargestellt. Wie andere Vektoren müssen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ nicht unbedingt am Ursprung angesetzt werden, sondern können anderswo positioniert werden, solange die Richtung und die Länge unverändert bleiben. Manchmal sieht man Einheitsvektoren mit einem „Dach" geschrieben: $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$.

Auf Grund der Definition der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (Abschnitt 3.3) können die Komponenten eines Vektors $\mathbf{V}$ geschrieben werden als $\mathbf{V}_x = V_x\mathbf{i}$, $\mathbf{V}_y = V_y\mathbf{j}$ und $\mathbf{V}_z = V_z\mathbf{k}$. Folglich kann jeder Vektor $\mathbf{V}$ in Komponentenschreibweise geschrieben werden als

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}\ . \tag{3.5}$$

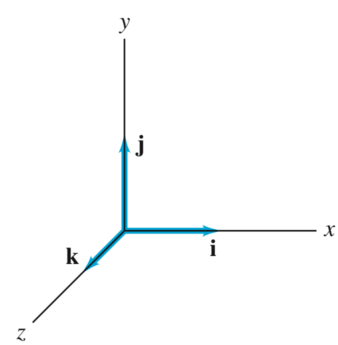


Abbildung 3.15 Einheitsvektoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ entlang der x-, y- und z-Achse.

Einheitsvektoren sind bei der analytischen Addition von Vektoren mithilfe der Komponenten hilfreich. Die Richtigkeit der Gleichung 3.4 ist z. B. durch Verwendung der Einheitsvektorschreibweise für jeden Vektor ersichtlich (wir benutzen sie für den zweidimensionalen Fall, aber die Erweiterung auf drei Raumrichtungen ist einfach):

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V_x)\mathbf{i} + (V_y)\mathbf{j}\\ &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\\ &= (V_{1x}\mathbf{i} + V_{1y}\mathbf{j}) + (V_{2x}\mathbf{i} + V_{2y}\mathbf{j})\\ &= (V_{1x} + V_{2x})\mathbf{i} + (V_{1y} + V_{2y})\mathbf{j}\ .\end{aligned}$$

Wenn wir die erste Zeile mit der vierten vergleichen, erhalten wir die Gleichung 3.4.

Beispiel 3.3 **Verwendung von Einheitsvektoren**

Schreiben Sie die Vektoren aus dem Beispiel 3.1 als Einheitsvektoren und führen Sie die Addition durch.

Lösung

In Beispiel 3.1 haben wir $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ in Komponenten zerlegt und es ergab sich

$$s_{1x} = 0, s_{1y} = 22{,}0\,\text{km} \quad \text{und} \quad s_{2x} = 23{,}5\,\text{km} \quad \text{sowie} \quad s_{2y} = -40{,}7\,\text{km}\ .$$

Somit gilt

$$\mathbf{s}_1 = 0\,\mathbf{i} + 22{,}0\,\text{km}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{s}_2 = 23{,}5\,\text{km}\,\mathbf{i} - 40{,}7\,\text{km}\,\mathbf{j}\,.$$

Dann ergibt sich

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = (0 + 23{,}5)\text{km}\,\mathbf{i} + (22{,}0 - 40{,}7)\text{km}\,\mathbf{j}$$
$$= 23{,}5\,\text{km}\,\mathbf{i} - 18{,}7\,\text{km}\,\mathbf{j}\,.$$

Die Komponenten des resultierenden Weges $\mathbf{s}$ sind $s_x = 23{,}5$ km und $s_y = -18{,}7$ km.

Ⓣ **Beschleunigung bei eindimensionaler Bewegung, Zweidimensionale Kinematik**

3.6 Bewegung in zwei und drei Raumrichtungen

Jetzt können wir unsere Definitionen für Geschwindigkeit und Beschleunigung formal auf die zwei- und dreidimensionalen Bewegungen ausdehnen. Nehmen wir an, ein Massenpunkt folgt einer Bahn in der xy-Ebene, wie in ► Abbildung 3.16 dargestellt. Zum Zeitpunkt t_1 befindet er sich im Punkt P_1 und zum Zeitpunkt t_2 im Punkt P_2. Der Vektor $\mathbf{r}_1$ ist der Ortsvektor des Massenpunktes zum Zeitpunkt t_1 (er gibt den Weg des Massenpunktes vom Ursprung des Koordinatensystems an). $\mathbf{r}_2$ ist der Ortsvektor zum Zeitpunkt t_2.

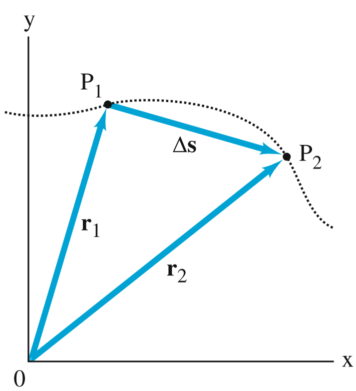


Abbildung 3.16 Bahn eines Massenpunktes in der xy-Ebene. Zum Zeitpunkt t_1 befindet sich der Massenpunkt im Punkt P_1, der durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_1$ gegeben ist. Zum Zeitpunkt t_2 befindet sich der Massenpunkt im Punkt P_2, der durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_2$ gegeben ist. Der Ortsvektor für das Zeitintervall $t_2 - t_1$ ist $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

In einer Raumrichtung haben wir den Weg als *Ortsänderung* eines Massenpunktes definiert. In dem häufigeren Fall von zwei oder drei Raumrichtungen ist der **Wegvektor** definiert als der Vektor, der die Ortsänderung darstellt. Wir nennen ihn $\Delta\mathbf{s}$, wobei

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

ist[2]. Dies stellt den Weg während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ dar. In der Schreibweise mit Einheitsvektoren können wir schreiben:

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}\,, \tag{3.6a}$$

wobei x_1, y_1 und z_1 die Koordinaten des Punktes P_1 sind (► Abbildung 3.16). Ebenso gilt

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}\,.$$

Folglich ist

$$\Delta\mathbf{s} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\,. \tag{3.6b}$$

Wenn die Bewegung nur entlang der x-Achse verläuft, ist $y_2 - y_1 = 0, z_2 - z_1 = 0$ und der Betrag des Weges ist $\Delta s = x_2 - x_1$, was mit unserer früheren eindimensionalen Gleichung (Abschnitt 2.1) übereinstimmt. Selbst in einer Raumrichtung ist der Weg, wie auch Geschwindigkeit und Beschleunigung, ein Vektor.

Der **Vektor der Durchschnittsgeschwindigkeit** $\overline{\mathbf{v}}$ über dem Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ ist definiert als

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t}\,. \tag{3.7}$$

Da $\mathbf{v}$ ein Produkt des Vektors $\Delta\mathbf{s}$ mal einem Skalar $(1/\Delta t)$ ist, hat $\mathbf{v}$ dieselbe Richtung wie $\Delta\mathbf{s}$ und sein Betrag ist $\Delta s/\Delta t$.

Als Nächstes betrachten wir immer kürzere Zeitintervalle, d. h. wir lassen Δt gegen Null gehen, so dass die Entfernung zwischen den Punkten P_2 und P_1 auch

2 An früherer Stelle in diesem Kapitel haben wir für den Verschiebungsvektor das Symbol $\mathbf{s}$ zur Veranschaulichung der Vektoraddition verwendet. Die neue Schreibweise $\Delta\mathbf{s}$ hier betont, dass es sich um die Differenz zwischen zwei Ortsvektoren handelt.

gegen Null geht. Wir definieren den **Vektor der Momentangeschwindigkeit** als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn Δt gegen Null geht:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathrm{d}t} \tag{3.8}$$

Die Richtung von $\mathbf{v}$ verläuft in jedem beliebigen Moment entlang der Geraden, die Tangente an die Bahn in dem jeweiligen Moment ist (▶ Abbildung 3.17).

Beachten Sie, dass der Betrag der vektoriellen Durchschnittsgeschwindigkeit in ▶ Abbildung 3.16 nicht gleich der skalaren Durchschnittsgeschwindigkeit ist, die dem Quotienten aus dem tatsächlich zurückgelegten Weg Δs und Δt entspricht. In einigen speziellen Fällen ist die skalare Durchschnittsgeschwindigkeit gleich dem Betrag der vektoriellen Durchschnittsgeschwindigkeit (wie z. B. bei einer Bewegung entlang einer Geraden in einer Richtung), aber im Allgemeinen gilt dies nicht. Bei dem Grenzwert $\Delta t \to 0$, nähert sich $\Delta \mathbf{s}$ allerdings immer Δs, so dass die skalare Momentangeschwindigkeit *immer* gleich dem Betrag der vektoriellen Momentangeschwindigkeit in jedem Moment ist.

Die vektorielle Momentangeschwindigkeit (Gleichung 3.8) ist gleich der Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit. Die Gleichung 3.8 kann in Komponentenschreibweise ausgedrückt werden. Dabei beginnt man mit der Gleichung 3.6a wie folgt;

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} \\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}\,,\end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t, v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ die x-, y- und z-Komponenten der Geschwindigkeit sind. Beachten Sie, dass $\mathrm{d}\mathbf{i}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{j}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{k}/\mathrm{d}t = 0$ sind, da sowohl der Betrag, als auch die Richtung dieser Einheitsvektoren konstant sind.

Die Beschleunigung in zwei oder drei Raumrichtungen wird in ähnlicher Weise behandelt. Der **Vektor der Durchschnittsbeschleunigung $\bar{\mathbf{a}}$** über ein Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ ist definiert als

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}\,, \tag{3.10}$$

wobei $\Delta \mathbf{v}$ die Änderung im Vektor der Momentangeschwindigkeit während dieses Zeitintervalls ist: $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Beachten Sie, dass in vielen Fällen, wie z. B. in ▶ Abbildung 3.18a, $\mathbf{v}_2$ nicht dieselbe Richtung wie $\mathbf{v}_1$ hat. Folglich kann $\bar{\mathbf{a}}$ eine andere Richtung als $\mathbf{v}_1$ oder $\mathbf{v}_2$ besitzen (▶ Abbildung 3.18b). Außerdem können $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_1$ denselben Betrag, aber unterschiedliche Richtungen haben, und die Differenz zweier solcher Vektoren ist nicht Null. Somit kann sich die Beschleunigung entweder aus einer Änderung im Betrag der Geschwindigkeit oder aus einer Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit oder aus beiden ergeben.

Der **Vektor der Momentanbeschleunigung** ist definiert als der Grenzwert des Vektors der Durchschnittsbeschleunigung, wenn das Zeitintervall Δt gegen Null geht:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3.11}$$

und ist somit die Ableitung von $\mathbf{v}$ nach t. Unter Verwendung der Komponenten ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$ etc. Die Momentanbeschleunigung ist nicht nur dann ungleich null, wenn der Betrag der Geschwindigkeit sich ändert, sondern auch, wenn seine Richtung sich ändert. Eine Person z. B., die mit einem Auto mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Kurve fährt, oder ein Kind, das in einem Karussell fährt,

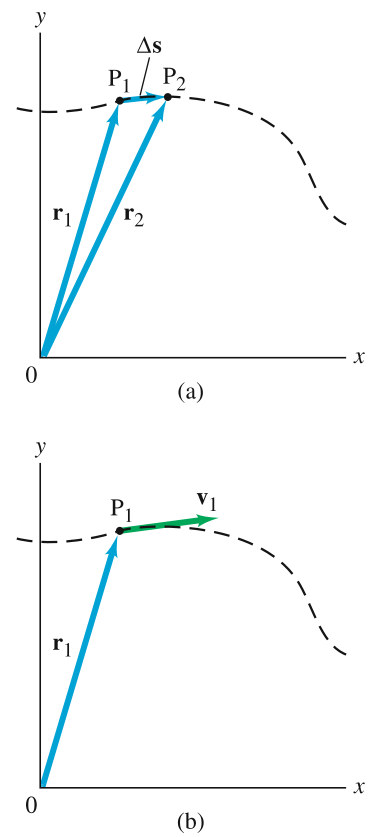


Abbildung 3.17 Wenn wir Δt und $\Delta \mathbf{s}$ immer kleiner werden lassen [vgl. Abbildung 3.16 und Teil (a) dieser Abbildung], sehen wir, dass die Richtung von $\Delta \mathbf{s}$ und der Momentangeschwindigkeit ($\Delta \mathbf{s}/\Delta t$, wobei $\Delta t \to 0$) die Tangente an die Kurve im Punkt P_1 ist (Teil b).

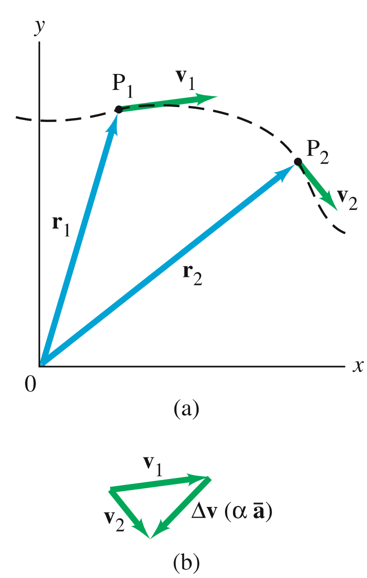


Abbildung 3.18 (a) Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 für den Massenpunkt aus Abbildung 3.16 (b) Richtung der Durchschnittsbeschleunigung in diesem Fall, $\bar{\mathbf{a}} = \Delta \mathbf{v}/\Delta t$.

erfahren beide eine Beschleunigung auf Grund einer Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit, obwohl ihr Betrag konstant bleiben kann (später mehr dazu).

Im Allgemeinen verwenden wir die Begriffe „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung" für die Momentanwerte. Wenn wir die Durchschnittswerte erörtern möchten, benutzen wir das Wort „Durchschnitt".

Konstante Beschleunigung

In Kapitel 2 haben wir eindimensionale Bewegungen untersucht, bei der die Beschleunigung eine Konstante ist. Jetzt betrachten wir zwei- oder dreidimensionale Bewegungen, bei denen der Beschleunigungsvektor **a** einen konstanten Betrag und eine konstante Richtung hat. Das bedeutet, dass $a_x =$ konstant, $a_y =$ konstant und $a_z =$ konstant sind. In diesem Fall ist die Durchschnittsbeschleunigung in jedem Moment gleich der Momentanbeschleunigung. Die Gleichungen, die wir in Kapitel 2 für eine Raumrichtung hergeleitet haben, die Gleichungen 2.12a, 2.12b und 2.12c gelten getrennt für jede senkrechte Komponente einer zwei- oder dreidimensionalen Bewegung. Bei zwei Raumrichtungen lassen wir $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}$ die Anfangsgeschwindigkeit sein und wenden die Gleichungen 3.6a, 3.9 und 3.12 für den Ortsvektor **r**, die Geschwindigkeit **v** und die Beschleunigung **a** an. Wir können dann die Gleichungen 2.12a, 2.12b und 2.12c für zwei Raumrichtungen, wie in Tabelle 3.1 dargestellt, schreiben.

Tabelle 3.1

Kinematische Gleichungen für konstante Beschleunigung in zwei Raumrichtungen

x-Komponente (horizontal)		y-Komponente (vertikal)
$v_x = v_{x0} + a_x t$	Gleichung 2.12a	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	Gleichung 2.12b	$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	Gleichung 2.12c	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

Die ersten beiden Gleichungen in Tabelle 3.1 können in Vektorschreibweise formeller wie folgt ausgedrückt werden (siehe Gleichungen 3.6a, 3.9 und 3.12):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad [\mathbf{a} = \text{konstant}] \qquad (3.13a)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad [\mathbf{a} = \text{konstant}]\,. \qquad (3.13b)$$

Hier ist **r** der Ortsvektor zu jeder beliebigen Zeit und $\mathbf{r}_0$ der Ortsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$. Diese Gleichungen für die Bewegung in ein, zwei oder drei Raumrichtungen entsprechen den Gleichungen 2.12a und 2.12b für die Bewegung in einer Raumrichtung. In der Praxis verwenden wir normalerweise die in Tabelle 3.1 dargestellte Komponentenschreibweise.

Diese Gleichungen und ihr Einsatz werden klarer, wenn wir sie benutzen. Als Nächstes behandeln wir verschiedene Arten von Bewegungen in einer Ebene, mit denen wir im Alltagsleben zu tun haben: die Wurfbewegung und die Kreisbewegung.

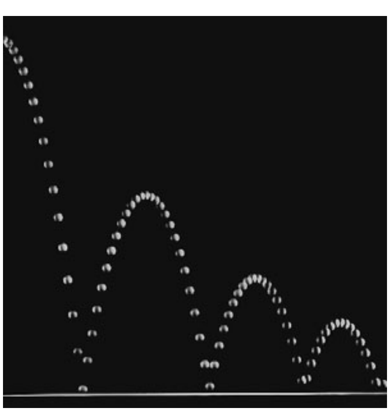


Abbildung 3.19 Dieses stroboskopische Foto eines Balls, der mehrmals aufprallt, zeigt die charakteristische „parabelförmige" Bahn der Wurfbewegung.

3.7 Wurfbewegung

In Kapitel 2 haben wir die Bewegung von Körpern in einer Raumrichtung im Hinblick auf Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung untersucht, einschließlich der rein senkrechten Bewegung von fallenden Körpern, die eine Fallbeschleunigung erfahren. Jetzt beschäftigen wir uns mit der allgemeineren Bewegung von Körpern, die sich in zwei Raumrichtungen nahe der Erdoberfläche durch die Luft bewegen, wie z. B. ein Golfball, ein geworfener oder geschlagener Baseball, geschossene Fußbälle, durch die Luft sausende Kugeln und Athleten, die Weitsprung oder Hochsprung betreiben. Alle diese Beispiele sind Beispiele einer **Wurfbewegung** (siehe ► Abbildung 3.19), die wir als zweidimensional beschreiben können. Obwohl der Luftwiderstand häufig eine große Rolle spielt, kann seine Auswirkung in vielen Fällen vernachlässigt werden. In der folgenden Analyse werden wir ihn außer Acht lassen. Wir werden uns jetzt nicht mit dem Prozess, der für das Werfen oder Schießen des Körpers ausschlaggebend ist, befassen. Wir betrachten lediglich seine Bewegung, *nachdem* er geworfen wurde und sich frei durch die Luft bewegt und nur der Schwerkraft ausgesetzt ist. Somit ist die Beschleunigung des Körpers die Fallbeschleunigung, die mit dem Betrag $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ abwärts gerichtet ist. Wir nehmen sie als konstant an[3].

Getrennte Analyse von horizontaler und vertikaler Bewegung

Galilei hat als erster Wurfbewegungen genau beschrieben. Er hat gezeigt, dass man sie durch die getrennte Analyse der horizontalen und vertikalen Komponenten der Bewegung verständlich machen konnte. Aus praktischen Gründen nehmen wir an, dass die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ursprung eines xy-Koordinatensystems (d. h. $x_0 = y_0 = 0$) beginnt.

Schauen wir uns einen (kleinen) Ball an, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_{x0} in horizontaler (x) Richtung von einem Tisch hinunterrollt. Siehe ► Abbildung 3.19, in der ein Körper, der senkrecht fällt, zum Vergleich dargestellt ist. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ in jedem Moment zeigt in die Richtung der Bewegung des Balls in dem Moment und ist immer Tangente an die Bahn. Entsprechend Galileis Vorstellung behandeln wir die horizontale und vertikale Komponente der Geschwindigkeit, v_x und v_y, getrennt. Für jede Komponente können wir die kinematischen Gleichungen (Gleichungen 2.12a bis 2.12c einschließlich) anwenden.

3 Dies beschränkt uns auf Körper, deren zurückgelegter Weg und maximale Höhe über der Erde im Vergleich zum Erdradius (6400 km) klein sind.

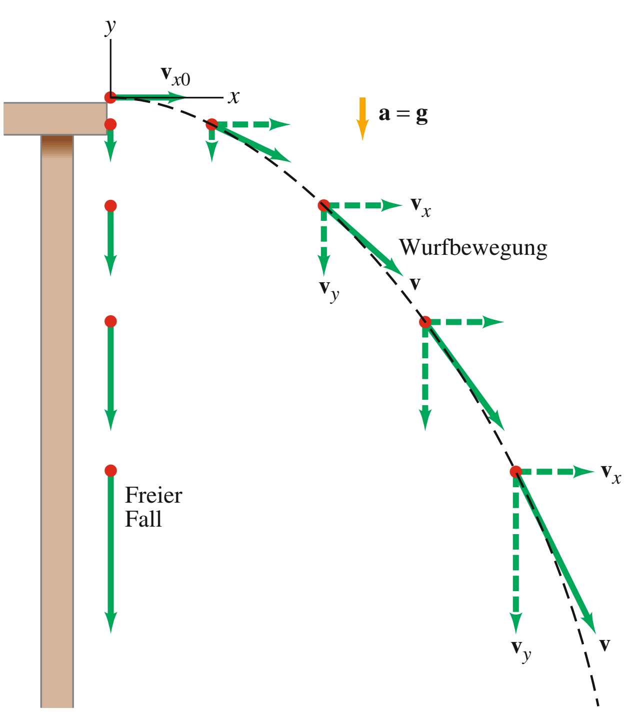


Abbildung 3.20 Wurfbewegung. (Zum Vergleich ist links ein Körper dargestellt, der senkrecht hinunterfällt.)

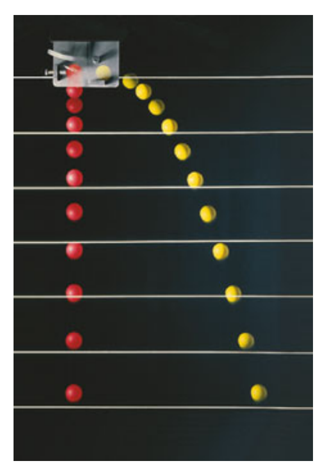


Abbildung 3.21 Mehrfach belichtete Aufnahme, die die Positionen von zwei Bällen in gleichen Zeitintervallen zeigt. Ein Ball fällt aus dem Stillstand frei, der andere wurde gleichzeitig horizontal geworfen. Man sieht, dass die vertikale Position jedes Balls die gleiche ist.

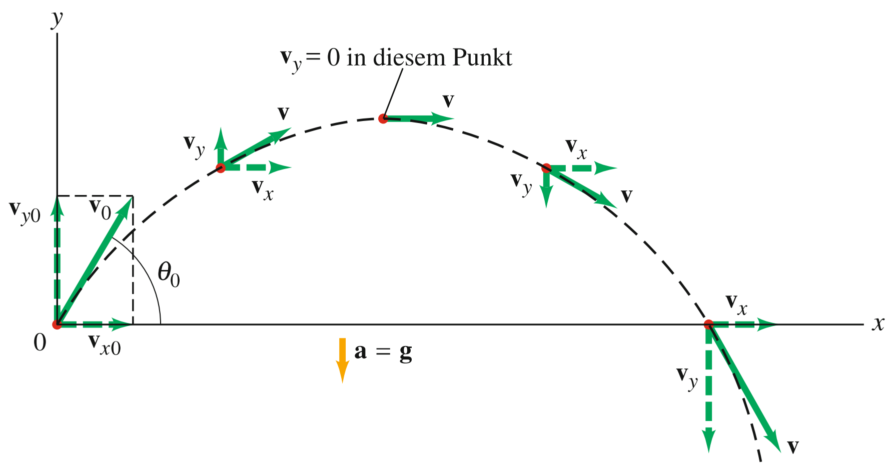


Abbildung 3.22 Bahn eines mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ im Winkel θ zur Horizontalen abgefeuerten Geschosses. Die Flugbahn ist in schwarz dargestellt, die Geschwindigkeitsvektoren sind grüne Pfeile und die Geschwindigkeitskomponenten sind gestrichelt.

Vertikale Bewegung (a_y = konstant)

Zuerst untersuchen wir die vertikale (y) Komponente der Bewegung. Wenn der Ball den Tisch verlässt (zum Zeitpunkt $t = 0$), erfährt er eine senkrecht nach unten gerichtete Beschleunigung, g, die Fallbeschleunigung. Somit ist v_y anfangs Null ($v_{y0} = 0$), nimmt jedoch ständig in der Abwärtsrichtung zu (bis der Ball auf dem Boden auftrifft). Nehmen wir y als positiv aufwärts gerichtet an. Dann gilt $a_y = -g$ und entsprechend der Gleichung 2.12a können wir $v_y = -gt$ schreiben, da wir $y_0 = 0$ gesetzt haben.

Horizontale Bewegung ($a_x = 0$, v_x = konstant)

In der horizontalen Richtung gibt es andererseits keine Beschleunigung. So bleibt die horizontale Komponente der Geschwindigkeit v_x konstant und identisch mit ihrem Anfangswert v_{x0} und hat somit in jedem Punkt der Bahn denselben Betrag. Die beiden Vektorkomponenten $\mathbf{v}_x$ und $\mathbf{v}_y$ können vektoriell addiert werden, um für jeden Punkt auf der Bahn die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ zu erhalten, wie in ► Abbildung 3.20 dargestellt.

Galilei hat bereits vorausgesagt, dass *ein Körper, der horizontal geworfen wird, den Boden in derselben Zeit erreicht, wie ein Körper, der senkrecht frei fällt*. Die vertikalen Bewegungen sind in beiden Fällen dieselben, wie in ► Abbildung 3.21 dargestellt. ► Abbildung 3.21 zeigt eine mehrfach belichtete Aufnahme eines Experimentes, das dies bestätigt.

Nach oben geworfener Körper

Wenn ein Körper in einem Winkel nach oben geworfen wird, wie in ► Abbildung 3.22, ist die Analyse ähnlich, allerdings gibt es jetzt eine anfängliche vertikale Komponente der Geschwindigkeit v_{y0}. Auf Grund der abwärts gerichteten Fallbeschleunigung nimmt v_y ständig ab, bis der Körper den höchsten Punkt auf seiner Bahn in ► Abbildung 3.22 erreicht. In diesem Punkt ist $v_y = 0$. Dann nimmt v_y in Abwärtsrichtung zu (d. h. wird negativ), wie veranschaulicht. v_x bleibt, wie zuvor, konstant.

Galileis fast vierhundert Jahre alte Analyse ist genau äquivalent zur getrennten Anwendung der Gleichungen 2.12a bis 2.12c für die horizontale (x) und vertikale (y) Komponente, wie in Tabelle 3.1 (Abschnitt 3.6) angegeben. Jetzt ist die konstante Beschleunigung nur die abwärtsgerichtete Fallbeschleunigung. Wie aus ► Abbildung 3.22 ersichtlich ist, verläuft bei einem nach oben in einem Winkel θ geworfenen Körper die Beschleunigung in einer (konstanten) Richtung. Die Geschwindigkeit hat dagegen zwei Komponenten, von denen eine (v_y) sich ständig ändert, während die andere (v_x) konstant bleibt.

Wir können die Gleichungen 2.12 (Tabelle 3.1) zur Anwendung bei Wurfbewegungen vereinfachen, indem wir $a_x = 0$ setzen. Siehe Tabelle 3.2, die annimmt, dass y positiv in Aufwärtsrichtung und somit $a_y = -g = -9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ ist. Beachten Sie auch, dass, wenn θ wie in ► Abbildung 3.22 gewählt wird, die Anfangsgeschwindigkeit folgende Komponenten hat:

$$v_x = v_0 \cos\theta \,,$$
$$v_y = v_0 \sin\theta \,.$$

Tabelle 3.2

Kinematische Gleichungen für Wurfbewegungen

Horizontale Bewegung ($a_x = 0$, $v_x =$ konstant)		Vertikale Bewegung ($a_y = -g =$ konstant)[a]
$v_x = v_{x0}$	Gleichung 2.12a	$v_y = v_{y0} - gt$
$x = x_0 + v_{x0}t$	Gleichung 2.12b	$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
	Gleichung 2.12c	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy$

[a] Wenn y positiv abwärts gerichtet ist, werden aus den Minuszeichen Pluszeichen.

3.8 Lösung von Aufgaben mit Wurfbewegungen

Wir werden jetzt einige Beispiele von Wurfbewegungen durchrechnen. Zunächst fassen wir die Herangehensweise für diese Art von Aufgaben zusammen.

Problemlösung **Wurfbewegung**

Die Herangehensweise für die Lösung von Aufgaben, die wir in Abschnitt 2.6 erörtert haben, gilt auch hier. Das Lösen von Aufgaben mit Wurfbewegungen kann jedoch etwas Kreativität erfordern und funktioniert nicht durch einfaches Befolgen einiger Regeln. Ganz sicher dürfen Sie nicht einfach Zahlen in Gleichungen stecken, die zu „funktionieren" scheinen.

Lesen Sie wie immer sorgfältig und fertigen Sie eine genaue **Zeichnung** an.

1. Wählen Sie einen Ursprung und ein xy-Koordinatensystem.
2. Analysieren Sie die horizontale (x) Bewegung und die vertikale (y) Bewegung getrennt. Wenn die Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist, möchten Sie sie vielleicht in ihre x- und y-Komponenten zerlegen.
3. Listen Sie die bekannten und unbekannten Größen auf und wählen Sie $a_x = 0$ und $a_y = -g$ oder $+g$, wobei $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$, abhängig davon, ob Sie y positiv in Aufwärts- oder Abwärtsrichtung wählen. Denken Sie daran, dass v_x sich während der gesamten Flugbahn nicht ändert und dass $v_y = 0$ im höchsten Punkt jeder Flugbahn ist, die in Abwärtsrichtung zurückläuft. Die Geschwindigkeit direkt vor dem Auftreffen auf dem Boden ist im Allgemeinen nicht null.
4. Denken Sie eine Minute nach, bevor Sie die Gleichungen anwenden. Etwas Planung braucht ihre Zeit. Wenden Sie die entsprechenden Gleichungen (Tabelle 3.2) an und kombinieren Sie Gleichungen, falls erforderlich. Möglicherweise müssen Sie Komponenten eines Vektors kombinieren, um Betrag und Richtung zu erhalten (Gleichungen 3.3a und 3.3b).

Beispiel 3.4 **Hinunterfahren von einer Klippe**

Ein Stuntfahrer rast für einen Kinofilm auf einem Motorrad waagerecht von einer 50,0 m hohen Klippe. Wie schnell muss das Motorrad beim Verlassen des oberen Klippenendes sein, wenn es auf ebenem Boden 90,0 m vom Fuß der Klippe entfernt, wo die Kameras stehen, aufkommen soll (▸ Abbildung 3.23)?

Lösung

Wir nehmen die y-Richtung als positiv aufwärts gerichtet und das obere Ende der Klippe mit $y_0 = 0$ an, so dass das untere Ende bei $y = -50{,}0\,\mathrm{m}$ liegt.

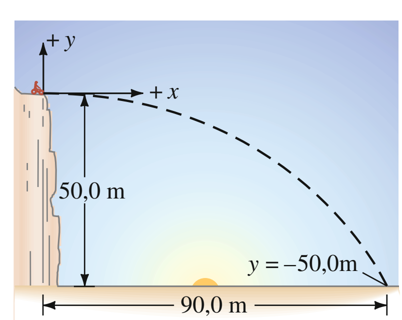


Abbildung 3.23 Beispiel 3.4.

Zunächst ermitteln wir, wie lange das Motorrad braucht, um den Boden unten zu erreichen. Wir wenden die Gleichung 2.12b für die vertikale (y) Richtung (Tabelle 3.2) mit $y_0 = 0$ und $v_{y0} = 0$ an:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 .$$

Das lösen wir nach t auf und setzen $y = -50{,}0\,\text{m}$:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-50{,}0\,\text{m})}{-9{,}80\,\text{m/s}^2}} = 3{,}19\,\text{s} .$$

Um die Anfangsgeschwindigkeit v_{x0} zu berechnen, verwenden wir wieder die Gleichung 2.12b, dieses Mal aber für die horizontale (x) Richtung mit $a_x = 0$ und $x_0 = 0$:

$$x = v_{x0}t$$

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{90{,}0\,\text{m}}{3{,}19\,\text{s}} = 28{,}2\,\text{m/s} ,$$

was 101 km/h entspricht.

ANGEWANDTE PHYSIK

Sport

Beispiel 3.5 Ein geschossener Fußball

Ein Fußball wird in einem Winkel von $\theta_0 = 37{,}0°$ mit einer Geschwindigkeit von 20,0 m/s, wie in ▶ Abbildung 3.24 dargestellt, geschossen. Berechnen Sie (a) die maximale Höhe, (b) die Zeit für den Weg, den der Fußball zurücklegt, bevor er auf dem Boden aufkommt, (c) wie weit entfernt er auf dem Boden aufkommt, (d) den Geschwindigkeitsvektor bei der maximalen Höhe und (e) den Beschleunigungsvektor in maximaler Höhe. Nehmen Sie an, dass der Ball den Fuß auf Bodenhöhe verlässt und lassen Sie den Luftwiderstand außer Acht (obwohl dies nicht sehr realistisch ist).

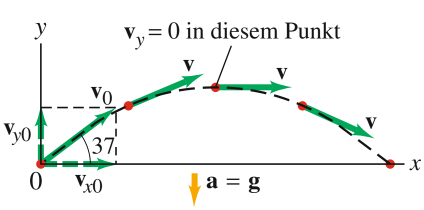


Abbildung 3.24 Beispiel 3.5 (siehe auch Abbildung 3.22).

Lösung

Wir nehmen die y-Richtung als positiv aufwärts gerichtet an. Die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit sind (▶ Abbildung 3.24):

$$v_{x0} = v_0 \cos 37{,}0° = (20{,}0\,\text{m/s})(0{,}799) = 16{,}0\,\text{m/s}$$
$$v_{y0} = v_0 \sin 37{,}0° = (20{,}0\,\text{m/s})(0{,}602) = 12{,}0\,\text{m/s} .$$

a In maximaler Höhe ist die Geschwindigkeit horizontal (▶ Abbildung 3.24), so dass $v_{y0} = 0$ ist. Dies tritt ein (siehe Gleichung 2.12a in Tabelle 3.2) zum Zeitpunkt

$$t = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{12{,}0\,\text{m/s}}{9{,}80\,\text{m/s}^2} = 1{,}22\,\text{s} .$$

Aus der Gleichung 2.12b mit $y_0 = 0$ haben wir

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (12{,}0\,\text{m/s})(1{,}22\,\text{s}) - \frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(1{,}22\,\text{s})^2 = 7{,}35\,\text{m} .$$

Alternativ hätten wir die Gleichung 2.12c nach y aufgelöst anwenden und

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2\,g} = \frac{(12{,}0\,\text{m/s})^2 - (0\,\text{m/s})^2}{2(9{,}80\,\text{m/s}^2)} = 7{,}35\,\text{m}$$

ermitteln können.

b Um herauszufinden, wie lange der Ball braucht, um auf den Boden zurückzukehren, wenden wir die Gleichung 2.12b mit $y_0 = 0$ an und setzen $y = 0$ (Erdbodenhöhe):

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$0 = 0 + (12{,}0\,\mathrm{m/s})t - \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})t^2 \;.$$

Dies ist eine Gleichung, die leicht in Faktoren zerlegt werden kann:

$$\left[\frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})t - 12{,}0\,\mathrm{m/s}\right] t = 0 \;.$$

Es gibt zwei Lösungen, $t = 0$ (die dem Ausgangspunkt y_0 entspricht), und

$$t = \frac{2(12{,}0\,\mathrm{m/s})}{(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})} = 2{,}45\,\mathrm{s} \;.$$

Das ist das Ergebnis, das wir gesucht haben. Beachten Sie, dass die Zeit $t = 2{,}45$ s genau die doppelte Zeit ist wie die Zeit, die wir für das Erreichen des höchsten Punktes in (a) berechnet haben. Das bedeutet, dass die Zeit für das Aufsteigen identisch ist mit der Zeit für das Herunterfallen bis auf dieselbe Höhe – Luftwiderstand außer Acht gelassen.

Beachten Sie die Symmetrie

c Der in x-Richtung zurückgelegte Gesamtweg wird durch Anwendung der Gleichung 2.12b mit $x_0 = 0$, $a_x = 0$, $v_{x0} = 16{,}0\,\mathrm{m/s}$ ermittelt:

$$x = v_{x0}t = (16{,}0\,\mathrm{m/s})(2{,}45\,\mathrm{s}) = 39{,}2\,\mathrm{m} \;.$$

d Im höchsten Punkt ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente gleich null. Es gibt nur die horizontale Komponente (die während des Fluges konstant bleibt), so dass $v = v_{x0} = v_0 \cos 37{,}0° = 16{,}0\,\mathrm{m/s}$.

e Der Beschleunigungsvektor ist im höchsten Punkt derselbe wie während des gesamten Fluges, und zwar $9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ in Abwärtsrichtung.

Beispiel 3.6 · Begriffsbildung — Wo landet der Apfel?

Ein Kind sitzt aufrecht in einem Wagen, der sich, wie in ▶ Abbildung 3.25 dargestellt, mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts bewegt. Das Kind streckt seine Hand aus und wirft einen Apfel senkrecht nach oben (aus seiner Sicht, ▶ Abbildung 3.25a), während der Wagen mit konstanter Geschwindigkeit weiter vorwärts fährt. Wird der Apfel (a) hinter dem Wagen, (b) im Wagen oder (c) vor dem Wagen landen, wenn man den Luftwiderstand außer Acht lässt?

Lösung

Das Kind wirft den Apfel aus seiner Sicht direkt nach oben mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $\mathbf{v}_{0y}$ (▶ Abbildung 3.25a). Wenn allerdings jemand vom Boden aus dies beobachtet, so hat der Apfel auch eine anfängliche horizontale Geschwindigkeitskomponente, die der skalaren Geschwindigkeit des Wagens $\mathbf{v}_{0x}$ entspricht. Somit folgt der Apfel aus Sicht einer Person auf dem Erdboden der Bahn eines Geschosses, wie in ▶ Abbildung 3.25b dargestellt. Der Apfel erfährt keine horizontale Beschleunigung, so dass $\mathbf{v}_{0x}$ konstant bleibt und mit der Geschwindigkeit des Wagens identisch ist. Während der Apfel seiner bogenförmigen Bahn folgt, befindet sich der Wagen immer direkt unter dem Apfel, da beide dieselbe horizontale Geschwindigkeit haben. Wenn der Apfel herunterfällt, fällt er direkt in den Wagen in die ausgestreckte Hand des Kindes. Die Antwort ist also (b).

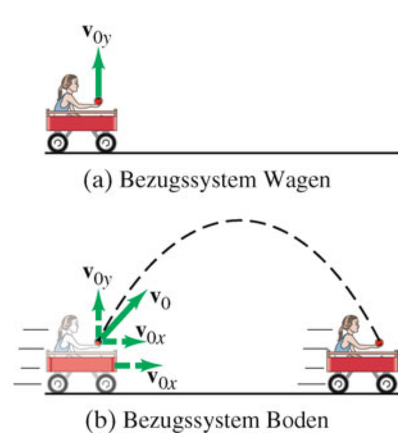


Abbildung 3.25 Beispiel 3.6 Begriffsbildung.

