

LEHRBUCH

Peter Albrecht

Finanzmathematik für Wirtschaftswissen- schaftler

Grundlagen, Anwendungsbeispiele, Fallstudien,
Aufgaben und Lösungen

4. Auflage



SCHÄFFER
POESCHEL

Urheberrechtsinfo

Alle Inhalte dieses eBooks sind urheberrechtlich geschützt.

Die Herstellung und Verbreitung von Kopien ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages gestattet.

SCHÄFFER

POESCHEL

Peter Albrecht

Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Grundlagen, Anwendungsbeispiele,
Fallstudien, Aufgaben und Lösungen

unter Mitarbeit von Sören Jensen / Christoph Mayer /
Lars Rickenberg / Marcus Roel / Patrick Schneider

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

2019
Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Autor

Prof. Dr. Peter Albrecht, Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Universität Mannheim

Dozenten finden Folienvorlagen für dieses Lehrbuch unter
www.sp-dozenten.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Print: ISBN 978-3-7910-4286-2 Bestell-Nr. 20006-0003

ePDF: ISBN 978-3-7910-4287-9 Bestell-Nr. 20006-0152

Peter Albrecht

Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler

4. Auflage, Mai 2019

© 2019 Schäffer-Poeschel Verlag für Wirtschaft · Steuern · Recht GmbH

www.schaeffer-poeschel.de

service@schaeffer-poeschel.de

Bildnachweis (Cover): shutterstock.com

Produktmanagement: Frank Katzenmayer

Lektorat: Adelheid Fleischer

Satz: Claudia Wild

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung, des auszugsweisen Nachdrucks, der Übersetzung und der Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, vorbehalten. Alle Angaben/Daten nach bestem Wissen, jedoch ohne Gewähr für Vollständigkeit und Richtigkeit.

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Ein Unternehmen der Haufe Group

Vorwort zur vierten Auflage

Auch die dritte Auflage des Lehrbuchs Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler ist von der Leserschaft dankenswerterweise freundlich aufgenommen worden, so dass eine weitere Neuauflage notwendig wurde. Dies ist auch eine Bestätigung unserer grundsätzlichen Konzeption, so dass der in den vorherigen Auflagen eingeschlagene Weg konsequent weiter beschritten wurde. Neben der theoretischen Fundierung finanzmathematischer Sachverhalte wurde weiterhin besonderes Augenmerk auf die Praxisbezogenheit und Alltagsrelevanz des vermittelten Stoffs gelegt. Hierzu wurden für jeden theoretischen Sachverhalt Anwendungsbeispiele entwickelt, die in Form von Beispielen, Aufgaben (mit zugehörigen Lösungsskizzen) und teilweise auch Fallstudien behandelt werden. Nach wie vor wird der Schwerpunkt auf Finanzinvestitionen (Investments) gelegt und Sachinvestitionen werden nur gestreift, da diese üblicherweise ausführlich in Veranstaltungen zur »Investition und Finanzierung« behandelt werden. Nach wie vor beschränken wir uns des Weiteren auf den Fall der Sicherheit, d. h. es wird stets von sicheren Zahlungsgrößen und ebenso von sicheren Verzinsungshöhen ausgegangen.

Die gesamte Präsentation ist für die vierte Auflage noch einmal sprachlich und didaktisch sorgfältig und umfassend überarbeitet worden. Größere inhaltliche Erweiterungen betreffen im Haupttext neue Abschnitte über »Negative Verzinsung und Niedrigzinsphase« (Abschnitt 1.2.3) und die »Cost-Average-Strategie« (Abschnitt 3.2.7) sowie neue Anhänge über ein Gedankenexperiment, das die Wirkung des Zinseszineffektes über sehr lange Zeiträume veranschaulichen soll, den »Josephspfennig« (Anhang 1F), und zur »Verzinsung nach Steuern« (Anhang 1G). Des Weiteren wurden in Kapitel 5 über dreißig neue Aufgaben (mit Lösungen) aufgenommen, die sich aus früheren Klausuraufgaben unserer Mannheimer Veranstaltung speisen und für deren Konzeption Herr M.Sc. Lars Rickenberg federführend verantwortlich war.

Zur Unterstützung des Services für Dozenten, die mit unserem Lehrbuch arbeiten bzw. arbeiten wollen, haben wir ferner Folienvorlagen für die Inhalte des Buchs erarbeitet, die unter www.sp-dozenten.de (Registrierung erforderlich) abrufbar sind.

Auf der Internetseite www.finanzmathematik-buch.de werden wir weiterhin zeitnah uns bekannt gewordene Druckfehler (die trotz allem Bemühen eine offenbar unausrottbare Spezies darstellen) einstellen. Unsere geneigten Leser bitten wir herzlich, uns per Mail (aber auch auf jedem anderen Wege) an risk@bwl.uni-mannheim.de über entsprechende Druckfehler zu informieren.

Bei der Vorbereitung und Ausarbeitung der vierten Auflage des vorliegenden Lehrbuchs haben wir wiederum vielfältige Unterstützung erfahren dürfen, wofür wir zu herzlichem Dank verpflichtet sind. Für ihre Unterstützung bei der Durchführung der Veranstaltungen danken wir Herrn M.Sc. Lars Rickenberg sowie unseren Tutoren, den Damen und Herren Luisa Balk, Gero Baltschukat, Kerem Belek, Hannah Brune, Anna Buschmann, Alisa Büchner, Kristina Chekhovich, Yue Chen, Hedwig Czaja, Felix Eck, Sonja Erkert, Nicole Fauß, Theresa Goeken, Sebastian Gänz, Johan-

nes Götz, Felix Hache, Sebastian Hanson, Selina Hauch, Tim Hildebrand, Christian Hilscher, Niels Hörber, Manuel Issel, Maryna Ivantseva, Kai Kanthak, Gloria Koepke, Florian Kreis, Nick Krey, Anne Kuhn, Timo Lehn, Nathalie Lepold, Nele Lerch, Kaan Leutert, Alisa Mattes, Niklas Murken, Alina Mutschal, Hannes Münstermann, Benedikt Neining, Patrick Plikat, Emily Poss, Peter Redler, Niklas Reinhardt, Luisa Ritzkat, Lukas Rodrian, Moritz Rombach, Lena Rudat, Lukas Rüth, Michael Schmitt, Mandy Schneider, Justin Schoenfeld, Peter Schüller, Fabian Sinn, Marco Soworka, Stefanie Spreng, Christopher Stach, Justus Stomper, Jan Thesing, Svenja Tobies, Till Völcker, Julia Wagner, Sophia Wickel, Lara Wörner und Sin Yin Yip. Des Weiteren bedanken wir uns bei zahlreichen Teilnehmern dieser Veranstaltungen für vielfältige Anregungen.