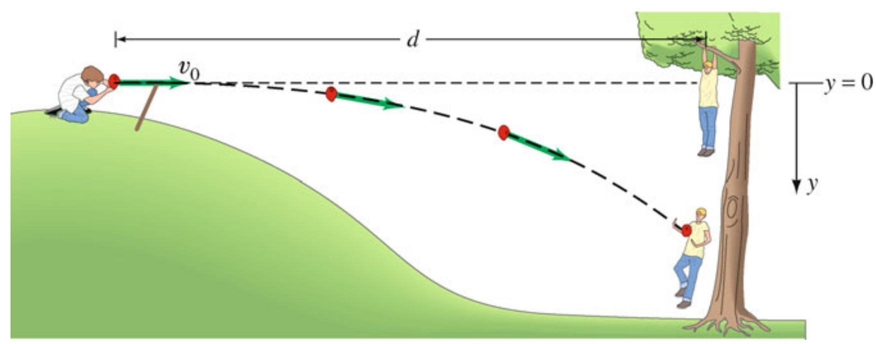
Beispiel 3.7 · Begriffsbildung — Die falsche Strategie

Ein Junge auf einem kleinen Hügel richtet die Schleuder für seinen mit Wasser gefüllten Ballon waagerecht direkt auf einen zweiten Jungen, der in einer Entfernung d vom Ast eines Baumes herunterhängt, ► Abbildung 3.26. In dem Moment, in dem der Wasserballon losgelassen wird, lässt der zweite Junge los und fällt vom Baum herunter in der Hoffnung, nicht getroffen zu werden. Zeigen Sie, dass er die falsche Bewegung gemacht hat. (Er hat noch keinen Physikunterricht gehabt.)

Lösung

Sowohl der Wasserballon, als auch der Junge im Baum fangen im selben Moment an zu fallen und in einer Zei t fallen beide denselben vertikalen Weg $y = \frac{1}{2}gt^2$ (siehe ► Abbildung 3.21). In der Zeit, die der Wasserballon braucht, um die horizontale Entfernung d zurückzulegen, hat der Ballon denselben y-Ort wie der fallende Junge. Klatsch. Wenn der Junge im Baum geblieben wäre, hätte er sich die Demütigung erspart.

Abbildung 3.26 Beispiel 3.7.



ANGEWANDTE PHYSIK
Horizontale Reichweite eines Geschosses

Beispiel 3.8 — Horizontale Reichweite

(a) Leiten Sie eine Formel für die horizontale Reichweite R eines Geschosses in Abhängigkeit seiner Anfangsgeschwindigkeit v_0 und des Winkels θ_0 her. Die horizontale Reichweite ist definiert als der horizontale Weg, den das Geschoss zurücklegt, bevor es in seine Ausgangshöhe, normalerweise der Erdboden, zurückkehrt, das heißt y (Endwert) $= y_0$, siehe ► Abbildung 3.27. (b) Nehmen wir an, eine von Napoleons Kanonen hatte eine Mündungsgeschwindigkeit v_0 von 60 m/s. In welchem Winkel hätte sie ausgerichtet werden müssen, um ein Ziel in 320 m Entfernung zu treffen (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes)?

Lösung

a Wir setzen $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Nachdem das Geschoss einen horizontalen Weg R zurückgelegt hat, kehrt es auf dieselbe Höhe, $y = 0$, den Endpunkt, zurück. Um einen allgemeinen Ausdruck für R zu finden, setzen wir deshalb in der Gleichung 2.12b für die vertikale Bewegung $y = 0$ und $y_0 = 0$ und erhalten

$$v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0\ .$$

Wir lösen nach t auf und erhalten zwei Lösungen: $t = 0$ und $t = 2v_{y0}/g$. Die erste Lösung entspricht dem Anfang der Wurfbewegung und die zweite ist der Zeitpunkt, an dem das Geschoss nach $y = 0$ zurückkehrt. Die Reichweite R ist gerade der Weg x zum Zeitpunkt $t = 2v_{y0}/g$ und diesen Wert von t setzen wir in die Gleichung 2.12b für die horizontale Bewegung ($s_x = v_{x0}t$ bei $x_0 = 0$) ein. Somit ergibt sich

$$R = s_x = v_{x0}t = v_{x0}\left(\frac{2v_{y0}}{g}\right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \qquad [y_0 = 0]$$

wobei wir $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ und $v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$ geschrieben haben. Nach diesem Ergebnis haben wir gesucht. Es kann unter Verwendung der trigonometrischen Gleichung $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ (Anhang A) zu

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

umgeschrieben werden.

Formel für die Reichweite [y (Endwert) $= y_0$]

Wir sehen, dass man die maximale Reichweite für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 erhält, wenn der Sinus seinen Maximalwert von 1,0 erreicht. Dies ist bei $2\theta_0 = 90°$ der Fall. Deshalb gilt

$$\theta_0 = 45° \quad \text{bei maximaler Reichweite und} \quad R_{max} = v_0^2/g\,.$$

[Wenn der Luftwiderstand nicht vernachlässigbar ist, ist die Reichweite bei einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 geringer und die maximale Reichweite wird bei einem Winkel, der kleiner als 45° ist, erreicht.] Beachten Sie, dass sich die maximale Reichweite um das Quadrat von v_0 erhöht, so dass die Verdoppelung der Mündungsgeschwindigkeit einer Kanone ihre maximale Reichweite vervierfacht.

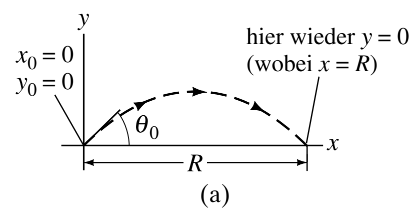
b Aus der gerade hergeleiteten Gleichung ergibt sich, dass Napoleons Kanone (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) in einem Winkel θ_0 ausgerichtet sein sollte, der gegeben ist durch

$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{(320\,\text{m})(9{,}80\,\text{m/s}^2)}{(60{,}0\,\text{m/s})^2} = 0{,}871\,.$$

Wir möchten nach einem Winkel θ_0 auflösen, der zwischen 0° und 90° liegt. Das bedeutet, dass $2\theta_0$ in dieser Gleichung maximal 180° betragen kann. Somit ist sowohl $2\theta_0 = 60{,}6°$, als auch $2\theta_0 = 180° - 60{,}6° = 119{,}4°$ eine Lösung (siehe Anhang A). Im Allgemeinen gibt es zwei Lösungen, die in Napoleons Fall gegeben sind durch

$$\theta_0 = 30{,}3° \quad \text{oder} \quad 59{,}7°\,.$$

Jeder Winkel ergibt dieselbe Reichweite. Nur bei $\sin 2\theta_0 = 1$ (d. h. $\theta_0 = 45°$) gibt es für beide Lösungen einen identischen Wert.



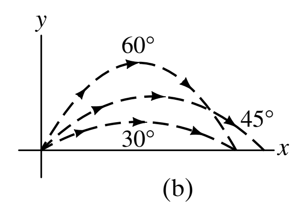


Abbildung 3.27 Beispiel 3.8. (a) Die Reichweite R eines Geschosses; (b) zeigt, wie es im Allgemeinen zwei Winkel θ_0 gibt, die dieselbe Reichweite ergeben. Können Sie aufzeigen, dass, wenn ein Winkel θ_{01} ist, der andere $\theta_{02} = 90° - \theta_{01}$ ist?

Beispiel 3.9 Ein Volleyschuss

Nehmen wir an, dass der Fußball in Beispiel 3.5 ein Volleyschuss war und den Fuß des Spielers in einer Höhe von 1,00 m über dem Erdboden verlassen hat. Wie weit ist der Fußball geflogen, bevor er auf dem Boden auftraf? Setzen Sie $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Lösung

Wir können die Formel für die Reichweite aus Beispiel 3.8 nicht benutzen, weil sie nur gültig ist, wenn y (Endwert) $= y_0$ ist. Das ist hier nicht der Fall.

ANGEWANDTE PHYSIK

Sport

PROBLEMLÖSUNG

Verwenden Sie Formeln nur, wenn Sie sicher sind, dass ihr Gültigkeitsbereich auf die Aufgabe zutrifft. Die Formel für die Reichweite gilt hier nicht, da $y \neq y_0$.

Wir haben $y_0 = 0$ und der Fußball trifft bei $y = -1{,}00\,\mathrm{m}$ (siehe ► Abbildung 3.28) auf dem Boden auf. Wir können x aus der Gleichung 2.12b, $x = v_{x0}t$, erhalten, da wir wissen, dass $v_{x0} = 16{,}0\,\mathrm{m/s}$ ist. Zunächst müssen wir jedoch den Zeitpunkt t ermitteln, an dem der Ball auf dem Boden auftrifft. Bei $y = -1{,}00\,\mathrm{m}$ und $v_{y0} = 12{,}0\,\mathrm{m/s}$ (siehe Beispiel 3.5) verwenden wir die Gleichung

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

und erhalten

$$-1{,}00\,\mathrm{m} = 0 + (12{,}0\,\mathrm{m/s})t - (4{,}90\,\mathrm{m/s^2})t^2 \,.$$

Wenn wir diese Gleichung in die Standardform ($ax^2 + bx + c = 0$) bringen, erhalten wir

$$(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})t^2 - (12{,}0\,\mathrm{m/s})t - 1{,}00\,\mathrm{m} = 0 \,,$$

und die Quadratformel ergibt

$$t = \frac{12{,}0\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(-12{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 4(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})(-1{,}00\,\mathrm{m})}}{2(4{,}90\,\mathrm{m/s^2})}$$
$$= 2{,}53\,\mathrm{s} \quad \text{oder} \quad -0{,}081\,\mathrm{s} \,.$$

Die zweite Lösung würde einem Zeitpunkt vor dem Schuss entsprechen, deshalb gilt sie hier nicht. Bei $t = 2{,}53\,\mathrm{s}$ für den Zeitpunkt, an dem der Ball den Boden berührt, beträgt der Weg, den der Ball zurückgelegt hat (wobei wir aus Beispiel 3.5 $v_{x0} = 16{,}0\,\mathrm{m/s}$ setzen):

$$s_x = v_{x0}t = (16{,}0\,\mathrm{m/s})(2{,}53\,\mathrm{s}) = 40{,}5\,\mathrm{m} \,.$$

Beachten Sie, dass unsere Annahme in Beispiel 3.5, dass der Ball den Fuß in Höhe des Erdbodens verlässt, zu einer Unterschätzung des zurückgelegten Weges um ca. 1,3 m führt.

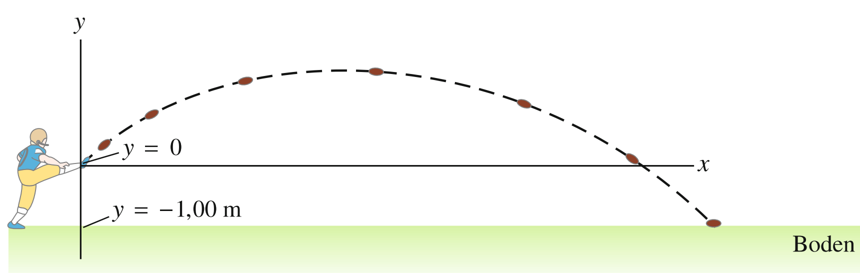


Abbildung 3.28 Beispiel 3.9: der Fußball verlässt den Fuß des Spielers bei $y = 0$ und erreicht den Erdboden bei $y = -1{,}00\,\mathrm{m}$.

ANGEWANDTE PHYSIK

Erreichen eines Ziels aus einem Flugzeug in Bewegung

Beispiel 3.10 Rettungsflugzeug wirft Versorgungsgüter ab

Ein Rettungsflugzeug soll Vorräte zu abgeschnittenen Bergsteigern, die sich auf einem Felsgrat 200 m unter dem Flugzeug befinden, abwerfen. (a) Wie weit vor den Empfängern (horizontaler Weg) müssen die Vorräte abgeworfen werden, wenn das Flugzeug waagerecht mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h (69 m/s) fliegt (► Abbildung 3.29a)? (b) Nehmen wir stattdessen an, dass das Flugzeug die Vorräte in einer horizontalen Entfernung von 400 m vor den Bergsteigern abwirft. Wie groß sollte die vertikale Geschwindigkeit (auf- oder abwärts) der Versorgungsgüter sein, damit sie genau an der Position der Bergsteiger landen (► Abbildung 3.29b)? (c) Mit welcher Geschwindigkeit landen die Vorräte im letzteren Fall?

Lösung

a Die vertikale Bewegung (nehmen wir $+y$ aufwärts gerichtet an) hängt nicht von der horizontalen Bewegung ab, so dass wir die Zeit, die benötigt wird, um die Bergsteiger zu erreichen, mithilfe der vertikalen Entfernung von 200 m ermitteln können. Die Vorräte werden „fallen gelassen", so dass sie anfangs die Geschwindigkeit des Flugzeugs haben, $v_{x0} = 69\,\text{m/s}$, $v_{y0} = 0$. Da $y = -\frac{1}{2}gt^2$, ergibt sich dann

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2\,(-200\,\text{m})}{9{,}80\,\text{m/s}^2}} = 6{,}39\,\text{s}\ .$$

Die horizontale Bewegung der fallenden Versorgungsgüter erfolgt bei der konstanten Geschwindigkeit von 69 m/s. Somit ergibt sich

$$s_x = v_{x0}t = (69\,\text{m/s})(6{,}39\,\text{s}) = 440\,\text{m}\ .$$

b Wir haben $s_x = 400\,\text{m}$, $v_{x0} = 69\,\text{m/s}$ und $y = -200\,\text{m}$ gegeben und möchten v_{y0} ermitteln (siehe ▸ Abbildung 3.29b). Wie bei den meisten Aufgabenstellungen gibt es auch bei dieser verschiedene Herangehensweisen. Anstatt nach einer oder zwei Formeln zu suchen, lassen Sie uns einfach folgern, und zwar auf der Grundlage dessen, was wir in Teil (a) gemacht haben. Wenn wir t kennen, können wir vielleicht v_{y0} ermitteln. Da die horizontale Bewegung der Versorgungsgüter bei konstanter Geschwindigkeit erfolgt (wenn sie einmal abgeworfen sind, spielt es keine Rolle mehr, was das Flugzeug macht), haben wir $s_x = v_{x0}t$, so dass gilt

$$t = \frac{s_x}{v_{x0}} = \frac{400\,\text{m}}{69\,\text{m/s}} = 5{,}80\,\text{s}\ .$$

Nun lassen Sie uns versuchen, mithilfe der vertikalen Bewegung v_{y0} zu ermitteln: $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$. Da $y_0 = 0$ und $y = -200\,\text{m}$, können wir nach v_{y0} auflösen:

$$v_{y0} = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{-200\,\text{m} + \frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(5{,}80\,\text{s})^2}{5{,}80\,\text{s}} = -6{,}1\,\text{m/s}\ .$$

Damit die Versorgungsgüter genau an der Position der Bergsteiger ankommen, müssen sie somit vom Flugzeug aus mit einer Geschwindigkeit von 6,1 m/s *nach unten* geworfen werden.

c Wir möchten v der Versorgungsgüter zum Zeitpunkt $t = 5{,}80\,\text{s}$ ermitteln. Die Komponenten sind:

$$v_x = v_{x0} = 69\,\text{m/s}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = -6{,}1\,\text{m/s} - (9{,}80\,\text{m/s}^2)(5{,}80\,\text{s}) = -63\,\text{m/s}\ .$$

Somit beträgt $v = \sqrt{(69\,\text{m/s})^2 + (-63\,\text{m/s})^2} = 93\,\text{m/s}$. (Es wäre wohl besser, die Versorgungsgüter nicht aus einer solchen Höhe abzuwerfen bzw. einen Fallschirm zu benutzen.)

Abbildung 3.29 Beispiel 3.10.

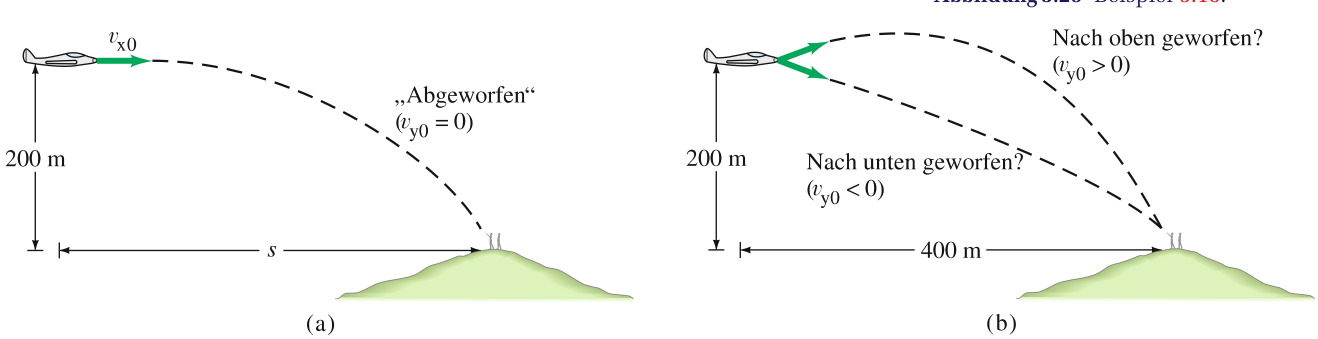


Abbildung 3.30 Beispiele für Wurfbewegungen – Funken (kleine, heiß glühende Metallteilchen), Wasser und Feuerwerk. Alle zeigen die parabelförmige Bahn, die für Wurfbewegungen charakteristisch ist, obwohl die Auswirkungen des Luftwiderstandes den Verlauf mancher Flugbahnen erheblich verändern können.

Die Wurfbewegung ist eine Parabel

Wir zeigen jetzt, dass die Bahn, die ein Geschoss fliegt, eine *Parabel* ist, wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen und annehmen können, dass **g** konstant ist. Dafür müssen wir y als Funktion von s_x durch Eliminieren von t zwischen den beiden Gleichungen für horizontale und vertikale Bewegung (Gleichung 2.12b in Tabelle 3.2) ermitteln. Außerdem setzen wir $x_0 = y_0 = 0$:

$$s_x = v_{x0}t$$
$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \,.$$

Aus der ersten Gleichung haben wir $t = s_x/v_{x0}$. Dies setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) s_x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right) s_x^2 \,.$$

Wir sehen, dass y als Funktion von x die Form

Die Gleichung für die Wurfbewegung ist eine Parabel

$$y(s_x) = As_x - Bs_x^2$$

hat, wobei A und B Konstanten für eine bestimmte Wurfbewegung sind. Hierbei handelt es sich um die bekannte Gleichung für eine Parabel. Siehe ▶ Abbildung 3.19 und ▶ Abbildung 3.30.

T Zweidimensionale Kinematik – Übungen

Die Vorstellung, dass Wurfbewegungen parabelförmig sind, stand zu Zeiten Galileis an der Spitze der physikalischen Forschung. Heute erörtern wir sie in Kapitel 3 der Einführung in die Physik!

3.9 Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn bewegt, führt eine **gleichförmige Kreisbewegung** aus. Beispiele sind ein Ball am Ende einer Schnur, den man um den Kopf schwingt, und die nahezu gleichförmige Kreisbewegung des Mondes um die Erde. Der *Betrag* der Geschwindigkeit bleibt in diesem Fall konstant, aber die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert sich ständig (▶ Abbildung 3.31). Da die Beschleunigung als Änderung in der Geschwindigkeit definiert ist, bedeutet eine Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit ebenso wie eine Änderung im Betrag, dass eine Beschleunigung auftritt. Somit beschleunigt ein Körper, der eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, selbst wenn die Geschwindigkeit konstant bleibt ($v_1 = v_2$). Wir untersuchen jetzt diese Beschleunigung quantitativ.

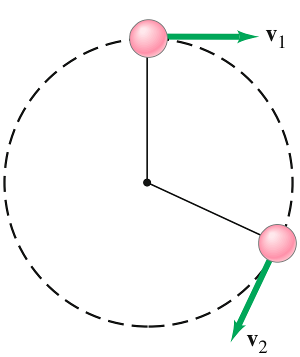


Abbildung 3.31 Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn und zeigt dabei, wie die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert. Beachten Sie, dass in jedem Punkt die Momentangeschwindigkeit eine Richtungstangente an die Kreisbahn bildet.

Die Beschleunigung ist definiert als

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} ,$$

wobei $\Delta \mathbf{v}$ die Änderung in der Geschwindigkeit während des kurzen Zeitintervalls Δt darstellt. Wir werden schließlich den Fall Δt gegen null betrachten und so die Momentanbeschleunigung ermitteln. Damit eine geeignete Zeichnung angefertigt werden kann, betrachten wir jedoch ein Zeitintervall ungleich null (▶ Abbildung 3.32). Während der Zeit Δt bewegt sich der Massenpunkt in ▶ Abbildung 3.32a von Punkt A nach Punkt B und legt dabei einen kleinen Weg Δs *auf dem Kreisbogen* zurück, der einen kleinen Winkel $\Delta\theta$ abgrenzt. Die Änderung im Geschwindigkeitsvektor beträgt $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}$ und ist in ▶ Abbildung 3.32b dargestellt.

Wenn Δt sehr klein ist (gegen null geht), dann sind Δs und $\Delta\theta$ auch sehr klein. In diesem Fall ist $\mathbf{v}_2$ fast parallel zu $\mathbf{v}_1$ und $\Delta \mathbf{v}$ steht praktisch senkrecht zu ihnen (▶ Abbildung 3.32c). Somit ist $\Delta \mathbf{v}$ zum Kreismittelpunkt hin gerichtet. Da $\mathbf{a}$ laut Definition in dieselbe Richtung zeigt wie $\Delta \mathbf{v}$, muss auch $\mathbf{a}$ zum Kreismittelpunkt hin gerichtet sein. Deshalb wird diese Beschleunigung **Zentripetalbeschleunigung** („mittelpunktsuchende" Beschleunigung) oder **Radialbeschleunigung** (da sie entlang des Radius zum Kreismittelpunkt hin gerichtet ist) genannt und wir bezeichnen sie mit $\mathbf{a}_\mathrm{R}$.

Als nächstes bestimmen wir den Betrag der Zentripetalbeschleunigung $\mathbf{a}_\mathrm{R}$. Aus der Tatsache, dass CA senkrecht zu $\mathbf{v}_1$ und CB senkrecht zu $\mathbf{v}_2$ steht, folgt, dass der Winkel $\Delta\theta$, der als der Winkel zwischen CA und CB in ▶ Abbildung 3.32a definiert ist, auch der Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ist. Folglich bilden die Vektoren $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1$ und $\Delta \mathbf{v}$ in ▶ Abbildung 3.32b ein Dreieck, das dem Dreieck CAB in ▶ Abbildung 3.32a geometrisch ähnelt. Wenn wir $\Delta\theta$ klein annehmen (Δt ist dabei sehr klein) und $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ setzen, da wir voraussetzen, dass sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, können wir schreiben:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta s}{r} .$$

Exakte Gleichheit wird hier erreicht, wenn Δt gegen Null geht, denn die Bogenlänge Δl ist mit der Streckenlänge AB identisch. Da wir die Momentanbeschleunigung ermitteln wollen, bei der Δt gegen null geht, schreiben wir den obigen Ausdruck als Gleichung und lösen nach Δv auf:

$$\Delta v = \frac{v}{r} \Delta s .$$

Um die Zentripetalbeschleunigung a_R zu erhalten, dividieren wir Δv durch Δt:

$$a_\mathrm{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

Und da

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

die Geschwindigkeit v des Körpers ist, erhalten wir

$$a_\mathrm{R} = \frac{v^2}{r} . \qquad (3.14)$$

Zentripetalbeschleunigung

Zusammenfassend sei gesagt, dass *ein Körper, der sich auf einem Kreis mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, zum Kreismittelpunkt hin mit dem Betrag* $a_\mathrm{R} = v^2/r$ *beschleunigt wird.* Es ist nicht überraschend, dass diese Beschleunigung von v und r abhängt. Denn je größer die Geschwindigkeit v ist, desto schneller ändert die Geschwindigkeit die Richtung, und je größer der Radius ist, desto langsamer ändert die Geschwindigkeit die Richtung.

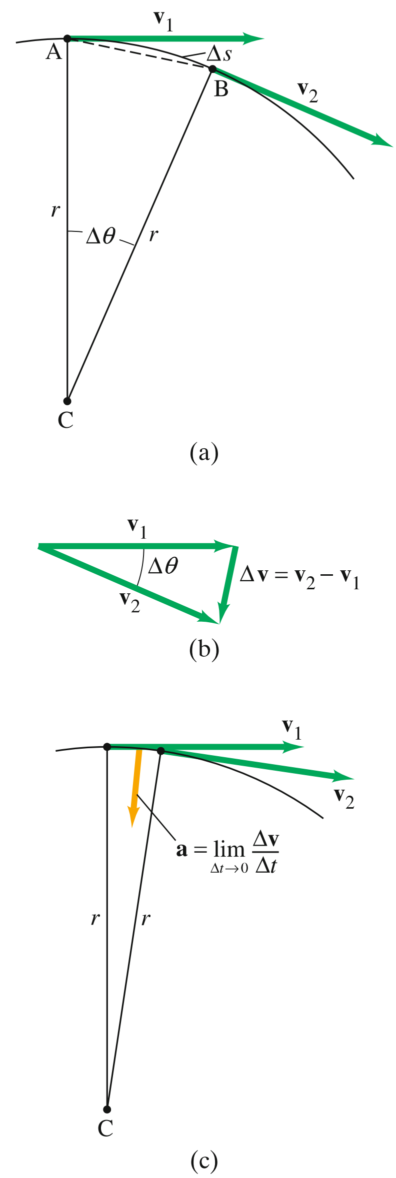


Abbildung 3.32 Bestimmung der Änderung in der Geschwindigkeit $\Delta \mathbf{v}$ bei einem Massenpunkt, der sich auf einer Kreisbahn bewegt.

Beschleunigung und Geschwindigkeit haben nicht dieselbe Richtung

Der Beschleunigungsvektor ist zum Kreismittelpunkt hin gerichtet. Der Geschwindigkeitsvektor zeigt jedoch immer in die Bewegungsrichtung, die tangential zur Kreisbahn verläuft. Somit verlaufen bei gleichförmigen Kreisbewegungen der Geschwindigkeitsvektor und der Beschleunigungsvektor in jedem Punkt der Bahn senkrecht zueinander (siehe ▸ Abbildung 3.33). Dies ist ein weiteres Beispiel, das den Denkfehler, dass Beschleunigung und Geschwindigkeit immer dieselbe Richtung haben, veranschaulicht. Bei einem Körper, der senkrecht fällt, verlaufen **a** und **v** tatsächlich parallel. Aber bei der Kreisbewegung sind **a** und **v** nicht parallel – und auch nicht bei der Wurfbewegung (Abschnitt 3.7), wo die Beschleunigung **a** = **g** immer abwärts gerichtet ist, der Geschwindigkeitsvektor jedoch verschiedene Richtungen haben kann (▸ Abbildung 3.20 und 3.22).

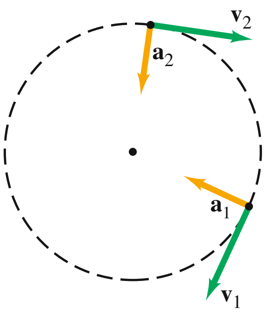


Abbildung 3.33 Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist **a** immer senkrecht zu **v**.

Eine Kreisbewegung wird häufig als **Frequenz** f mit einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen pro Sekunde beschrieben. Die **Periode** T eines Körpers, der sich auf einer Kreisbahn dreht, ist die Zeit, die für eine komplette Umdrehung benötigt wird. Periode und Frequenz stehen zueinander in Beziehung:

$$T = \frac{1}{f} \,. \tag{3.15}$$

Wenn sich ein Körper z. B. mit einer Frequenz von 3 Umdrehungen pro Sekunde dreht, dauert jede Umdrehung $\frac{1}{3}$ s. Für einen Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v dreht, können wir schreiben:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

da der Körper bei einer Drehung den Kreisumfang $(= 2\pi r)$ einmal zurücklegt.

Beispiel 3.11 Beschleunigung eines sich drehenden Balls

Ein Ball mit einer Masse von 150 g am Ende einer Schnur dreht sich gleichförmig auf einer horizontalen Kreisbahn mit einem Radius von 0,600 m. Der Ball macht 2,00 Umdrehungen in einer Sekunde. Wie groß ist seine Zentripetalbeschleunigung?

Lösung

Die Zentripetalbeschleunigung ist $a_R = v^2/r$. Zunächst bestimmen wir die Geschwindigkeit v des Balls. Der Ball macht zwei komplette Umdrehungen pro Sekunde, d. h. seine Periode ist $T = 0{,}500$ s. In dieser Zeit legt er einmal den Umfang des Kreises, $2\pi r$, zurück. Somit hat der Ball die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3{,}14)(0{,}600\,\mathrm{m})}{(0{,}500\,\mathrm{s})} = 7{,}54\,\mathrm{m/s} \,.$$

Die Zentripetalbeschleunigung beträgt

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}54\,\mathrm{m/s})^2}{(0{,}600\,\mathrm{m})} = 94{,}8\,\mathrm{m/s^2} \,.$$

Die Beschleunigung des Mondes zur Erde hin

Beispiel 3.12 Die Zentripetalbeschleunigung des Mondes

Die nahezu kreisförmige Umlaufbahn des Mondes um die Erde hat einen Radius von ca. 384 000 km und eine Periode T von 27,3 Tagen. Bestimmen Sie die zur Erde gerichtete Beschleunigung des Mondes.

Lösung

Auf seiner Umlaufbahn um die Erde legt der Mond einen Weg von $2\pi r$ zurück, wobei $r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m der Radius seiner kreisförmigen Bahn ist. Die Geschwindigkeit des Mondes auf seiner Umlaufbahn um die Erde beträgt $v = 2\pi r/T$. Die Periode T in Sekunden beträgt $T = (27{,}3\ \text{Tage})\,(24{,}0\ \text{h/Tag})\,(3600\ \text{s/h}) = 2{,}36 \cdot 10^6$ s. Deshalb gilt

$$a_\mathrm{R} = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{[2(3{,}14)(3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m})]^2}{(2{,}36 \cdot 10^6\ \text{s})^2(3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m})}$$
$$= 0{,}00272\ \text{m/s}^2 = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2\,.$$

Dies können wir mit $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$ (Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche) schreiben als

$$a = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2 \left(\frac{g}{9{,}80\ \text{m/s}^2}\right)$$
$$= 2{,}78 \cdot 10^{-4}\, g\,.$$

3.10 Relativgeschwindigkeit

Wir untersuchen jetzt, wie Beobachtungen, die in verschiedenen Bezugssystemen gemacht werden, zueinander in Beziehung stehen. Wir betrachten z. B. zwei Züge, die sich jeweils mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h relativ (in Bezug) zur Erde einander nähern. Beobachter auf der Erde neben den Bahnstrecken messen für jeden der Züge eine Geschwindigkeit von 80 km/h. Beobachter in einem der Züge (ein anderes Bezugssystem) messen für den Zug, der sich ihnen nähert, eine Geschwindigkeit von 160 km/h. Genauso hat ein Auto, das mit 90 km/h ein zweites Auto, das mit einer Geschwindigkeit von 75 km/h in dieselbe Richtung fährt, überholt, eine Geschwindigkeit von 90 km/h − 75 km/h = 15 km/h relativ zu dem zweiten Auto.

Wenn die Geschwindigkeiten entlang derselben Geraden verlaufen, erhält man mittels einfacher Addition oder Subtraktion die Relativgeschwindigkeit. Verlaufen die Geschwindigkeiten aber nicht entlang derselben Geraden, müssen wir auf die Vektoraddition zurückgreifen. Wir weisen, wie in Abschnitt 2.1 bereits erwähnt, nochmals darauf hin, dass bei Angabe einer Geschwindigkeit auch die Angabe des Bezugssystems wichtig ist.

Bei der Bestimmung der Relativgeschwindigkeit werden leicht dadurch Fehler gemacht, dass die falschen Geschwindigkeiten addiert oder subtrahiert werden. Deshalb ist es sinnvoll, eine genaue Beschriftung vorzunehmen, damit keine Unklarheiten bestehen. Jede Geschwindigkeit wird mit *zwei tiefgestellten Indizes* gekennzeichnet: *der erste bezieht sich auf den Körper, der zweite auf das Bezugssystem, in dem er diese Geschwindigkeit besitzt.* Wir nehmen z. B. an, dass ein Boot über einen Fluss übersetzen soll, wie in ▸ Abbildung 3.1 dargestellt. Die Geschwindigkeit des **B**ootes in Bezug auf das **W**asser bezeichnen wir mit $\mathbf{v}_\mathrm{BW}$. (Dies wäre auch die Geschwindigkeit des Bootes in Bezug auf das Ufer, wenn keine Bewegung im Wasser wäre.) Ebenso ist $\mathbf{v}_\mathrm{BU}$ die Geschwindigkeit des **B**ootes in Bezug auf das **U**fer und $\mathbf{v}_\mathrm{WU}$ die Geschwindigkeit des **W**assers in Bezug auf das **U**fer (dies ist die Strömung des Flusses). Beachten Sie, dass $\mathbf{v}_\mathrm{BW}$ die Motorleistung des Bootes (gegen das Wasser) ist, während $\mathbf{v}_\mathrm{BU}$ gleich $\mathbf{v}_\mathrm{BW}$ plus der Strömungswirkung ist. Folglich ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Ufer (siehe Vektordiagramm, ▸ Abbildung 3.34)

$$\mathbf{v}_\mathrm{BU} = \mathbf{v}_\mathrm{BW} + \mathbf{v}_\mathrm{WU}\,. \tag{3.16}$$

Wir schreiben die tiefgestellten Indizes üblicherweise wie oben und sehen, dass die inneren Indizes (die beiden W) auf der rechten Seite der Gleichung 3.16 dieselben sind, während die äußeren Indizes auf der rechten Seiten der Gleichung 3.16 (das B und das U) mit den beiden Indizes für den Summenvektor auf

T Relativbewegung

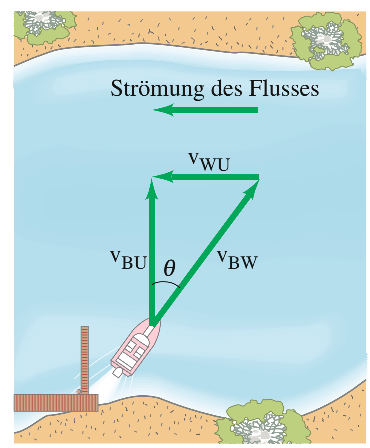


Abbildung 3.34 Das Boot muss in einem Winkel von θ stromaufwärts losfahren, um direkt über den Fluss überzusetzen. Die Geschwindigkeitsvektoren sind als grüne Pfeile dargestellt:

$\mathbf{v}_\mathrm{BU}$ = Geschwindigkeit des **B**ootes in Bezug auf das **U**fer
$\mathbf{v}_\mathrm{BW}$ = Geschwindigkeit des **B**ootes in Bezug auf das **W**asser
$\mathbf{v}_\mathrm{WU}$ = Geschwindigkeit des **W**assers in Bezug auf das **U**fer (Strömung des Flusses)

PROBLEMLÖSUNG

Tiefgestellte Indizes für die Addition von Geschwindigkeiten: erster Index für den Körper; zweiter Index für das Bezugssystem

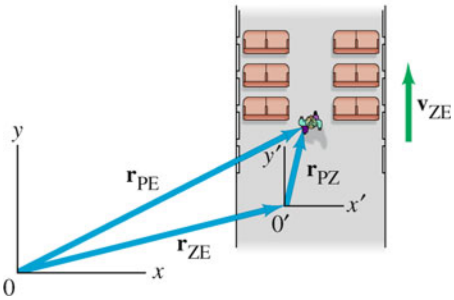


Abbildung 3.35 Ableitung der Gleichung für die Relativgeschwindigkeit (Gleichung 3.16), hier für eine Person, die den Gang in einem Zug entlanggeht. Wir schauen von oben auf den Zug und es sind zwei Bezugssysteme dargestellt: xy auf der Erde und $x'y'$ fest im Zug. Wir haben

$\mathbf{r}_{PZ} =$ Ortsvektor der Person (P) relativ zum Zug (Z)
$\mathbf{r}_{PE} =$ Ortsvektor der Person (P) relativ zur Erde (E)
$\mathbf{r}_{ZE} =$ Ortsvektor des Koordinatensystems des Zuges (Z) relativ zur Erde (E)

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass

$$\mathbf{r}_{PE} = \mathbf{r}_{PZ} + \mathbf{r}_{ZE} \,.$$

Wir bilden die Ableitung nach der Zeit und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_{PE}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_{PZ}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_{ZE})$$

oder, da $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{v}$,

$$\mathbf{v}_{PE} = \mathbf{v}_{PZ} + \mathbf{v}_{ZE} \,.$$

Dies ist äquivalent zur Gleichung 3.16 für die hier betrachtete Anwendung „Person im Zug" (prüfen Sie die tiefgestellten Indizes!).

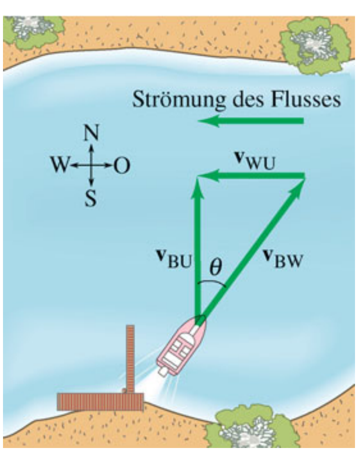


Abbildung 3.36 Beispiel 3.13.

der linken Seite, $\mathbf{v}_{BU}$, identisch sind. Durch Befolgen dieser Schreibweise (erster Index für den Körper, zweiter für das Bezugssystem) kann man die korrekte Gleichung, die Geschwindigkeiten in verschiedenen Bezugssystemen in Beziehung setzt, schreiben[4]. ► Abbildung 3.35 zeigt eine Ableitung der Gleichung 3.16, die im Allgemeinen gültig ist und auf drei oder mehr Geschwindigkeiten erweitert werden kann. Wenn z. B. ein Fischer auf einem Boot mit einer Geschwindigkeit von $\mathbf{v}_{FB}$ relativ zum Boot geht, beträgt seine Geschwindigkeit relativ zum Ufer $\mathbf{v}_{FU} = \mathbf{v}_{FB} + \mathbf{v}_{BW} + \mathbf{v}_{WU}$. Die Gleichungen, die die Relativgeschwindigkeit betreffen, sind richtig, wenn benachbarte innere Indizes identisch sind und wenn die äußersten Indizes genau den beiden Indizes der Geschwindigkeit auf der linken Seite der Gleichung entsprechen. Das funktioniert allerdings nur mit Pluszeichen (auf der rechten Seite), nicht mit Minuszeichen.