Besonderer Dank gebührt meinem Sekretariat, Frau Bettina Muser. Herrn Frank Katzenmayer sowie Frau Adelheid Fleischer vom Schäffer-Poeschel Verlag schulde ich einmal mehr großen Dank für die aufmerksame und engagierte Begleitung dieses Buchprojekts.

Mannheim, im Januar 2019

Peter Albrecht

Vorwort zur ersten Auflage

Finanzmathematische Fragestellungen und Zusammenhänge durchziehen nicht nur die wirtschaftswissenschaftliche Praxis, sondern auch den privaten Alltag. Die Verzinsung von Sparkonten, Formen der Vermögensanlage, der Ratenkauf, die Automobilfinanzierung, generell die Aufnahme und Tilgung von Darlehen und Krediten sowie die Verrentung von Kapital sind nur einige Beispiele hierfür.

Aufgrund dieser besonderen Relevanz finanzmathematischer Grundlagen wurde im Rahmen der neuen wirtschaftswissenschaftlichen Bachelorstudiengänge der Universität Mannheim eine eigenständige Veranstaltung in Finanzmathematik konzipiert, die diese Grundlagen vermittelt. Das vorliegende Lehrbuch dokumentiert die Inhalte dieser Veranstaltung, arrondiert um einige weitere Lehrinhalte. Neben der theoretischen Fundierung finanzmathematischer Sachverhalte wurde besonderes Augenmerk auf die Praxisbezogenheit und Alltagsrelevanz des vermittelten Stoffs gelegt. Hierzu wurden für jeden theoretischen Sachverhalt Anwendungsbeispiele entwickelt, die in Form von Aufgaben (mit zugehörigen Lösungsskizzen) und auch Fallstudien weitergeführt werden.

Gemäß dem einführenden Charakter der Veranstaltung war eine Beschränkung des Stoffs unumgänglich. Zum einen wird der Schwerpunkt auf Finanzinvestitionen (Investments) gelegt, Sachinvestitionen hingegen werden nur gestreift, da diese üblicherweise ausführlich in Veranstaltungen zu »Investition und Finanzierung« behandelt werden. Zum anderen beschränken wir uns auf den Fall der Sicherheit, d. h. es wird stets von sicheren Zahlungsgrößen und ebenso von sicheren Verzinsungshöhen ausgegangen.

Zur Verbesserung der Interaktion mit unseren Lesern werden wir auf der Internetseite www.finanzmathematik-buch.de eine Rubrik »Korrekturen« einrichten, auf der wir dann zeitnah uns bekannt gewordene Druckfehler (die trotz allem Bemühen eine offenbar unausrottbare Spezies darstellen) einstellen werden. Unsere geneigten Leser bitten wir herzlich, uns per Mail (aber auch auf jedem anderen Wege) an risk@bwl.uni-mannheim.de über entsprechende Druckfehler zu informieren.

Bei der Vorbereitung und Ausarbeitung des vorliegenden Lehrbuchs haben wir vielfältige Unterstützung erfahren dürfen, wofür wir zu herzlichem Dank verpflichtet sind. Hervorzuheben sind hier insbesondere die Herren cand. rer. oec. Simon Hilpert und cand. rer. oec. Frank Schilbach, die eine Vielzahl von Aufgaben und Lösungen konzipiert haben, die in das vorliegende Lehrbuch aufgenommen wurden. Besondere Verdienste bei der Entwicklung und Optimierung der Veranstaltung in Finanzmathematik haben sich auch Herr Dipl.-Kfm. Cemil Kantar, MBA sowie Frau cand. rer. oec. Julia Hämmerle und Frau cand. rer. oec. Juliane Moldenhauer erworben, unser großer Dank gilt des Weiteren Herrn cand. rer. oec. Maxim Beizerov, Herrn stud. rer. oec. Samir Irzayev, Herrn cand. rer. oec. Sören Jensen, Herrn cand. rer. oec. Christopher Kanitz, Frau stud. rer. oec. Anna Knaub sowie Frau cand. rer. oec. Dianne Rauschenbusch. Schließlich

bedanken wir uns bei zahlreichen Teilnehmern dieser Veranstaltung für vielfältige Anregungen.

Besonderer Dank gebührt des Weiteren unserem Sekretariat, geleitet von Frau Traudel Walther, für den stets bewährten und nie nachlassenden Einsatz. Herrn Katzenmayer vom Schäffer-Poeschel Verlag schulden wir großen Dank für die aufmerksame und engagierte Begleitung dieses Buchprojekts.

Last but not least at all, dankt PA seiner Ehefrau Maja Sommer und seiner Tochter Sarah Anthea Albrecht für vielfältige außerfachliche Anregungen und vor allem für ihre Zuwendung. CM dankt seinen Eltern für ihren liebevollen Rückhalt und ihre uneingeschränkte Unterstützung.