Für zwei beliebige Körper oder Bezugssysteme A und B habe die Geschwindigkeit von A relativ zu B denselben Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie die Geschwindigkeit von B relativ zu A, dann gilt:

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB} \,. \tag{3.17}$$

Wenn z. B. ein Zug mit 100 km/h relativ zur Erdoberfläche in eine bestimmte Richtung fährt, dann sieht es für einen Beobachter in dem Zug so aus, als wenn sich Körper auf der Erde (wie Bäume) mit 100 km/h in die entgegengesetzte Richtung bewegen.

Beispiel 3.13 Fahrt flussaufwärts

Die Geschwindigkeit eines Bootes in stehendem Wasser beträgt $v_{BW} = 1{,}85\,\text{m/s}$. In welchem Winkel muss das Boot losfahren, wenn es direkt in Richtung Norden über den Fluss übersetzen soll, dessen Strömung eine Geschwindigkeit von $v_{WU} = 1{,}20\,\text{m/s}$ in westlicher Richtung hat?

Lösung

Die Strömung wird das Boot nach Westen treiben. Um dieser Bewegung entgegenzuwirken, muss das Boot flussaufwärts in nordöstlicher Richtung losfahren, wie in ► Abbildung 3.36 dargestellt. In der ► Abbildung 3.36 zeigt $\mathbf{v}_{BU}$, die Geschwindigkeit des **B**ootes relativ zum **U**fer, direkt über den Fluss, da man annimmt, dass sich das Boot in diese Richtung bewegen wird. (Beachten Sie, dass $\mathbf{v}_{BU} = \mathbf{v}_{BW} + \mathbf{v}_{WU}$.) Somit zeigt $\mathbf{v}_{BW}$ flussaufwärts in einem Winkel θ, wie abgebildet, wobei

$$\sin\theta = \frac{v_{WU}}{v_{BW}} = \frac{1{,}20\,\text{m/s}}{1{,}85\,\text{m/s}} = 0{,}6486 \,.$$

Das bedeutet, dass $\theta = 40{,}4°$ ist, so dass das Boot in einem Winkel von 40,4° flussaufwärts ablegen muss.

Beispiel 3.14 Fahrt direkt über den Fluss

Dasselbe Boot ($v_{BW} = 1{,}85\,\text{m/s}$) fährt nun direkt über den Fluss los, dessen Strömung immer noch 1,20 m/s beträgt. (a) Wie groß ist die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) des Bootes relativ zum Ufer? (b) Wie lange dauert die

4 So würden wir durch Überprüfung herausfinden, dass z. B. die Gleichung $\mathbf{v}_{BW} = \mathbf{v}_{BU} + \mathbf{v}_{WU}$ falsch ist.

Überfahrt und wie weit flussabwärts befindet sich das Boot dann, wenn der Fluss 110 m breit ist?

Lösung

a Wie in ▸ Abbildung 3.37 dargestellt, wird das Boot von der Strömung flussabwärts getrieben. Die Geschwindigkeit des Bootes in Bezug auf das Ufer, $\mathbf{v}_{BU}$, ist die Summe seiner Geschwindigkeit in Bezug auf das Wasser, $\mathbf{v}_{BW}$, plus die Geschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Ufer, $\mathbf{v}_{WU}$:

$$\mathbf{v}_{BU} = \mathbf{v}_{BW} + \mathbf{v}_{WU} \,,$$

wie vorher. Da $\mathbf{v}_{BW}$ direkt über den Fluss gerichtet ist, verläuft sie senkrecht zu $\mathbf{v}_{WU}$, und wir können mithilfe des Satzes des Pythagoras v_{BU} ermitteln:

$$v_{BU} = \sqrt{v_{BW}^2 + v_{WU}^2} = \sqrt{(1{,}85\,\mathrm{m/s})^2 + (1{,}20\,\mathrm{m/s})^2} = 2{,}21\,\mathrm{m/s}\,.$$

Wir können den Winkel (beachten Sie, wie θ in der Zeichnung definiert ist) wie folgt bestimmen:

$$\tan\theta = v_{WU}/v_{BW} = (1{,}20\,\mathrm{m/s})/(1{,}85\,\mathrm{m/s}) = 0{,}6486\,.$$

Ein Taschenrechner mit INV TAN oder TAN^{-1} Taste gibt $\theta = \tan^{-1}(0{,}6486) = 33{,}0°$ an. Beachten Sie, dass dieser Winkel *nicht* gleich dem in Beispiel 3.13 berechneten Winkel ist.

b Mit der gegebenen Flussbreite von $d = 110\,\mathrm{m}$ und unter Verwendung der Definition der Geschwindigkeit lösen wir nach $t = d/v_{BW}$ auf. Dabei benutzen wir die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung von d, so dass gilt $t = (110\,\mathrm{m})/(1{,}85\,\mathrm{m/s}) = 60\,\mathrm{s}$. In dieser Zeit wird das Boot einen Weg von

$$s = v_{WU}t = (1{,}20\,\mathrm{m/s})\cdot(60\,\mathrm{s}) = 72\,\mathrm{m}$$

zurücklegen.

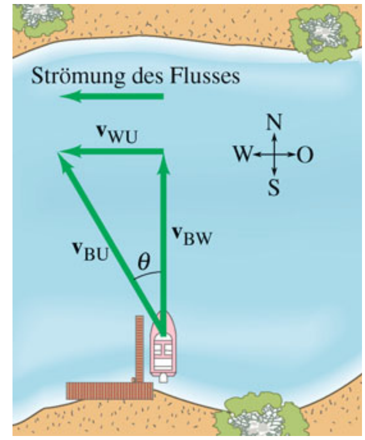


Abbildung 3.37 Beispiel 3.14: ein Boot fährt direkt über einen Fluss, dessen Strömung 1,20 m/s beträgt, los.

Beispiel 3.15 Kfz-Geschwindigkeiten

Zwei Autos nähern sich im rechten Winkel zueinander mit derselben Geschwindigkeit von 40,0 km/h (= 11,1 m/s) einer Straßenecke, wie in ▸ Abbildung 3.38a dargestellt. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit des einen Autos in Bezug zum anderen? Das heißt, bestimmen Sie die Geschwindigkeit von Auto 1 aus der Sicht von Auto 2.

Lösung

▸ Abbildung 3.38a zeigt die Situation in einem festen Bezugssystem zur Erde. Wir möchten die Situation aber von einem Bezugssystem aus betrachten, in dem Auto 2 sich im Stillstand befindet. Dies ist in ▸ Abbildung 3.38 dargestellt. In diesem Bezugssystem (die Welt aus Sicht des Fahrers von Auto 2) bewegt sich die Erde mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{E2}$ (40,0 km/h), die gleich mit und entgegengesetzt zu $\mathbf{v}_{2E}$ ist, der Geschwindigkeit von Auto 2 in Bezug auf die Erde (Gleichung 3.17), auf das Auto 2 zu:

$$\mathbf{v}_{2E} = -\mathbf{v}_{E2}\,.$$

Dann beträgt die Geschwindigkeit von Auto 1 aus der Sicht von Auto 2

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{1E} + \mathbf{v}_{E2}$$

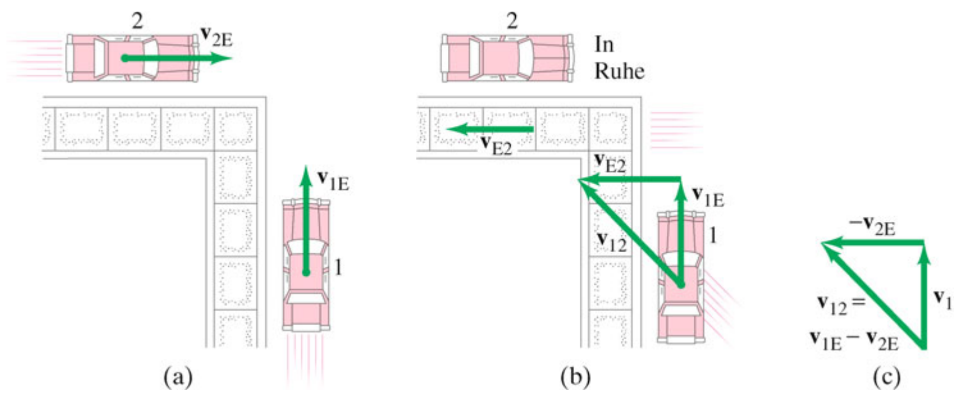
oder (da $\mathbf{v}_{E2} = -\mathbf{v}_{2E}$)

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{1E} - \mathbf{v}_{2E} .$$

Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit von Auto 1 aus der Sicht von Auto 2 die Differenz ihrer Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_{1E} - \mathbf{v}_{2E}$, beide gemessen relativ zur Erde (siehe ▶ Abbildung 3.38), ist. Da die Beträge von $\mathbf{v}_{1E}, \mathbf{v}_{2E}$ und $\mathbf{v}_{E2}$ identisch sind (40,0 km/h = 11,1 m/s) sehen wir (▶ Abbildung 3.38), dass $\mathbf{v}_{12}$ in einem Winkel von 45° auf Auto 2 gerichtet ist. Die Geschwindigkeit beträgt

$$v_{12} = \sqrt{(11{,}1\,\mathrm{m/s})^2 + (11{,}1\,\mathrm{m/s})^2} = 15{,}7\,\mathrm{m/s}\,(= 56{,}5\,\mathrm{km/h}) .$$

Abbildung 3.38 Beispiel 3.15.



Z U S A M M E N F A S S U N G

Eine Größe, die sowohl einen Betrag, als auch eine Richtung besitzt, nennt man **Vektor**. Eine Größe, die nur einen Betrag besitzt, heißt **Skalar**.

Vektoren können grafisch addiert werden, indem man den Anfangspunkt jedes aufeinanderfolgenden Pfeils (der jeweils einen Vektor darstellt) an den Endpunkt des vorhergehenden setzt. Die Summe oder der **resultierende Vektor** ist der Pfeil, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des letzten gezogen wird. Genauer kann man Vektoren addieren, indem man das analytische Verfahren der Addition ihrer **Komponenten** entlang gewählter Achsen mithilfe trigonometrischer Funktionen anwendet. Ein Vektor mit dem Betrag V, der mit der x-Achse einen Winkel θ bildet, hat die Komponenten

$$V_x = V\cos\theta \; V_y = V\sin\theta .$$

Wenn die Komponenten gegeben sind, können wir den Betrag und die Richtung aus

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} , \quad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

ermitteln. Häufig ist es hilfreich, einen Vektor in seinen Komponenten entlang ausgewählter Achsen unter Verwendung von **Einheitsvektoren** auszudrücken. Einheitsvektoren sind Vektoren mit einheitlicher Länge entlang der ausgewählten Koordinatenachsen. Für kartesische Koordinaten werden die Einheitsvektoren entlang der x-, y- und z-Achse mit $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ bezeichnet.

Die allgemeinen Definitionen für die **Momentangeschwindigkeit v** und die **Beschleunigung a** eines Massenpunktes (in einer, zwei oder drei Raumrichtungen) lauten wie folgt:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \text{ und } \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} ,$$

wobei **r** der Ortsvektor und **s** der Wegvektor des Massenpunktes ist. Die kinematischen Gleichungen für Bewegung mit konstanter Beschleunigung können jeweils für die x-, y- und z-Komponenten der Bewegung geschrieben werden und haben dieselbe Form wie die Gleichungen für eindimensionale Bewegung (Gleichungen 2.12a–2.12c). Man kann sie auch in der folgenden gebräuchlicheren Vektorform schreiben:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 .$$

Die **Wurfbewegung** eines Körpers, der sich nahe der Erdoberfläche in der Luft bewegt, kann als zwei separate Bewegungen aufgefasst werden, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt. Die horizontale Komponente der Bewegung hat eine konstante Geschwindigkeit, während die vertikale Komponente eine konstante Beschleunigung g hat, wie ein Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft senkrecht nach unten fällt.

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt, führt eine **gleichförmige Kreisbewegung** aus und erfährt eine zum Kreismittelpunkt hin gerichtete **Radial-** oder **Zentripetalbeschleunigung** $\mathbf{a}_\mathrm{R}$ mit dem Betrag

$$a_\mathrm{R} = \frac{v^2}{r} \ .$$

Die Frequenz f ist die Anzahl der vollständigen Umdrehungen pro Sekunde. Die Periode T ist die Zeit, die für eine vollständige Umdrehung benötigt wird, und steht durch

$$T = \frac{1}{f}$$

in Beziehung zur Frequenz.

Die Geschwindigkeit eines Körpers relativ zu einem Bezugssystem kann durch Vektoraddition ermittelt werden, wenn seine Geschwindigkeit relativ zu einem zweiten Bezugssystem sowie die **Relativgeschwindigkeit** der beiden Bezugssysteme bekannt sind.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Verständnisfragen

1 Ein Auto fährt mit 40 km/h direkt nach Osten und ein zweites Auto fährt mit 40 km/h nach Norden. Sind ihre Geschwindigkeiten identisch? Erklären Sie.

2 Können Sie aus der Tatsache, dass der Tachometer eines Autos gleichbleibend 60 km/h anzeigt, schließen, dass das Auto nicht beschleunigt?

3 Können Sie mehrere Beispiele für die Bewegung eines Körpers angeben, in denen ein großer Weg zurückgelegt wird, die Verschiebung aber Null ist?

4 Kann der Verschiebungsvektor für einen Massenpunkt, der sich in zwei Raumrichtungen bewegt, jemals länger als die Länge des von dem Massenpunkt in demselben Zeitintervall zurückgelegten Weges sein? Kann er jemals kürzer sein? Erörtern Sie.

5 Beim Baseballtraining schlägt der Schlagmann einen sehr hohen Flugball und läuft dann in einer geraden Linie und fängt ihn. Hatte der Spieler oder der Ball den größeren Weg?

6 Wenn $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, ist V dann zwangsläufig größer als V_1 und/oder V_2? Erörtern Sie.

7 Zwei Vektoren haben die Längen $V_1 = 3{,}5$ km und $V_2 = 4{,}0$ km. Welche maximalen und minimalen Beträge hat ihre Vektorsumme?

8 Können zwei Vektoren mit ungleichem Betrag addiert werden und so den Nullvektor ergeben? Funktioniert dies bei *drei* ungleichen Vektoren? Unter welchen Bedingungen?

9 Kann der Betrag eines Vektors jemals (a) identisch mit einer seiner Komponenten oder (b) kleiner sein als sie?

10 Kann ein Körper mit konstanter skalarer Geschwindigkeit beschleunigen? Was gilt, wenn er eine konstante vektorielle Geschwindigkeit hat?

11 Kann ein Vektor mit dem Betrag Null eine Komponente ungleich Null haben?

12 Misst der Kilometerzähler eines Autos eine Skalar- oder Vektorgröße? Wie sieht es beim Tacho aus?

13 Ein Kind möchte herausfinden, wie groß die Geschwindigkeit ist, die eine Steinschleuder einem Stein verleiht. Wie kann das mithilfe eines Zollstocks, eines Steins und einer Steinschleuder geschehen?

14 Ist es bei einer Wurfbewegung erforderlich, die Bewegung in drei Raumrichtungen zu betrachten, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt? Was, wenn der Luftwiderstand nicht vernachlässigt werden kann? Erörtern Sie.

15 Welche physikalischen Faktoren sind für einen Weitspringer wichtig? Wie sieht es beim Hochsprung aus?

16 In welchem Punkt seiner Flugbahn hat ein Geschoss die geringste Geschwindigkeit?

17 Es wurde berichtet, dass im Ersten Weltkrieg ein französischer Pilot, der in einer Höhe von 2 km flog, eine auf sein Flugzeug abgefeuerte Kugel mit bloßen Händen gefangen hat! Erklären Sie, wie dies geschehen konnte, und verwenden Sie dabei die Tatsache, dass eine Kugel auf Grund des Luftwiderstandes erheblich langsamer wird.

18 Ein Auto fährt mit konstanten 50 km/h durch eine Kurve. Hat es eine andere Beschleunigung, wenn es dieselbe Kurve mit konstanten 70 km/h durchfährt? Erklären Sie.

19 Ist die Beschleunigung eines Autos dieselbe, wenn es eine scharfe Kurve mit 60 km/h durchfährt und wenn es mit derselben Geschwindigkeit eine leichte Kurve passiert? Erklären Sie.

20 In einigen Freizeitparks steigen die Fahrer von fahrenden „Autos" zunächst auf ein Laufband und dann in die Autos selbst. Warum?

21 Wenn Sie in einem Zug fahren, der hinter einem anderen Zug hinterher rast, der sich auf einer benachbarten Spur in dieselbe Richtung bewegt, hat es den Anschein, dass der andere Zug rückwärts fährt. Warum?

22 Wenn Sie bei starkem Regen bewegungslos unter einem Schirm stehen und der Regen senkrecht fällt, bleiben Sie relativ trocken. Wenn Sie jedoch zu laufen beginnen, fängt der Regen an, auf Ihre Beine zu schlagen, selbst wenn diese unter dem Schirm bleiben. Warum?

23 Zwei Autos fahren mit derselben Geschwindigkeit im rechten Winkel zueinander auf eine Kreuzung zu. Stoßen sie zwangsläufig zusammen? Betrachten Sie die Situation in einem Koordinatensystem, das sich mit einem der Autos mitbewegt und in diesem Koordinatensystem ruht. Zeigen Sie, dass, wenn die Geschwindigkeit (Vektor) des jeweils anderen Autos parallel zum Ortsvektor dieses Autos verläuft, die nautische Maxime „zeitlich konstanter Kurs bedeutet Kollision" gilt.

24 Eine Person, die in einem geschlossenen Eisenbahnwaggon sitzt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wirft einen Ball in ihrem Bezugssystem gerade nach oben in die Luft. (a) Wo landet der Ball? Wie lautet Ihre Antwort, wenn (b) der Wagen beschleunigt, (c) langsamer wird, (d) durch eine Kurve fährt, (e) sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, aber offen ist?

25 Zwei Ruderer, die in stehendem Wasser mit derselben Geschwindigkeit rudern können, starten gleichzeitig zur Überquerung eines Flusses. Einer fährt geradeaus über den Fluss los und wird von der Strömung etwas flussabwärts getrieben. Der andere fährt in einem Winkel flussaufwärts los, um gegenüber vom Ausgangspunkt anzukommen. Welcher Ruderer erreicht die gegenüberliegende Seite als erster?

Aufgaben zu 3.1 bis 3.5

kompletter Lösungsweg

1 (I) Ein Auto fährt 200 km in Richtung Westen, dann 80 km in südwestlicher Richtung. Wie groß ist die Verschiebung des Autos vom Ausgangspunkt (Betrag und Richtung)? Fertigen Sie eine Zeichnung an.

2 (I) Ein Lieferwagen fährt 18 Blocks nach Norden, 10 Blocks nach Osten und 16 Blocks nach Süden. Wie groß ist seine Verschiebung vom Ausgangspunkt? Nehmen Sie an, dass die Blocks gleich lang sind.

3 (I) Zeigen Sie, dass der in ▸ Abbildung 3.6c mit „falsch" bezeichnete Vektor tatsächlich die Differenz der beiden Vektoren ist. Ist er $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ oder $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$?

4 (I) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung von $\mathbf{V}$, wenn $V_x = 8.80$ Einheiten und $V_y = -6{,}40$ Einheiten ist.

5 (I) Bestimmen Sie grafisch die Resultierende der drei folgenden Verschiebungen: (1) 14 m, 30° von Osten aus in Richtung Norden; (2) 18 m, 37° von Norden aus in Richtung Osten und (3) 20 m, 30° von Süden aus in Richtung Westen.

6 (II) Der Vektor $\mathbf{V}_1$ ist 6,0 Einheiten lang und verläuft entlang der negativen x-Achse. Der Vektor $\mathbf{V}_2$ ist 4,5 Einheiten lang und verläuft in einem Winkel von +45° zur positiven x-Achse. (a) Welche x- und y-Komponenten hat jeder Vektor? (b) Bestimmen Sie die Summe $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ (Betrag und Winkel).

7 (II) $\mathbf{V}$ ist ein Vektor mit einem Betrag von 14,3 Einheiten und verläuft in einem Winkel von 34,8° oberhalb der negativen x-Achse. (a) Skizzieren Sie diesen Vektor. (b) Ermitteln Sie V_x und V_y. (c) Verwenden Sie V_x und V_y, um (wieder) den Betrag und die Richtung von $\mathbf{V}$ zu erhalten. [*Anmerkung*: Teil (c) ist eine gute Methode, um zu überprüfen, ob Sie Ihren Vektor richtig zerlegt haben.]

8 (II) ▸ Abbildung 3.39 zeigt zwei Vektoren, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, deren Beträge $A = 6{,}8$ Einheiten und $B = 5{,}5$ Einheiten sind. Bestimmen Sie $\mathbf{C}$, wenn (a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Geben Sie jeweils den Betrag und die Richtung an.

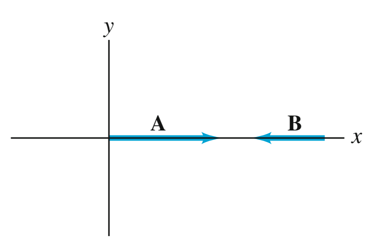


Abbildung 3.39 Aufgabe 8.

9 (II) Ein Flugzeug fliegt mit 635 km/h 41,5° in nordwestlicher Richtung (▸ Abbildung 3.40). (a) Ermitteln Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in nördlicher und westlicher Richtung. (b) Wie weit nördlich und wie weit westlich ist das Flugzeug nach 3 Stunden geflogen?

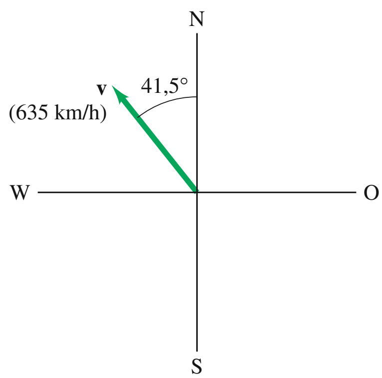


Abbildung 3.40 Aufgabe 9.

10 (II) $\mathbf{V}_1 = -6{,}0\mathbf{i} + 8{,}0\mathbf{j}$ und $\mathbf{V}_2 = 4{,}5\mathbf{i} - 5{,}0\mathbf{j}$ sind gegeben. Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung von (a) $\mathbf{V}_1$, (b) $\mathbf{V}_2$, (c)$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ und (d) $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$.

11 (II) (a) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Summe der drei Vektoren $\mathbf{V}_1 = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ und $\mathbf{V}_3 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. (b) Bestimmen Sie $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

12 (II) In ▸ Abbildung 3.41 sind drei Vektoren abgebildet. Ihre Beträge sind in beliebigen Einheiten angegeben. Bestimmen Sie die Summe der drei Vektoren. Geben Sie die Resultierende (a) in Komponentenschreibweise, (b) mit Betrag und Winkel mit der x-Achse an.

13 (II) (a) Gegeben sind die Vektoren **A** und **B**, die in ▸ Abbildung 3.41 dargestellt sind. Bestimmen Sie $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. (b) Bestimmen Sie $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, verwenden Sie dabei nicht Ihre Antwort aus (a). Vergleichen Sie dann Ihre Ergebnisse und prüfen Sie, ob Sie entgegengesetzt sind.

14 (II) Bestimmen Sie für die in ▸ Abbildung 3.41 gegebenen Vektoren (a) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$, (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$ und (c) $\mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

15 (II) Bestimmen Sie für die in ▸ Abbildung 3.41 gegebenen Vektoren (a) $\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$, (b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C}$.

16 (II) Der Gipfel eines Berges, 2450 m über dem Basislager, liegt laut Karte 4580 m entfernt in einer Richtung 32,4° westlich von Norden. Welche Komponenten hat der Verschiebungsvektor vom Lager zum Gipfel? Wie groß ist sein Betrag? Wählen Sie die x-Achse in östlicher Richtung, die y-Achse in nördlicher Richtung und die z-Achse nach oben gerichtet.

17 (III) Sie haben einen Vektor in der xy-Ebene gegeben, der einen Betrag von 90,0 Einheiten und eine y-Komponente von $-35{,}0$ Einheiten hat. (a) Welche beiden Möglichkeiten gibt es für seine x-Komponente? (b) Geben Sie unter der Annahme, dass bekannt ist, dass die x-Komponente positiv ist, den Vektor an, der bei Addition zu dem Ursprungsvektor einen resultierenden Vektor ergeben würde, der 80,0 Einheiten lang ist und ganz in die negative x-Richtung zeigt.

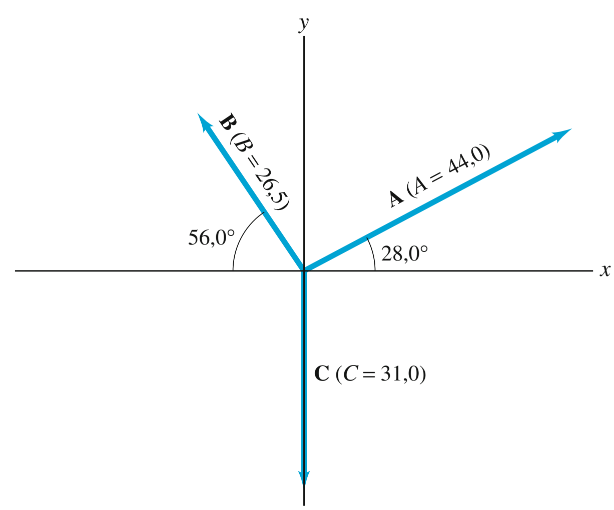


Abbildung 3.41 Aufgaben 12, 13, 14 und 15. Die Vektorbeträge sind in beliebigen Einheiten angegeben.

Aufgaben zu 3.6

kompletter Lösungsweg

18 (I) Der Ort eines bestimmten Massenpunktes in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch $\mathbf{r} = (7{,}60\,t\,\mathbf{i} + 8{,}85\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k})$ m. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Abhängigkeit der Zeit.

19 (I) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit des Massenpunktes in ▸ Abbildung 3.1 zwischen $t = 1{,}00$ s und $t = 3{,}00$ s? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 2{,}00$ s?

20 (II) Welche Form hat die Bahn des Massenpunktes in Aufgabe 18?

21 (II) Ein Auto bewegt sich zunächst mit einer Geschwindigkeit von 18,0 m/s direkt nach Süden und 8 s später mit 27,5 m/s direkt nach Osten. Bestimmen Sie für dieses Zeitintervall (a) seine Durchschnittsgeschwindigkeit, (b) seine Durchschnittsbeschleunigung (Betrag und Richtung für beide Fälle) und (c) seine skalare Durchschnittsgeschwindigkeit. [*Hinweis*: Können Sie dies alles aus den gegebenen Informationen bestimmen?]

22 (II) (a) Eine Skifahrerin beschleunigt beim Herunterfahren eines Berges, der eine Neigung von 30° hat, mit 3,80 m/s^2 (▸ Abbildung 3.42). Wie groß ist

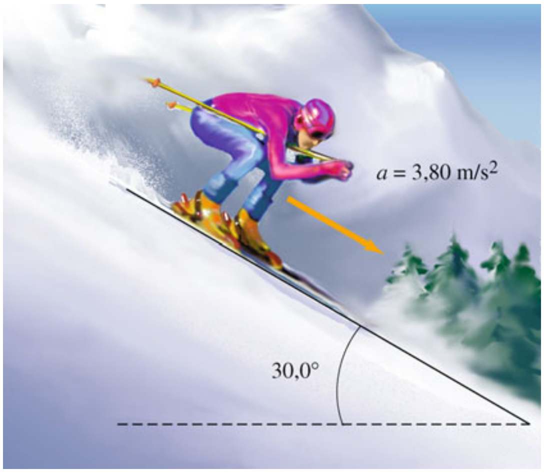


Abbildung 3.42 Aufgabe 22.

die vertikale Komponente ihrer Beschleunigung? (b) Wie lange braucht sie, um den Fuß des Berges zu erreichen, wenn sie aus dem Stillstand startet und gleichförmig beschleunigt und wenn der Höhenunterschied 250 m beträgt?

23 (II) Bei $t = 0$ startet ein Massenpunkt aus dem Stillstand und bewegt sich in der xy-Ebene mit einer Beschleunigung von $\mathbf{a} = (4{,}0\,\mathbf{i} + 3{,}0\,\mathbf{j})\,\mathrm{m/s^2}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Zeit (a) die x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit, (b) die skalare Geschwindigkeit des Massenpunktes und (c) den Ort des Massenpunktes. (d) Berechnen Sie alles bei $t = 2{,}00$ s.

24 Ein Massenpunkt startet vom Ausgangspunkt bei $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5,0 m/s entlang der positiven x-Achse. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und den Ort des Massenpunktes in dem Moment, in dem er seine maximale x-Koordinate erreicht, wenn die Beschleunigung $(-3{,}0\,\mathbf{i} + 4{,}5\,\mathbf{j})\,\mathrm{m/s^2}$ beträgt.

25 (III) Der Ort eines Massenpunktes ist gegeben durch $\mathbf{r} = (6{,}0 \cos 3{,}0\,t\,\mathbf{i} + 6{,}0 \sin 3{,}0\,t\,\mathbf{j})$ m. Bestimmen Sie (a) den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ und (b) den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}$. (c) Welche Bahn hat dieser Massenpunkt? [*Hinweis*: Bestimmen Sie $r = |\mathbf{r}|$.] (d) Welche Beziehung besteht zwischen r und a (geben Sie eine Formel an) und zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{a}$ (geben Sie einen Winkel an)? (e) Zeigen Sie, dass $a = v^2/r$ ist.

Aufgaben zu 3.7 und 3.8

kompletter Lösungsweg

26 (I) Ein Tigerweibchen springt horizontal mit einer Geschwindigkeit von 4,0 m/s von einem 6,5 m hohen Felsen. Wie weit vom Fuß des Felsens entfernt wird es auf der Erde aufkommen?

27 (I) Ein Klippenspringer, der 2,1 m/s läuft, springt horizontal vom Rand einer senkrechten Klippe und erreicht das Wasser unter ihm 3,0 s später. Wie hoch war die Klippe und wie weit vom unteren Ende der Klippe entfernt ist der Klippenspringer in das Wasser eingetaucht?

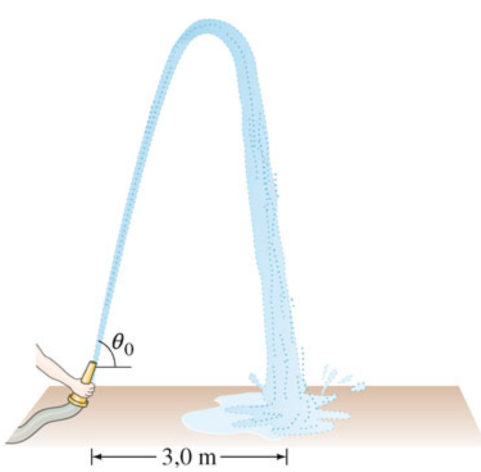


Abbildung 3.43 Aufgabe 29.

28 (I) Bestimmen Sie, wie viel weiter eine Person auf dem Mond als auf der Erde springen kann, wenn die Absprunggeschwindigkeit und der Absprungwinkel gleich sind. Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt ein Sechstel der Fallbeschleunigung auf der Erde.

29 (I) Aus einem Feuerwehrschlauch, der in der Nähe des Erdbodens gehalten wird, spritzt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 5,5 m/s. In welchem/n Winkel/n sollte die Düse gehalten werden, damit das Wasser 3 m entfernt aufkommt (▶ Abbildung 3.43)? Warum gibt es zwei unterschiedliche Winkel? Skizzieren Sie die beiden Flugbahnen.

30 (II) Ein Ball wird horizontal vom Dach eines 9,0 m hohen Gebäudes geworfen und landet 8,5 m vom Fuß des Gebäudes entfernt. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit des Balls?

31 (II) Ein Fußball wird in Bodenhöhe mit einer Geschwindigkeit von 18,0 m/s in einem Winkel von 32,0° zur Horizontalen geschossen. Wie viel später kommt er auf dem Boden auf?

32 (II) Ein Ball, der horizontal mit einer Geschwindigkeit von 22,2 m/s vom Dach eines Gebäudes geworfen wird, landet 36,0 m vom Fuß des Gebäudes entfernt. Wie hoch ist das Gebäude?

33 (II) Ein Kugelstoßer stößt die Kugel (Masse = 7,3 kg) mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 14 m/s in einem Winkel von 40° zur Horizontalen. Berechnen Sie den horizontalen Weg, den die Kugel zurücklegt, wenn sie die Hand des Athleten in einer Höhe von 2,2 m über dem Erdboden verlässt.

34 (II) Zeigen Sie, dass die Zeit, die ein Geschoss benötigt, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, identisch ist mit der Zeit, die es braucht, um zu seiner Ausgangshöhe zurückzukehren.

35 (II) Ein Geschoss wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 30,0 m/s abgefeuert. Stellen Sie seine Flugbahn für die Anfangsschusswinkel $\theta = 15°, 30°, 45°, 60°, 75°$ und 90° auf Millimeterpapier grafisch dar. Zeichnen Sie mindestens 10 Punkte für jede Kurve.

36 (II) Wilhelm Tell muss den Apfel auf dem Kopf seines Sohnes aus einer Entfernung von 25,0 m spalten. Wenn er direkt auf den Apfel zielt, ist der Pfeil waagerecht. In welchem Winkel muss er auf ihn zielen, damit der Pfeil den Apfel trifft, wenn der Pfeil mit einer Geschwindigkeit von 22,5 m/s fliegt?

37 (II) Der Pilot eines Flugzeuges, das mit einer Geschwindigkeit von 160 km/h fliegt, möchte Versorgungsgüter für Hochwasseropfer, die auf einem Stückchen Land 160 m unter ihm isoliert sind, abwerfen. Wie viele Sekunden, bevor das Flugzeug direkt über dem Stückchen Land ist, sollten die Versorgungsgüter abgeworfen werden?

38 (II) Ein Weitspringer springt in einem Winkel von 33,0° vom Boden ab und springt 7,80 m weit. (a) Wie groß war seine Absprunggeschwindigkeit? (b) Wie viel weiter würde er springen, wenn diese Geschwindigkeit um nur 5,0 Prozent gesteigert würde?

39 (II) Ein Geschoss wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 51,2 m/s in einem Winkel von 44,5° über der Horizontalen auf einer langen flachen Schussbahn abgefeuert. Bestimmen Sie (a) die maximale Höhe, die das Geschoss erreicht, (b) die Gesamtzeit, die es in der Luft ist, (c) den zurückgelegten horizontalen Gesamtweg (d. h. die Reichweite) und (d) die Geschwindigkeit des Geschosses 1,5 s nach dem Abschuss.

40 (II) Ein Geschoss wird vom Rand einer Klippe 125 m über dem Erdboden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 65 m/s in einem Winkel von 37,0° zur Horizontalen, wie in ► Abbildung 3.44 dargestellt, abgefeuert. (a) Bestimmen Sie die Zeit, die das Geschoss benötigt, um im Punkt P auf dem Erdboden aufzuschlagen. (b) Bestimmen Sie die Reichweite X des Geschosses, gemessen vom Fuß der Klippe. Ermitteln Sie (c) die horizontalen und vertikalen Komponenten der Geschwindigkeit des Geschosses, (d) den Betrag der Geschwindigkeit und (e) den Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor mit der Horizontalen bildet, für den Moment direkt vor dem Aufschlagen des Geschosses im Punkt P.

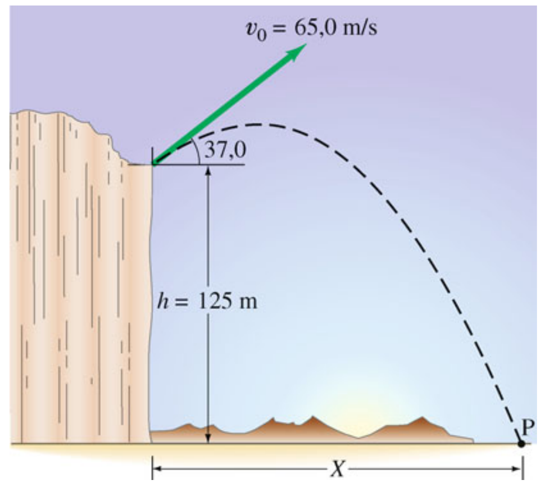


Abbildung 3.44 Aufgabe 40.

41 (II) Schauen Sie sich noch einmal das Beispiel 3.7 zur Begriffsbildung an und nehmen Sie an, dass sich der Junge mit der Steinschleuder *unter* dem Jungen im Baum befindet (► Abbildung 3.45) und daher *nach oben* direkt auf den Jungen im Baum zielt. Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall der Junge im Baum einen Fehler macht, wenn er in dem Moment, in dem der Wasserballon geschossen wird, loslässt.

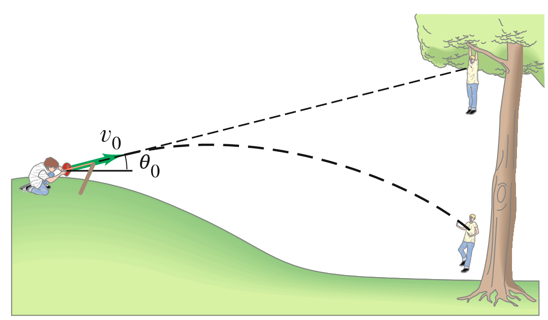


Abbildung 3.45 Aufgabe 41.

42 (II) Bei welchem Abschusswinkel ist die Reichweite eines Geschosses mit seiner maximalen Höhe identisch?

43 (II) Nehmen Sie an, dass der Schussversuch in Beispiel 3.5 36,0 m von den Torpfosten entfernt erfolgt. Die Querlatte befindet sich 3,00 m über dem Erdboden. Wenn der Ball genau zwischen die Torpfosten gelenkt wird, fliegt er dann über die Latte und wird somit ein Feldtor erzielt? Zeigen Sie, warum oder warum nicht. Wenn nicht, aus welcher horizontalen Entfernung muss dieser Schuss erfolgen, damit er über die Latte fliegt und damit ein Tor erzielt wird?

44 (II) Genau 3,0 s nach dem Abschuss vom Boden in die Luft hat ein Geschoss eine Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (7{,}6\,\mathbf{i} + 4{,}8\,\mathbf{j})$ m/s. Dabei ist die x-Achse horizontal und die y-Achse positiv nach oben gerichtet. Bestimmen Sie (a) die horizontale Reichweite des Geschosses, (b) seine maximale Höhe über dem Erdboden und (c) seine Geschwindigkeit sowie den Winkel direkt vor dem Auftreffen auf dem Boden.

45 (II) Eine Turmspringerin springt vom Rand eines 5-m-Turms ab und taucht 1,3 s später in 3,0 m Entfernung vom Rand des Turmes in das Wasser ein. Bestimmen Sie (a) ihre Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$, (b) die maximale erreichte Höhe und (c) die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_f$, mit der sie in das Wasser eintaucht, und betrachten Sie dabei die Springerin als Massenpunkt.

46 (II) Ein Stuntfahrer möchte mit seinem Auto über 8 nebeneinander unterhalb einer horizontalen Rampe geparkte Autos springen (▶ Abbildung 3.46). (a) Mit welcher Mindestgeschwindigkeit muss er von der horizontalen Rampe abspringen? Die vertikale Höhe der Rampe beträgt 1,5 m über den Autos und der Stuntman muss einen horizontalen Weg von 20 m überspringen. (b) Wie groß muss die neue Mindestgeschwindigkeit des Autos sein, wenn die Rampe nun nach oben gerichtet ist, so dass der „Absprungwinkel“ 10° über der Horizontalen beträgt, und sonst nichts geändert wurde?

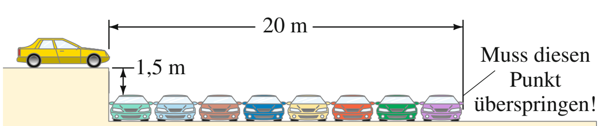


Abbildung 3.46 Aufgabe 46.

47 (III) Ein Ball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_0 (bei $t = 0$) waagerecht vom oberen Ende einer Klippe geworfen. In jedem beliebigen Moment bildet seine Bewegungsrichtung einen Winkel θ zur Horizontalen (▶ Abbildung 3.47). Leiten Sie eine Formel für θ in Abhängigkeit der Zeit t her, wenn der Ball der Flugbahn eines Geschosses folgt.

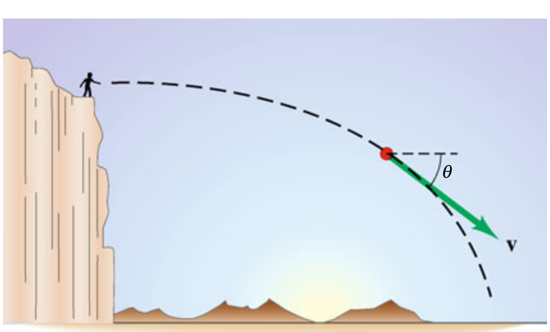


Abbildung 3.47 Aufgabe 47.

48 (III) Leiten Sie eine Formel für die horizontale Reichweite R eines Geschosses her, wenn es in einer Höhe h über seinem Ausgangspunkt landet. (Bei $h < 0$ kommt es in einer Entfernung von $-h$ unter seinem Ausgangspunkt auf.) Nehmen Sie an, dass es in einem Winkel von θ_0 und mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_0 abgeschossen wird.

49 (III) Eine Person steht am Fuß eines Berges, der einen geraden Abhang darstellt und einen Winkel ϕ mit der Horizontalen bildet (▶ Abbildung 3.48). In welchem Winkel θ (zur Horizontalen) sollten Körper bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen werden, so dass die Entfernung d, in der sie oben weiter am Berg landen, möglichst groß ist?

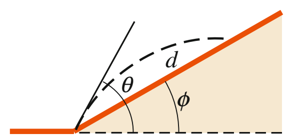


Abbildung 3.48 Aufgabe 49. Gegeben sind ϕ und v_0, bestimmen Sie θ, so dass d möglichst groß ist.

50 (III) Bei $t = 0$ schlägt der Schlagmann einen Baseball mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 32 m/s in einem Winkel von 55° zur Horizontalen. Ein Außenfeldspieler befindet sich bei $t = 0$ 85 m von dem Schlagmann entfernt und vom Schlagmal aus gesehen bildet die Sichtlinie zum Außenfeldspieler einen horizontalen Winkel von 22° mit der Ebene, in der sich der Ball bewegt (siehe ▶ Abbildung 3.49). Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung muss der Fänger laufen, um den Ball in derselben Höhe zu fangen, aus der er geschlagen wurde? Geben Sie den Winkel zwischen der Sichtlinie des Außenfeldspielers zum Schlagmal an.

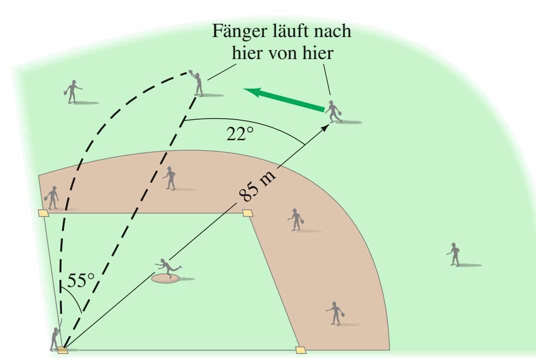


Abbildung 3.49 Aufgabe 50.

Aufgaben zu 3.9

kompletter Lösungsweg

51 (I) Ein Düsenflugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von 1800 km/h (500 m/s) fliegt, kommt aus einem Sturzflug heraus und bewegt sich dabei in einem Bogen mit einem Radius von 3,50 km. Wie groß ist die Beschleunigung des Flugzeugs angegeben in „g"?

52 (I) Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung eines Kindes, das sich 3,6 m vom Mittelpunkt eines Karussells entfernt befindet? Die Geschwindigkeit des Kindes beträgt 0,85 m/s.

53 (I) Berechnen Sie die Zentripetalbeschleunigung der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne. Nehmen Sie an, dass die Umlaufbahn der Erde einen Radius von $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m hat.

54 (II) Wie groß ist die Beschleunigung eines Lehmspritzers am Rand einer Töpferscheibe, die sich mit 45 U/min. (Umdrehungen pro Minute) dreht und einen Durchmesser von 30 cm hat?

55 (II) Nehmen Sie an, dass sich das Raumschiff auf einer Umlaufbahn 400 km über der Erdoberfläche befindet und die Erde ca. einmal in 90 Minuten umkreist. Ermitteln Sie die Zentripetalbeschleunigung des Raumschiffes auf seiner Umlaufbahn. Geben Sie Ihre Antwort in g, der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche, an.

56 (II) Da die Erde eine Umdrehung pro Tag um ihre eigene Achse macht, ist die tatsächliche Fallbeschleunigung am Äquator etwas geringer als sie in dem Fall wäre, wenn die Erde sich nicht drehen würde. Schätzen Sie den Betrag dieses Effektes ab. Welchen Bruchteil von g stellt der Betrag dar?

57 (II) Wenden Sie die Dimensionsanalyse (Abschnitt 1.7) an, um die Form für die Zentripetalbeschleunigung $a_R = v^2/r$ zu erhalten.

58 (III) Der Ort eines Massenpunktes, der sich in der xy-Ebene bewegt, ist gegeben durch $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,2.0\cos 3{,}0\,t + \mathbf{j}\,2{,}0\sin 3{,}0\,t$, wobei r in m und t in s angegeben ist. (a) Zeigen Sie, dass es sich hier um eine Kreisbewegung mit einem Radius von 2,0 m um den Ursprung handelt. (b) Bestimmen Sie den Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektor in Abhängigkeit der Zeit. (c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und den Betrag der Beschleunigung. (d) Zeigen Sie, dass $a = v^2/r$ ist. (e) Zeigen Sie, dass der Beschleunigungsvektor immer zum Kreismittelpunkt hin gerichtet ist.

Aufgaben zu 3.10

kompletter Lösungsweg

59 (I) Huck Finn geht mit einer Geschwindigkeit von 1,0 m/s über sein Floß (d. h. er geht senkrecht zur Bewegung des Floßes relativ zum Ufer). Das Floß bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 2,5 m/s relativ zum Flussufer auf dem Mississippi flussabwärts (► Abbildung 3.50). Wie groß ist die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) von Huck relativ zum Flussufer?

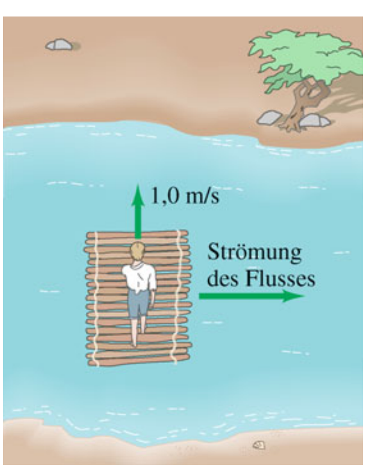


Abbildung 3.50 Aufgabe 59.

60 (II) Ein Boot kann 2,20 m/s in stehendem Wasser fahren. (a) Wie groß ist die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) des Bootes relativ zum Ufer, wenn es direkt über einen Fluss fährt, der eine Strömung von 1,20 m/s hat? (b) Welchen Ort erreicht das Boot relativ zu seinem Ausgangspunkt nach 3,00 s? (Siehe ► Abbildung 3.37).

61 (II) Zwei Flugzeuge fliegen direkt aufeinander zu. Jedes fliegt mit einer Geschwindigkeit von 780 km/h und als sie einander bemerken, sind sie zunächst 10,0 km voneinander entfernt. Wie viel Zeit haben die Piloten für ein Ausweichmanöver?

62 (II) Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 550 km/h direkt nach Süden. Berechnen Sie unter der Vorgabe, dass ein Wind aus südwestlicher Richtung mit einer (durchschnittlichen) Geschwindigkeit von 90,0 km/h aufkommt, (a) die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) des Flugzeuges relativ zum Erdboden und (b) wie weit es nach 12,0 Minuten vom Kurs abgekommen ist, wenn der Pilot keine Korrekturen durchführt. [*Hinweis*: Fertigen Sie zunächst eine Zeichnung an.]

63 (II) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Bootes aus Beispiel 3.13 in Bezug auf das Ufer.

64 (II) Ein Passagier auf einem Boot, das sich mit einer Geschwindigkeit von 1,80 m/s auf einem ruhigen See bewegt, geht mit einer Geschwindigkeit von 0,60 m/s eine Treppe hinauf, ▶ Abbildung 3.51. Die Treppe bildet zur Bewegungsrichtung einen Winkel von 45°, wie abgebildet. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Passagiers relativ zum Wasser?

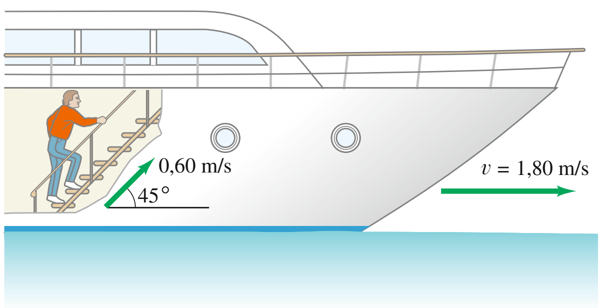


Abbildung 3.51 Aufgabe 64.

65 (II) Ein Motorboot, dessen Geschwindigkeit in stehendem Wasser 3,70 m/s beträgt, muss in einem Winkel von 29,5° (in Bezug auf eine Gerade senkrecht zum Ufer) flussaufwärts fahren, um direkt über den Fluss überzusetzen. (a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Strömung? (b) Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit des Bootes in Bezug auf das Ufer? (Siehe ▶ Abbildung 3.34)

66 (II) Ein Boot, dessen Geschwindigkeit in stehendem Wasser 2,40 m/s beträgt, muss über einen 280 m breiten Fluss übersetzen und 120 m flussaufwärts von seinem Ausgangspunkt ankommen (▶ Abbildung 3.52). Deshalb muss der Kapitän das Boot in einem Winkel von 45° flussaufwärts steuern. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Strömung?

67 (II) Eine Schwimmerin kann 1,00 m/s in stehendem Wasser schwimmen. (a) Wie weit flussabwärts (von einem Punkt gegenüber ihrem Ausgangspunkt) wird sie am Ufer ankommen, wenn sie direkt durch einen 75 m breiten Fluss schwimmt, dessen Strömung 0,80 m/s beträgt? (b) Wie lange braucht sie, um die andere Seite zu erreichen?

68 (II) In welchem Winkel stromaufwärts muss die Schwimmerin aus Aufgabe 67 schwimmen, wenn sie an einem Ort direkt gegenüber ihrem Ausgangspunkt ankommen soll?

69 (II) Zwei Autos nähern sich einer Straßenecke im rechten Winkel zueinander. Auto 1 fährt 30 km/h, Auto 2 50 km/h. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit von Auto 1 aus Sicht von Auto 2? Wie groß ist die Geschwindigkeit von Auto 2 relativ zu Auto 1?

70 (III) Es wird angenommen, dass ein Flugzeug, dessen Fluggeschwindigkeit 680 km/h beträgt, auf einer geraden Linie 35,0° NO fliegt. Aber es bläst ein anhaltender Wind mit 120 km/h aus Richtung Norden. In welche Richtung sollte das Flugzeug gesteuert werden?

71 (III) Ein Motorrad, das mit 95,0 km/h fährt, nähert sich einem Auto, das mit 75,0 km/h in dieselbe Richtung fährt. Als das Motorrad 60,0 m hinter dem Auto ist, beschleunigt der Motorradfahrer gleichförmig und überholt das Auto 10,0 s später. Wie groß war die Beschleunigung des Motorrades?

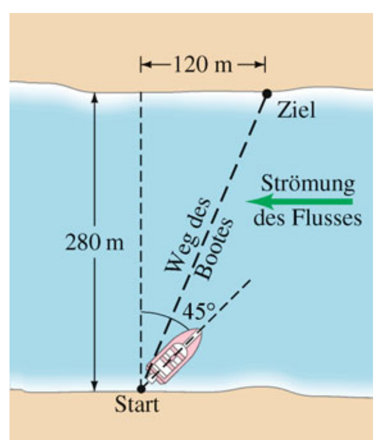


Abbildung 3.52 Aufgabe 66.

Allgemeine Aufgaben

kompletter Lösungsweg

72 Zwei Vektoren $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ ergeben bei der Addition einen resultierenden Vektor von $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. Beschreiben Sie $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$, wenn (a) $V = V_1 + V_2$, (b) $V^2 = V_1^2 + V_2^2$, (c) $V_1 + V_2 = V_1 - V_2$.

73 Ein Klempner steigt aus seinem Wagen, geht 60 m in Richtung Osten und dann 35 m in Richtung Süden. Dann nimmt er einen Aufzug und fährt 12 m tief in den Keller eines Gebäudes, wo ein schlimmes Leck aufgetreten ist. Wie groß ist der Weg des Klempners relativ zu seinem Wagen? Geben Sie Ihre Antwort in Komponentenschreibweise sowie als Betrag und Winkel an. Nehmen Sie x Richtung Osten, y Richtung Norden und z in Aufwärtsrichtung an.

74 Auf abschüssigen gebirgigen Straßen gibt es manchmal neben der Straße Notwege für Lkw, deren Bremsen versagen. Berechnen Sie die horizontalen und vertikalen Komponenten der Beschleunigung eines Lkw, der von 120 km/h in 12 s zum Stehen kommt, unter der Annahme einer konstanten Steigung von 30°. Siehe ▶ Abbildung 3.53.

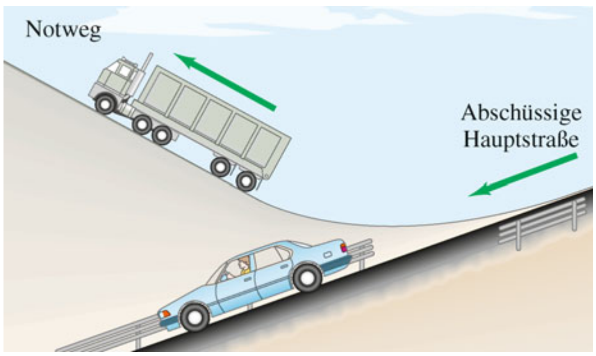


Abbildung 3.53 Aufgabe 74.

75 Romeo wirft Kieselsteine hoch an Julias Fenster. Er möchte, dass die Kieselsteine nur mit einer horizontalen Geschwindigkeitskomponente auf das Fenster treffen. Er steht am Rande eines Rosengartens 8,0 m unter ihrem Fenster und 9,0 m vom Fuß der Wand entfernt (▶ Abbildung 3.54). Wie schnell sind die Kieselsteine, wenn sie auf ihr Fenster treffen?

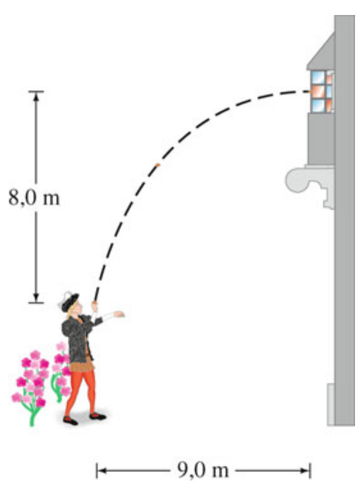


Abbildung 3.54 Aufgabe 75.

76 Ein Jäger zielt direkt auf ein Ziel (in gleicher Höhe) in 65,0 m Entfernung. (a) Um wie viel wird die Kugel ihr Ziel verfehlen, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 145 m/s das Gewehr verlässt? (b) In welchem Winkel sollte das Gewehr gerichtet sein, damit das Ziel getroffen wird?

77 Welche y-Komponente hat ein Vektor in der xy-Ebene, der einen Betrag von 52,8 und eine x-Komponente von 46,4 besitzt? Welche Richtung hat dieser Vektor (Winkel, den er mit der x-Achse bildet)?

78 Beim Hinausschauen aus dem Fenster eines fahrenden Zuges bilden Regentropfen mit der Vertikalen einen Winkel θ (▶ Abbildung 3.55). Wie groß ist die Geschwindigkeit der Regentropfen im Bezugssystem der Erde, in dem sie nach Vorgabe senkrecht hinunterfallen, wenn die Geschwindigkeit des Zuges v_Z ist?

Abbildung 3.55 Aufgabe 78.

79 Ein Leichtflugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 240 km/h relativ zu stillstehender Luft direkt nach Süden. Nach einer Stunde bemerkt der Pilot, dass er nur 180 km zurückgelegt hat und nicht nach Süden, sondern nach Südosten fliegt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Windes?

80 Ein Olympiaweitspringer kann 8,0 m springen. Wie lange ist er in der Luft und wie hoch springt er, wenn seine horizontale Geschwindigkeit beim Absprung 9,2 m/s beträgt? Nehmen Sie an, dass er aufrecht landet – d. h. in derselben Weise, in der er abgesprungen ist.

81 Apollo-Astronauten nahmen einen „Nine Iron“ mit zum Mond und schlugen einen Golfball ca. 180 m weit. Schätzen Sie die Fallbeschleunigung an der Mondoberfläche ab, wenn Schwung, Abschlagwinkel etc. dieselben wie auf der Erde sind, wo derselbe Astronaut den Ball nur 30 m weit schlagen konnte. (Auf der Erde vernachlässigen wir den Luftwiderstand, auf dem Mond gibt es keinen Luftwiderstand.)

82 Babe Ruth schlug einen Ball über den 12 m hohen Zaun auf der rechten Seite eines Feldes 92 m vom Schlagmal entfernt. Überschlagen Sie, wie groß die Mindestgeschwindigkeit des Balls war, als er das Schlagholz verließ. Nehmen Sie an, dass der Ball 1,0 m über dem Boden geschlagen wurde und seine Flugbahn anfangs einen Winkel von 40° mit dem Erdboden bildete.

83 Die Klippenspringer von Acapulco springen waagerecht von Felsenvorsprüngen ca. 35 m über dem Wasser ab, müssen jedoch über Felsnasen auf der Wasserlinie hinüberspringen, die direkt unter ihrem Absprungpunkt 5,0 m vom Fuß der Klippe ins Wasser ragen.

Siehe ▶ Abbildung 3.56. Wie groß ist die dafür erforderliche Mindestabsprunggeschwindigkeit? Wie lange sind die Springer in der Luft?

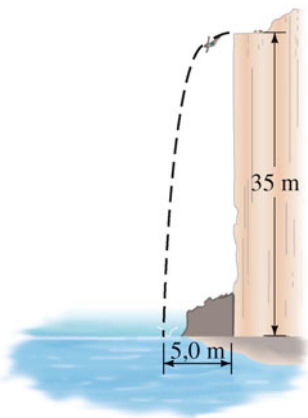


Abbildung 3.56 Aufgabe 83.

84 Beim Aufschlag will ein Tennisspieler den Ball horizontal treffen. Wie groß muss die Mindestgeschwindigkeit des Balls sein, damit er über das 0,90 m hohe Netz in einen Bereich von ca. 15,0 m vom Aufschläger entfernt fliegt, wenn der Ball aus einer Höhe von 2,50 m geschlagen wird? Wo kommt der Ball auf, wenn er gerade über das Netz fliegt (und ist er „gut" in dem Sinne, dass er innerhalb von 7,0 m vom Netz entfernt aufkommt)? Wie lange ist er in der Luft? Siehe ▶ Abbildung 3.57.

85 Die Geschwindigkeit eines Bootes in stehendem Wasser ist v. Das Boot soll eine Rundfahrt auf einem Fluss machen, dessen Strömung die Geschwindigkeit u hat. Leiten Sie eine Formel her für die für eine Rundfahrt mit dem Gesamtweg D benötigte Zeit, wenn das Boot die Rundfahrt (a) flussaufwärts und zurück flussabwärts macht und (b) direkt über den Fluss und zurück fährt. Wir müssen $u < v$ annehmen. Warum?

86 Ein Flugzeug, dessen Fluggeschwindigkeit 200 km/h beträgt, fliegt direkt nach Norden. Aber plötzlich kommt ein 100 km/h starker Nordostwind (d. h. aus nordöstlicher Richtung) auf. Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit des Flugzeugs in Bezug auf den Erdboden?

87 James Bond, der waagerecht in einem tief fliegenden Hubschrauber mit einer konstanten Geschwindigkeit von 200 km/h fliegt, möchte geheime Unterlagen in den offenen Wagen seiner Kontaktperson abwerfen, der mit 150 km/h auf einer ebenen Straße 78,0 m unter ihm fährt. In welchem Winkel (mit der Horizontalen) sollte Bond das Auto sehen, wenn er das Päckchen abwirft (▶ Abbildung 3.58)?

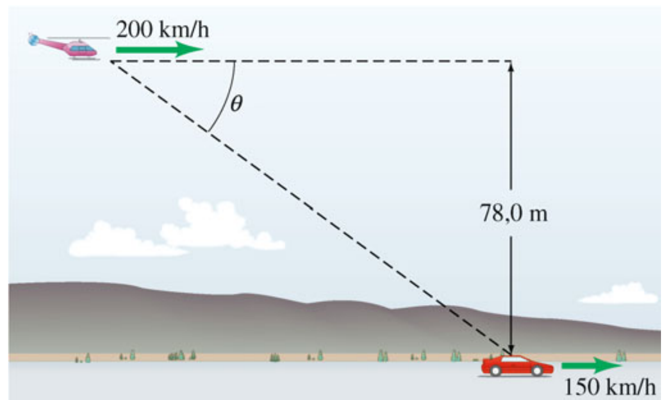


Abbildung 3.58 Aufgabe 87.

88 Ein Basketball verlässt die Hand des Spielers in einer Höhe von 2,10 m über dem Boden. Der Korb befindet sich 2,60 m über dem Boden. Der Spieler möchte den Ball in einem Winkel von 38,0° werfen. In welchem Bereich muss die Anfangsgeschwindigkeit des Balls liegen, um den Korb zu machen, wenn der Wurf aus einer horizontalen Entfernung von 11,00 m ausgeführt wird und eine Genauigkeit von (horizontal) 0,22 m haben muss?

89 Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Ortes (a) am Äquator der Erde, (b) auf 40° nördlicher Breite auf Grund der täglichen Erdrotation?

90 Ein Geschoss wird vom Erdboden zum oberen Ende einer Klippe, die 195 m entfernt und 155 m hoch ist, abgeschossen (siehe ▶ Abbildung 3.59). Ermitteln Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses (Betrag und Richtung), wenn das Geschoss 7,6 s nach dem Abschuss oben auf der Klippe auftrifft. Lassen Sie den Luftwiderstand außer Acht.

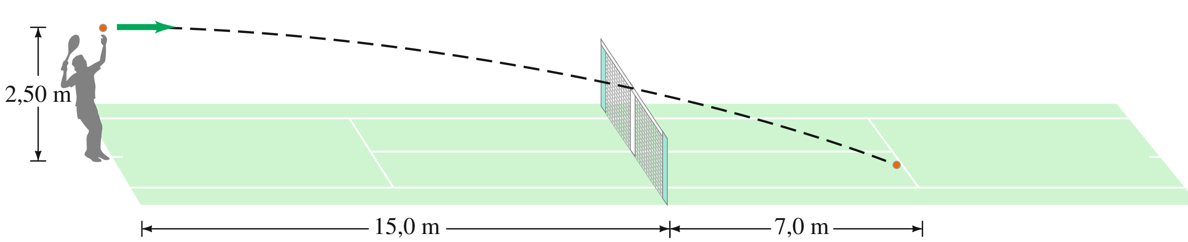


Abbildung 3.57 Aufgabe 84.

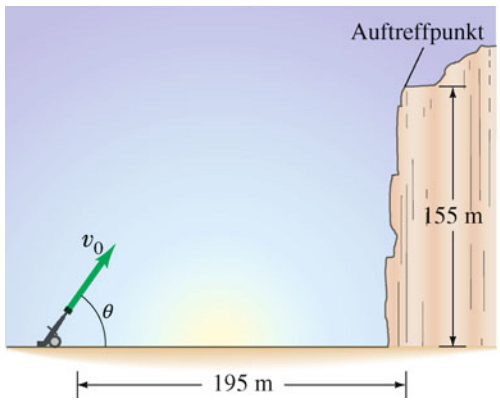


Abbildung 3.59 Aufgabe 90.

91 Bei einer heißen Verfolgungsjagd muss Agent Logan vom FBI in möglichst kurzer Zeit über einen 1600 m breiten Fluss gelangen. Die Strömung des Flusses beträgt 0,80 m/s, er kann ein Boot 1,50 m/s schnell rudern und er kann 3,00 m/s schnell laufen. Beschreiben Sie den Weg, den er für die kürzestmögliche Überfahrtzeit nehmen sollte (Rudern plus Laufen am Ufer entlang), und bestimmen Sie die kürzestmögliche Zeit.

92 Eine Person, die morgens auf einem Kreuzfahrtschiff joggt, läuft in Richtung Bug (vorderes Ende) des Schiffes mit einer Geschwindigkeit von 2,0 m/s, während sich das Schiff mit 8,5 m/s vorwärts bewegt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Joggers relativ zum Wasser? Später läuft der Jogger in Richtung Heck (hinteres Ende) des Schiffes. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Joggers relativ zum Wasser jetzt?

93 Eine geplante Raumstation besteht aus einem kreisförmigen Rohr, das sich um seinen Mittelpunkt dreht (wie ein röhrenförmiger Fahrradreifen, ► Abbildung 3.60). Der von dem Rohr gebildete Kreis hat einen Durchmesser von ca. 1,1 km. Wie groß muss die Drehgeschwindigkeit (Umdrehungen pro Tag) sein, damit ein Effekt, der mit der Schwerkraft an der Erdoberfläche (1 g) identisch ist, spürbar wird?

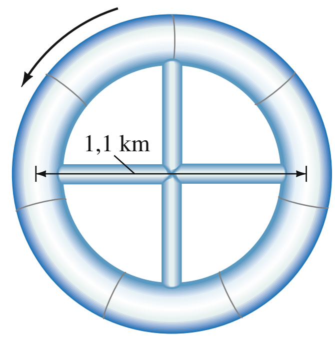


Abbildung 3.60 Aufgabe 93.

94 Ein Jetpilot macht mit seinem Flugzeug einen senkrechten Looping (► Abbildung 3.61). Bestimmen Sie den Mindestradius des Kreises, so dass die Beschleunigung im niedrigsten Punkt nicht größer ist als 6 g, wenn der Düsenjet mit einer Geschwindigkeit von 700 km/h im niedrigsten Punkt der Schleife fliegt.

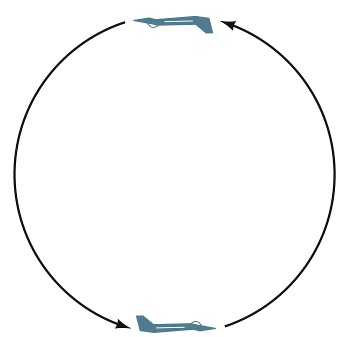


Abbildung 3.61 Aufgabe 94.

Dynamik: Die Newton'schen Axiome

4

ÜBERBLICK

Dieses Flugzeug startet gerade. Es beschleunigt und seine Geschwindigkeit nimmt rasch zu. Dafür muss gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, eine Kraft auf das Flugzeug ausgeübt werden. Was übt diese Kraft aus? Die aus den Düsentriebwerken nach hinten ausgestoßenen Gase üben eine Kraft auf die Düsentriebwerke aus, die starr mit dem Flugzeug verbunden sind. Nach dem dritten Newton'schen Axiom ist die Kraft, die auf die Gase wirkt, gleich groß, aber entgegengesetzt der Kraft, die auf das Düsentriebwerk und damit auf das Flugzeug wirkt. Die durch die Gase auf das Flugzeug wirkenden Kräfte $\mathbf{F}_{\mathrm{FG}}$ *beschleunigen das Flugzeug.*

4. Dynamik: Die Newton'schen Axiome

Wir haben erörtert, wie Bewegung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung beschrieben wird. Jetzt geht es um die Frage, *warum* sich Körper so bewegen, wie sie es tun: Was setzt einen ruhenden Körper in Bewegung? Warum beschleunigt oder bremst ein Körper ab? Welche Kräfte führen zu einer kreisförmigen Bewegung eines Körpers? In allen Fällen können wir antworten, dass eine Kraft erforderlich ist. In diesem Kapitel[1] untersuchen wir die Verbindung zwischen Kraft und Bewegung, ein Thema, das **Dynamik** genannt wird.

4.1 Kraft

T Kräfte

Intuitiv erleben wir **Kraft** als eine Art von Zug oder Schub auf einen Körper. Schiebt man ein liegen gebliebenes Auto oder einen Einkaufswagen (▶ Abbildung 4.1), so übt man eine Kraft darauf aus. Wenn ein Motor einen Aufzug bewegt oder ein Hammer auf einen Nagel schlägt oder der Wind die Blätter auf einem Baum bewegt, wirkt eine Kraft. Wir sagen, dass ein Körper auf Grund der *Schwerkraft (Gravitationskraft)* fällt. Kräfte bewirken nicht immer eine Bewegung. Man kann z. B. sehr intensiv gegen einen schweren Schreibtisch drücken, ohne dass er sich bewegt.

Abbildung 4.1 Kraft, die auf einen Einkaufswagen ausgeübt wird – in diesem Fall von einem Kind.

Wenn sich ein Körper im Stillstand befindet, bedarf es einer Kraft, um ihn in Bewegung zu setzen – d. h. um ihn von der Geschwindigkeit null auf eine Geschwindigkeit ungleich null zu beschleunigen. Bewegt sich ein Körper bereits, bedarf es zur Änderung seiner Geschwindigkeit – entweder in der Richtung oder im Betrag – wiederum einer Kraft. Mit anderen Worten, zur Beschleunigung eines Körpers wird eine Kraft benötigt. In Abschnitt 4.4 erörtern wir die genaue Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung, das zweite Newton'sche Axiom.

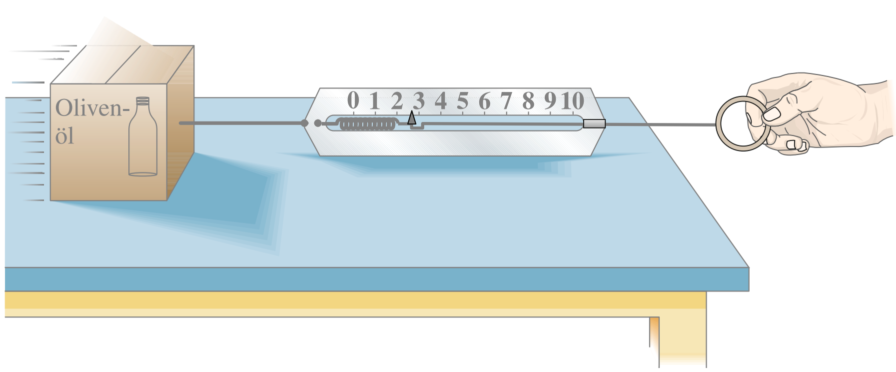


Abbildung 4.2 Eine zur Messung einer Kraft verwendete Federwaage.

Messen einer Kraft

Zur Messung des Betrages einer Kraft kann z. B. eine Federwaage (▶ Abbildung 4.2) verwendet werden. Man kann mit einer Federwaage auch das Gewicht eines Körpers messen. Mit Gewicht meinen wir die auf den Körper wirkende Gravitationskraft (Abschnitt 4.6). Die einmal kalibrierte Federwaage kann auch für die Messung anderer Kräfte eingesetzt werden, z. B. der in ▶ Abbildung 4.2 dargestellten Zugkraft.

1 Wir behandeln hier jegliche Art von Körpern aus unserem alltäglichen Leben. Die submikroskopische Welt der Atome und Moleküle muss gesondert behandelt werden. Auch sehr hohe Geschwindigkeiten, die nahezu Lichtgeschwindigkeit ($3{,}0 \cdot 10^8$ m/s) erreichen, müssen mithilfe der Relativitätstheorie (Kapitel 37) untersucht werden.

Eine Kraft hat sowohl eine Richtung als auch einen Betrag und ist ein Vektor, der den in Kapitel 3 erörterte Regeln der Gesetze der Vektoraddition folgt. In einer Zeichnung können wir jede Kraft durch einen Vektorpfeil darstellen, ebenso wie die Geschwindigkeit. Die Richtung des Vektorpfeils ist die Richtung der Kraft und seine Länge wird proportional zum Betrag der Kraft gezeichnet.

4.2 Das erste Newton'sche Axiom

Welcher Bezug besteht zwischen Kraft und Bewegung? Aristoteles (384–322 v. Chr.) glaubte, dass eine Kraft notwendig sei, um einen Körper entlang einer horizontalen Ebene (senkrecht zur Richtung der Fallbeschleunigung) in Bewegung zu halten. Laut Aristoteles wäre der natürliche Zustand eines Körpers die Ruhelage und man glaubte, dass eine Kraft benötigt würde, um einen Körper in Bewegung zu halten. Außerdem behauptete Aristoteles, dass je größer die auf den Körper ausgeübte Kraft, desto größer seine Geschwindigkeit sei.

Rund 2000 Jahre später vertrat Galileo Galilei (1564–1642) eine andere Meinung und behauptete, dass es für einen Körper ebenso natürlich sei, sich mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung (senkrecht zur Richtung der Fallbeschleunigung) zu bewegen wie sich in der Ruhelage zu befinden.

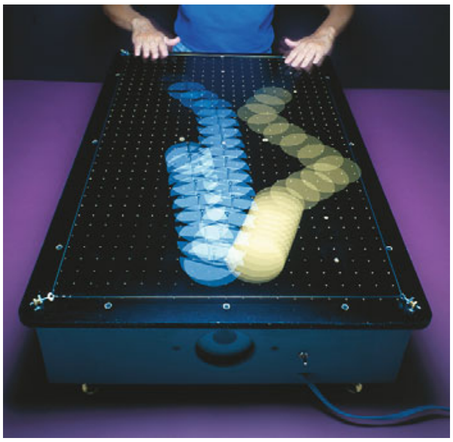


Abbildung 4.3 Foto eines Luftkissentisches. Luft, die aus vielen kleinen Öffnungen austritt, bildet eine dünne Schicht zwischen dem Tisch und einem Puck, der sich nach einem kleinen Anstoß mit nahezu konstanter Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt (bis er auf eine Wand oder einen anderen Puck trifft).

Um Galileis Idee zu verstehen, betrachten wir folgende Beobachtungen bezüglich der Bewegung entlang einer horizontalen Ebene. Um einen Körper mit einer rauen Oberfläche mit konstanter Geschwindigkeit über eine Tischplatte zu bewegen, bedarf es einer bestimmten Kraft. Um einen gleich schweren Körper mit einer sehr glatten Oberfläche mit derselben Geschwindigkeit über den Tisch zu schieben, wird weniger Kraft benötigt. Wenn eine Ölschicht oder ein anderes Schmiermittel zwischen der Oberfläche des Körpers und dem Tisch aufgetragen wird, wird fast keine Kraft benötigt, um den Körper zu bewegen. Beachten Sie, dass bei jedem weiteren Schritt weniger Kraft erforderlich ist. Als nächstes können wir uns eine Situation vorstellen, in der der Körper den Tisch gar nicht berührt – oder in der sich ein perfektes Schmiermittel zwischen dem Körper und dem Tisch befindet – und können die Theorie aufstellen, dass sich der Körper, wenn er einmal in Bewegung gesetzt wurde, mit konstanter Geschwindigkeit *ohne* Krafteinwirkung über den Tisch bewegen würde. Ein Stahlkugellager auf einer harten horizontalen Fläche kommt dieser Situation nahe. Aber auch ein Puck auf einem Luftkissentisch (▸ Abbildung 4.3), auf dem eine dünne Luftschicht die Reibung auf nahezu null reduziert, ist ein Beispiel.

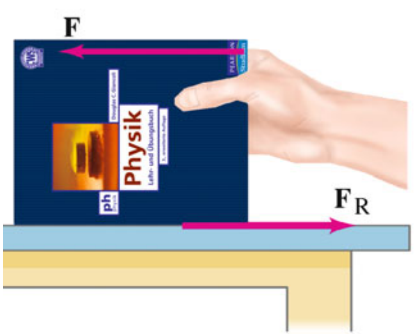


Abbildung 4.4 **F** stellt die Kraft dar, die von der Person ausgeübt wird, und $\mathbf{F}_R$ ist die Reibungskraft.

Galileis Intelligenz verdanken wir die Vorstellung einer solchen idealisierten Welt – in diesem Fall einer Welt, in der keine Reibung existiert – und die Erkenntnis, dass diese idealisierte Welt eine praktischere Sicht der realen Welt bieten könnte. Diese Idealisierung führte ihn zu seiner bemerkenswerten Schlussfolgerung, dass, wenn keine Kraft auf einen sich bewegenden Körper einwirkt, dieser Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Linie weiterbewegt. Ein Körper wird nur dann langsamer, wenn eine Kraft auf ihn ausgeübt wird. Galileo Galilei interpretierte daher die Reibung als Kraft, die der Zug- bzw. Schubkraft ähnelt.

Einen Körper mit konstanter Geschwindigkeit über einen Tisch zu schieben, erfordert eine Kraft von Ihrer Hand, nur um die Reibungskraft auszugleichen (▸ Abbildung 4.4). Wenn sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist der Betrag ihrer Schubkraft gleich dem Betrag der Reibungskraft. Diese beiden Kräfte haben allerdings entgegengesetzte Richtungen, so dass die auf den Gegenstand wirkende *Netto*kraft (die Vektorsumme der beiden Kräfte) null ist. Diese Tatsache entspricht Galileis Ansicht, da sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt, wenn keine Nettokraft auf ihn wirkt.

Abbildung 4.5 Isaac Newton (1642–1727).