Mannheim, im Mai 2007

Peter Albrecht/Christoph Mayer

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Vorwort zur vierten Auflage | V |
| Vorwort zur ersten Auflage | VII |
| <hr/> | |
| 1 Grundlagen | 1 |
| 1.1 Einführung | 1 |
| 1.1.1 Finanzmathematische Problemstellungen | 1 |
| 1.1.2 Zahlungsströme | 3 |
| 1.1.3 Zentrale Prämisse: Sichere Zahlungen | 9 |
| 1.2 Zinsrechnung | 9 |
| 1.2.1 Einführung | 9 |
| 1.2.2 Zinseszinsrechnung (geometrische Verzinsung) | 11 |
| 1.2.3 Exkurs: Negativzinsen und Niedrigzinsphase | 18 |
| 1.2.4 Zinsstaffel | 19 |
| 1.2.5 Unterjährige geometrische Verzinsung und kontinuierliche Verzinsung | 21 |
| 1.2.6 Gemischte Verzinsung | 27 |
| 1.3 Bewertung von Zahlungsströmen: Barwert | 27 |
| 1.4 Kapitalwert | 34 |
| 1.5 Aufgaben zu Kapitel 1 | 36 |
| Anhang 1A: Tagzählung bei der Konvention 30/360 | 42 |
| Anhang 1B: Zeit einer Kapitalverdoppelung | 43 |
| Anhang 1C: Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus ... | 44 |
| Anhang 1D: Binomische Formel und binomische Reihe | 48 |
| Anhang 1E: Nominelle Zinsen und Realzinsen | 49 |
| Anhang 1F: Der Josephspfennig | 51 |
| Anhang 1G: Verzinsung nach Steuern | 52 |
| <hr/> | |
| 2 Renten- und Tilgungsrechnung | 55 |
| 2.1 Rentenrechnung | 55 |
| 2.2 Tilgungsrechnung | 64 |
| 2.3 Fallstudie: Automobilfinanzierung | 69 |
| 2.4 Aufgaben zu Kapitel 2 | 71 |
| Anhang 2A: Die geometrische Summe | 78 |
| <hr/> | |
| 3 Kurs- und Renditerechnung | 79 |
| 3.1 Kursrechnung | 79 |
| 3.2 Renditerechnung | 83 |
| 3.2.1 Vorbemerkungen | 83 |
| 3.2.2 Einperiodiges Investment | 84 |
| 3.2.3 Endfälliges mehrperiodiges Investment | 85 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.4 | Mehrperiodige Investments mit zwischenzeitlichen Rückflüssen | 87 |
| 3.2.5 | Rendite von Fondsinvestments | 97 |
| 3.2.6 | Fallstudie: Fondsinvestment | 101 |
| 3.2.7 | Exkurs: Cost-Average-Strategie | 102 |
| 3.3 | Aufgaben zu Kapitel 3 | 104 |
| | Anhang 3A: Geometrische Reihe | 111 |
| | Anhang 3B: Nullstellen von Polynomen | 112 |
| | Anhang 3C: Newton-Verfahren | 112 |
| | Anhang 3D: Interne Rendite Normalinvestment | 113 |
| | Anhang 3E: Eindeutigkeit und Positivität der internen Rendite .. | 114 |
| | Anhang 3F: Effektivzinsberechnung nach Preis- angabenverordnung | 115 |
| | Anhang 3G: Duration | 116 |
| | Anhang 3H: Zinsstrukturkurven | 117 |
| | Anhang 3I: Verhältnis von arithmetischem und geometrischem Mittel | 119 |
| | Anhang 3J: Dividendendiskontierungsmodelle (DDM) | 119 |
| | Anhang 3K: BVI-Methode | 122 |
| 4 | Lösungsskizzen zu den Aufgaben | 127 |
| 4.1 | Lösungsskizzen zu Kapitel 1 | 127 |
| 4.1.1 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 1.1 | 127 |
| 4.1.2 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 1.2 | 128 |
| 4.1.3 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 1.3 | 132 |
| 4.1.4 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 1.4 | 133 |
| 4.2 | Lösungsskizzen zu Kapitel 2 | 135 |
| 4.2.1 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 2.1 | 135 |
| 4.2.2 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 2.2 | 141 |
| 4.3 | Lösungsskizzen zu Kapitel 3 | 147 |
| 4.3.1 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 3.1 | 147 |
| 4.3.2 | Lösungsskizzen zu Abschnitt 3.2 | 151 |
| 5 | Zusätzliche Übungsaufgaben (mit Lösungen) | 161 |
| 5.1 | Zusätzliche Übungsaufgaben | 161 |
| 5.2 | Lösungen zu den zusätzlichen Übungsaufgaben | 174 |
| 6 | Elemente der mathematischen Propädeutik (mit Aufgaben und Lösungen) | 195 |
| 6.1 | Elemente der mathematischen Propädeutik | 195 |
| 6.1.1 | Aufbau des Zahlenbereichs | 195 |
| 6.1.2 | Potenzen | 199 |
| 6.1.3 | Summen- und Produktzeichen | 202 |
| 6.1.4 | Folgen und Reihen | 204 |
| 6.1.5 | Reelle Funktionen | 206 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.1.6 | Gleichungen | 208 |
| 6.2 | Formelsammlung zur mathematischen Propädeutik | 210 |
| 6.3 | Aufgaben zur mathematischen Propädeutik | 211 |
| 6.3.1 | Rechenregeln | 211 |
| 6.3.2 | Brüche | 211 |
| 6.3.3 | Potenzen | 211 |
| 6.3.4 | Wurzel | 212 |
| 6.3.5 | Logarithmus | 212 |
| 6.3.6 | Summen- und Produktzeichen | 212 |
| 6.3.7 | Auflösung von Gleichungen | 213 |
| 6.3.8 | Quadratische Gleichungen | 213 |
| 6.4 | Lösungen der Aufgaben zur mathematischen Propädeutik | 214 |
| 6.4.1 | Rechenregeln | 214 |
| 6.4.2 | Brüche | 214 |
| 6.4.3 | Potenzen | 215 |
| 6.4.4 | Wurzeln | 215 |
| 6.4.5 | Logarithmus | 215 |
| 6.4.6 | Summen- und Produktzeichen | 216 |
| 6.4.7 | Auflösen von Gleichungen | 216 |
| 6.4.8 | Quadratische Gleichungen | 218 |
| | Literatur | 221 |
| | Sachregister | 223 |

1 Grundlagen

Lernziele

- ▶ Die Finanzmathematik analysiert zeitliche Entwicklungen finanzieller Größen. Hierfür lernen Sie Zahlungsstrommodelle kennen.
- ▶ Die Zinsrechnung ist das Fundament der Finanzmathematik. Sie können mit den grundlegenden Zinsmodellen umgehen.
- ▶ Sie beherrschen die Konzepte Barwert und Kapitalwert als Basis für die Bewertung von Zahlungsströmen.

1.1 Einführung

1.1.1 Finanzmathematische Problemstellungen

Bevor wir uns näher mit grundlegenden Fragen finanzmathematischer Problemstellungen befassen, betrachten wir zur Einführung zunächst zwei motivierende Praxisbeispiele.

Beispiel 1.1 Festgeldanlage

▶▶ In $t = 0$ werde eine Festgeldanlage bei einer Bank mit einer Laufzeit von 6 Monaten getätigt. Angelegt werden 20 000 Euro, die Rückzahlung betrage 20 300 Euro. Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Anlegers lautet (Periode = 1 Monat):

$$Z = \{-20\,000, 0, 0, 0, 0, 0, 20\,300\}.$$

Aus Sicht der Bank lautet der Zahlungsstrom entsprechend

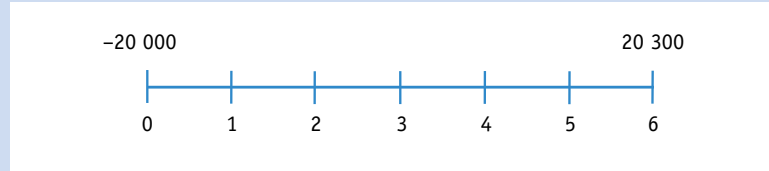
$$Z = \{20\,000, 0, 0, 0, 0, 0, -20\,300\}. \lll$$

Wir benutzen die Ergebnisse des vorstehenden Beispiels noch, um ein erstes Beispiel zur Illustration eines Zahlungsstroms zu geben. Unterstellt wird dabei die Sicht des Anlegers. Illustriert wird der zugehörige Zahlungsstrom in Abbildung 1-1.

Festgeldanlage

Abb. 1-1

Illustration Festgeldanlage (Anlegersicht)



Beispiel 1.2 Endfälliger Bankkredit

Bankkredit

►► In $t = 0$ werde ein Kredit von 100 000 Euro bei einer Bank aufgenommen und nach 5 Jahren zu einem Betrag von 123 721.64 Euro (inklusive aufgelaufener Kreditzinsen) endfällig getilgt.

Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditgebers (Bank) lautet:

$$Z = \{-100\,000, 0, 0, 0, 0, 123\,721.64\}.$$

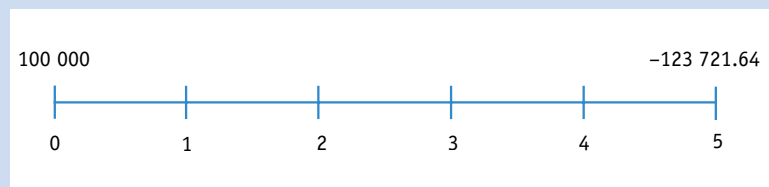
Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditnehmers ist entsprechend

$$Z = \{100\,000, 0, 0, 0, 0, -123\,721.64\}. \lll$$

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.2 lässt sich aus Sicht des Kreditnehmers wie in Abbildung 1-2 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-2

Illustration endfälliger Bankkredit (Sicht Kreditnehmer)



Die vorstehenden einführenden Beispiele sind grundsätzlich zwei erste einfache Beispiele für finanzwirtschaftliche Vorgänge. Die Analyse solcher finanzwirtschaftlichen Vorgänge ist der zentrale Gegenstand der Finanzmathematik. Typische Beispiele für finanzwirtschaftliche Vorgänge sind:

- ▶ Sparprozesse
- ▶ Entsparprozesse (Verrentung von Kapital)

- ▶ Formen der Kapital-/Geld-/Vermögensanlage (Immobilien, Aktien, Zinstitel, Investmentfonds)
- ▶ Formen der Kapital-/Geld-/Kreditaufnahme (Bankkredit, Konsumentenkredit, Automobilfinanzierung, Emission von Zinstiteln).

Finanzwirtschaftliche Vorgänge sind grundsätzlich mit zeitlichen Entwicklungen finanzieller Größen (verzinsliche Ansammlung von Kapital, Vermögensentwicklungen, Entwicklung von Einkünften, Entwicklung von Schulden/Verpflichtungen) verbunden. Sie lösen Zahlungsströme (Folgen von Zahlungen oder Folgen von Wertgrößen) aus.

Zentrale Problembereiche der Finanzmathematik sind daher die Analyse der zeitlichen Entwicklung finanzieller Größen sowie die Bewertung (Ermittlung eines Wertes bzw. Preises, Ermittlung einer Rendite) solcher finanzieller Entwicklungen. Dies geschieht etwa zu Zwecken der Ermittlung von Kauf-/Verkaufspreisen (wie hoch ist der faire bzw. angemessene Preis?), der Vermögensbewertung oder als Basis der Entscheidung über eine Vermögensanlage bzw. Kapitalaufnahme (welche Anlage besitzt die höchste Rendite bzw. welcher Kredit die geringsten Kreditkosten?).

Hinsichtlich der wirtschaftlichen Anwendungen befassen wir uns im vorliegenden Text dabei primär mit Finanzinvestitionen (auch: Investments, Kapitalanlage) und Basisfragen der Kapitalaufnahme (Tilgungsrechnung). Sachinvestitionen, beispielsweise die Anschaffung einer Maschine, werden hingegen nur gestreift (Abschnitt 1.4). Ihre Behandlung ist Gegenstand der Investitionsrechnung. Gleiches gilt für weitergehende Fragen der Finanzierung, etwa im Kontext der Unternehmensfinanzierung.