Auf dieser Grundlage baute Isaac Newton (▸ Abbildung 4.5) seine berühmte Bewegungstheorie auf. Newtons Bewegungsanalyse wird in seinen berühmten „Drei Gesetzen der Bewegung" zusammengefasst. In seinem großen Werk *Principia* (1687) erkennt Newton seine Schuld gegenüber Galilei bereitwillig an. Tatsächlich ist das **erste Newton'sche Axiom** sehr nah an Galileis Schlussfolgerungen. Es besagt, dass

DAS ERSTE NEWTON'SCHE AXIOM

> ***jeder Körper so lange im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung verharrt, wie keine Nettokraft auf ihn einwirkt.***

Trägheit

Die Tendenz eines Körpers, den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung beizubehalten, nennt man **Trägheit**. Folglich wird das erste Newton'sche Axiom häufig als **Trägheitsgesetz** bezeichnet.

Inertialsysteme

Das erste Newton'sche Axiom gilt nicht in jedem Bezugssystem. Wenn sich Ihr Bezugssystem z. B. fest in einem Auto befindet und das Auto beschleunigt, beginnt ein Körper wie z. B. eine Flasche, die sich im Fahrzeug befindet, möglicherweise, in Ihre Richtung zu rollen (so lange die Geschwindigkeit des Autos konstant war, blieb sie in der Ruhelage). Die Flasche hat in Ihre Richtung beschleunigt, obwohl weder Sie noch irgendjemand eine Kraft auf sie in dieser Richtung ausgeübt hat. In einem solchen beschleunigten Bezugssystem gilt das erste Newton'sche Axiom nicht. Bezugssysteme, in denen das erste Newton'sche Axiom gilt, werden **Inertialsysteme** genannt – in ihnen gilt das Trägheitsgesetz. In den meisten Fällen können wir normalerweise davon ausgehen, dass die fest auf der Erde befindlichen Bezugssysteme sich wie Inertialsysteme verhalten. Auf Grund der Erdrotation ist dies nicht exakt richtig, aber normalerweise eine gute Näherung. Jedes Bezugssystem (z. B. ein Auto oder ein Flugzeug), das sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem. Bezugssysteme, in denen das Trägheitsgesetz *nicht* gilt, wie z. B. das oben genannte beschleunigende Bezugssystem, werden **nichtinertiale Bezugssysteme** genannt. Wie können wir sicher sein, ob es sich um ein Inertialsystem oder um ein nichtinertiales System handelt? Durch eine Prüfung, ob das erste Newton'sche Axiom gilt. Somit dient das erste Newton'sche Axiom auch als Definition von Inertialsystemen.

4.3 Masse

Das zweite Newton'sche Axiom, das wir im nächsten Abschnitt erörtern, verwendet den Begriff Masse. Newton benutzte den Begriff *Masse* als Synonym für die *Stoffmenge*. Diese intuitive Vorstellung der Masse eines Körpers ist nicht sehr genau, da der Begriff „Stoffmenge" nicht sehr gut definiert ist. Genauer formuliert können wir sagen, dass **Masse** ein *Maß für die Trägheit eines Körpers* ist. Je mehr Masse ein Körper hat, desto mehr Kraft ist notwendig, um ihm eine bestimmte Beschleunigung zu geben. Es ist schwieriger, ihn aus der Ruhelage in Bewegung zu setzen, ihn während der Bewegung zum Anhalten zu bringen oder seine Geschwindigkeit zur Seite aus einer geradlinigen Bahn zu verändern. Ein Lastwagen (Lkw) hat eine wesentlich größere Trägheit als ein Fußball, der sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt, und es bedarf wesentlich mehr Kraft, um die Geschwindigkeit des Lkw im gleichen Verhältnis zu verändern. Er hat folglich viel mehr Masse. Im nächsten Abschnitt wird erläutert, wie wir Masse in Bezug zur Trägheit definieren.

Masse als Trägheit

Um den Begriff Masse quantitativ zu messen, müssen wir einen Standard definieren. Die SI-Einheit der Masse ist **Kilogramm** (kg), wie wir in Abschnitt 1.4 erläutert haben.

Die Begriffe *Masse* und *Gewicht* werden oft verwechselt. Dabei ist es wichtig, zwischen beiden zu unterscheiden. Masse ist eine Eigenschaft des Körpers selbst – sie ist ein Maß der Trägheit des Körpers oder seiner „Stoffmenge". *Gewicht* ist dagegen *eine Kraft*, und zwar die auf den Körper wirkende Schwerkraft (Gravitationskraft). Um den Unterschied zu verdeutlichen, nehmen wir an, wir nehmen einen Körper mit auf den Mond. Der Körper wiegt nur etwa ein Sechstel von seinem Gewicht auf der Erde, da die Gravitationskraft am Mond schwächer

Masse vs. Gewicht

ist. Seine Masse jedoch bleibt gleich. Er wird dieselbe Stoffmenge und ebenso viel Trägheit besitzen – denn bei Nichtvorhandensein von Reibung wird es genauso schwierig sein, ihn in Bewegung zu setzen bzw. ihn anzuhalten, wenn er erst in Bewegung ist. (Weitere Informationen zum Gewicht siehe Abschnitt 4.6.)

T Zweites Newton'sches Gesetz

4.4 Das zweite Newton'sche Axiom

Das erste Newton'sche Axiom besagt, dass, wenn keine Nettokraft auf einen Körper wirkt, der Körper in der Ruhelage verharrt, oder wenn der Körper sich bewegt, er mit konstanter Geschwindigkeit in einer geradlinigen Bewegung bleibt. Aber was passiert, wenn eine Nettokraft auf einen Körper ausgeübt wird? Newton fand heraus, dass sich die Geschwindigkeit ändert (▶ Abbildung 4.6). Eine auf einen Körper ausgeübte Nettokraft bewirkt, dass seine Geschwindigkeit zunimmt oder, wenn die Nettokraft in entgegengesetzter Richtung zur Bewegung ausgeübt wird, dass die Geschwindigkeit abnimmt. Wenn die Nettokraft seitlich auf einen sich bewegenden Körper wirkt, ändert sich die *Richtung* der Geschwindigkeit (und möglicherweise auch der Betrag). Da eine Änderung in der Geschwindigkeit eine Beschleunigung darstellt (Kapitel 2, Absatz 2.4), können wir sagen, dass *eine Nettokraft eine Beschleunigung verursacht*.

Abbildung 4.6 Der Bob beschleunigt, weil das Team eine Kraft auf ihn ausübt.

Wie genau sieht die Beziehung zwischen Beschleunigung und Kraft aus? Alltägliche Erfahrungen können diese Frage beantworten. Betrachten Sie die Kraft, die erforderlich ist, einen Einkaufswagen zu schieben, dessen Reibung vernachlässigt werden kann. Betrachten Sie die *Netto*kraft, d. h. die von Ihnen ausgeübte Kraft abzüglich der Reibungskraft, wenn Reibung vorhanden ist. Wenn Sie jetzt für eine bestimmte Zeit mit geringer, aber konstanter Kraft schieben, bewirken Sie, dass der Einkaufswagen aus dem Stillstand auf eine bestimmte Geschwindigkeit, z. B. 3 km/h, beschleunigt. Wenn Sie mit der doppelten Kraft schieben, werden Sie sehen, dass der Wagen die Geschwindigkeit von 3 km/h in der halben Zeit erreicht. Das bedeutet, dass die Beschleunigung doppelt so groß ist. Wenn sie die Kraft verdoppeln, verdoppelt sich die Beschleunigung. Wenn Sie die Kraft verdreifachen, verdreifacht sich die Beschleunigung etc. Daher ist die Beschleunigung eines Körpers direkt proportional zur einwirkenden Nettokraft.

Aber die Beschleunigung hängt auch von der Masse des Körpers ab. Wenn Sie einen leeren Einkaufswagen mit derselben Kraft wie einen vollen Einkaufswagen schieben, werden Sie feststellen, dass der Einkaufswagen mit der größeren Masse langsamer beschleunigt. Je größer die Masse, desto kleiner die Beschleunigung bei derselben Nettokraft. Die mathematische Beziehung, so argumentierte Newton, besagt, dass die Beschleunigung eines Körpers umgekehrt proportional zu seiner Masse ist. Diese Beziehungen gelten im Allgemeinen und können wie folgt zusammengefasst werden:

DAS ZWEITE NEWTON'SCHE AXIOM

Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn einwirkenden Nettokraft und umgekehrt proportional zu seiner Masse. Die Richtung der Beschleunigung ist die Richtung der auf den Körper wirkenden Nettokraft.

Dies ist das **zweite Newton'sche Axiom**. Als Gleichung können wir schreiben:

$$\mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m},$$

wobei **a** für die Beschleunigung steht, m für die Masse, und $\sum \mathbf{F}$ für die *Nettokraft*. Das Symbol $\sum$ (Griechisch „Sigma“) steht für „die Summe aus“. **F** steht für Kraft, also bedeutet $\sum \mathbf{F}$ die *Vektorsumme aller auf den Körper einwirkenden Kräfte*, die wir als **Nettokraft** definieren.

Nettokraft

Wir stellen diese Gleichung um, um die vertraute Darstellung des zweiten Newton'schen Axioms zu erhalten:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (4.1)$$

Das zweite Newton'sche Axiom setzt die Beschreibung von Bewegung mit der Ursache der Bewegung, der Kraft, in Beziehung. Hierbei handelt es sich um eine der grundlegendsten Beziehungen in der Physik. Aus dem zweiten Newton'schen Axiom können wir die Definition der **Kraft** als einen *Prozess, der die Beschleunigung eines Körpers verursachen kann*, ableiten.

Definition der Kraft

Jede Kraft $\mathbf{F}$ ist ein Vektor mit Betrag und Richtung. Die Gleichung 4.1 ist eine Vektorgleichung, die in jedem Inertialsystem Gültigkeit hat. Sie kann in Komponentenschreibweise für ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie folgt geschrieben werden:

$$\sum F_x = ma_x \ , \quad \sum F_y = ma_y \ , \quad \sum F_z = ma_z \ .$$

Wenn die Bewegung entlang einer Geraden stattfindet (eindimensional), können wir die tiefgestellten Indizes weglassen und einfach $\sum F = ma$ schreiben.

Die SI-Einheit der Masse ist Kilogramm, die der Kraft ist **Newton** (N). Ein Newton ist die Kraft, die erforderlich ist, um eine Beschleunigung von $1\,\mathrm{m/s^2}$ auf eine Masse von 1 kg zu übertragen. Daher gilt $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg \cdot m/s^2}$.

Maßeinheit der Kraft: Newton

Die cgs-Einheit der Masse ist Gramm (g), wie bereits erwähnt.[2] Die Einheit der Kraft ist *dyn*, die als die Nettokraft definiert ist, die dazu benötigt wird, eine Beschleunigung von $1\,\mathrm{cm/s^2}$ auf eine Masse von 1 g zu übertragen. Daher gilt $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g \cdot cm/s^2}$. Es ist einfach aufzuzeigen, dass $1\,\mathrm{dyn} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$ ist. Tabelle 4.1 fasst die Einheiten in den verschiedenen Systemen zusammen.

Es ist sehr wichtig, dass bei einer Berechnung oder einer Aufgabe nur ein Satz Einheiten verwendet wird, vorzugsweise die SI-Einheiten. Wenn die Kraft z. B. in Newton und die Masse in Gramm angegeben ist, muss vor der Berechnung der Beschleunigung in SI-Einheiten die Masse in Kilogramm umgerechnet werden. Wenn z. B. die Kraft mit 2,0 N entlang der x-Achse angegeben ist und die Masse 500 g beträgt, rechnen wir Letztere in 0,50 kg um. Dann wird bei Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms automatisch die Beschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$ berechnet:

PROBLEMLÖSUNG

Verwenden Sie einheitliche Maßeinheiten.

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{2{,}0\,\mathrm{N}}{0{,}50\,\mathrm{kg}} = \frac{2{,}0\,\mathrm{kg \cdot m}}{0{,}50\,\mathrm{kg \cdot s^2}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

Beispiel 4.1 · Abschätzung — Kraft zur Beschleunigung eines schnellen Autos

Schätzen Sie die Nettokraft ab, die erforderlich ist, um (a) ein Auto mit einer Masse von 1000 kg mit $\frac{1}{2}g$, (b) einen Apfel (Masse 200 g) mit derselben Beschleunigung zu beschleunigen.

Lösung

a Die Beschleunigung des Autos ist $a = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}\left(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\right) \approx 5\,\mathrm{m/s^2}$. Um die Nettokraft zu berechnen, die erforderlich ist, um diese Beschleunigung zu erreichen, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom an:

$$\sum F = ma \approx (1000\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s^2}) = 5000\,\mathrm{N} \ .$$

b Für den Apfel gilt

$$\sum F = ma \approx (0{,}200\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s^2}) = 1\,\mathrm{N} \ .$$

Tabelle 4.1

Einheiten für Masse und Kraft

System	Masse	Kraft (einschließlich Gewicht)
SI	Kilogramm (kg)	Newton (N) (= $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$)
Cgs	Gramm (g)	dyn (= $\mathrm{g \cdot cm/s^2}$)
Umrechnungsfaktoren: $1\,\mathrm{dyn} = 10 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$.		

2 Achtung: Verwechseln Sie die Bezeichnung g für Gramm nicht mit der Bezeichnung g für die Fallbeschleunigung. Letztere ist immer in Kursivschrift (oder als Vektor im Fettdruck) angegeben.

Beispiel 4.2 Kraft zum Abbremsen eines Autos

Welche konstante Nettokraft ist erforderlich, um ein Auto (Masse 1500 kg) von einer Geschwindigkeit von 100 km/h innerhalb von 55 m zum Stehen zu bringen?

Lösung

Wir wenden das zweite Newton'sche Axiom an, $\sum F = ma$. Zunächst müssen wir jedoch die Beschleunigung a bestimmen, die konstant ist, da die Nettokraft konstant ist. Wir nehmen an, dass die Bewegung entlang der positiven x-Achse (▶ Abbildung 4.7) stattfindet. Die Anfangsgeschwindigkeit ist mit $v_0 = 100\,\mathrm{km/h} = 28\,\mathrm{m/s}$, die Endgeschwindigkeit mit $v = 0$ und der zurückgelegte Weg mit $x - x_0 = 55\,\mathrm{m}$ angegeben. Aus der Gleichung 2.12c haben wir

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)\ .$$

Daher gilt

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{0 - (28\,\mathrm{m/s})^2}{2(55\,\mathrm{m})} = -7{,}1\,\mathrm{m/s^2}\ .$$

Die erforderliche Nettokraft beträgt dann

$$\sum F = ma = (1500\,\mathrm{kg})(-7{,}1\,\mathrm{m/s^2}) = -1{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{N}\ .$$

Die Kraft muss in der der Anfangsgeschwindigkeit *entgegengesetzten* Richtung ausgeübt werden. Dies wird durch das Minuszeichen ausgedrückt.

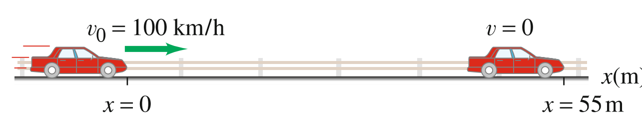


Abbildung 4.7 Beispiel 4.2.

Wie bereits in Abschnitt 4.3 erwähnt, können wir den Begriff Masse durch Verwendung seiner Definition als Maß der Trägheit quantitativ messen. Wie man das macht, ist aus der Gleichung 4.1 ersichtlich. Dort wird deutlich, dass die Beschleunigung eines Körpers umgekehrt proportional zu seiner Masse ist. Wenn dieselbe Nettokraft $\sum F$ wirkt, um zwei Massen m_1 und m_2 zu beschleunigen, kann das Verhältnis ihrer Massen als das umgekehrte Verhältnis ihrer Beschleunigungen definiert werden:

Definition der Masse

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}\ .$$

Wenn eine der Massen bekannt ist (dies könnte das Standardkilogramm sein) und die beiden Beschleunigungswerte genau gemessen werden, ergibt sich die unbekannte Masse aus dieser Gleichung. Wenn z. B. $m_1 = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ ist und für eine bestimmte Kraft $a_1 = 3{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ und $a_2 = 2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ gilt, dann ist $m_2 = 1{,}50\,\mathrm{kg}$.

Das zweite Newton'sche Axiom ist wie das erste nur in Inertialsystemen gültig. In den nichtinertialen Systemen eines beschleunigenden Autos z. B. beginnt sich eine Flasche zu bewegen – zu beschleunigen –, obwohl die auf sie wirkende Nettokraft null beträgt. Somit funktioniert $\sum F = ma$ in einem solchen beschleunigenden Bezugssystem nicht.

4.5 Das dritte Newton’sche Axiom

T Drittes Newton’sches Gesetz

Das zweite Newton’sche Axiom beschreibt quantitativ, wie Kräfte Bewegungen beeinflussen. Aber wo, können wir fragen, kommen die Kräfte her? Beobachtungen deuten darauf hin, dass eine auf einen Körper wirkende Kraft immer *von einem anderen Körper* ausgeübt wird. Ein Pferd zieht einen Wagen, eine Person schiebt einen Einkaufswagen, ein Hammer schlägt auf einen Nagel, ein Magnet zieht eine Büroklammer an. In jedem dieser Beispiele wirkt eine Kraft *auf* einen Körper und diese Kraft wird *von* einem anderen Körper ausgeübt. Die *auf* den Nagel ausgeübte Kraft wird z. B. *von* dem Hammer ausgeübt.

Eine Kraft wirkt *auf* einen Körper und wird *von* einem anderen Körper ausgeübt

Aber Newton erkannte, dass die Dinge nicht ganz so einseitig sind. Sicherlich übt der Hammer eine Kraft auf den Nagel aus (▶ Abbildung 4.8). Aber offensichtlich übt auch der Nagel wiederum eine Kraft auf den Hammer aus, da die Geschwindigkeit des Hammers bei Kontakt schnell auf null sinkt. Nur eine starke Kraft könnte ein solch rapides Abbremsen des Hammers bewirken. Daher, so Newton, müssen beide Körper gleich behandelt werden. Der Hammer übt eine Kraft auf den Nagel aus und der Nagel übt wieder eine Kraft auf den Hammer aus. Dies ist der Inhalt des **dritten Newton’schen Axioms:**

DAS DRITTE NEWTON’SCHE AXIOM

Wenn ein Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft ausübt, übt auch der zweite Körper eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft auf den ersten Körper aus.

Dieses Gesetz wird manchmal in etwas abgewandelter Form wiedergegeben: „auf jede Aktion folgt eine gleich starke und entgegengerichtete Reaktion“. Dies ist absolut richtig. Aber um Verwechslungen zu vermeiden, ist es wichtig, daran zu denken, dass die „Aktions“-Kraft und die „Reaktions“-Kraft auf *verschiedene* Körper wirken.

Aktion und Reaktion wirken auf verschiedene Körper

Als Beweis der Gültigkeit des dritten Newton’schen Axioms schauen Sie sich Ihre eigene Hand an, wenn Sie einen Einkaufswagen schieben oder gegen die Kante eines Tisches drücken, ▶ Abbildung 4.9. Die Form Ihrer Hand ist verzerrt, ein klarer Beweis dafür, dass eine Kraft auf sie wirkt. Sie können *sehen*, wie die Kante des Tisches in Ihre Hand drückt. Sie können sogar *fühlen*, dass der Tisch eine Kraft auf Ihre Hand ausübt: es tut weh! Je stärker Sie gegen den Tisch drücken, desto stärker drückt auch der Tisch gegen Ihre Hand. (Beachten Sie, dass Sie nur die Kräfte fühlen, die *auf* Sie selbst wirken, nicht die, die Sie auf andere Körper ausüben.)

Zur weiteren Veranschaulichung des dritten Newton’schen Axioms betrachten Sie die Schlittschuhläuferin in ▶ Abbildung 4.10a. Da zwischen ihren Schlittschuhen und dem Eis nur eine sehr geringe Reibung vorhanden ist, wird sie sich frei bewegen, wenn eine Kraft auf sie einwirkt. *Sie* drückt sich an der Bande ab und beginnt dann *selbst*, sich rückwärts zu bewegen. Zweifellos muss eine Kraft auf sie wirken, damit sie sich bewegt. Die Kraft, die sie auf die Bande ausübt, kann *sie* nicht in Bewegung setzen, denn diese Kraft wirkt auf die Bande. Eine Kraft muss auf sie einwirken, die sie in Bewegung setzt, und diese Kraft kann nur von der Bande ausgeübt werden. Die Kraft, die die Bande auf sie ausübt, ist gemäß dem dritten Newton’schen Axiom gleich der Kraft, die sie auf die Bande ausübt, und dieser Kraft entgegengerichtet.

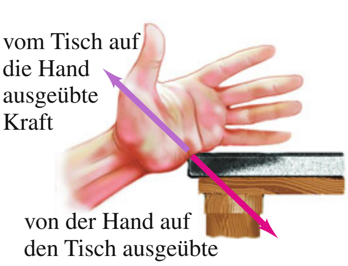


Abbildung 4.9 Wenn Ihre Hand gegen die Kante eines Tisches drückt (der Kraftvektor ist in rot dargestellt), drückt auch der Tisch wieder gegen Ihre Hand (dieser Kraftvektor ist in violett dargestellt, um zu verdeutlichen, dass diese Kraft auf einen anderen Körper wirkt).

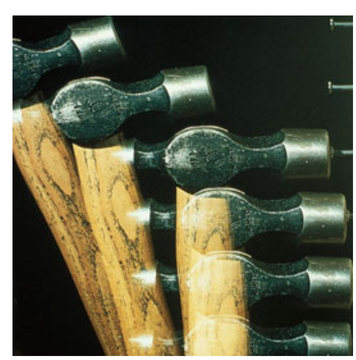


Abbildung 4.8 Mehrfach belichtete Aufnahme eines Hammers, der auf einen Nagel schlägt. Nach dem dritten Newton’schen Axiom übt der Hammer eine Kraft auf den Nagel aus und der Nagel wiederum eine Kraft auf den Hammer. Letztere bremst den Hammer ab und bringt ihn zum Stillstand.

(a)

(b)

Abbildung 4.10 Zwei Beispiele für das dritte Newton'sche Axiom. (a) Wenn eine Schlittschuhläuferin gegen die Bande drückt, drückt die Bande zurück und diese Kraft veranlasst die Läuferin, sich von der Bande weg zu bewegen. (b) Start einer Rakete. Das Triebwerk der Rakete stößt die Gase aus und die Gase üben eine gleich große und entgegengerichtete Kraft zurück auf die Rakete aus und beschleunigen sie auf diese Weise.

Wenn eine Person ein Paket aus einem Boot (das sich anfangs im Stillstand befindet) wirft, beginnt das Boot, sich in die entgegengesetzte Richtung zu bewegen. Die Person übt eine Kraft auf das Paket aus. Das Paket übt seinerseits wieder eine gleich große und entgegengerichtete Kraft auf die Person aus und diese Kraft treibt die Person (und das Boot) leicht rückwärts. Der Antrieb einer Rakete ist ebenfalls mithilfe des dritten Newton'schen Axioms zu erklären (▶ Abbildung 4.10b). Eine weit verbreitete falsche Annahme ist die Vorstellung, dass Raketen beschleunigen, weil die Gase, die aus dem Triebwerk austreten, gegen den Boden oder die Atmosphäre drücken. Falsch. Tatsächlich übt die Rakete eine starke Kraft auf die Gase aus und stößt sie auf diese Weise aus. Die Gase üben eine gleich große und entgegengerichtete Kraft *auf die Rakete* aus. Diese Kraft treibt die Rakete an. Daher wird ein Raumfahrzeug im luftleeren Raum gesteuert, indem man seine Raketen in die Richtung abfeuert, die der Richtung, in die das Raumfahrzeug beschleunigen soll, entgegengesetzt ist.

ANGEWANDTE PHYSIK

Wie beschleunigt eine Rakete?

Betrachten wir, wie wir gehen. Eine Person beginnt zu gehen, indem sie mit ihrem Fuß gegen den Boden drückt. Der Boden übt dann eine gleich große und entgegengerichtete Kraft auf die Person aus (▶ Abbildung 4.11). Diese *auf* die Person wirkende Kraft bewegt die Person vorwärts. (Wenn Sie dies bezweifeln, versuchen Sie, auf sehr glattem, rutschigem Eis zu gehen.) In ähnlicher Weise fliegt ein Vogel vorwärts. Der Vogel übt auf die Luft eine Kraft aus und die Luft drückt wiederum auf die Flügel des Vogels, der auf diese Weise vorwärts getrieben wird.

Abbildung 4.11 Wir können vorwärts gehen, weil, wenn ein Fuß nach hinten gegen den Boden drückt, der Boden diesen Fuß nach vorn schiebt. Die beiden dargestellten Kräfte *wirken auf verschiedene Körper*.

Beispiel 4.3 · Begriffsbildung **Was übt die Kraft auf ein Auto aus?**

Was veranlasst ein Auto, sich vorwärts zu bewegen?

Lösung

Eine übliche Antwort ist, dass der Motor das Auto vorwärts bewegt. Aber so einfach ist es nicht. Der Motor sorgt dafür, dass die Räder sich drehen. Doch was nutzt das, wenn sie sich auf rutschigem Eis oder im Schlamm befinden? Sie drehen sich einfach nur. Ein Auto bewegt sich vorwärts auf Grund der Reibungskraft, die der Boden auf die Reifen ausübt. Diese Kraft ist wiederum eine Reaktion auf die Kraft, die die Reifen auf den Boden ausüben.

Ruhende Körper können Kräfte ausüben

Wir neigen dazu, Kräfte mit sich bewegenden Körpern wie Menschen, Tiere, Maschinen oder einem Körper in Bewegung wie z. B. einem Hammer zu assoziieren.

Es ist häufig schwierig sich vorzustellen, wie ein ruhender Körper, wie eine Wand oder ein Tisch, eine Kraft ausüben kann. Die Erklärung liegt in der Tatsache, dass jeder feste Stoff unabhängig von seiner Festigkeit (Härte) elastisch ist, zumindest bei kleinen Dehnungen. Niemand kann bestreiten, dass ein gedehntes Gummiband auf ein Papierknäuel eine Kraft ausüben und es quer durch den Raum schießen kann. Andere Materialien dehnen sich nicht so leicht wie Gummi, aber sie dehnen sich, wenn eine Kraft auf sie einwirkt. Und ebenso wie ein gedehntes Gummiband eine Kraft ausübt, übt auch ein(e) gedehnte(r) Wand, Tisch oder Kotflügel eine Kraft aus.

Aus den oben erörterten Beispielen ist klar, dass es sehr wichtig ist zu wissen, *auf* welchen Körper eine gegebene Kraft wirkt und *von* welchem Körper diese Kraft ausgeübt wird. Das bedeutet, dass eine Kraft die Bewegung eines Körpers nur beeinflusst, wenn sie *auf* diesen Körper wirkt. Eine *von* einem Körper ausgeübte Kraft beeinflusst diesen Körper nicht. Sie beeinflusst nur den anderen Körper, *auf* den sie einwirkt. Um Verwechslungen zu vermeiden, müssen daher die beiden Präpositionen *auf* und *von* immer – und zwar sorgfältig – benutzt werden.

PROBLEMLÖSUNG

Seien Sie sich bei jeder Kraft darüber im Klaren, auf welchen Körper sie wirkt und von welchem Körper sie ausgeübt wird. $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ gilt nur für Kräfte, die auf einen Körper wirken.

Um die Übersicht darüber zu behalten, welche Kraft auf welchen Körper wirkt, verwenden wir doppelte tiefgestellte Indizes. Die Kraft, die in ▸ Abbildung 4.11 von dem **B**oden auf die **P**erson ausgeübt wird, kann z. B. mit $\mathbf{F}_{\mathrm{PB}}$ bezeichnet werden, wie in ▸ Abbildung 4.12 dargestellt. Die von der Person auf den Boden ausgeübte Kraft ist $\mathbf{F}_{\mathrm{BP}}$. Beachten Sie, dass wir unterschiedliche Farben für die Kraftvektoren verwenden, wenn sie auf verschiedene Körper wirken. Nach dem dritten Newton'schen Axiom gilt

DAS DRITTE NEWTON'SCHE AXIOM

$$\mathbf{F}_{\mathrm{BP}} = -\mathbf{F}_{\mathrm{PB}} \,. \tag{4.2}$$

$\mathbf{F}_{\mathrm{BP}}$ und $\mathbf{F}_{\mathrm{PB}}$ haben denselben Betrag. Das Minuszeichen erinnert uns daran, dass diese beiden Kräfte in entgegengesetzte Richtungen wirken.

Beachten Sie genau, dass die beiden in ▸ Abbildung 4.11 oder ▸ Abbildung 4.12 dargestellten Kräfte auf verschiedene Körper wirken. Deshalb haben wir für die Pfeile, die die Kräfte darstellen, leicht unterschiedliche Farben verwendet. Diese beiden Kräfte würden nie gemeinsam in einer Kräftesumme im zweiten Newton'schen Axiom, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, erscheinen. Warum nicht? Weil $\mathbf{a}$ die Beschleunigung eines bestimmten Körpers ist und $\sum \mathbf{F}$ nur die Kräfte beinhalten darf, die auf diesen Körper wirken.

Abbildung 4.12 Das dritte Newton'sche Axiom. Tiefgestellte Indizes an den Vektorsymbolen der Kräfte zeigen uns, auf welchen Körper eine Kraft wirkt und von welchem Körper sie ausgeübt wird.

Beispiel 4.4 · Begriffsbildung

Erklärung des dritten Axioms

Michelangelos Gehilfe soll einen Marmorblock mithilfe eines Schlittens bewegen (▸ Abbildung 4.13). Er sagt zu seinem Chef: „Wenn ich eine vorwärts gerichtete Kraft auf den Schlitten ausübe, übt der Schlitten eine gleich große und entgegengerichtete, also rückwärts gerichtete Kraft aus. Wie soll ich den Schlitten also jemals in Bewegung setzen? Ganz egal, wie kräftig ich ziehe, die rückwärts gerichtete Reaktionskraft ist immer gleich meiner vorwärts gerichteten Kraft. Die Nettokraft muss demnach null sein. Ich werde diese Last niemals bewegen können." Ist dies ein Fall von gefährlichem Unwissen? Erklären Sie, warum.

Lösung

Ja. Obwohl es richtig ist, dass die Kraft und die Gegenkraft (Reaktionskraft) denselben Betrag haben, hat der Gehilfe vergessen, dass die Kräfte auf verschiedene Körper wirken. Die vorwärts gerichtete Kraft wird von dem Gehilfen auf den Schlitten ausgeübt (▸ Abbildung 4.13), während die rückwärts gerichtete Reaktionskraft von dem Schlitten auf den Gehilfen ausgeübt wird. Um zu ermitteln, ob sich der *Gehilfe* bewegt oder nicht, müssen wir nur die Kräfte,

PROBLEMLÖSUNG

Eine Untersuchung des zweiten und dritten Newton'schen Axioms

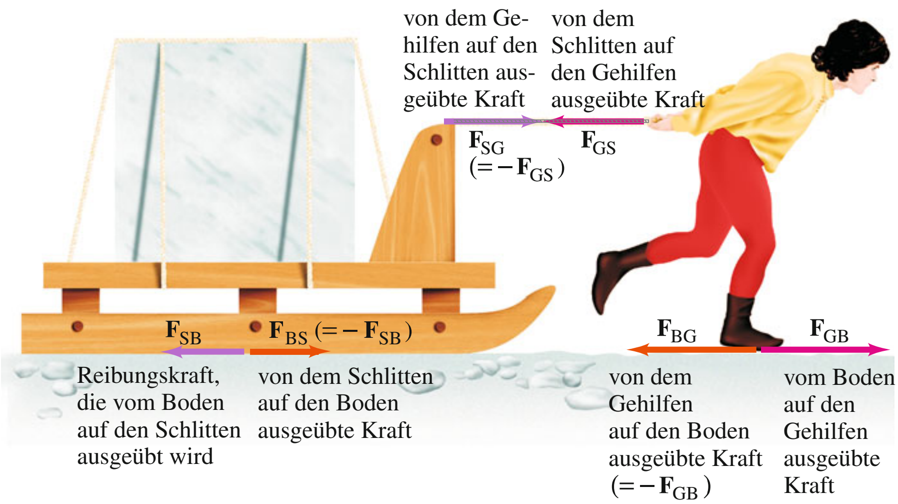


Abbildung 4.13 Der 17jährige Michelangelo hat einen schönen Marmorblock für seine nächste Skulptur ausgesucht. Hier ist sein Gehilfe abgebildet, der den Block gerade auf einem Schlitten aus dem Steinbruch zieht. Die auf den Gehilfen wirkenden Kräfte sind als magentafarbene Pfeile dargestellt. Die auf den Schlitten wirkenden Kräfte sind als violette Pfeile, die auf den Boden wirkenden Kräfte als orangefarbene Pfeile dargestellt. Kräfte und Gegenkräfte, die gleich groß, aber entgegengerichtet sind, haben dieselben tiefgestellten Indizes, aber in umgekehrter Reihenfolge (wie z. B. $\mathbf{F}_{BG}$ und $\mathbf{F}_{GB}$) und sind farblich unterschiedlich dargestellt, da sie auf unterschiedliche Körper wirken. (Es sind nur horizontale Kräfte abgebildet.)

Abbildung 4.14 Die auf den Gehilfen wirkenden Kräfte aus Beispiel 4.4.

die *auf den Gehilfen* wirken, betrachten und dann $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ anwenden. Dabei ist $\sum \mathbf{F}$ die *auf den Gehilfen* wirkende Nettokraft, $\mathbf{a}$ ist die Beschleunigung des Gehilfen und m seine Masse. Es gibt zwei Kräfte, die auf den Gehilfen wirken und seine Vorwärtsbewegung beeinflussen. Diese Kräfte sind als magentafarbene Pfeile in der ► Abbildung 4.13 und 4.14 dargestellt: es sind (1) die horizontale Kraft $\mathbf{F}_{GB}$, die von dem Boden auf den Gehilfen ausgeübt wird (je stärker er nach hinten gegen den Boden drückt, desto stärker schiebt der Boden ihn vorwärts – das dritte Newton'sche Axiom) und (2) die Kraft $\mathbf{F}_{GS}$, die von dem Schlitten auf den Gehilfen ausgeübt wird und die den Gehilfen nach hinten zieht, siehe ► Abbildung 4.14. Wenn der Boden den Gehilfen stärker vorwärts schiebt als der Schlitten ihn rückwärts zieht, beschleunigt der Gehilfe vorwärts (zweites Newton'sches Axiom). Der Schlitten beschleunigt seinerseits vorwärts, wenn die auf *ihn* von dem Gehilfen ausgeübte Kraft größer ist als die rückwärts gerichtete Reibungskraft (d. h. wenn $\mathbf{F}_{SG}$ einen größeren Betrag hat als $\mathbf{F}_{SB}$ in ► Abbildung 4.13).

Die Verwendung von doppelten tiefgestellten Indizes zur Erklärung des dritten Newton'schen Axioms kann umständlich werden. Normalerweise werden wir sie nicht auf diese Weise benutzen. Wenn Ihnen eine gegebene Kraft nicht klar ist, benutzen Sie sie trotzdem, um deutlich zu machen, *auf* welchen Körper eine Kraft wirkt und *von* welchem Körper sie ausgeübt wird.

Beispiel 4.5 · Begriffsbildung

Anwendung des zweiten und dritten Newton'schen Axioms bei einem Zusammenstoß

Ein schwerer Lastwagen kollidiert frontal mit einem kleinen Sportwagen. Welches Fahrzeug erfährt die größere Aufprallkraft? Welches Fahrzeug erfährt die größere Beschleunigung? Welches Newton'sche Axiom ist nützlich, um die richtige Antwort zu erhalten?

Lösung

Die Aufprallkraft, die der Lkw und der Sportwagen erfahren, hat denselben Betrag (drittes Newton'sches Axiom). Das Auto erfährt beim Anhalten eine wesentlich größere Beschleunigung als der Lkw, da die Masse des Sportwagens sehr viel geringer ist (zweites Newton'sches Axiom).

4.6 Gewicht – Die Gravitationskraft

Galileo Galilei behauptete, dass Körper, die in der Nähe der Erdoberfläche frei fallen, alle mit derselben Beschleunigung **g** fallen, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann. Die Kraft, die diese Beschleunigung verursacht, wird Gravitationskraft genannt. Wir wenden jetzt das zweite Newton'sche Axiom auf die Gravitationskraft an und für die Beschleunigung **a** verwenden wir die nach unten gerichtete Fallbeschleunigung **g**. Somit kann die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$, deren Betrag normalerweise als ihr **Gewicht** bezeichnet wird, geschrieben werden als

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}\,. \tag{4.3}$$

Gewicht = Gravitationskraft

Diese Kraft ist nach unten auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet. Wenn die y-Achse eines Koordinatensystems aufwärts gerichtet ist, können wir $\mathbf{F}_G = -mg\mathbf{j}$ schreiben. $\mathbf{j}$ ist der Einheitsvektor parallel zur positiven y-Richtung.

In SI-Einheiten gilt $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2} = 9{,}80\,\mathrm{N/kg}$*, so dass das Gewicht einer Masse von 1,00 kg auf der Erde $1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}80\,\mathrm{m/s^2} = 9{,}80\,\mathrm{N}$ beträgt. Wir werden uns hauptsächlich mit dem Gewicht von Körpern auf der Erde beschäftigen, aber wir nehmen zur Kenntnis, dass das Gewicht einer gegebenen Masse auf dem Mond, auf anderen Planeten oder im Weltraum unterschiedlich ist. Auf dem Mond beträgt die Fallbeschleunigung z. B. ungefähr ein Sechstel der Fallbeschleunigung auf der Erde und eine Masse von 1,0 kg nur 1,7 N.

Die Gravitationskraft wirkt auf einen Körper, wenn er frei fällt. Wenn sich ein Körper auf der Erde in der Ruhelage befindet, verschwindet die auf ihn wirkende Gravitationskraft nicht. Dies ist zu erkennen, wenn man den Körper auf einer Federwaage wiegt. Dieselbe Kraft, die durch die Gleichung 4.3 gegeben ist, wirkt weiter. Warum bewegt sich der Körper dann nicht? Aus dem zweiten Newton'schen Axiom wissen wir, dass die Nettokraft, die auf einen Körper wirkt, der sich im Stillstand befindet, null ist. Es muss eine andere Kraft auf den Körper wirken, um die Gravitationskraft auszugleichen. Bei einem Körper, der auf einem Tisch ruht, übt der Tisch diese aufwärts gerichtete Kraft aus, siehe ► Abbildung 4.15. Der Tisch wird unter dem Körper leicht zusammengedrückt und auf Grund seiner Elastizität drückt er, wie dargestellt, nach oben auf den Körper. Die vom Tisch ausgeübte Kraft wird häufig als **Kontaktkraft** bezeichnet, da sie auftritt, wenn zwei Körper sich miteinander in Kontakt befinden. (Die Kraft Ihrer Hand, die einen Einkaufswagen schiebt, ist auch eine Kontaktkraft.) Wenn eine Kontaktkraft *senkrecht* zur normalen Auflagefläche wirkt, wird sie als **Normalkraft** bezeichnet („normal" bedeutet senkrecht). Wir bezeichnen sie mit $\mathbf{F}_N$.