1.1.2 Zahlungsströme

Wie bereits ausgeführt, sind finanzwirtschaftliche Vorgänge mit zeitlichen Entwicklungen finanzieller Größen (verzinsliche Ansammlung von Kapital, Vermögensentwicklung, Entwicklung von Einkünften, Entwicklung von Schulden/Verpflichtungen) verbunden. Aus einer mehr formalen Perspektive gesehen, beschäftigt sich die Finanzmathematik daher mit der Analyse von Zahlungsströmen bzw. Wertentwicklungen und stellt Methoden für entsprechende Analysen bereit. Im Weiteren sprechen wir der Einfachheit halber generell von einem Zahlungsstrom (englisch: Cash Flow), auch dann, wenn keine konkreten Zahlungen erfolgen, sondern beispielsweise nur Werte oder Preise zu sukzessiven Zeitpunkten beobachtet bzw. ermittelt werden.

In einem ersten Schritt ist es vor diesem Hintergrund daher erforderlich, Modelle zur Quantifizierung von Zahlungsströmen zu entwickeln. Zu spezifizieren ist dabei zunächst, zu welchen Zeitpunkten die Zahlungen erfolgen. Im einfachsten Fall (*Basis-Zeitmodell*) gehen wir von den Zeitpunkten

$$\{0, 1, 2, \dots, T\}$$

als Zahlungszeitpunkten aus.

Zahlungsströme,
Wertentwicklungen

Bewertung

Finanzinvestitionen

Analyse von Zahlungs-
strömen

Basis-Zeitmodell

Ein- und Auszahlungen

Die Zahlungszeitpunkte sind in diesem Zeitmodell äquidistant, d. h. die Perioden zwischen den Zeitpunkten besitzen alle eine identische Länge. Standardbeispiele für im Weiteren betrachtete Perioden sind Monate und Jahre. Der Zeitpunkt 0 entspricht dabei typischerweise dem Zeitpunkt der Anlage oder dem Beginn der Planungsperiode (beispielsweise dem aktuellen Zeitpunkt, kurz: heute).

Die Zahlungen sind dabei entweder

- ▶ Einzahlungen $ez_t \geq 0$ (Geldfluss mit einem positivem Vorzeichen) zum Zeitpunkt t oder
- ▶ Auszahlungen $az_t \geq 0$ (Geldfluss mit einem negativem Vorzeichen) zum Zeitpunkt t oder
- ▶ Salden $ez_t - az_t$ von Ein- und Auszahlungen.

Im Rahmen einer allgemeineren Notation unterscheiden wir dabei nicht mehr zwischen Ein- und Auszahlungen oder Salden von Ein- und Auszahlungen, sondern bezeichnen generell mit z_t die Zahlung zum Zeitpunkt t . Gilt zu einem Zeitpunkt $z_t = 0$, so erfolgt zu diesem Zeitpunkt entweder keine Zahlung oder aber Ein- und Auszahlungen bestehen in gleicher Höhe und weisen somit einen Saldo von Null auf.

Zu unterscheiden sind bei Betrachtung der Zeitmenge $\{0, 1, \dots, T\}$

- ▶ *Vorschüssige Zahlungen:* Die Zahlungen z_0, z_1, \dots, z_{T-1} erfolgen jeweils zu Beginn der Perioden $1, \dots, T$.
- ▶ *Nachschüssige Zahlungen:* Die Zahlungen z_1, \dots, z_T erfolgen jeweils am Ende der Perioden $1, \dots, T$.

Vor- und nachschüssige Zahlungen

Abbildung 1-3 illustriert das vorstehend dargelegte Zeit- und Periodenmodell im Falle vor- wie nachschüssiger Zahlungen.

Ob eine Zahlung vor- oder nachschüssig ist, ergibt sich aus dem jeweiligen Problemkontext. Wenden wir uns einigen typischen Fällen zu.

Fall 1 beinhaltet den Zahlungsstrom ez_1, \dots, ez_T , die entsprechende Investition ist durch nachschüssige positive Rückflüsse gekennzeichnet. Aber auch entsprechende vorschüssige Rückflüsse sind denkbar, etwa die in Abschnitt 2.1 behandelten vorschüssigen Rentenzahlungen.

Fall 2 beinhaltet den Zahlungsstrom $\{-az_0, ez_1, \dots, ez_T\}$. Zur Durchführung der Investition (bzw. zum Erwerb des Zahlungsstroms $\{ez_1, \dots, ez_T\}$) ist eine (vorschüssige) Anfangsauszahlung notwendig. Dieser folgen dann nur noch Einzahlungen. Der Fall 2 entsteht aus dem Fall 1, indem man diesen um die anfängliche Investitionsauszahlung bzw. um den anfänglichen Preis der Investition ergänzt.

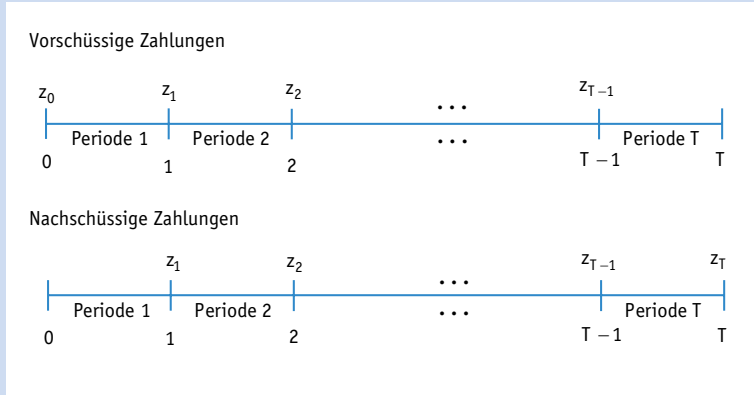
Eine leichte Verallgemeinerung von Fall 2 stellt der Zahlungsstrom $\{-az_0, z_1, \dots, z_T\}$ dar, hier folgen auf eine vorschüssige Anfangsauszahlung nachschüssige Zahlungssalden. Ein zentraler Fall hierbei ist das Vorliegen ausschließlich nicht-negativer Zahlungssalden ($z_t \geq 0$ für $t = 1, \dots, T$), von denen mindestens einer positiv ($z_t > 0$) ist. Wir sprechen in diesem Fall von einer *Standardinvestition* bzw. in unserem primären Anwendungsfall von einem *Standardinvestment*.

Standardfälle

Standardinvestition,
Standardinvestment

Abb. 1-3

Diskretes Zeit- und Periodenmodell



Alle vorstehend behandelten Zahlungsströme sind unter den allgemeinen Zahlungsstrom

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_T\}$$

subsumierbar, wenn man den Spezialfall $z_0 = 0$ zulässt.

Der Zahlungsstrom $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_T\}$ ist der *Basis-Zahlungsstrom*, von dem wir im Weiteren zunächst ausgehen.

Eine weitere Konsequenz des diskreten Zeit- und Periodenmodells in Abbildung 1-3 ist es, dass keine unterperiodigen Zahlungen erfolgen. Liegen im Anwendungsfall unterperiodige Zahlungen vor, so muss – zumindest bei Verwendung dieses Zeit- und Periodenmodells – eine Vereinbarung darüber getroffen werden, ob eine solche Zahlung dem Periodenanfang oder dem Periodenende zugeordnet wird.

Wir kommen damit zu einer Reihe von weiteren Praxisbeispielen.

Ein Festzinstitel bzw. Bond (in Abhängigkeit von der empirischen Ausgestaltungsform auch: Schuldverschreibung, Obligation, Anleihe, Rententitel) ist im Standardfall (Standardbond, Straight Bond) gekennzeichnet durch eine feste Laufzeit, jährlich nachschüssige Zinszahlungen (Kupon) in fester Höhe über die gesamte Laufzeit sowie einer Rückzahlung des Kreditbetrags (Nennwert) am Ende der Laufzeit (endfällige Tilgung). Die jährlich gleich hohen Zinszahlungen werden durch Festlegung des sogenannten Nominalzinses des Bonds bestimmt und ergeben sich durch Multiplikation des Nennwerts mit diesem Nominalzins.

Basis-Zahlungsstrom

Festzinstitel, Bond

Beispiel 1.3 Festzinstitel

►► In $t = 0$ wird ein Festzinstitel mit einer Laufzeit von 3 Jahren und mit einem Nennwert in Höhe von 50 000 Euro zu pari (d. h. zum Nennwert) erworben. Der Zinstitel weist einen jährlich nachschüssigen Nominalzins in Höhe von 2,5% des Nennwerts auf und werde endfällig getilgt.

Zahlungsstrom aus Sicht des Emittenten des Zinstitels:

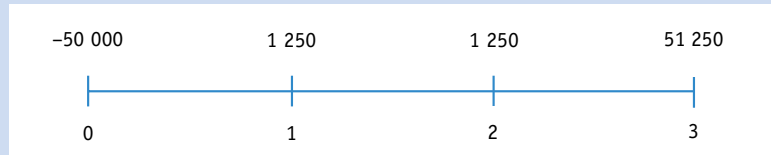
$$Z = \{50\,000, -1\,250, -1\,250, -51\,250\}.$$

Zahlungsstrom aus Sicht des Anlegers (Investor) in den Zinstitel:

$$Z = \{-50\,000, 1\,250, 1\,250, 51\,250\}.$$

Aus Sicht des Anlegers in den Zinstitel liegt somit ein Standardinvestment vor. ◀◀

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.3 lässt sich aus Sicht des Anlegers wie in Abbildung 1-4 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-4**Illustration Festzinstitel (Sicht Anleger)**

**Nullkuponanleihe,
Zerobond**

Eine *Nullkuponanleihe* bzw. ein *Zerobond* ist ein Zinstitel, bei dem keine Zinszahlungen erfolgen, sondern *nur* eine endfällige Tilgung. Die wegfallenden Zinszahlungen werden kompensiert durch die Vornahme eines Abschlags (Diskont) auf den vom Investor bei Kauf zu entrichtenden Preis. Weist der Rückfluss zum Tilgungstermin die Höhe 1 auf, so spricht man von einem *Einheitszerobond*.

Beispiel 1.4 Nullkuponanleihe

►► In $t = 0$ werde die Nullkuponanleihe zu 82 307,29 Euro erworben und in $t = 4$ zu 100 000 Euro getilgt.

Resultierender Zahlungsstrom aus Sicht des Investors:

$$Z = \{-82\,307,29, 0, 0, 0, 100\,000\}.$$

Auch in diesem Fall liegt (aus Investorsicht) ein Standardinvestment vor. ◀◀

Beispiel 1.5 Ratenkredit

►► Der Kredit aus Beispiel 1.2 werde nun nicht endfällig, sondern in fünf gleich hohen Raten (inkl. anteiliger Kreditzinsen) in Höhe von 21 530 Euro zurückgezahlt. Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditnehmers lautet nun

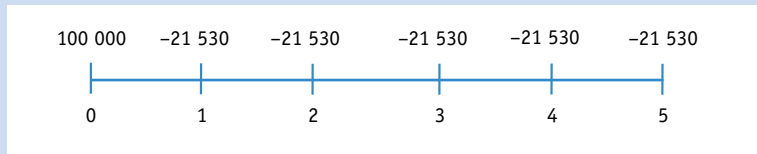
$$Z = \{100\,000, -21\,530, -21\,530, -21\,530, -21\,530, -21\,530\}.$$

und aus Sicht der Bank entsprechend

$$Z = \{-100\,000, 21\,530, 21\,530, 21\,530, 21\,530, 21\,530\}.$$

Erneut liegt – diesmal aus Sicht der Bank – ein Standardinvestment vor. ◀◀

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.5 lässt sich aus Sicht des Kreditnehmers wie in Abbildung 1-5 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-5**Illustration Ratenkredit (Sicht Kreditnehmer)**