Die beiden in ► Abbildung 4.15a dargestellten Kräfte wirken beide auf die Statue, die in der Ruhelage bleibt. Daher muss die Vektorsumme dieser beiden Kräfte null sein (das zweite Newton'sche Axiom: wenn $\mathbf{a} = 0$, dann ist $\sum \mathbf{F} = 0$). Folglich müssen $\mathbf{F}_G$ und $\mathbf{F}_N$ denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen haben. Sie sind aber *nicht* die gleich großen und entgegengerichteten Kräfte, von denen im dritten Newton'schen Axiom die Rede ist. Die Kräfte und Gegenkräfte im dritten Newton'schen Axiom wirken auf *verschiedene Körper*, die beiden in ► Abbildung 4.15a dargestellten Kräfte dagegen auf *denselben* Körper. Für jede der in ► Abbildung 4.15a dargestellten Kräfte können wir fragen: „Welche Gegenkraft ist vorhanden?" Die nach oben gerichtete Kraft $\mathbf{F}_N$ wird vom Tisch auf die Statue ausgeübt. Die Gegenkraft zu dieser Kraft ist eine von der Statue auf den Tisch ausgeübte Kraft. Sie ist in ► Abbildung 4.15b dargestellt, in der sie mit $\mathbf{F}'_N$ bezeichnet ist. Nach dem dritten Newton'schen Axiom ist diese von der Statue auf den Tisch ausgeübte Kraft $\mathbf{F}'_N$ die Gegenkraft zu $\mathbf{F}_N$. Was ist mit der anderen Kraft, die auf die Statue wirkt, der Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$? Können Sie sich vorstellen, welche Gegenkraft diese Kraft hat? (Wir werden in Kapitel 6 sehen, dass die Gegenkraft auch eine Gravitationskraft ist, die von der Statue auf die Erde ausgeübt wird und als im Erdmittelpunkt wirkend betrachtet werden kann.)

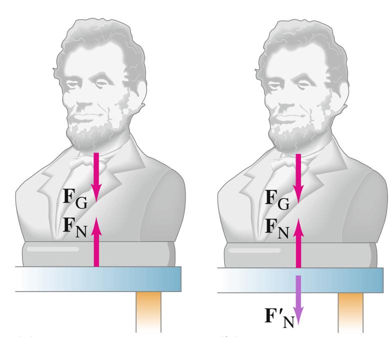


Abbildung 4.15 (a) Gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Nettokraft, die auf einen ruhenden Körper wirkt, null. Deshalb muss die nach unten gerichtete Gravitationskraft ($\mathbf{F}_G$), die auf einen Körper wirkt, durch eine nach oben gerichtete Kraft (die Normalkraft $\mathbf{F}_N$), die in diesem Fall von dem Tisch ausgeübt wird, ausgeglichen werden. (b) Gemäß dem dritten Newton'schen Axiom ist $\mathbf{F}'_N$ die von der Statue auf den Tisch ausgeübte Kraft und die Gegenkraft zu $\mathbf{F}_N$. ($\mathbf{F}'_N$ ist in einer anderen Farbe dargestellt, um zu verdeutlichen, dass sie auf einen anderen Körper wirkt.) Es gilt: $\mathbf{F}_N = -\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}'_N$.

* Da $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$ (Abschnitt 4.4), ist $1\,\mathrm{m/s^2} = 1\,\mathrm{N/kg}$.

Beispiel 4.6 Gewicht und Normalkraft

Ein Freund hat Ihnen ein besonderes Geschenk gemacht, eine Kiste mit einer Masse von 10,0 kg und einer geheimen Überraschung darin. Es ist eine Belohnung für Ihr gutes Abschneiden in der Abschlussprüfung in Physik. Die Kiste steht auf der glatten (reibungsfreien) horizontalen Fläche eines Tisches, ► Abbildung 4.16. (a) Bestimmen Sie das Gewicht der Kiste und die auf sie wirkende Normalkraft. (b) Jetzt drückt Ihr Freund die Kiste mit einer Kraft von 40,0 N, wie in ► Abbildung 4.16b dargestellt, nach unten. Bestimmen Sie wieder die Normalkraft, die auf die Kiste wirkt. (c) Wie groß ist die auf die Kiste wirkende Normalkraft, wenn Ihr Freund die Kiste mit einer Kraft von 40,0 N (► Abbildung 4.16c) nach oben zieht?

Lösung

a Die Kiste ruht auf dem Tisch. Das Gewicht der Kiste beträgt $mg = (10{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2}) = 98{,}0\,\mathrm{N}$ und diese Kraft ist nach unten gerichtet. Die einzige andere Kraft, die auf die Kiste einwirkt, ist die Normalkraft, die von dem Tisch auf die Kiste nach oben ausgeübt wird, wie in ► Abbildung 4.16a dargestellt. Wir wählen die Aufwärtsrichtung als positive y-Richtung. Dann beträgt die Nettokraft $\sum F_y$, die auf die Kiste einwirkt, $\sum F_y = F_\mathrm{N} - mg$. Da sich die Kiste in der Ruhelage befindet, muss die auf sie wirkende Nettokraft null sein ($\sum F_y = ma_y$ und $a_y = 0$). Somit gilt

$$\sum F_y = F_\mathrm{N} - mg = 0\,,$$

das bedeutet, dass

$$F_\mathrm{N} = mg$$

ist.

Die von dem Tisch auf die Kiste ausgeübte Normalkraft beträgt 98,0 N und ist nach oben gerichtet. Ihr Betrag ist mit dem Gewicht der Kiste identisch.

b Ihr Freund drückt die Kiste mit einer Kraft von 40,0 N nach unten. Wie in ► Abbildung 4.16b dargestellt, gibt es jetzt drei Kräfte, die auf die Kiste wirken. Das Gewicht der Kiste beträgt immer noch $mg = 98{,}0\,\mathrm{N}$. Die Nettokraft beträgt $\sum F_y = F_\mathrm{N} - mg - 40{,}0\,\mathrm{N}$ und ist gleich null, da die Kiste in der Ruhelage bleibt. Da $a = 0$, ergibt sich nach dem zweiten Newton'schen Axiom

$$\sum F_y = F_\mathrm{N} - mg - 40{,}0\,\mathrm{N} = 0\,.$$

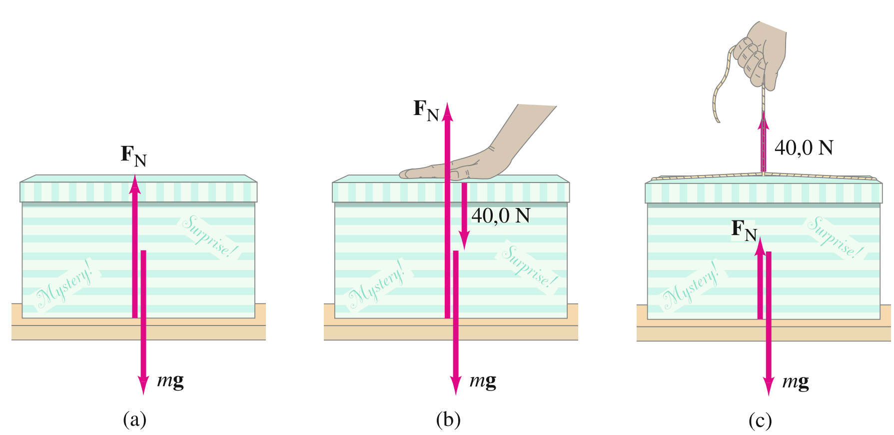


Abbildung 4.16 Beispiel 4.6. (a) Eine Geschenkkiste (Masse 10,0 kg) ruht auf einem Tisch. (b) Eine Person drückt die Kiste mit einer Kraft von 40,0 N nach unten. (c) Eine Person zieht die Kiste mit einer Kraft von 40,0 N nach oben. Die Kräfte wirken alle entlang einer Geraden. Sie sind leicht versetzt dargestellt, damit sie in der Zeichnung zu unterscheiden sind. Es sind nur die Kräfte dargestellt, die auf die Kiste wirken.

Folglich beträgt die Normalkraft jetzt

$$F_N = mg + 40{,}0\,\text{N} = 98{,}0\,\text{N} + 40{,}0\,\text{N} = 138{,}0\,\text{N}\,.$$

Diese Kraft ist größer als in (a). Der Tisch drückt also mit mehr Kraft zurück.

Der Betrag der Normalkraft ist nicht immer gleich dem Gewicht

c Das Gewicht der Kiste beträgt immer noch 98,0 N und ist nach unten gerichtet. Die von Ihrem Freund ausgeübte Kraft und die Normalkraft sind beide nach oben gerichtet (in positiver Richtung), wie in ► Abbildung 4.16c dargestellt. Die Kiste bewegt sich nicht, da die aufwärts gerichtete Kraft Ihres Freundes kleiner ist als das Gewicht. Die Nettokraft ist wieder auf null gesetzt und beträgt

$$\sum F_y = F_N - mg + 40{,}0\,\text{N} = 0\,.$$

Das bedeutet, dass

$$F_N = mg - 40{,}0\,\text{N} = 98{,}0\,\text{N} - 40{,}0\,\text{N} = 58{,}0\,\text{N}$$

ist.

Diese Kraft ist kleiner als in (a). Der Tisch drückt also mit weniger Kraft zurück.

Beispiel 4.7 Beschleunigung einer Kiste

Was geschieht, wenn eine Person die Kiste in Beispiel 4.6 mit einer Kraft nach oben zieht, die gleich dem oder größer als das Gewicht der Kiste ist, z. B. $F_P = 100{,}0\,\text{N}$ anstatt der 40,0 N, die in ► Abbildung 4.16c dargestellt sind?

Lösung

Die Nettokraft beträgt jetzt

$$\sum F_y = F_N - mg + F_P = F_N - 98{,}0\,\text{N} + 100{,}0\,\text{N}\,.$$

Wenn wir dies gleich null setzen würden, würden wir $F_N = -2{,}0\,\text{N}$ erhalten. Das ist Unsinn, da das Minuszeichen bedeutet, dass F_N nach unten gerichtet ist. Der Tisch kann aber sicher nicht die Kiste nach unten ziehen (es sei denn, es befindet sich Klebstoff auf dem Tisch). F_N kann allenfalls null sein, wie in diesem Fall. Was wirklich geschieht hier, ist klar: die Kiste beschleunigt in Aufwärtsrichtung, da die Nettokraft ungleich null ist. Sie beträgt

$$\sum F_y = F_P - mg = 100{,}0\,\text{N} - 98{,}0\,\text{N} = 2{,}0\,\text{N}$$

und ist nach oben gerichtet. Siehe ► Abbildung 4.17. Das bedeutet, dass sich die Kiste mit einer Beschleunigung mit einem Betrag von

$$a_y = \sum F_y/m = 2{,}0\,\text{N}/10{,}0\,\text{kg} = 0{,}20\,\text{m/s}^2$$

nach oben bewegt.

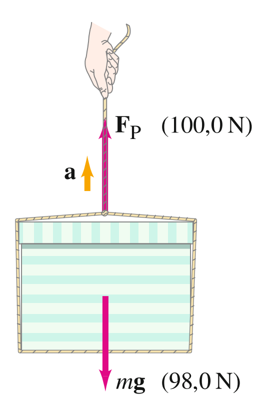


Abbildung 4.17 Beispiel 4.7. Die Kiste beschleunigt nach oben, da $F_P > mg$.

Beispiel 4.8 Ungewollter Gewichtsverlust?

Eine Frau (Masse 65 kg) fährt in einem Aufzug nach unten. Dieser Aufzug beschleunigt beim Verlassen eines Stockwerkes kurz mit 0,20 g. (a) Wie groß

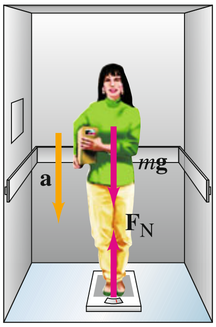


Abbildung 4.18 Beispiel 4.8.

ist das Gewicht der Frau und was zeigt die Waage an, wenn sie während dieser Beschleunigung auf einer Waage steht? (b) Was zeigt die Waage an, wenn der Aufzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,0 m/s nach unten fährt?

Lösung

a ▶ Abbildung 4.18 zeigt alle Kräfte (und nur die Kräfte), die auf die Frau wirken. Die Beschleunigung ist nach unten gerichtet. Diese Richtung nehmen wir als positive Richtung. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom gilt

$$\sum F = ma$$
$$mg - F_N = 0{,}20\,mg$$
$$F_N = mg - 0{,}20\,mg = 0{,}80\,mg\,.$$

Die Normalkraft $\mathbf{F}_N$ ist die Kraft, die die Waage auf die Person ausübt. Sie ist identisch mit der Kraft, die die Person auf die Waage ausübt, und dieser Kraft entgegengerichtet, $\mathbf{F}'_N = -0{,}80\,m\mathbf{g}$. Das Gewicht der Person (die auf sie wirkende Gravitationskraft) beträgt immer noch $mg = (65\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 640$ N. Aber die Waage, die nur eine Kraft von $0{,}80\,mg$ ausüben muss, zeigt ihre Masse als $0{,}80\,m = 52$ kg an.

b Jetzt gibt es keine Beschleunigung, d. h. $a = 0$. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist $mg - F_N = 0$ und $F_N = mg$. Die Waage zeigt ihre richtige Masse von 65 kg an.

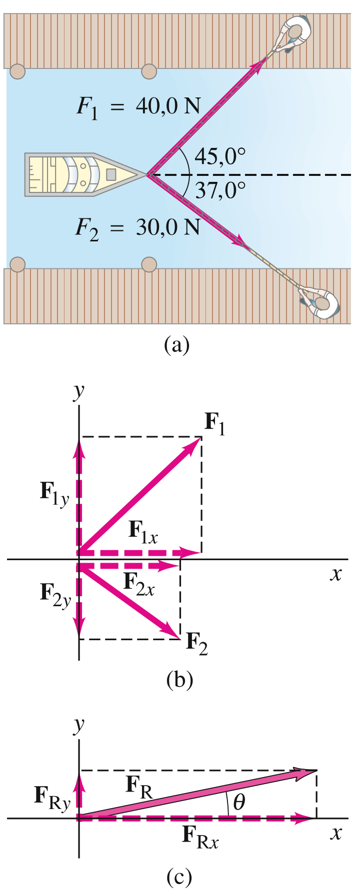


Abbildung 4.20 Zwei Kraftvektoren wirken auf ein Boot (Beispiel 4.9).

4.7 Das Lösen von Aufgaben mit den Newton'schen Axiomen: Kräfteparallelogramme

Das zweite Newton'sche Axiom besagt, dass die Beschleunigung eines Körpers proportional zu der auf den Körper wirkenden *Nettokraft* ist. Die bereits zuvor erwähnte **Nettokraft** ist die *Vektorsumme* aller auf den Körper wirkenden Kräfte. In der Tat haben umfangreiche Experimente gezeigt, dass sich Kräfte als Vektoren genau nach den in Kapitel 3 aufgezeigten Regeln addieren. ▶ Abbildung 4.19: zeigt z. B. zwei Kräfte mit demselben Betrag (jeweils 100 N), die im rechten Winkel zueinander auf einen Körper einwirken. Intuitiv können wir erkennen, dass der Körper sich in einem Winkel von 45° bewegen wird und die Nettokraft daher in einem Winkel von 45° wirkt. Genau das besagen die Regeln der Vektoraddition. Nach dem Satz des Pythagoras ist der Betrag der resultierenden Kraft $F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (100\text{ N})^2} = 141$ N.

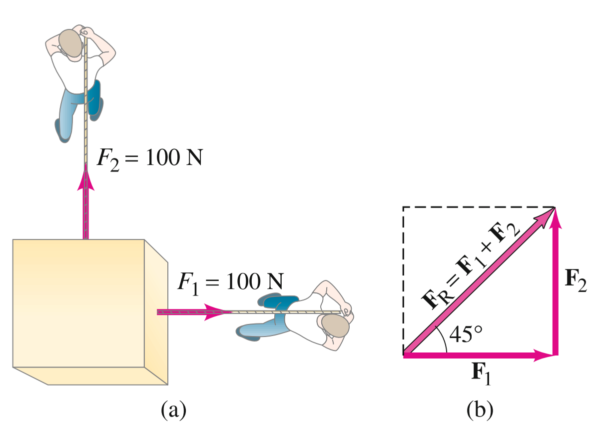


Abbildung 4.19 (a) Zwei Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ wirken auf einen Körper. (b) Die Summe oder Resultierende von $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ ist $\mathbf{F}_R$.

Beispiel 4.9 Addition von Kraftvektoren

Berechnen Sie die Summe der beiden auf das Boot wirkenden Kräfte, die in ▸ Abbildung 4.20a dargestellt sind.

Lösung

Diese beiden Kräfte sind in ▸ Abbildung 4.20b zerlegt dargestellt. Wir addieren die Kräfte mithilfe der Komponentenmethode. Die Komponenten von $\mathbf{F}_1$ sind

$$F_{1x} = F_1 \cos 45{,}0^\circ = (40{,}0\,\text{N})(0{,}707) = 28{,}3\,\text{N}\,,$$
$$F_{1y} = F_1 \sin 45{,}0^\circ = (40{,}0\,\text{N})(0{,}707) = 28{,}3\,\text{N}\,.$$

Die Komponenten von $\mathbf{F}_2$ sind

$$F_{2x} = +F_2 \cos 37{,}0^\circ = +(30{,}0\,\text{N})(0{,}799) = +24{,}0\,\text{N}\,,$$
$$F_{2y} = -F_2 \sin 37{,}0^\circ = -(30{,}0\,\text{N})(0{,}602) = -18{,}1\,\text{N}\,.$$

F_{2y} ist negativ, da sie entlang der negativen y-Achse verläuft. Die Komponenten der resultierenden Kraft sind (siehe ▸ Abbildung 4.20c)

$$F_{\text{R}_x} = F_{1x} + F_{2x} = 28{,}3\,\text{N} + 24{,}0\,\text{N} = 52{,}3\,\text{N}\,,$$
$$F_{\text{R}_y} = F_{1y} + F_{2y} = 28{,}3\,\text{N} - 18{,}1\,\text{N} = 10{,}2\,\text{N}\,.$$

Um den Betrag der resultierenden Kraft zu ermitteln, wenden wir den Satz des Pythagoras an:

$$F_\text{R} = \sqrt{F_{\text{R}x}^2 + F_{\text{R}y}^2} = \sqrt{(52{,}3)^2 + (10{,}2)^2} = 53{,}3\,\text{N}\,.$$

Die einzige verbleibende Frage ist, welchen Winkel θ die Nettokraft $\mathbf{F}_\text{R}$ mit der x-Achse bildet. Wir wenden Folgendes an:

$$\tan\theta = \frac{F_{\text{R}y}}{F_{\text{R}x}} = \frac{10{,}2\,\text{N}}{52{,}3\,\text{N}} = 0{,}195\,,$$

und $\tan^{-1}(0{,}195) = 11{,}0^\circ$.

Bei der Lösung von Aufgaben, die die Newton'schen Axiome und die Kraft betreffen, ist es sehr wichtig, eine Zeichnung anzufertigen, in der alle Kräfte, die *auf jeden* Körper wirken, dargestellt sind. Eine solche Zeichnung nennt man **Kräfteparallelogramm**: Zeichnen Sie einen Pfeil zur Darstellung jeder einzelnen Kraft, die auf einen gegebenen Körper wirkt, und stellen Sie sicher, dass *alle* Kräfte, die auf diesen Körper wirken, darin enthalten sind. Kräfte, die der Körper auf *andere* Körper ausübt, stellen Sie nicht dar. Wenn es sich nur um eine Translationsbewegung handelt, können alle auf einen gegebenen Körper einwirkenden Kräfte so gezeichnet werden, als ob sie im Mittelpunkt des Körpers wirken, d. h. der Körper wird wie ein Massenpunkt behandelt. Bei Aufgaben, in denen Drehungen oder Drehmomente eine Rolle spielen, ist jedoch auch der Ort, *wo* jede einzelne Kraft wirkt, von Bedeutung, wie wir sehen werden.

Beispiel 4.10 · Begriffsbildung Der Hockeypuck

Ein Hockeypuck gleitet mit konstanter Geschwindigkeit über eine flache horizontale Eisfläche. Man nimmt an, dass die Fläche reibungsfrei ist. Welche der

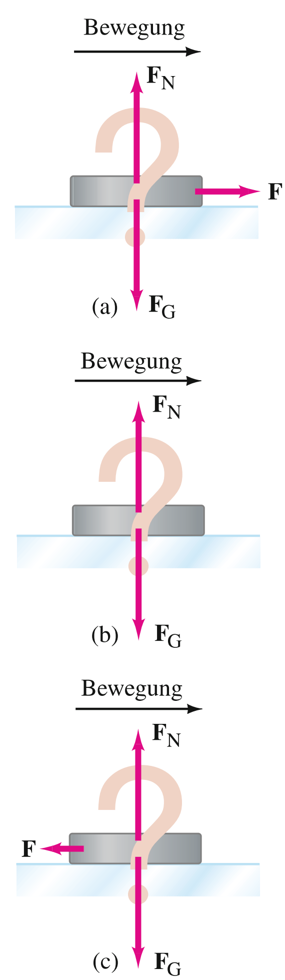


Abbildung 4.21 Welches der Kräfteparallelogramme ist das richtige für einen Hockeypuck, der über eine reibungsfreie Eisfläche gleitet (Beispiel 4.10)?

Skizzen in ▶ Abbildung 4.21 ist das korrekte Kräfteparallelogramm für diesen Puck? Wie würde Ihre Antwort lauten, wenn der Puck langsamer würde?

Lösung

Haben Sie (a) gewählt? Wenn ja, können Sie die Frage beantworten, wer oder was die horizontale Kraft mit der Bezeichnung **F** ausübt? Wenn Sie antworten, dass dies die Kraft ist, die benötigt wird, um die Bewegung aufrechtzuerhalten (wie die alten Griechen meinten), dann fragen Sie sich, wer oder was diese Kraft ausübt? Rufen Sie sich in Erinnerung, dass ein anderer Körper irgendeine Kraft ausüben muss – und hier gibt es ja nur den Puck und die Unterlage (Eisfläche), die beide diese Kraft nicht ausüben. Deshalb ist (a) falsch. Außerdem würde die Kraft **F** in ▶ Abbildung 4.21a nach dem zweiten Newton'schen Axiom eine Beschleunigung verursachen. (b) ist die richtige Antwort, solange es keine Reibung gibt. Es wirkt keine Nettokraft auf den Puck ein und der Puck gleitet mit konstanter Geschwindigkeit über das Eis.

Sollte jemand darauf bestehen, dass wir uns aus unserer idealisierten, reibungsfreien Welt in die reale Welt begeben, in der selbst glattes Eis zumindest eine sehr kleine Reibungskraft ausübt, dann wäre (c) die richtige Antwort. Die sehr kleine Reibungskraft ist der Bewegung entgegengerichtet (sie müsste mit $\mathbf{F}_R$, nicht einfach mit **F** bezeichnet werden) und verringert die Geschwindigkeit des Pucks, wenn auch sehr langsam.

Hier jetzt eine kurze Zusammenfassung über die Herangehensweise bei Aufgaben, in denen die Newton'schen Axiome angewendet werden:

Problemlösung

Die Newton'schen Axiome und Kräfteparallelogramme

1. Fertigen Sie eine Skizze von der Aufgabenstellung an.

2. Betrachten Sie jeweils nur einen Körper und zeichnen Sie für diesen Körper ein **Kräfteparallelogramm**, in dem *alle* Kräfte, die *auf diesen Körper* wirken, dargestellt sind, einschließlich aller unbekannten Kräfte, die Sie ermitteln sollen. Kräfte, die der Körper auf andere Körper ausübt, stellen Sie nicht dar. Zeichnen Sie für jeden Kraftvektor den Vektorpfeil zur Darstellung von Richtung und Betrag genau ein. Benennen Sie jede Kraft, einschließlich der Kräfte, die Sie ermitteln sollen, nach ihrem Ursprung (anderer Körper, Gravitation, Normalkraft, Reibung etc.). Wenn mehrere Körper betroffen sind, zeichnen Sie für jeden Körper ein *eigenes* Kräfteparallelogramm, in dem *alle* Kräfte (und *nur* die Kräfte), die *auf diesen Körper* wirken, dargestellt sind. Für jede einzelne Kraft müssen Sie sich über folgendes im Klaren sein: *auf* welchen Körper wirkt diese Kraft und *von* welchem Körper wird diese Kraft ausgeübt. Nur für Kräfte, die *auf* einen Körper wirken, gilt $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ für diesen Körper.

3. Das zweite Newton'sche Axiom enthält Vektoren und normalerweise ist es wichtig, Vektoren in ihre Komponenten zu zerlegen. Wählen Sie eine x- und y-Achse so, dass die Berechnung vereinfacht wird.

4. Für jeden Körper kann das zweite Newton'sche Axiom jeweils getrennt für die x- und y-Komponenten angewendet werden. Das bedeutet, dass die x-Komponente der auf einen Körper wirkenden Nettokraft zu der x-Komponente der Beschleunigung dieses Körpers in Beziehung gesetzt wird: $\sum \mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$. Gleiches gilt für die y-Richtung.

5. Lösen Sie die Gleichung bzw. Gleichungen nach der/n unbekannten Größe/n auf.

Dieser Kasten zur Problemlösung sollte nicht als Vorschrift angesehen werden. Er ist vielmehr eine Zusammenstellung von vorbereitenden Tätigkeiten, damit Sie den Einstieg in die Aufgabenstellung leichter finden.

In den folgenden Beispielen nehmen wir an, dass alle Flächen sehr glatt sind, so dass die Reibung vernachlässigt werden kann. (Reibung und damit zusammenhängende Beispiele werden im nächsten Kapitel erörtert.)

Beispiel 4.11 Ziehen der geheimnisvollen Kiste

Nehmen wir an, eine Freundin bittet Sie, die Kiste (Masse 10,0 kg), die Sie bekommen haben (Beispiel 4.6, ▸ Abbildung 4.16), zu untersuchen in der Hoffnung, den Inhalt zu erraten. Sie antworten: „Klar, zieh die Kiste zu Dir rüber." Sie zieht die Kiste daraufhin an dem daran befestigten Band (bzw. an der daran befestigten Schnur) über die glatte Fläche des Tisches, wie in ▸ Abbildung 4.22a dargestellt. Der Betrag der Kraft ist $F_P = 40{,}0\,\mathrm{N}$. Sie wird, wie dargestellt, in einem Winkel von 30,0° ausgeübt. Berechnen Sie (a) die Beschleunigung der Kiste und (b) den Betrag der von dem Tisch auf die Kiste ausgeübten, aufwärts gerichteten Kraft F_N. Nehmen Sie an, dass die Reibung vernachlässigt werden kann.

Lösung

▸ Abbildung 4.22b zeigt das Kräfteparallelogramm der Kiste. Das bedeutet, dass wir *alle* Kräfte darstellen, die auf die Kiste einwirken, und *nur* diese Kräfte. Dies sind: die Gravitationskraft $m\mathbf{g}$, die von dem Tisch ausgeübte Normalkraft $\mathbf{F}_N$ und die von der Person ausgeübte Kraft $\mathbf{F}_P$. Wir sind nur an Translationsbewegungen interessiert, daher können wir die drei Kräfte darstellen, als würden sie auf einen Massenpunkt einwirken, siehe ▸ Abbildung 4.22c. Mit der y-Achse in vertikaler und der x-Achse in horizontaler Richtung hat die Zugkraft von 40,0 N folgende Komponenten:

$$F_{P_x} = (40{,}0\,\mathrm{N})(\cos 30{,}0°) = (40{,}0\,\mathrm{N})(0{,}866) = 34{,}6\,\mathrm{N}\,,$$
$$F_{P_y} = (40{,}0\,\mathrm{N})(\sin 30{,}0°) = (40{,}0\,\mathrm{N})(0{,}500) = 20{,}0\,\mathrm{N}\,.$$

a In der horizontalen (x) Richtung haben $\mathbf{F}_N$ und $m\mathbf{g}$ Nullkomponenten. Somit ist die horizontale Komponente der Nettokraft F_{P_x}. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom $\sum F_x = ma_x$ ist

$$F_{P_x} = ma_x\,,$$

so dass gilt

$$a_x = \frac{F_{P_x}}{m} = \left(\frac{34{,}6\,\mathrm{N}}{10{,}0\,\mathrm{kg}}\right) = 3{,}46\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Die Beschleunigung der Kiste beträgt folglich $3{,}46\,\mathrm{m/s^2}$ nach rechts.

b Bei der Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms auch auf die vertikale (y) Richtung, bei der wir die Aufwärtsrichtung als positiv annehmen, ist

$$\sum F_y = ma_y$$
$$F_N - mg + F_{P_y} = ma_y\,.$$

Nun ist, wie wir oben berechnet haben, $mg = (10{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2}) = 98{,}0\,\mathrm{N}$ und $F_{P_y} = 20{,}0\,\mathrm{N}$. Da außerdem $F_{P_y} < mg$, bewegt sich die Kiste vertikal nicht, so dass $a_y = 0$ ist. Folglich gilt

$$F_N - 98{,}0\,\mathrm{N} + 20{,}0\,\mathrm{N} = 0\,.$$

Dies sagt uns, dass die Normalkraft

$$F_N = 78{,}0\,\mathrm{N}$$

beträgt.

Beachten Sie, dass F_N kleiner als mg ist. Der Tisch drückt nicht gegen das volle Gewicht der Kiste, da ein Teil des durch die Person ausgeübten Zuges in Aufwärtsrichtung erfolgt. Vergleichen Sie dies mit Beispiel 4.6, Teil (c).

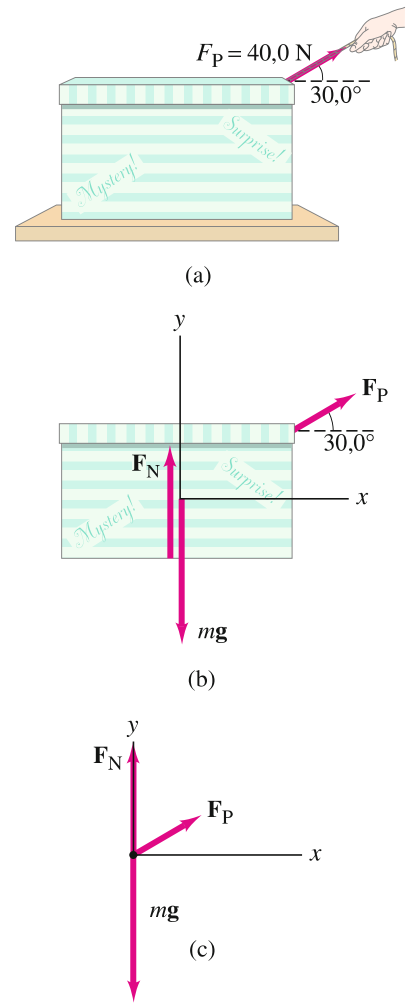


Abbildung 4.22 (a) Ziehen einer Kiste, Beispiel 4.11; (b) ist das Kräfteparallelogramm für die Kiste und (c) ist das Kräfteparallelogramm mit allen Kräften, die in einem Punkt wirken (funktioniert nur bei einer Translationsbewegung, die hier vorliegt).

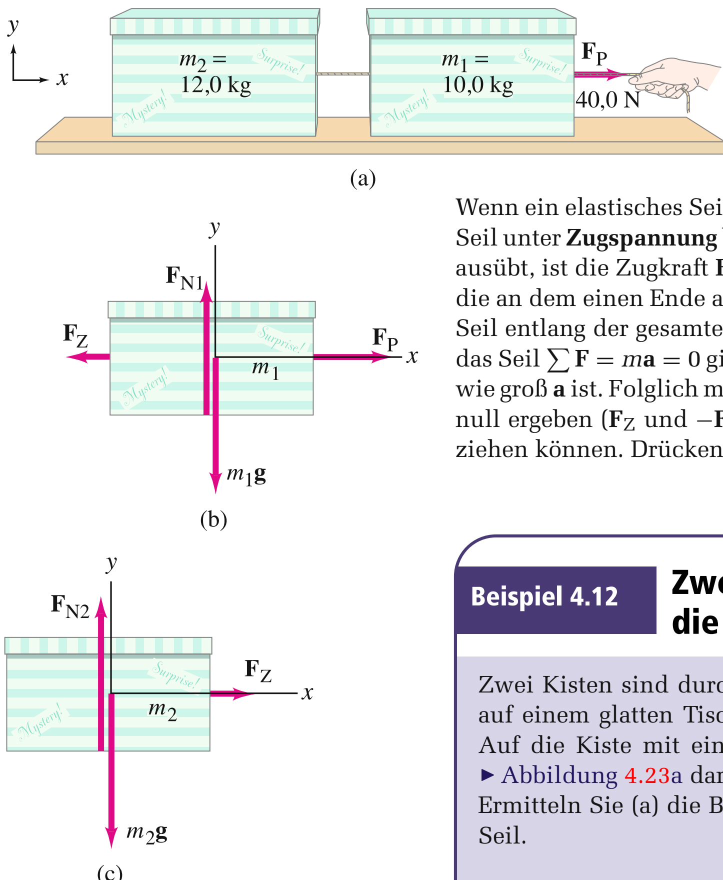


Abbildung 4.23 Beispiel 4.12; (a) Zwei Kisten sind durch ein Seil verbunden, Eine Person zieht horizontal mit der Kraft $\mathbf{F}_P = 40{,}0\,\text{N}$ an Kiste 1. (b) Kräfteparallelogramm für Kiste 1. (c) Kräfteparallelogramm für Kiste 2.

Wenn ein elastisches Seil an einem Körper zieht, spricht man davon, dass sich das Seil unter **Zugspannung** befindet. Die Kraft, die diese Zugspannung auf den Körper ausübt, ist die Zugkraft $\mathbf{F}_Z$. Wenn das Seil eine vernachlässigbare Masse hat, wird die an dem einen Ende ausgeübte Kraft unvermindert an jedes angrenzende Stück Seil entlang der gesamten Länge zum anderen Ende übertragen. Warum? Weil für das Seil $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0$ gilt, wenn m null (vernachlässigbar) ist, unabhängig davon, wie groß $\mathbf{a}$ ist. Folglich müssen die an den beiden Enden des Seils ziehenden Kräfte null ergeben ($\mathbf{F}_Z$ und $-\mathbf{F}_Z$). Beachten Sie, dass elastische Seile oder Schnüre nur ziehen können. Drücken können sie nicht, da sie nachgeben.

Zugkraft in einem Seil

T Seilkräfte

Beispiel 4.12 Zwei Kisten, die durch ein Seil verbunden sind

Zwei Kisten sind durch ein leichtes Seil miteinander verbunden und ruhen auf einem glatten Tisch. Die Kisten haben Massen von 12,0 kg und 10,0 kg. Auf die Kiste mit einer Masse von 10,0 kg wird von einer Person, wie in ► Abbildung 4.23a dargestellt, eine horizontale Kraft F_P von 40,0 N ausgeübt. Ermitteln Sie (a) die Beschleunigung jeder Kiste und (b) die Zugkraft in dem Seil.

Lösung

a Die jeweiligen Kräfteparallelogramme für jede der Kisten sind in ► Abbildung 4.23b und c dargestellt. Wir betrachten jede Kiste für sich, so dass das zweite Newton'sche Axiom auf jede Kiste angewendet werden kann. Das Seil ist leicht, deshalb vernachlässigen wir seine Masse im Vergleich zur Masse der Kisten. Die Kraft F_P wirkt auf Kiste 1. Kiste 1 übt eine Kraft F_Z auf das Verbindungsseil aus und das Seil übt eine entgegengerichtete Kraft F_Z mit demselben Betrag auf Kiste 1 aus (drittes Newton'sches Axiom). Diese auf Kiste 1 einwirkenden Kräfte sind in ► Abbildung 4.23b dargestellt. Da das Seil als masselos angenommen wird, ist die Zugkraft an jedem Ende identisch, wie wir oben gesehen haben. Folglich übt das Seil eine Kraft F_Z auf die zweite Kiste aus. ► Abbildung 4.23c zeigt die auf Kiste 2 wirkenden Kräfte. Es gibt nur eine horizontale Bewegung. Wir nehmen die positive x-Achse nach rechts an und verwenden die tiefgestellten Indizes 1 und 2 für die beiden Kisten. Wenn wir $\sum F_x = ma_x$ auf Kiste 1 anwenden, ergibt sich

$$\sum F_x = F_P - F_Z = m_1 a_1 \,. \qquad \text{(Kiste 1)}$$

Bei Kiste 2 ist die einzige horizontale Kraft F_Z, so dass gilt

$$\sum F_x = F_Z = m_2 a_2 \,. \qquad \text{(Kiste 2)}$$

Die beiden Kisten sind verbunden und wenn das Seil gespannt bleibt und sich nicht dehnt, haben die beiden Kisten dieselbe Beschleunigung a. Somit ist $a_1 = a_2 = a$ und wir erhalten $m_1 = 10{,}0\,\text{kg}$ und $m_2 = 12{,}0\,\text{kg}$. Wir addieren die beiden obigen Gleichungen und es ergibt sich

$$(m_1 + m_2)a = F_P - F_Z + F_Z = F_P$$

oder

$$a = \frac{F_P}{m_1 + m_2} = \frac{40{,}0\,\mathrm{N}}{22{,}0\,\mathrm{kg}} = 1{,}82\,\mathrm{m/s^2}\ .$$

Danach haben wir gesucht. Beachten Sie, dass wir dasselbe Ergebnis erhalten hätten, wenn wir nur ein einziges System mit der Masse $m_1 + m_2$ betrachtet hätten, auf das eine horizontale Nettokraft wirkt, die gleich F_P ist. (Die Zugkräfte F_Z würden in diesem Fall als in dem ganzen System befindlich betrachtet werden. Ihre Addition würde auf die auf das *ganze* System ausgeübte Nettokraft keinen Einfluss haben.)

b Aus der obigen Gleichung für Kiste 2 ($F_Z = m_2 a_2$) ergibt sich für die Zugkraft in dem Seil

$$F_Z = m_2 a = (12{,}0\,\mathrm{kg})(1{,}82\,\mathrm{m/s^2}) = 21{,}8\,\mathrm{N}\ .$$

Somit ist F_Z, wie wir erwartet haben, kleiner als F_P ($= 40{,}0\,\mathrm{N}$), da F_Z nur wirkt, um m_2 zu beschleunigen.