Wenden wir uns damit dem *verallgemeinerten Zeitmodell* und dem korrespondierenden verallgemeinerten Zahlungsstrom zu. Beim verallgemeinerten Zeitmodell wird das Vorliegen einer Äquidistanz der Zahlungen aufgegeben. Wir gehen dazu aus von Zahlungszeitpunkten der Form $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Dieser Ansatz erlaubt insbesondere die Erfassung von »unterperiodigen« (z. B.: unterjährigen) Zahlungen. Zum Zeitpunkt t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) erfolgt nun eine Zahlung der Höhe $z(t_i)$, d. h., der verallgemeinerte Zahlungsstrom hat die generelle Form:

$$Z = \{z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)\}.$$

Geht man, wie in praxi üblich, zu Zwecken der Zinsbestimmung von Jahren als Standardperioden aus, so stellt sich bei unterjährigen Zahlungsvorgängen die Frage nach der Erfassung von Teilperioden. Man spricht von *Tagzählungsmethoden (Day Count)* oder auch von *Zinskonventionen*. Dabei ist sowohl die Anzahl B der Tage eines Jahres festzulegen (Standardbeispiele: $B = 365$, $B = 360$) als auch die Anzahl A der Tage der Teilperiode. Man spricht dann von einer Tagzählungsmethode nach der Konvention A/B . Beispiele hierfür sind die Konventionen echt/echt bzw. actual/actual oder 30/360 oder echt/365. Echt (actual) bedeutet hierbei die exakte Bestimmung der Zinstage. Die Konvention 30/360 bedeutet beispielsweise, dass volle Monate zu 30 Zinstagen und das Jahr zu 12 Monaten (360 Tage) angesetzt werden (auch: kaufmänn-

Ratenkredit

Verallgemeinerter Zahlungsstrom

Zinskonventionen

nische Konvention). Eine eingehendere Darstellung der 30/360-Konvention befindet sich in Anhang 1A. Die 30/360-Konvention beinhaltet insbesondere die Vereinbarung, dass bei Monaten mit 31 Tagen der 31. Tag kein Zinstag ist.

Bei allen Konventionen gelte im Folgenden grundsätzlich, dass der erste Tag (Tag der Einzahlung) als voller Zinstag gilt, der letzte Tag (Tag der Auszahlung) jedoch nicht, d. h. es wird auf die Anzahl der verstrichenen Tage abgestellt. Alternativ kann man – mit gleichem Resultat – auch vereinbaren, dass der auf die Einzahlung folgende Tag als erster Zinstag gezählt wird und der Tag der Auszahlung als letzter Zinstag.

Beispiel 1.6 Day Count

Day Count

►► Die Konvention sei echt/echt. Zwischen dem 27.02.19 und dem 10.04.19 liegen $2 + 31 + 9 = 42$ Tage. Das Jahr 2019 hat 365 Tage und somit umfasst der Zeitraum $42/365 = 0.11507$ Jahre.

Im Falle der Konvention 30/360 liegen zwischen dem 27.02.19 und dem 10.04.19 hingegen $4 + 30 + 9 = 43$ Tage, das Jahr wird zu 360 Tagen angesetzt und damit umfasst der Zeitraum $43/360 = 0.11944$ Jahre. ◀◀

Beispiel 1.7 Unterjähriger Erwerb Zinstitel

Zinstitel

►► Der Festzinstitel aus Beispiel 1.3 werde nicht bei Emission erworben, sondern erst nach 3 Monaten und zwar zu einem Preis von 50 372 Euro, die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0.25, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.

Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -50\,372, z(t_1) = 2\,500, z(t_2) = 2\,500, z(t_3) = 52\,500$. ◀◀

Beispiel 1.8 Aktieninvestment

Aktieninvestment

►► In $t = 0$ werde ein Aktieninvestment in Höhe von 20 000 Euro getätigt. Nach 6 bzw. 18 Monaten erfolgt eine Dividendenzahlung in Höhe von 200 bzw. 300 Euro und nach 27 Monaten werde das Aktieninvestment unter Realisierung eines Kursverlusts zu 19 000 Euro aufgelöst. Die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1.5, t_3 = 2.25$

Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -20\,000, z(t_1) = 200, z(t_2) = 300, z(t_3) = 19\,000$. ◀◀

Bei einem thesaurierenden Investmentfonds bzw. einem Performanceindex (Beispiel: Deutscher Aktienindex, DAX) werden die Dividenden nicht ausgeschüttet, sondern reinvestiert.

Beispiel 1.9 Thesaurierender Investmentfonds

Thesaurierender Fonds

►► In $t = 0$ werden für 10 000 Euro Anteile eines thesaurierenden Aktienfonds erworben und nach 21 Monaten verkauft, der Verkaufserlös betrage 12 700 Euro. Die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0, t_1 = 1.75$

Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -10\,000, z(t_1) = 12\,700$.

In Termen des verallgemeinerten Zahlungsstrommodells liegen bei den Beispielen 1.7 – 1.9 wiederum jeweils Standardinvestments vor. ◀◀

1.1.3 Zentrale Prämisse: Sichere Zahlungen

Zentrale Prämisse des gesamten vorliegenden Textes ist, dass alle Zahlungen sicher (determiniert, deterministisch) sind, d. h. alle Zahlungen $z(t_i)$ sind hinsichtlich ihres Eintrittszeitpunkts und ihrer Höhe nach vollständig bekannt (*Entscheidungsmodell unter Sicherheit*). Falls der reale Zahlungsstrom jedoch indeterminiert ist, so ist dies eine Annahme zur vereinfachten Abbildung der Realität oder aber auch eine didaktische Vorstufe für komplexere Modellansätze.

Bei der Analyse der praktischen Relevanz sicherer Zahlungen sind zwei Sichtweisen zu unterscheiden.

Ex ante- bzw. Planungsperspektive

Klammert man bei Festzinstiteln das »Ausfallrisiko« (Zahlungsunfähigkeit des Schuldners) aus und hält man den Titel bis zur Endfälligkeit, so resultiert ein solcher sicherer Zahlungsstrom (unsicher bleiben allerdings auch in diesem Fall die künftigen Wiederanlagebedingungen für die erfolgten Kuponzahlungen). Verkauft man den Titel vor Endfälligkeit, so resultiert jedoch ein Kursrisiko (Unsicherheit des Rückzahlungsbetrags zum Marktwert).

Bei Aktien sind die Kursentwicklungen grundsätzlich unsicher, in deutlich geringerem Ausmaß gilt dies für die Dividenden. Die Desinvestitionswerte sind bei einem Aktienengagement somit unsicher. Im Rahmen einer Planungsrechnung kann man sich in diesem Falle hilfsweise mit unterschiedlichen deterministischen Szenarien (z. B.: 3%, 7%, 10% jährliche Kursentwicklung) behelfen.

Ex post- bzw. Kontrollperspektive

Ex post, d. h. nach abgeschlossener Investition oder bei historischer Betrachtung von Investments (beispielsweise Kurszeitreihen), haben sich alle Zahlungen realisiert und sind damit determiniert.

Entscheidungsmodell
unter Sicherheit

Planungsperspektive

Kontrollperspektive

1.2 Zinsrechnung

1.2.1 Einführung

Die Zinsrechnung bildet das Fundament der Finanzmathematik. Aus wirtschaftlicher Sicht erheben Banken (wie auch andere Kreditgeber) für Kapital, das sie als Darlehen oder Kredit ausleihen, *Sollzinsen*. Auf der anderen Seite vergüten sie für Einlagen ihrer Kunden (beispielsweise Sparguthaben) *Habenzinsen*. Der erhobene bzw. der ver-

Zins als Preis

gütete Zins kann somit als Preis (pro Zeiteinheit) für die Überlassung bzw. Anlage von Kapital aufgefasst werden.

Aus einer theoretischen Sicht besteht die grundlegende Problematik bei der Bewertung eines deterministischen Zahlungsstroms (beispielsweise) der Form $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_T\}$ oder $Z = \{z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)\}$ darin, dass die Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen, d. h. nicht direkt vergleichbar sind. Zentraler Schlüssel zur Vornahme einer Bewertung ist dann die Verwendung eines Modells für den Prozess der Kapitalverzinsung (Zinsmodell).

Wir gehen dabei im Rahmen des weiteren Lehrtexts stets von einem einheitlichen deterministischen Zins aus. Die Modellannahme der Sicherheit erstreckt sich damit gleichermaßen auf die Höhe der angenommenen Verzinsung. Der über die gesamte Periode bestehende einheitliche Zins (bzw. allgemeiner die in den einzelnen Subperioden bestehenden Zinsen) ist (bzw. sind) bekannt.

Als grundlegendes Zinsmodell betrachten wir im Weiteren das Modell eines *vollkommenen Kapitalmarkts* in diskreter Zeit mit einem Periodenzinssatz $r > 0$. Die Bedingung des vollkommenen Kapitalmarkts bedeutet dabei, dass zu r beliebig hohe Geldbeträge angelegt und ebenso beliebig hohe Kredite aufgenommen werden können. Soll- und Habenzinsen sind somit identisch. Diese nicht realitätskonforme Prämisse (in der Bankenpraxis ist der Sollzins immer höher als der Habenzins) dient der Vereinfachung der im Weiteren durchgeführten Berechnungen. Bei einem gespaltenen Zins wären Einzahlungen mit dem Habenzins zu bewerten und Auszahlungen mit dem Sollzins. Dies ist dem Grunde nach unproblematisch, führt aber zu komplexeren Ausdrücken. Aus diesem Grund verzichten wir im Weiteren auf diese erweiterte Vorgehensweise und arbeiten mit einem einheitlichen Soll- und Habenzins r . Dieser Zinssatz r ist dabei ferner fristigkeitsunabhängig, d. h. unabhängig von der Dauer der Kapitalanlage bzw. von der Laufzeit des Kredits. Der Fall fristigkeitsabhängiger Zinsen wird einführend in Anhang 3G dargestellt.

Anmerkung: Die im Haupttext betrachteten Zinsgrößen sind ausschließlich *nominelle* Zinsen. Sie bestimmen die nominelle Entwicklung des Vermögens (die Wertentwicklung bspw. in Euro oder US-Dollar). Neben diese rein nominelle Betrachtung tritt eine Analyse der Wertentwicklung in *Kaufkrafttermen* (reale Wertentwicklung), d. h. die Berücksichtigung der Wirkung der Inflation auf die Wertentwicklung des Vermögens. Die Grundlagen für eine solche Analyse werden in Anhang 1E bereitgestellt.

Wir führen zunächst eine Reihe von Standardnotationen ein:

- ▶ die Größe p bezeichne den *Zinsfuß* (z. B.: 5),
- ▶ die Größe $r = p/100$ bezeichne den *Zinssatz* (z. B.: 5% bzw. 0.05),
- ▶ die Größe $q = 1+r$ bezeichne den *Aufzinsungsfaktor* (z. B.: 1.05),
- ▶ die Größe $v = q^{-1} = 1/q = 1/(1+r)$ bezeichne den *Abzinsungs-* bzw. *Diskontierungsfaktor* (z. B.: $1.05^{-1} = 0.9524$).
- ▶ Ferner bezeichne die Größe K_0 im Falle einer Kapital- bzw. Vermögensanlage den anfänglichen Stand eines Kapitals bzw. die anfängliche Höhe eines Vermögens; im Falle einer Kapitalaufnahme (Kredit, Darlehen, Hypothek) ent-

Vollkommener
Kapitalmarkt

Soll- und Habenzins

Nominelle Zinsen

Zinsgrößen