PROBLEMLÖSUNG
Eine alternative Lösung

Beispiel 4.13 Aufzug und Gegengewicht (Rolle mit zwei Gewichten)

ANGEWANDTE PHYSIK
Aufzug (als Rolle mit zwei Gewichten)

Zwei mithilfe eines Seils über einer Rolle aufgehängte Massen, wie in ▸ Abbildung 4.24a dargestellt, ergeben einen Aufzug (m_1) und sein Gegengewicht (m_2). Um die von einem Motor zum sicheren Heben und Senken des Aufzuges zu verrichtende Arbeit zu minimieren, haben m_1 und m_2 ähnliche Massen. Bei dieser Berechnung beziehen wir den Motor nicht in das System mit ein und nehmen an, dass die Masse des Seils vernachlässigt werden kann und dass die Masse der Rolle[3] sowie die Reibung klein und vernachlässigbar sind. Diese Voraussetzungen stellen sicher, dass die Zugkraft F_Z in dem Seil auf beiden Seiten der Rolle denselben Betrag hat. Nehmen wir die Masse des Gegengewichtes mit $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$ an. Nehmen wir außerdem an, dass die Masse des leeren Aufzuges 850 kg beträgt und seine Masse, wenn er vier Personen befördert, $m_1 = 1150\,\mathrm{kg}$ ist. Berechnen Sie für den letzteren Fall ($m_1 = 1150\,\mathrm{kg}$) (a) die Beschleunigung des Aufzuges und (b) die Zugkraft in dem Seil.

Lösung

a Die ▸ Abbildung 4.24b und c zeigen die Kräfteparallelogramme für die beiden Massen. Es ist klar, dass m_1 nach unten beschleunigt, da sie die schwerere Masse ist, und m_2 nach oben. Die Beträge ihrer Beschleunigungen sind gleich (dabei nehmen wir an, dass sich das Seil nicht dehnt). Für das Gegengewicht gilt $m_2 g = (1000\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2}) = 9800\,\mathrm{N}$, so dass F_Z größer als 9800 N sein muss (damit m_2 nach oben beschleunigt). Für den Aufzug gilt $m_1 g = (1150\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2}) = 11\,300\,\mathrm{N}$. Diese Kraft muss einen größeren Betrag als F_Z haben, damit m_1 nach unten beschleunigt. Das bedeutet, dass unsere Berechnung für F_Z einen Wert zwischen 9800 N und 11 300 N ergeben muss. Um F_Z sowie die Beschleunigung a zu ermitteln, wenden wir auf jede Masse $\sum F = ma$ an. Dabei nehmen wir für beide Massen die Aufwärtsrichtung als positive y-Richtung an. Bei dieser Achsenwahl ist $a_2 = a$ und $a_1 = -a$. Daher gilt

$$F_Z - m_1 g = m_1 a_1 = -m_1 a$$
$$F_Z - m_2 g = m_2 a_2 = +m_2 a\ .$$

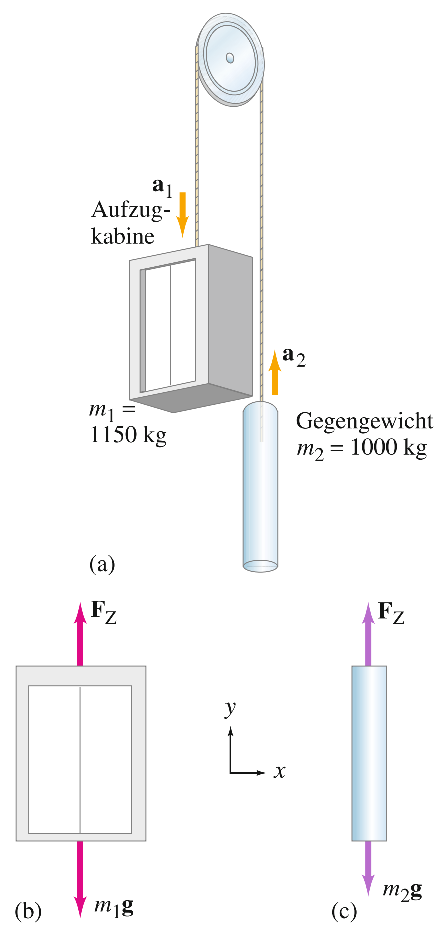


Abbildung 4.24 Beispiel 4.13. (a) Aufzug mit Gegengewicht. (b) und (c) Kräfteparallelogramme für die beiden Massen.

3 In Kapitel 10 werden wir sehen, wie eine drehende Rolle mit Masse zu behandeln ist.

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten und erhalten

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a\,.$$

Dies lösen wir nach a auf:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{1150\,\text{kg} - 1000\,\text{kg}}{1150\,\text{kg} + 1000\,\text{kg}}g = 0{,}070\,g = 0{,}68\,\text{m/s}^2\,.$$

Der Aufzug (m_1) beschleunigt mit $a = 0{,}070\,g = 0{,}68\,\text{m/s}^2$ nach unten (und das Gegengewicht m_2 nach oben).

b Die Zugkraft in dem Seil F_Z kann aus einer der beiden $\sum F = ma$-Gleichungen ermittelt werden. Dabei setzen wir $a = 0{,}070\,g = 0{,}68\,\text{m/s}^2$:

$$F_Z = m_1 g - m_1 a = m_1(g - a) = 1150\,\text{kg}\,(9{,}80\,\text{m/s}^2 - 0{,}68\,\text{m/s}^2) = 10\,500\,\text{N}\,,$$

$$F_Z = m_2 g + m_2 a = m_2(g + a) = 1000\,\text{kg}\,(9{,}80\,\text{m/s}^2 + 0{,}68\,\text{m/s}^2) = 10\,500\,\text{N}\,.$$

Diese Ergebnisse stimmen überein. Wir können unsere Gleichung für die Beschleunigung a in diesem Beispiel überprüfen, indem wir feststellen, dass, wenn die Massen gleich wären ($m_1 = m_2$), unsere obige Gleichung für a, wie erwartet, $a = 0$ ergeben würde. Und wenn eine der Massen null wäre (z. B. $m_1 = 0$), würde die andere Masse ($m_2 \neq 0$) laut unserer Gleichung mit $a = g$ beschleunigen, wiederum wie erwartet.

PROBLEMLÖSUNG

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie untersuchen, ob es in Situationen funktioniert, in denen man die Antwort leicht vermuten kann.

Beispiel 4.14 · Begriffsbildung — Kraftverstärkung durch einen Flaschenzug

Ein Umzugsunternehmer versucht, ein Klavier (langsam) in eine Wohnung im zweiten Stock zu heben (▶ Abbildung 4.25). Er verwendet ein Seil, das über zwei Rollen läuft. Dies bezeichnet man als Flaschenzug. Welche Kraft muss er auf das Seil ausüben, um das Gewicht des Klaviers von 2000 N langsam zu heben?

Lösung

Schauen Sie sich die Kräfte an, die auf die untere Rolle am Klavier wirken. Das Gewicht des Klaviers zieht nach unten. Die Zugkraft in dem Seil, das über diese Rolle läuft, zieht an jeder Seite der Rolle, also *zweimal*, nach oben. Somit ergibt das zweite Newton'sche Axiom

$$2F_Z - mg = ma\,.$$

Um das Klavier mit konstanter Geschwindigkeit ($a = 0$) zu bewegen, ist eine Zugkraft in dem Seil von $F_Z = mg/2 = 1000\,\text{N}$ erforderlich. Der Umzugsunternehmer übt eine Kraft aus, die gleich dem halben Gewicht des Klaviers ist. Wir sagen, dass die Rolle eine **mechanische Kraftverstärkung** von 2 ergeben hat, da der Umzugsunternehmer ohne die Rolle zweimal so viel Kraft hätte aufwenden müssen.

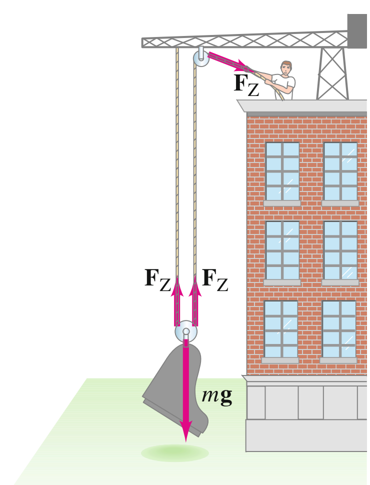


Abbildung 4.25 Beispiel 4.14.

Beispiel 4.15 — Ein Auto aus dem Schlamm ziehen

Als eine clevere Absolventin eines guten Physikkurses mit ihrem Auto im Schlamm stecken bleibt, bindet sie das eine Ende eines starken Seils an die hintere Stoßstange des Autos und das andere Ende an einen Baum, wie in ▶ Abbildung 4.26a dargestellt. Sie drückt am Mittelpunkt des Seils mit ihrer ganzen Kraft, die, so schätzt sie, einer Kraft von $F_P \approx 300\,\mathrm{N}$ entspricht. Das Auto beginnt sich zu bewegen, als das Seil einen Winkel θ bildet (siehe Abbildung), der nach ihrer Abschätzung 5° beträgt. Wie groß ist die Kraft, mit der das Seil am Auto zieht? Vernachlässigen Sie die Masse des Seils.

Lösung

Nehmen Sie zunächst zur Kenntnis, dass die Zugkraft in einem Seil immer entlang des Seils verläuft. Jede zu dem Seil senkrecht verlaufende Komponente würde dazu führen, dass das Seil durchbiegt oder nachgibt (wie es hier dort geschieht, wo $\mathbf{F}_P$ wirkt). Mit anderen Worten, ein Seil kann eine Zugkraft nur entlang seiner Länge bewirken. Nehmen wir $\mathbf{F}_{Z1}$ und $\mathbf{F}_{Z2}$ als die Kräfte an, die das Seil auf den Baum und auf das Auto ausübt, wie in ▶ Abbildung 4.26a dargestellt. Als unseren „freien Körper" wählen wir den kleinen Abschnitt des Seils, wo die Fahrerin drückt. Das Kräfteparallelogramm, das sowohl $\mathbf{F}_P$, als auch die Zugkräfte in dem Seil zeigt (beachten Sie, dass wir das dritte Newton'sche Axiom angewendet haben), ist in ▶ Abbildung 4.26b dargestellt. In dem Moment, in dem sich das Auto bewegt, ist die Beschleunigung im Grunde immer noch null, also $\mathbf{a} = 0$. Für die x-Komponente von $\sum F = m\mathbf{a} = 0$ in diesem kleinen Abschnitt des Seils gilt

$$\sum F_x = F_{Z1}\cos\theta - F_{Z2}\cos\theta = 0\,.$$

Folglich ist $F_{Z1} = F_{Z2}$ und wir können $F_Z = F_{Z1} = F_{Z2}$ schreiben. Die Kräfte, die in der y-Richtung wirken, sind $\mathbf{F}_P$ und die Komponenten von $\mathbf{F}_{Z1}$ und $\mathbf{F}_{Z2}$, die in die negative y-Richtung zeigen (jeweils gleich $F_Z \sin\theta$). Das bedeutet, dass sich für die y-Komponente von $\sum F = m\mathbf{a}$ ergibt:

$$\sum F_y = F_P - 2F_Z \sin\theta = 0\,.$$

Wir lösen nach F_Z auf und setzen $F_P \approx 300\,\mathrm{N}$ ein, das gegeben war:

$$F_Z = \frac{F_P}{2\sin\theta} \approx \frac{300\,\mathrm{N}}{2\sin 5°} \approx 1700\,\mathrm{N}\,.$$

Durch diese Vorgehensweise konnte sie ihre Kraft fast um das Sechsfache vergrößern! Beachten Sie die Symmetrie der Aufgabenstellung, die garantiert, dass $F_{Z1} = F_{Z2}$ ist.

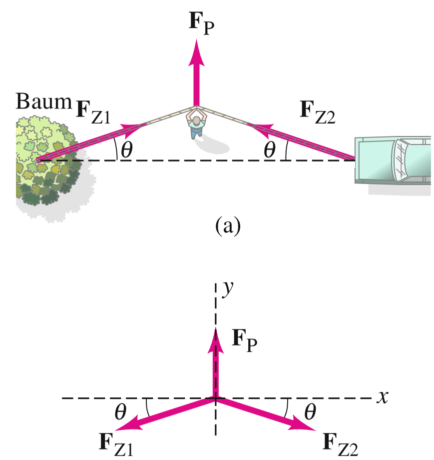


Abbildung 4.26 Beispiel 4.15. Ein Auto aus dem Schlamm ziehen.

PROBLEMLÖSUNG

Verwenden Sie jede vorhandene Symmetrie zur Vereinfachung einer Aufgabenstellung.

Beispiel 4.16 Beschleunigungsmesser

Eine kleine Masse m hängt an einem dünnen Faden und kann wie ein Pendel schwingen. Sie befestigen sie über dem Fenster in Ihrem Auto, wie in ▶ Abbildung 4.27a dargestellt. Wenn das Auto sich im Stillstand befindet, hängt der Faden senkrecht nach unten. Welchen Winkel θ bildet der Faden, wenn (a) das Auto mit konstanten $a = 1{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ beschleunigt und (b) das Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 90\,\mathrm{km/h}$ fährt?

Lösung

a ▶ Abbildung 4.27b zeigt das Pendel im Winkel θ und die Kräfte, die auf das Pendel einwirken: $m\mathbf{g}$ nach unten gerichtet und die Zugkraft $\mathbf{F}_Z$ in dem Faden. Diese Kräfte ergeben bei ihrer Addition nicht null, wenn $\theta \neq 0$, und da wir eine Beschleunigung a haben, erwarten wir, dass $\theta \neq 0$

ANGEWANDTE PHYSIK

Beschleunigungsmesser

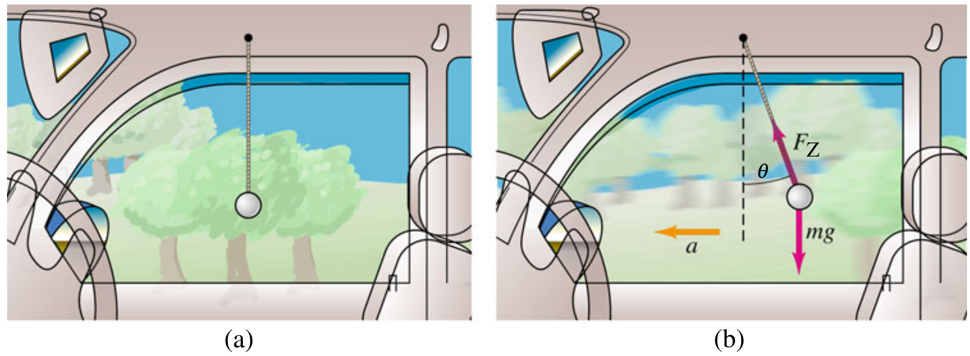


Abbildung 4.27 Beispiel 4.16.

ist. Beachten Sie, dass θ der Winkel in Bezug auf die Senkrechte ist. Die Beschleunigung $a = 1{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ verläuft in horizontaler Richtung, so dass nach dem zweiten Newton'schen Axiom für die horizontale Komponente gilt:

$$ma = F_Z \sin\theta \ .$$

Für die vertikale Komponente ergibt sich

$$0 = F_Z \cos\theta - mg \ .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$\tan\theta = \frac{F_Z \sin\theta}{F_Z \cos\theta} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

oder

$$\tan\theta = \frac{1{,}20\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}80\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}122 \ ,$$

so dass

$$\theta = 7{,}0^\circ \ .$$

b Die Geschwindigkeit ist konstant, so dass $a = 0$ und $\tan\theta = 0$. Folglich hängt das Pendel senkrecht ($\theta = 0°$). Diese einfache Vorrichtung ist ein **Beschleunigungsmesser** – sie kann zum Messen der Beschleunigung benutzt werden.

Gute Wahl des Koordinatensystems vereinfacht die Berechnung

Nun schauen wir, was geschieht, wenn ein Körper eine schiefe Ebene, wie z. B. einen Abhang oder eine Rampe, hinuntergleitet. Solche Aufgabenstellungen sind interessant, da die Gravitationskraft die beschleunigende Kraft ist, die Beschleunigung aber nicht senkrecht gerichtet ist. Das Lösen solcher Aufgaben ist normalerweise einfacher, wenn wir das xy-Koordinatensystem so wählen, dass die x-Achse entlang der schiefen Ebene verläuft und die y-Achse senkrecht zu der schiefen Ebene steht, wie in ▸ Abbildung 4.28a dargestellt. Beachten Sie auch, dass die Normalkraft nicht vertikal verläuft, sondern senkrecht zu der Ebene, ▸ Abbildung 4.28b.

Beispiel 4.17 Eine Kiste gleitet eine schiefe Ebene hinunter

Bewegung auf einer schiefen Ebene

Eine Kiste mit der Masse m wird auf eine glatte (reibungsfreie) schiefe Ebene gestellt, die einen Winkel θ mit der Horizontalen bildet, wie in ▸ Abbildung 4.28a dargestellt. (a) Bestimmen Sie die auf die Kiste wirkende Normalkraft. (b) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Kiste. (c) Führen Sie die Berechnung für eine Masse $m = 10$ kg und eine Neigung $\theta = 30°$ durch.

Lösung

Das Kräfteparallelogramm für die Kiste ist in ▸ Abbildung 4.28b dargestellt. Die auf die Kiste wirkenden Kräfte sind ihr senkrecht nach unten gerichtetes Gewicht mg, das in seine Komponenten parallel und senkrecht zur schiefen Ebene zerlegt dargestellt ist, und die Normalkraft F_N. Die schiefe Ebene erlaubt nur eine Bewegung entlang ihrer Fläche. Da wir wissen, dass die Bewegung entlang der schiefen Ebene verläuft, wählen wir, wie dargestellt, die x-Achse nach unten gerichtet entlang der schiefen Ebene (die Bewegungsrichtung) und die y-Achse senkrecht zur schiefen Ebene nach oben gerichtet. Es gibt keine Bewegung in y-Richtung, so dass $a_y = 0$. Die Normalkraft F_N stellt dies sicher. Bei Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms ergibt sich

$$F_y = ma_y$$
$$F_N - mg\cos\theta = 0\ ,$$

wobei F_N und die y-Komponente der Gravitationskraft ($mg\cos\theta$) alle Kräfte sind, die in y-Richtung auf die Kiste einwirken.

a Somit ist die Antwort für Teil (a), dass die Normalkraft gegeben ist durch

$$F_N = mg\cos\theta\ .$$

Beachten Sie genau, dass F_N einen kleineren Betrag als das Gewicht mg hat, es sei denn, $\theta = 0°$.

b Die einzige in x-Richtung wirkende Kraft ist die x-Komponente von $m\mathbf{g}$. Diese ist, wie aus der Zeichnung ersichtlich, $mg\sin\theta$. Die Beschleunigung a verläuft in x-Richtung, so dass gilt

$$F_x = ma_x$$
$$mg\sin\theta = ma\ .$$

Wir sehen, dass die auf der Ebene nach unten gerichtete Beschleunigung

$$a = g\sin\theta\ .$$

ist. Das heißt, dass die Beschleunigung entlang einer schiefen Ebene immer kleiner als g ist, außer bei $\theta = 90°$. In diesem Fall gilt $\sin\theta = 1$ und $a = g$. Dies macht natürlich Sinn, da $\theta = 90°$ reinen senkrechten Fall bedeutet. Bei $\theta = 0°$ ist $a = 0$. Auch das macht Sinn, da $\theta = 0°$ bedeutet, dass die Ebene horizontal ist, so dass die Gravitationskraft keine Beschleunigung verursacht. Beachten Sie auch, dass die Beschleunigung nicht von der Masse m abhängt.

c Bei $\theta = 30°$ ist $\cos\theta = 0{,}866$ und $\sin\theta = 0{,}500$, so dass

$$F_N = 0{,}866mg = 85\ \text{N}$$

und

$$a = 0{,}500g = 4{,}9\ \text{m/s}^2\ .$$

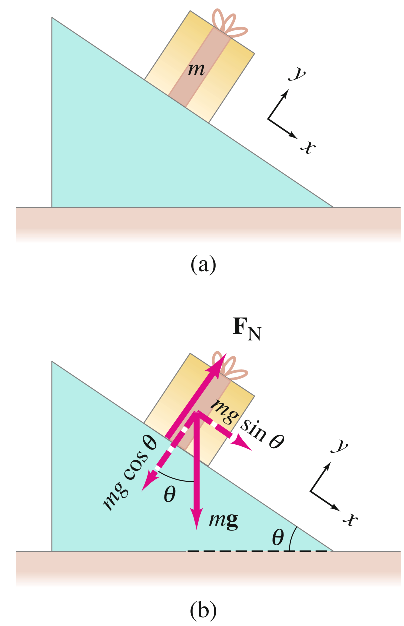


Abbildung 4.28 Beispiel 4.17. (a) Eine Kiste gleitet auf einer schiefen Ebene. (b) Kräfteparallelogramm der Kiste.

***$F_N < mg$*, wenn $\theta \neq 0°$**

Im nächsten Kapitel, in dem die Reibung mit einbezogen wird, werden wir weitere Beispiele für Bewegung auf einer schiefen Ebene erörtern.

4.8 Problemlösung – Allgemeine Herangehensweise

Ein wesentlicher Teil eines Physikkurses ist die erfolgreiche Lösung von Problemen (Aufgaben). Die hier erörterte Herangehensweise betont zwar die Newton'schen Axiome, kann aber allgemein auch auf andere in diesem Buch behandelte Bereiche angewendet werden.

Problemlösung

Allgemeine Hinweise

1 **Lesen** Sie schriftliche Aufgabenstellungen sorgfältig mehrmals durch. Es ist ein weit verbreiteter Fehler, beim Lesen ein oder zwei Wörter auszulassen. Das kann die Bedeutung der Aufgabenstellung völlig verändern.

2 **Fertigen** Sie eine genaue **Zeichnung** der Aufgabenstellung **an**. (Dieser Punkt wird am häufigsten übersehen, obwohl er der entscheidende Teil für die Lösung des Problems ist.) Verwenden Sie Pfeile zur Darstellung von Vektoren wie Geschwindigkeit oder Kraft und kennzeichnen Sie die Vektoren mit passenden Symbolen. Wenn Sie sich mit Kräften befassen und die Newton'schen Axiome anwenden, stellen Sie sicher, dass alle auf einen gegebenen Körper wirkenden Kräfte, einschließlich der unbekannten, einbezogen werden, und machen Sie sich klar, welche Kräfte auf welchen Körper wirken (andernfalls machen Sie möglicherweise einen Fehler bei der Bestimmung der auf einen Körper wirkenden *Nettokraft*). Für jeden betroffenen Körper muss ein eigenes **Kräfteparallelogramm** gezeichnet werden, das *alle* auf einen gegebenen Körper (und nur auf diesen Körper) wirkenden Kräfte zeigt. Stellen Sie keine Kräfte dar, die der Körper auf andere Körper ausübt.

3 Wählen Sie ein passendes *xy*-**Koordinatensystem** (wählen Sie ein System, das Ihre Berechnungen einfacher macht). Vektoren müssen in Komponenten entlang der Achsen zerlegt werden. Wenden Sie beim Einsatz des zweiten Newton'schen Axioms $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ getrennt auf die x- und y-Komponenten an. Bedenken Sie dabei, dass sich Kräfte in x-Richtung auf a_x beziehen und Kräfte in y-Richtung auf a_y etc.

4 Stellen Sie die Unbekannten fest – d. h. die Größen, die Sie versuchen zu ermitteln – und entscheiden Sie, was Sie brauchen, um die Unbekannten zu bestimmten. Für die Aufgaben in diesem Kapitel wenden wir die Newton'schen Axiome an. Im Allgemeinen mag es hilfreich sein zu schauen, ob es ein oder mehrere **Verhältnisse** (oder **Gleichungen**) gibt, die die unbekannten Größen zu den bekannten in Beziehung setzen. Stellen Sie aber sicher, dass jede Beziehung in dem vorliegenden Fall auch gültig ist. Es ist sehr wichtig, die Einschränkungen für jede Formel oder Beziehung zu kennen – wann sie gültig ist und wann nicht. In diesem Buch sind die allgemeineren Gleichungen nummeriert, aber auch sie können einen begrenzten Gültigkeitsbereich haben (häufig kurz in Klammern rechts neben der Gleichung angegeben).

5 Versuchen Sie, das Problem näherungsweise zu lösen, um zu sehen, ob es machbar (Überprüfung, ob genügend Informationen gegeben sind) und plausibel ist. Benutzen Sie Ihre Intuition und stellen Sie **grobe Berechnungen** an – siehe „Abschätzen der Größenordnung" in Abschnitt 1.6. Eine grobe Berechnung oder eine plausible Vermutung über den Bereich der endgültigen Antworten ist sehr nützlich. Außerdem kann die endgültige Antwort mithilfe der groben Berechnung überprüft werden, um Rechenfehler wie z. B. ein Dezimalkomma oder die Zehnerpotenzen aufzudecken.

6 **Lösen** Sie die Aufgabe. Dies kann algebraische Umformungen von Gleichungen und/oder numerische Berechnungen beinhalten. Erinnern Sie sich an die mathematische Regel, dass Sie so viele unabhängige Gleichungen brauchen, wie Unbekannte vorhanden sind. Wenn es drei unbekannte Größen gibt, benötigen Sie z. B. drei unabhängige Gleichungen. Normalerweise ist es am besten, zunächst mit algebraischen Symbolen zu rechnen, bevor die Zahlen eingesetzt werden. Warum? Weil (a) Sie dann eine ganze Gruppe ähnlicher Aufgaben mit verschiedenen numerischen Werten lösen können, (b) Sie Ihr Ergebnis für bereits klare Aufgabenstellungen überprüfen können (z. B. $\theta = 0°$ oder $90°$), (c) es Streichungen oder andere Vereinfachungen geben kann, (d) die Gefahr von Rechenfehlern normalerweise geringer ist und (e) weil Sie ein besseres Verständnis für die Aufgabenstellung bekommen können.

7 Achten Sie auf die **Einheiten**, denn sie können zur Überprüfung dienen (sie müssen auf beiden Seiten einer Gleichung gleich sein).

8 Überlegen Sie erneut, ob Ihre Antwort plausibel ist. Die in Abschnitt 1.7 beschriebene Dimensionsanalyse kann auch zur Überprüfung vieler Aufgabenstellungen verwendet werden.

ZUSAMMENFASSUNG

Die **drei Newton'schen Axiome** sind die Grundgesetze für die Beschreibung von Bewegungen der klassischen Mechanik.

Das **erste Newton'sche Axiom** (Trägheitsgesetz) besagt, dass, wenn die auf einen Körper einwirkende Nettokraft null ist, ein Körper, der sich ursprünglich im Zustand der

Ruhe befindet, in diesem Zustand verharrt, und ein Körper, der sich in Bewegung befindet, mit konstanter Geschwindigkeit in einer geradlinigen Bewegung verharrt.

Das **zweite Newton'sche Axiom** besagt, dass die Beschleunigung eines Körpers direkt proportional zu der auf ihn einwirkenden Nettokraft ist und umgekehrt proportional zu seiner Masse:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} .$$

Das zweite Newton'sche Axiom ist eines der wichtigsten und grundlegendsten Gesetze der klassischen Physik.

Das **dritte Newton'sche Axiom** besagt, dass immer dann, wenn ein Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft ausübt, der zweite Körper stets auch eine Kraft auf den ersten Körper ausübt, die denselben Betrag hat, aber entgegengerichtet ist:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} .$$

Das Bestreben eines Körpers, sich einer Änderung in seiner Bewegung zu widersetzen, nennt man **Trägheit**. **Masse** ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers.

Gewicht ist die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft und gleich dem Produkt aus der Masse m des Körpers und der Fallbeschleunigung $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} .$$

Kraft, ein Vektor, kann als Zugspannung oder Schub betrachtet oder nach dem zweiten Newton'schen Axiom als eine Aktion definiert werden, die eine Beschleunigung verursachen kann. Die auf einen Körper wirkende **Nettokraft** ist die Vektorsumme aller auf ihn wirkenden Kräfte.

Zur Lösung von Aufgaben, in denen auf einen oder mehrere Körper wirkende Kräfte eine Rolle spielen, ist es wichtig, ein **Kräfteparallelogramm** für jeden Körper zu zeichnen, das alle die auf diesen Körper wirkenden Kräfte zeigt. Das zweite Newton'sche Axiom ist eine Vektorgleichung, d. h. auch die einzelnen Komponenten der enthaltenen Vektoren erfüllen diese Gleichung.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Verständnisfragen

1 Warum scheint ein Kind in einem Wagen nach hinten zu fallen, wenn Sie kräftig an dem Wagen ziehen?

2 Eine Kiste ruht auf der glatten Ladefläche eines Lkw. Der Lkw-Fahrer startet den Lkw und beschleunigt in Vorwärtsrichtung. Die Kiste beginnt plötzlich, auf der Ladefläche nach hinten zu rutschen. Erörtern Sie die Bewegung der Kiste entsprechend den Newton'schen Axiomen (a) aus der Sicht von Andrea, die auf dem Boden neben dem Lkw steht und (b) aus der Sicht von David, der auf dem Lkw mitfährt (► Abbildung 4.29). Nehmen Sie an, dass die Auflageflächen zwischen der Kiste und der Ladefläche des Lkw so glatt sind, dass die Reibung vernachlässigt werden kann.

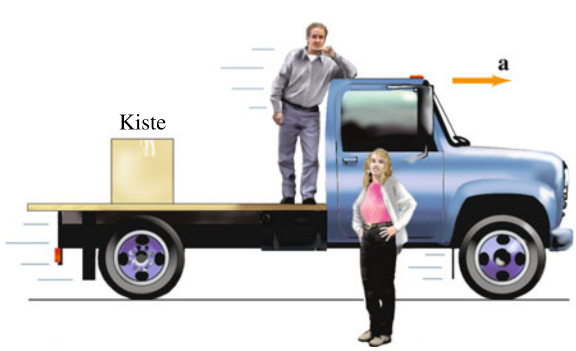


Abbildung 4.29 Frage 2.

3 Wirken auf einen Körper, dessen Beschleunigung null ist, keine Kräfte?

4 Warum treten Sie stärker in die Pedale eines Fahrrades, wenn Sie losfahren, als wenn Sie sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen?

5 Es wirkt nur eine Kraft auf einen Körper. Kann der Körper dann eine Beschleunigung von null haben? Kann er eine Geschwindigkeit von null haben?

6 Wenn ein Golfball auf Asphalt fällt, springt er wieder nach oben. (a) Ist eine Kraft erforderlich, damit er wieder zurückspringt? (b) Wenn ja, wer oder was übt die Kraft aus?

7 Welcher der folgenden Körper wiegt ca. 1 N: (a) ein Apfel, (b) ein Moskito, (c) dieses Buch, (d) Sie selbst?

8 Warum könnte Ihr Fuß wehtun, wenn Sie gegen einen schweren Tisch oder eine Wand treten?

9 Wenn Sie schnell laufen und anhalten wollen, müssen Sie schnell abbremsen. (a) Woher stammt die Kraft, die Sie zum Anhalten bringt? (b) Schätzen Sie (aus Ihrer eigenen Erfahrung heraus) die maximale Abbremsung einer mit Spitzengeschwindigkeit laufenden Person ab, damit sie zum Stehen kommt.

10 Ein Stein hängt an einem dünnen Faden von der Decke und ein Teil desselben Fadens baumelt vom unteren Ende des Steins herunter (► Abbildung 4.30). Wo reißt der Faden wahrscheinlich, wenn eine Person an dem baumelnden Faden kräftig zieht: unter oder über dem Stein? Was passiert, wenn die Person langsam und stetig zieht? Erklären Sie Ihre Antworten.

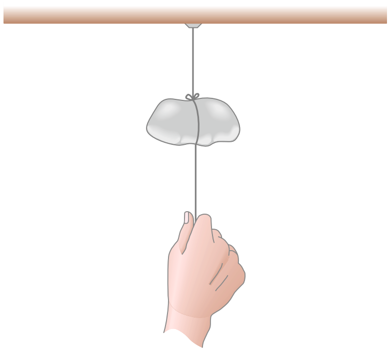


Abbildung 4.30 Frage 10.

11 Die auf einen Stein (Masse 2 kg) wirkende Gravitationskraft ist zweimal so groß wie die, die auf einen Stein (Masse 1 kg) wirkt. Warum fällt der schwerere Stein dann nicht schneller?

12 Beobachten Sie die Bewegung der sich bewegenden Scheiben eines Lufthockeyspiels. Erklären Sie, wie das erste, zweite und dritte Newton'sche Axiom Anwendung finden. Die Scheiben schwimmen auf einer Luftschicht, wobei die Luft aus kleinen Löchern ausgeblasen wird, so dass die Reibung auf ein sehr kleines Maß reduziert wird.

13 Vergleichen Sie den Aufwand (oder die Kraft), der erforderlich ist, um einen Körper (Masse 10 kg) auf dem Mond zu heben, mit der Kraft, die erforderlich ist, um ihn auf der Erde zu heben. Vergleichen Sie die Kraft auf dem Mond und auf der Erde, die erforderlich ist, um einen Körper mit einer Masse von 2 kg mit einer gegebenen Geschwindigkeit horizontal zu werfen.

Abbildung 4.31 Ein Tauziehen. Beschreiben Sie die auf jede Mannschaft und auf das Tau wirkenden Kräfte. Frage 14.

14 Nach dem dritten Newton'schen Axiom zieht beim Tauziehen (► Abbildung 4.31) jede Mannschaft mit gleicher Kraft an der anderen Mannschaft. Worauf kommt es an, damit eine Mannschaft gewinnt, wenn beide Mannschaften mit gleicher Kraft ziehen?

15 Manchmal entsteht durch einen Autounfall, bei dem das Auto des Unfallopfers von hinten einen starken Stoß erleidet, ein Schleudertrauma. Erklären Sie, warum der Kopf des Opfers in dieser Situation scheinbar nach hinten geworfen wird. Wird er es tatsächlich?

16 Warum bewegt sich ein Baumstamm, der auf einem See schwimmt, wenn Sie auf diesem Baumstamm gehen, in die entgegengesetzte Richtung?

17 Maria übt eine nach oben gerichtete Kraft von 40 N aus, um eine volle Einkaufstasche festzuhalten. Beschreiben Sie die „Reaktions"-Kraft (drittes Newton'sches Axiom), indem Sie (a) ihren Betrag und (b) ihre Richtung angeben sowie darlegen, (c) *auf* welchen Körper sie wirkt und (d) *von* welchem Körper sie ausgeübt wird.

18 Wie groß ist die Kraft, die der Boden auf Sie ausübt, wenn Sie still auf dem Boden stehen? Warum bewirkt diese Kraft nicht, dass Sie sich nach oben bewegen?

19 In einigen Nationalparks wird eine so genannte „Bärenschlinge" benutzt (► Abbildung 4.32), um die Essensvorräte der Rucksacktouristen außerhalb der Reichweite der Bären unterzubringen. Erklären Sie, warum die für das Hochziehen des Rucksacks erforderliche Kraft größer wird, je höher der Rucksack kommt. Ist es möglich, das Seil so stramm zu ziehen, dass es überhaupt nicht durchhängt?

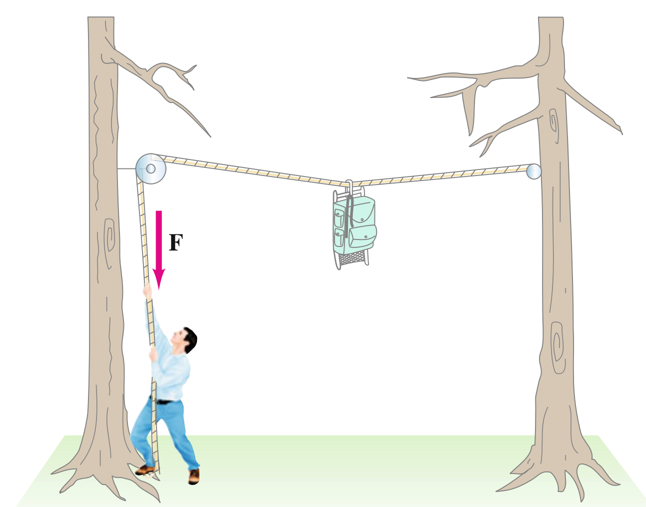


Abbildung 4.32 Frage 19.

Aufgaben zu 4.4 bis 4.6

kompletter Lösungsweg

1 (I) Zeigen Sie, dass ein Butterwürfel mit einer Masse von $\frac{1}{8}$ kg ungefähr 1 N wiegt.

2 (I) Eine Nettokraft von 255 N beschleunigt ein Fahrrad und seinen Fahrer mit 2,20 m/s^2. Wie groß ist die Masse des Fahrrades und seines Fahrers?

3 (I) Wie viel Kraft ist erforderlich, um einen Körper mit einer Masse von 7,0 g mit 10 000g (z. B. in einer Zentrifuge) zu beschleunigen?

4 (I) Wie viel Zugkraft (Zugfestigkeit) muss ein Seil besitzen, wenn es dazu benutzt wird, ein Auto (Masse 1250 kg) horizontal mit 1,30 m/s^2 zu beschleunigen? Vernachlässigen Sie die Reibung.

5 (I) Wie groß ist das Gewicht eines Astronauten (Masse 58 kg) (a) auf der Erde, (b) auf dem Mond ($g = 1{,}7$ m/s^2), (c) auf dem Mars ($g = 3{,}7$ m/s^2), (d) im Weltraum, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt?

6 (II) Wie groß ist die durchschnittliche Kraft, die erforderlich ist, um ein Auto (Masse 1050 kg), das mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, in 7,0 s zum Halten zu bringen?

7 (II) Wie groß ist die durchschnittliche Kraft, die erforderlich ist, um eine Kugel (Masse 6,25 g) über eine Entfernung von 0,700 m entlang des Gewehrlaufes aus der Ruhelage auf 155 m/s zu beschleunigen?

8 (II) Eine Kiste (Masse 30,0 kg) ruht auf einem Tisch. (a) Wie groß sind das Gewicht der Kiste und die auf sie wirkende Normalkraft? (b) Eine Kiste (Masse 20,0 kg) wird oben auf die Kiste (Masse 30,0 kg) gestellt, wie in ▸ Abbildung 4.33: dargestellt. Bestimmen Sie die Normalkraft, die der Tisch auf die Kiste (Masse 30,0 kg) ausübt, und die Normalkraft, die die Kiste (Masse 30,0 kg) auf die Kiste (Masse 20,0 kg) ausübt.

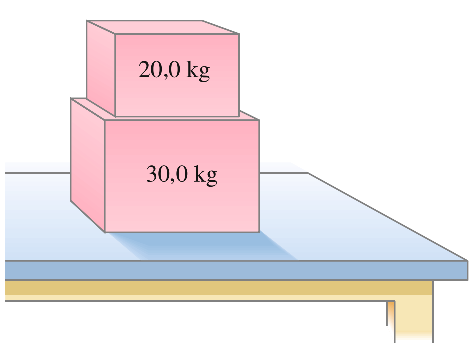


Abbildung 4.33 Aufgabe 8.

9 (II) Superman muss einen 100 km/h schnellen Zug innerhalb von 150 m zum Stehen bringen, um zu verhindern, dass er mit einem auf den Schienen liegengebliebenen Auto zusammenstößt. Wie viel Kraft muss er ausüben, wenn die Masse des Zuges $3{,}6 \cdot 10^5$ kg beträgt? Vergleichen Sie diese Kraft mit dem Gewicht des Zuges.

10 (II) Betrachten Sie eine Kiste, die auf einer reibungsfreien Fläche ruht. Während eines vorgegebenen Zeitraums wirkt eine konstante Kraft auf die Kiste und beschleunigt sie bis zu einer bestimmten Endgeschwindigkeit. Dann wird dieser Vorgang mit einer anderen Kiste wiederholt, die die zweifache Masse der ersten Kiste hat. Vergleichen Sie die Endgeschwindigkeit der schwereren Kiste mit der der ersten Kiste.

11 (II) Ein Angler zieht einen Fisch mit einer Beschleunigung von 3,5 m/s^2 aus dem Wasser und verwendet dabei eine ganz leichte Angelschnur mit einer Bruchfestigkeit von 25 N. Leider verliert der Angler den Fisch, als die Schnur reißt. Was können Sie über die Masse des Fisches sagen?

12 (II) Ein Baseball (Masse 0,140 kg), der sich mit 41,0 m/s bewegt, trifft den Handschuh des Fängers. Der Handschuh schnellt 12,0 cm zurück, als er den Ball zum Stillstand bringt. Wie groß war die durchschnittliche Kraft, die der Ball auf den Handschuh ausgeübt hat?

13 (II) Schätzen Sie die durchschnittliche Kraft ab, die ein Kugelstoßer auf eine Kugel (Masse 7,0 kg) ausübt, wenn die Kugel über einen Weg von 2,8 m gestoßen und mit einer Geschwindigkeit von 13 m/s losgelassen wird.

14 (II) Wie viel Zugkraft muss ein Seil widerstehen, wenn es dazu benutzt wird, ein Auto (Masse 1200 kg) mit 0,80 m/s^2 senkrecht nach oben zu beschleunigen?

15 (II) Ein Eimer (Masse 7,50 kg) wird an einem Seil heruntergelassen, in dem eine Zugkraft von 63,0 N wirkt. Welche Beschleunigung hat der Eimer? Ist sie nach oben oder unten gerichtet?

16 (II) Ein Aufzug (Masse 4125 kg) soll so konzipiert werden, dass die maximale Beschleunigung 0,0600g beträgt. Wie groß ist die maximale bzw. minimale Kraft, die der Motor auf das Tragseil ausüben sollte?

17 (II) Ein kleiner Dieb (Masse 65 kg) will aus einem Gefängnisfenster im dritten Stock fliehen. Leider kann ein Notseil aus zusammengebundenen Laken nur eine Masse von 57 kg tragen. Wie könnte der Dieb dieses „Seil" für seine Flucht benutzen? Geben Sie eine quantitative Antwort.

18 (II) Eine Person steht in einem ruhenden Aufzug auf einer Personenwaage. Als der Aufzug sich in Bewegung setzt, zeigt die Waage kurz nur 0,75 des regulären Gewichtes der Person an. Berechnen Sie die Beschleunigung des Aufzuges und ermitteln Sie die Richtung der Beschleunigung.

19 (II) Das Seil, das einen Aufzug (Masse 2100 kg) zieht, hat eine maximale Zugfestigkeit von 21 750 N. Welche maximale aufwärts gerichtete Beschleunigung kann es dem Aufzug geben, ohne zu reißen?

20 (II) Ein bestimmter Rennwagen kann eine Viertelmeile (402 m) in 6,40 Sekunden zurücklegen. Er startet aus dem Stillstand. Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer unter der Annahme, dass diese konstant ist? Wie groß ist die horizontale Kraft, die die Straße auf die Reifen ausüben muss, wenn der Fahrer und das Auto zusammen eine Masse von 280 kg haben?

21 (II) Eine Saturn-V-Rakete hat eine Masse von $2{,}75 \cdot 10^6$ kg und übt eine Kraft von $33 \cdot 10^6$ N auf die Gase, die sie ausstößt, aus. Bestimmen Sie (a) die anfängliche vertikale Beschleunigung der Rakete, (b) ihre Geschwindigkeit nach 8,0 s und (c) wie lange sie braucht, um eine Höhe von 9500 m zu erreichen. Vernachlässigen Sie die Masse der ausgestoßenen Gase (nicht realistisch) und nehmen Sie an, dass die Fallbeschleunigung konstant ist.

22 (II) (a) Wie groß ist die Beschleunigung von zwei frei fallenden Fallschirmspringern (Masse 120,0 kg einschließlich Fallschirm), wenn die aufwärts gerichtete Kraft des Luftwiderstandes identisch mit einem Viertel ihres Gewichtes ist? (b) Nach dem Öffnen des Fallschirms gleiten die Fallschirmspringer ruhig mit konstanter Geschwindigkeit auf die Erde zurück. Wie groß ist jetzt die auf die Fallschirmspringer und ihren Fallschirm einwirkende Kraft des Luftwiderstandes? Siehe ► Abbildung 4.34.

Abbildung 4.34 Aufgabe 22.

23 (II) Bei einem außergewöhnlichen Sprung aus dem Stand würde eine Person 0,80 m vom Boden abheben. Wie groß ist die Kraft, die eine Person (Masse 61 kg) dafür gegen den Boden ausüben muss? Nehmen Sie an, die Person geht vor dem Sprung 0,20 m in die Hocke, so dass die aufwärts gerichtete Kraft über diesen Weg wirken muss, bevor die Person abspringt.

24 (III) Eine Person springt vom Dach eines 3,5 m hohen Hauses. Wenn sie unten auf dem Boden aufkommt, beugt sie ihre Knie, so dass ihr Rumpf über einen ungefähren Weg von 0,70 m abbremst. Ermitteln Sie (a) ihre Geschwindigkeit direkt vor dem Auftreffen ihrer Füße auf dem Boden und (b) die von ihren Beinen während des Abbremsens auf ihren Rumpf ausgeübte durchschnittliche Kraft. Gehen Sie von der Voraussetzung aus, dass die Masse ihres Rumpfes (ohne Beine) 43 kg beträgt.

25 (III) Die besten Sprinter der Welt laufen die 100 m in 10,0 s. Ein Sprinter (Masse 62 kg) beschleunigt auf den ersten 45 m gleichförmig, bis er seine Spitzengeschwindigkeit erreicht, die er dann für die restlichen 55 m beibehält. (a) Wie groß ist die horizontale Komponente der durchschnittlichen Kraft, die während der Beschleunigung vom Boden auf seine Füße ausgeübt wird? (b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Sprinters auf den letzten 55 m des Rennens (d. h. seine Spitzengeschwindigkeit)?

Aufgaben zu 4.7

kompletter Lösungsweg

26 (I) Eine Kiste mit einem Gewicht von 85 N ruht auf einem Tisch. Ein an der Kiste befestigtes Seil läuft senkrecht nach oben über eine Rolle. An dem anderen Seilende hängt ein Gewicht (► Abbildung 4.35). Bestimmen Sie die Kraft, die der Tisch auf die Kiste ausübt, wenn das Gewicht auf der anderen Seite der Rolle (a) 30 N, (b) 60 N und (c) 90 N wiegt.

27 (I) Eine Kraft von 750 N wirkt in nordwestlicher Richtung. In welche Richtung muss eine zweite Kraft von 750 N ausgeübt werden, damit die Resultierende der beiden Kräfte nach Westen zeigt?

28 (I) Zeichnen Sie das Kräfteparallelogramm für einen Basketballspieler (a) direkt vor dem Absprung und (b) während er sich in der Luft befindet. (► Abbildung 4.36)

29 (I) Skizzieren Sie das Kräfteparallelogramm für einen Baseball (a) in dem Moment, in dem er vom Schlagholz getroffen wird, und (b) nochmals, nachdem er

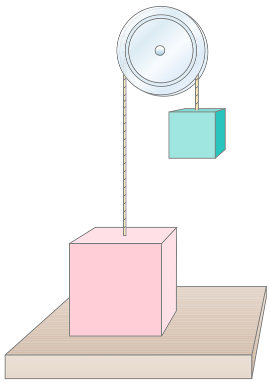


Abbildung 4.35 Aufgabe 26.

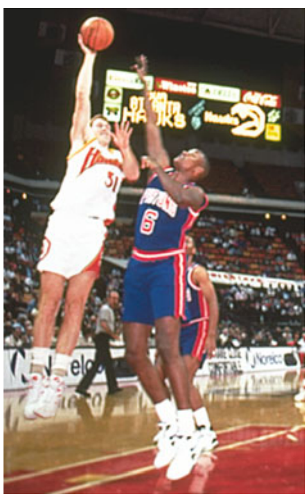


Abbildung 4.36 Aufgabe 28.

das Schlagholz verlassen hat und in Richtung Außenfeld fliegt.

30 (II) Bei Beginn eines Rennens hat ein Sprinter (Masse 57 kg) auf den Startblock eine Kraft von 80 N in einem Winkel von 22° in Bezug auf den Boden ausgeübt. (a) Wie groß war die horizontale Beschleunigung des Sprinters? (b) Mit welcher Geschwindigkeit ist der Sprinter aus dem Startblock gestartet, wenn die Kraft 0,34 s lang ausgeübt wurde?

31 (II) Die beiden in ▶ Abbildung 4.37a dargestellten Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ wirken auf einen Körper (Masse 29,0 kg) auf einer reibungsfreien Tischplatte. Ermitteln Sie die auf den Körper wirkende Nettokraft sowie seine jeweilige Beschleunigung für (a) und (b), wenn $\mathbf{F}_1 = 20{,}2$ N und $\mathbf{F}_2 = 26{,}0$ N.

32 (II) Eine Person schiebt einen Rasenmäher (Masse 13,0 kg) mit konstanter Geschwindigkeit und einer Kraft von 78,0 N, die entlang dem Griff geführt wird. Der Griff befindet sich in einem Winkel von 45,0° zur Horizontalen (▶ Abbildung 4.38). (a) Zeichnen Sie das Kräfteparallelogramm, das alle Kräfte, die auf den Mäher wirken, zeigt. Berechnen Sie (b) die auf den Mäher wirkende horizontale Verzögerungskraft, (c) die nach oben gerichtete, vom Boden auf den Mäher ausgeübte Normalkraft und (d) die Kraft, die die Person auf den Rasenmäher ausüben muss, um ihn aus dem Stillstand in 2,0 Sekunden auf 1,2 m/s (unter Annahme derselben Verzögerungskraft) zu beschleunigen.

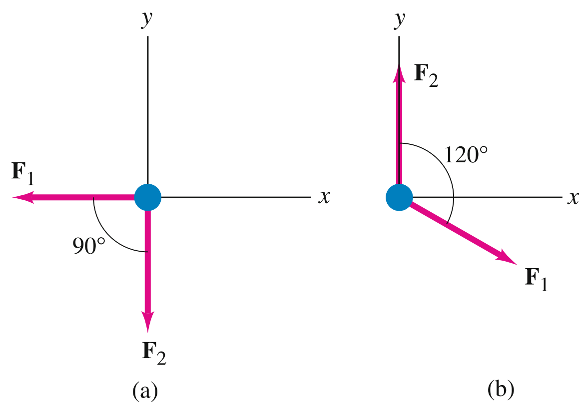


Abbildung 4.37 Aufgabe 31.

33 (II) Rechnen Sie noch einmal Beispiel 4.13, aber bauen Sie (a) die Gleichungen so auf, dass die Richtung der Beschleunigung **a** für jeden Körper mit der Bewegungsrichtung des jeweiligen Körpers identisch ist.(In Beispiel 4.13 haben wir **a** für beide Massen als positiv nach oben gerichtet angenommen.) (b) Lösen Sie die Gleichungen so, dass Sie dieselben Antworten wie in Beispiel 4.13 erhalten.

34 (II) Ein Helikopter (Masse 7500 kg) beschleunigt mit 0,52 m/s^2 nach oben, während er ein Auto (Masse 1200 kg) hebt. (a) Wie groß ist die Auftriebskraft, die von der Luft auf die Rotoren ausgeübt wird? (b) Wie groß ist die Zugkraft in dem Seil (vernachlässigen Sie seine Masse), das das Auto mit dem Helikopter verbindet?

Abbildung 4.38 Aufgabe 32.

35 (II) Ein Farbeimer (Masse 3,5 kg) hängt an einem masselosen Seil von einem anderen Farbeimer (Masse 3,5 kg) herunter, der ebenfalls an einem masselosen Seil hängt, wie in ► Abbildung 4.39: dargestellt. (a) Wie groß ist die Zugkraft in jedem Seil, wenn sich die Eimer in Ruhelage befinden? (b) Berechnen Sie die Zugkraft in jedem Seil, wenn die beiden Eimer mit einer Beschleunigung von 1,60 m/s^2 an dem oberen Seil nach oben gezogen werden.

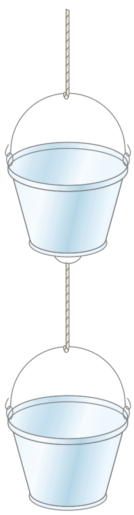


Abbildung 4.39 Aufgaben 35 und 44.

36 (II) Eine Fensterputzerin zieht sich selbst mithilfe eines Eimer-Flaschenzuges, wie in ► Abbildung 4.40 dargestellt, nach oben. (a) Wie stark muss sie nach unten ziehen, um sich selbst mit konstanter Geschwindigkeit hochzuziehen? (b) Wie groß ist ihre Beschleunigung, wenn sie diese Kraft um zehn Prozent erhöht? Die Masse der Person und des Eimers beträgt insgesamt 58 kg.

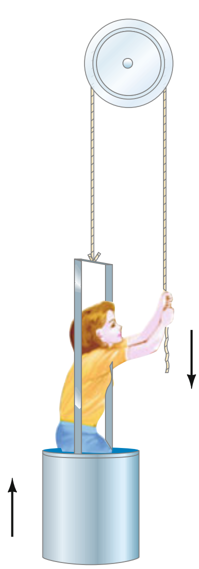


Abbildung 4.40 Aufgabe 36.

37 (II) Lena soll über ein „Hochseil", das horizontal zwischen zwei 10,0 m voneinander entfernten Gebäuden gespannt ist, balancieren. Das Seil sollte, wenn sie sich auf der Mitte befindet, nicht mehr als 10° durchhängen, wie in ► Abbildung 4.41 dargestellt. Wie groß muss die Zugkraft in dem Seil sein, wenn ihre Masse 50,0 kg beträgt?

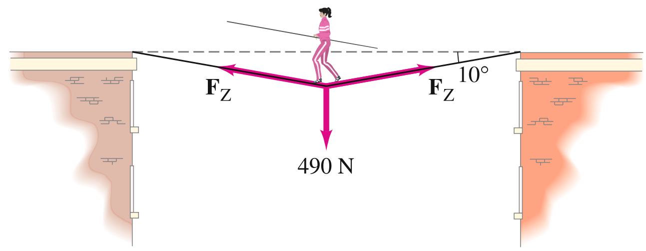


Abbildung 4.41 Aufgabe 37.

38 (II) Toms Gleitflieger trägt sein Gewicht mithilfe der sechs in ► Abbildung 4.42 dargestellten Seile. Jedes Seil ist so ausgelegt, dass es einen gleichen Teil von Toms Gewicht trägt. Tom hat eine Masse von 70,0 kg. Wie groß ist die Zugkraft in jedem der Tragseile?

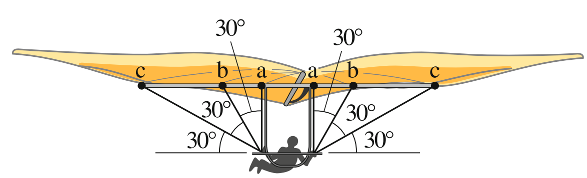


Abbildung 4.42 Aufgabe 38.

39 (II) Zwei Pistenraupen ziehen ein Haus zu einem Standort in McMurdo Base, Antarctica, wie in ► Abbildung 4.43: dargestellt. Die Summe der auf das Haus von den horizontalen Seilen ausgeübten Kräfte $\mathbf{F}_A$ und $\mathbf{F}_B$ ist parallel zu der Geraden L. $F_A = 4500$ N. Bestimmen Sie F_B und den Betrag von $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$.

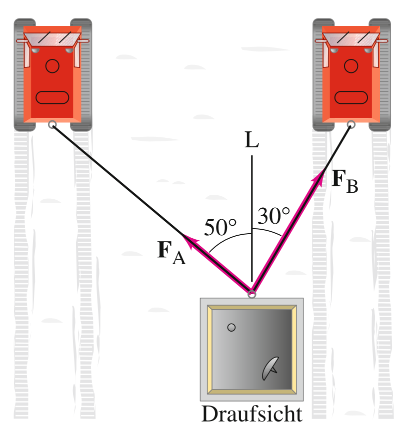


Abbildung 4.43 Aufgabe 39.

40 (II) Der in ► Abbildung 4.44 dargestellte Block hat eine Masse von $m = 7{,}0\,\text{kg}$ und liegt auf einer glatten, reibungsfreien schiefen Ebene, die mit der Horizontalen einen Winkel von $\theta = 22{,}0°$ bildet. (a) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Blocks, wenn er die Ebene hinuntergleitet. (b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Blocks bei Erreichen des Fußes des schiefen Ebene, wenn er aus der Ruhelage 12,0 m über dem Fuß der Ebene startet?

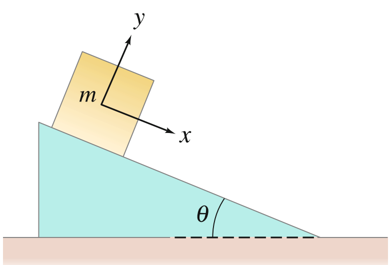


Abbildung 4.44 Block auf schiefer Ebene. Aufgaben 40 und 41.

41 (II) Ein Block bekommt eine Anfangsgeschwindigkeit von 4,0 m/s, um sich die in ► Abbildung 4.44 dargestellte Ebene mit einem Neigungswinkel von 22° hoch zu bewegen. (a) Wie weit nach oben kommt der Block? (b) Wie viel Zeit vergeht, bis er zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt? Vernachlässigen Sie die Reibung.

42 (II) Ein Kronleuchter (Masse 27 kg) hängt an einem senkrechten, 4,0 m langen Kabel von einer Decke. (a) Welche horizontale Kraft wäre erforderlich, um ihn um 0,10 m zu einer Seite zu bewegen? (b) Wie groß ist die Zugkraft in dem Kabel?

43 (II) Eine Masse m befindet sich bei $t = 0$ im Stillstand. Dann wirkt eine konstante Kraft F_0 für eine Zeit t_0 auf sie. Plötzlich verdoppelt sich die Kraft auf $2F_0$ und bleibt konstant, bis $t = 2t_0$. Bestimmen Sie den zurückgelegten Gesamtweg zwischen $t = 0$ und $t = 2t_0$.

44 (II) Die Seile, die die Eimer in Aufgabe 35 beschleunigen (► Abbildung 4.39) sind jeweils 1,0 m lang und haben jeweils ein Gewicht von 2,0 N. Bestimmen Sie die Zugkraft in jedem Seil an ihren Befestigungspunkten (höchste und niedrigste Punkte).

45 (II) Eine Lokomotive zieht zwei Wagen mit derselben Masse. Zeigen Sie, dass bei jeder Beschleunigung des Zuges ungleich null die Zugkraft in der Kupplung zwischen der Lokomotive und dem ersten Wagen doppelt so groß ist wie zwischen dem ersten und dem zweiten Wagen.

46 (II) Drei Blöcke auf einer reibungsfreien, horizontalen Fläche befinden sich miteinander in Kontakt, wie in ► Abbildung 4.45 dargestellt. Auf Block 1 (Masse m_1) wird eine Kraft **F** ausgeübt. (a) Zeichnen Sie ein Kräfteparallelogramm für jeden Block. Bestimmen Sie (b) die Beschleunigung des Systems (in Bezug auf m_1, m_2 und m_3), (c) die auf jeden Block wirkende Nettokraft und (d) die Kontaktkraft, die jeder Block auf seinen Nachbarblock ausübt. (e) Geben Sie numerische Antworten zu (b), (c) und (d) für $m_1 = m_2 = m_3 = 12\,\text{kg}$ und $F = 96{,}0\,\text{N}$. Überprüfen Sie, ob Ihre Antworten Sinn machen?

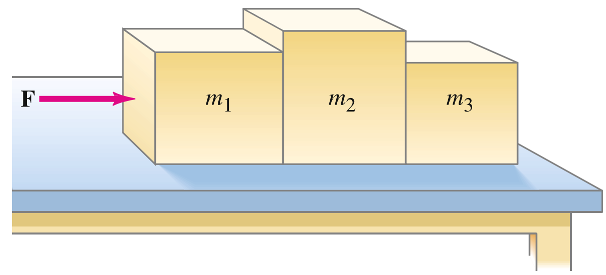


Abbildung 4.45 Aufgabe 46.

47 (II) ► Abbildung 4.46 zeigt einen Block (Masse m_1) auf einer glatten, horizontalen Fläche. Der Block ist mittels eines dünnen Seils, das über eine Rolle läuft, mit einem zweiten Block (m_2), der senkrecht nach unten hängt, verbunden. (a) Zeichnen Sie für jeden Block ein Kräfteparallelogramm, das die auf jeden Block wirkende Gravitationskraft, die von dem Seil ausgeübte (Zug-)Kraft und jede Normalkraft zeigt. (b) Bestimmen Sie Formeln für die Beschleunigung des Systems und für die Zugkraft in dem Seil. Vernachlässigen Sie die Reibung und die Massen der Rolle und des Seils.

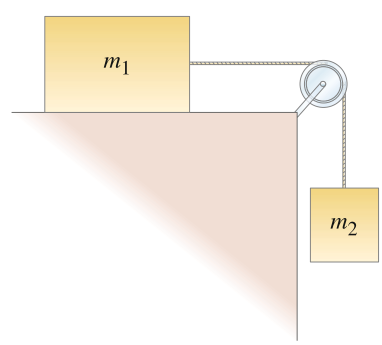


Abbildung 4.46 Masse m_1 ruht auf einer glatten, horizontalen Fläche, m_2 hängt senkrecht nach unten. Aufgaben 47, 48, 49 und 57.

48 (II) (a) Bestimmen Sie die Beschleunigung jedes Blocks aus ► Abbildung 4.46, wenn $m_1 = 13{,}0\,\text{kg}$ und $m_2 = 6{,}0\,\text{kg}$. (b) Wie lange dauert es, bis m_1 die Kante des Tisches erreicht, wenn sich das System frei bewegen kann und m_1 sich anfangs 1,250 m von der Tischkante entfernt in der Ruhelage befindet? (c) Wie groß muss m_1 sein, wenn $m_2 = 1{,}0\,\text{kg}$ und die Beschleunigung des Systems auf $\frac{1}{100}g$ gehalten werden soll? (g ist die Fallbeschleunigung im Gegensatz zur Gewichtseinheit g.)

49 (III) Bestimmen Sie eine Formel für die Beschleunigung des in ► Abbildung 4.46 dargestellten Systems (siehe Aufgabe 47), wenn das Seil eine nicht vernachlässigbare Masse m_S hat. Geben Sie sie in Bezug auf l_1 und l_2 an, die Seillängen von den jeweiligen Massen bis zu der Rolle. (Die gesamte Seillänge beträgt $l = l_1 + l_2$.)

50 (III) Die beiden in ► Abbildung 4.47 dargestellten Massen befinden sich anfangs 1,80 m über dem Boden. Die masselose, reibungsfreie Rolle ist in einer Höhe von 4,8 m über dem Boden befestigt. Welche maximale Höhe erreicht der leichtere Körper, nachdem das System freigegeben ist? [*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst die Beschleunigung der leichteren Masse und dann seine Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt, an dem die schwerere Masse auf dem Boden auftrifft. Dies ist ihre „Start"-Geschwindigkeit. Setzen Sie voraus, dass sie nicht die Rolle trifft.]

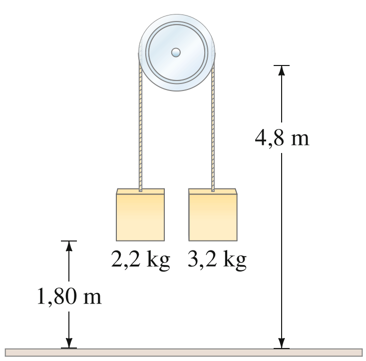


Abbildung 4.47 Aufgabe 50.

51 (III) Nehmen wir an, das Seil in Beispiel 4.12 und ► Abbildung 4.23 ist ein schweres Tau mit einer Masse von 1,0 kg. Berechnen Sie die Beschleunigung jeder Kiste und die Zugkraft an jedem Ende des Seils. Verwenden Sie dabei die in ► Abbildung 4.48 dargestellten Kräfteparallelogramme. Nehmen wir an, dass das Seil recht fest ist, so dass wir das Durchhängen vernachlässigen können.

52 (III) Nehmen wir an, die Rolle in ► Abbildung 4.49 ist an einem Seil S aufgehängt. Bestimmen Sie die Zugkraft in diesem Seil nach der Freigabe der Masse und bevor die Masse auf dem Boden auftrifft. Vernachlässigen Sie die Masse der Rolle.

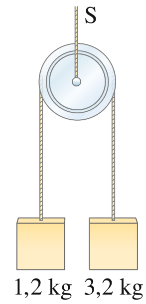


Abbildung 4.49 Aufgabe 52.

53 (III) Ein kleiner Block mit der Masse m ruht auf der geneigten Seite eines dreieckigen Blocks mit der Masse M, der selbst wiederum auf einem horizontalen Tisch ruht, wie in 4.50 dargestellt. Nehmen Sie an, dass alle Flächen reibungsfrei sind und bestimmen Sie die Kraft F, die auf M ausgeübt werden muss, damit m in einer relativ zu M festen Position bleibt (d. h. m bewegt sich auf der schiefen Ebene nicht).

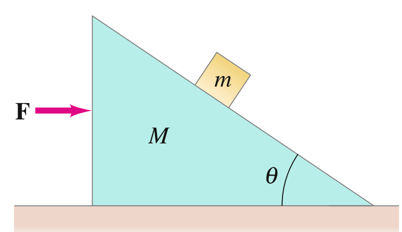


Abbildung 4.50 Aufgabe 53.

54 (III) Bestimmen Sie eine Formel für den Betrag der auf den großen Block (m_3) in ► Abbildung 4.51 ausgeübten Kraft **F**, so dass die Masse m_1 sich relativ zu m_3 nicht bewegt. Vernachlässigen Sie die Reibung. Nehmen Sie an, dass $m_2 m_3$ nicht berührt.

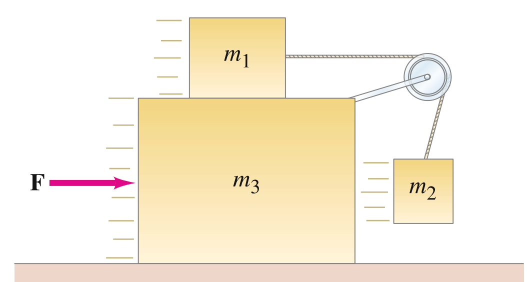


Abbildung 4.51 Aufgabe 54.

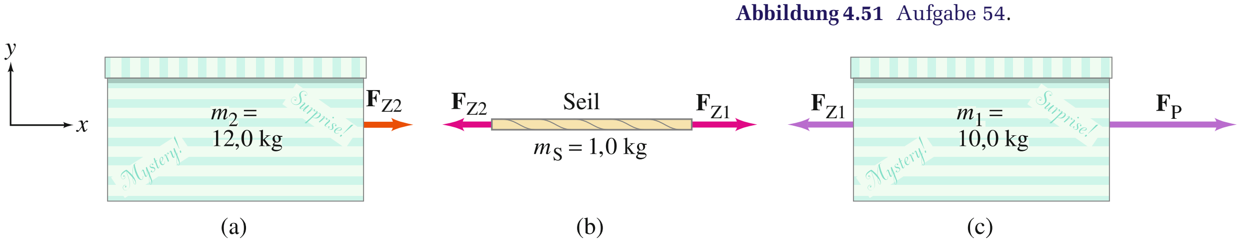


Abbildung 4.48 Aufgabe 51. Kräfteparallelogramme für jeden der Körper des in Abbildung 4.23a gezeigten Systems. Die vertikalen Kräfte $\mathbf{F}_N$ und $\mathbf{F}_G$ sind nicht dargestellt.

55 (III) Der in ▸ Abbildung 4.52 dargestellte doppelte Flaschenzug hat reibungsfreie, masselose Rollen und Seile. Bestimmen Sie (a) die Beschleunigung der Massen m_1, m_2 und m_3 und (b) die Zugkräfte F_{Z1} und F_{Z3} in den Seilen.

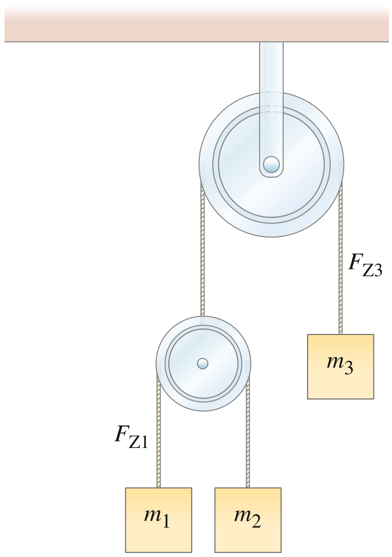


Abbildung 4.52 Aufgabe 55.

56 (III) Ein Massenpunkt mit der Masse m, der sich anfangs in Ruhe befindet, wird von einer Kraft beschleunigt, die in Abhängigkeit der Zeit als $F = Ct^2$ zunimmt. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit v und seinen Ort x in Abhängigkeit der Zeit.

57 (III) Bestimmen Sie eine Formel für die Geschwindigkeit v der in ▸ Abbildung 4.46 (siehe Aufgabe 49) dargestellten Massen und nehmen Sie dabei an, dass das Seil die Masse m_S hat und homogen ist. Bei $t = 0$ ist $v = 0$ und die Masse m_2 befindet sich an der Rolle, während die Masse m_1 eine Entfernung l von der Rolle entfernt ist. Nehmen Sie an, dass die Rolle sehr klein ist (vernachlässigen Sie ihren Durchmesser) und vernachlässigen Sie die Reibung. [*Hinweis*: Wenden Sie die Kettenregel $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$ an und integrieren Sie.]

58 (III) Ein schweres Stahlseil mit der Länge L und der Masse M läuft über eine kleine masselose, reibungsfreie Rolle. (a) Berechnen Sie die Beschleunigung des Seils in Abhängigkeit von y, wenn eine Länge y über eine Seite der Rolle hängt (so dass $L-y$ auf der anderen Seite herunterhängt). (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_f zu dem Zeitpunkt, an dem das ganze Seil von der Rolle heruntergerollt ist unter der Annahme, dass das Seil aus der Ruhelage mit der Länge y_0 auf der einen Seite der Rolle startet. (c) Berechnen Sie v_f für $y_0 = \frac{2}{3}L$. [*Hinweis*: Wenden Sie die Kettenregel $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$ an und integrieren Sie.]

Allgemeine Aufgaben

kompletter Lösungsweg

59 Gemäß einem vereinfachten Modell des Herzens eines Säugetiers werden bei jedem Pulsschlag ca. 20 g Blut in einem Zeitraum von 0,10 s von 0,25 m/s auf 0,35 m/s beschleunigt. Wie groß ist der Betrag der vom Herzmuskel ausgeübten Kraft?

60 Eine Person hat eine realistische Chance, einen Autounfall zu überleben, wenn die Abbremsung nicht größer als $30g$ ist. Berechnen Sie die für diese Beschleunigung notwendige Kraft, wenn die Person eine Masse von 70 kg hat. Welcher Weg wird zurückgelegt, wenn diese Person von 90 km/h zum Stillstand gebracht wird? (g ist die Fallbeschleunigung im Gegensatz zur Gewichtseinheit g.)

61 Ein Portemonnaie (Masse 2,0 kg) fällt vom schiefen Turm von Pisa 55 m frei nach unten und erreicht den Boden mit einer Geschwindigkeit von 29 m/s. Wie groß war die durchschnittliche Kraft des Luftwiderstandes?

62 Ein Angler in einem Boot benutzt eine Angelschnur mit einer Zugfestigkeit von 45 N. (a) Wie schwer kann ein Fisch sein, wenn der Angler ihn mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht nach oben zieht? (b) Wie groß kann das maximale Gewicht eines Fisches sein, wenn der Angler ihn mit 2,0 m/s² nach oben beschleunigt?

63 Ein Aufzug in einem Hochhaus darf mit einer maximalen Geschwindigkeit von 3,5 m/s nach unten fahren. Wie groß muss die Zugkraft in dem Seil sein, um diesen Aufzug über eine Entfernung von 3,0 m anzuhalten, wenn er, einschließlich Fahrgästen, eine Masse von 1300 kg hat?

64 Die Laufkatze eines Krans im Punkt P in ▸ Abbildung 4.53 bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

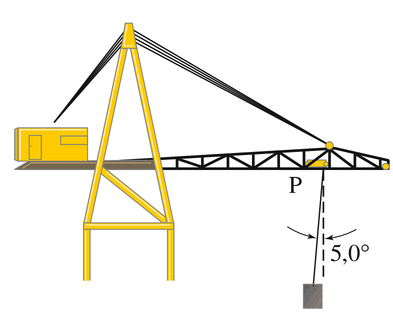


Abbildung 4.53 Aufgabe 64.

nach rechts und die Last (Masse 800 kg) hängt in einem Winkel von 5° zur Vertikalen, wie dargestellt. Wie groß ist die Beschleunigung der Laufkatze und der Last?

65 Ein nasses Stück Seife ($m = 150$ g) gleitet frei eine 3,0 m lange Rampe mit einem Neigungswinkel von 9,5° hinunter. Wie lange dauert es, bis das Stück den Boden erreicht? Wie würde sich die Antwort verändern, wenn das Stück Seife eine Masse von 300 g hätte?

66 Ein Block (Masse m_1) liegt auf einer reibungsfreien schiefen Ebene und ist mittels eines masselosen Seils, das über eine Rolle läuft, mit einer Masse m_2 verbunden, wie in ▸ Abbildung 4.54 dargestellt. (a) Bestimmen Sie eine Formel für die Beschleunigung des Systems in Bezug auf m_1, m_2, θ und g. (b) Welche Bedingungen gelten für die Massen m_1 und m_2, wenn die Beschleunigung in einer Richtung (z. B. m_1 die Ebene hinunter) oder in entgegengesetzter Richtung verlaufen soll?

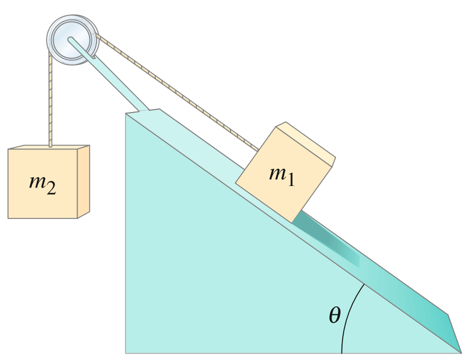


Abbildung 4.54 Aufgaben 66 und 67.

67 (a) Wie groß ist die Beschleunigung des Systems in ▸ Abbildung 4.54, wenn $m_1 = m_2 = 1{,}00$ kg und $\theta = 30°$? (b) Wie groß muss die Masse m_2 sein, wenn $m_1 = 1{,}00$ kg und $\theta = 30°$ und das System im Stillstand verharrt? (c) Berechnen Sie die Zugkraft im Seil für (a) und (b).

68 Die Massen m_1 und m_2 gleiten auf den glatten (reibungsfreien) schiefen Ebenen, die in ▸ Abbildung 4.55 dargestellt sind. (a) Bestimmen Sie eine Formel für die Beschleunigung des Systems in Bezug auf m_1, m_2, θ_1, θ_2 und g. (b) Welcher Wert für m_2 würde das System im Stillstand halten, wenn $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 20°$ und $m_1 = 5{,}00$ kg? Wie groß wäre in diesem Fall die Zugkraft in dem Seil?

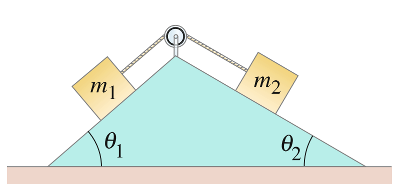


Abbildung 4.55 Aufgabe 68.

69 Wenn ein Radfahrer mit einer Masse von 65 kg (einschließlich Fahrrad) einen Hügel mit einer Neigung von 6° mit einer gleich bleibenden Geschwindigkeit von 6,0 km/h auf Grund des Luftwiderstandes hinunterrollen kann, wie viel Kraft muss dann ausgeübt werden, um den Hügel mit derselben Geschwindigkeit (und bei gleichem Luftwiderstand) hinaufzufahren?

70 Eine Person (Masse 75,0 kg) steht in einem Aufzug auf einer Waage. Was zeigt die Waage (in N und in kg) an, wenn (a) sich der Aufzug im Stillstand befindet, (b) der Aufzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 3,0 m/s nach oben fährt, (c) der Aufzug mit 3,0 m/s nach unten fährt, (d) der Aufzug mit 3,0 m/s^2 nach oben beschleunigt, (e) der Aufzug mit 3,0 m/s^2 nach unten beschleunigt?

71 Ein Städteplaner arbeitet an der Neuplanung eines hügeligen Stadtteils. Ein wichtiger Gesichtspunkt ist die Frage, wie steil die Straßen sein dürfen, damit auch Autos mit leistungsschwächeren Motoren die Hügel hinaufkommen, ohne langsamer zu werden. Tatsache ist, dass ein bestimmtes kleines Auto mit einer Masse von 1100 kg auf einer ebenen Straße aus dem Stillstand in 14,0 s auf 21 m/s (75 km/h) beschleunigen kann. Berechnen Sie unter Verwendung dieser Angaben die maximale Steilheit eines Hügels.

72 Ein Radfahrer kann einen Hügel mit einer Neigung von 5,0° mit einer konstanten Geschwindigkeit von 6,0 km/h hinunterrollen. Berechnen Sie (a) den Wert der Konstanten c und (b) die durchschnittliche Kraft, die ausgeübt werden muss, um den Hügel mit 20,0 km/h hinunterzufahren, wenn die Kraft des Luftwiderstandes proportional zur Geschwindigkeit v ist, so dass $F_{\text{Luft}} = cv$. Die Masse von Radfahrer und Fahrrad beträgt 80,0 kg.

73 Franziska, die Physikexperimente mag, lässt ihre Armbanduhr an einem dünnen Stück Faden baumeln, während das Düsenflugzeug, in dem sie sich befindet, vom Dulles Airport abhebt (▸ Abbildung 4.56). Sie bemerkt, dass der Faden mit der Vertikalen einen Winkel von 25° bildet, als das Flugzeug beim Start beschleunigt, was ca. 18 Sekunden dauert. Schätzen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs beim Abheben ab.

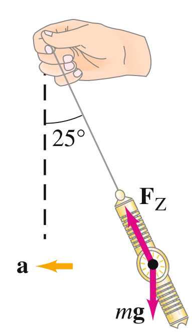


Abbildung 4.56 Problem 75.