GRUNDSCHULE MATHEMATIK

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Böckmann, Peter Ludes-Adamy, Corinne Odermatt, Melanie Simonini-Widmann, Alexandra Tanner

Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen

Band 1a: Lernumgebungen für heterogene Gruppen

Schwerpunkt 1. bis 3. Schuljahr

Klett Kallmeyer

Download-Material

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Impressum

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Böckmann, Peter Ludes-Adamy, Corinne Odermatt,
Melanie Simonini-Widmann, Alexandra Tanner
Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen
Band 1a: Lernumgebungen für heterogene Gruppen (Schwerpunkt 1. bis 3. Schuljahr)

Das vorliegende E-Book folgt der Buchausgabe: 1. Auflage 2024

Redaktion: Stafan Hellriegel, Berlin
E-Book-Erstellung: Friedrich Verlag GmbH

ISBN: 978-3-7727-1709-3

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Böckmann, Peter Ludes-Adamy,
Corinne Odermatt, Melanie Simonini-Widmann, Alexandra Tanner

Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen

Band 1a
Lernumgebungen für heterogene Gruppen
(Schwerpunkt 1. bis 3. Schuljahr)

Klett | Kallmeyer

Inhalt

Vorwort

Mathematisches Lernen und Spiel(-en) zu verbinden, ist für viele noch immer schwer vorstellbar. Einen spielerisch, neugierig entdeckenden Zugang zur Mathematik haben in ihrer Schulzeit nur wenige Erwachsene erlebt und man findet ihn immer noch selten in der gängigen Schullandschaft. Dies mag überraschen, gibt es auf dem Markt doch viele mathematikhaltige „Lernspiele“, die Kinder zu Hause mit viel Freude und Neugier spielen. Kartenspiele mit Zahlwerten wie z. B. UNO oder Ligretto oder Brettspiele wie z. B. das Leiterspiel oder „Mensch ärgere dich nicht!“ begleiten viele Kinder in ihrer mathematischen Entwicklung. Solche Spiele sind jedoch oft auf schnelles Reagieren ausgerichtet oder beschränken sich aus mathematischer Sicht darauf, Zahlwerte richtig zu interpretieren und mit Spielfiguren oder mit Karten entsprechend umzusetzen. Wo Entscheidungen abgewogen werden müssen, sind diese selten mathematikhaltig – oder setzen lediglich Additionen im 20er-Raum voraus. Sobald die Kinder die Funktionsweise dieser Spiele verstanden haben, lassen sich kaum neue (mathematische) Erkenntnisse gewinnen bzw. individuell neue Zusammenhänge, Strategien und Muster erschließen. Sie dienen dann meist aus mathematischer Sicht nur zum wiederholten Üben bereits verinnerlichter Fertigkeiten.

Die in diesem Band vorliegenden spielerischen Lernumgebungen setzen an diesem Punkt an. Die Kinder werden in Lerngruppen gemeinsam vor Entscheidungen gestellt. Es gilt, verschiedene Möglichkeiten gemeinsam abzuwägen, zu vergleichen und sich in der Gruppe stimmig zu entscheiden. Sie verfolgen im Sinne von Vygotsky damit das Ziel, gemeinsam die eigenen kognitiven Grenzen zu überschreiten und Probleme in der Gruppe zu lösen.

> Was das Kind heute in Zusammenarbeit und unter Anleitung vollbringt, wird es morgen selbständig ausführen können. Und das bedeutet: Indem wir die Möglichkeiten eines Kindes in der Zusammenarbeit ermitteln, bestimmen wir das Gebiet der reifenden geistigen Funktionen, die im allernächsten Entwicklungsstadium sicherlich Früchte tragen und folglich zum realen geistigen Entwicklungsniveau des Kindes werden. Wenn wir also untersuchen, wozu das Kind selbständig fähig ist, untersuchen wir den gestrigen Tag. Erkunden wir jedoch, was das Kind in Zusammenarbeit zu leisten vermag, dann ermitteln wir damit seine morgige Entwicklung. (Vygotsky 1987, S. 83)

Die Spiele in diesem Band sind so designt, dass die Spielsituationen die Kinder – oft unbewusst – in mathematische substanzielle Aushandlungssituationen bringen. Dabei erschließen die Lernenden Zahlenräume, üben und automatisieren Grundoperationen, erkennen und nutzen Muster, orientieren sich im Raum, machen sich mit Größen vertraut und vieles mehr. Die spielerischen Lernumgebungen sind dabei im Gegensatz zu herkömmlichen Spielen so gestaltet, dass sie auch nach mehrfachen Spielrunden noch viel Potenzial zum Entdecken mathematischer Strukturen bieten, zu gemeinsamen Diskussionen anregen und kollektive strategische Entscheidungen provozieren.

Im Zentrum steht bei allen Lernumgebungen das gemeinsame Spielen, Erkunden und Entscheiden. Damit soll ein Grundproblem der Notenschule, nämlich dass durch die gehäufte Rückmeldung von Misserfolgen die Lernmotivation und damit den Lernerfolg von langsam lernenden Kindern systematisch zerstört und so vielerorts Schulversagen mitverantwortet – wenn nicht gar auslöst – adressiert werden. Kinder lernen schnell, dass das Wettbewerbsprinzip auch in der Schule funktioniert: Wer läuft schneller, wer schießt mehr Tore, wer trommelt besser, wer zeichnet schöner, wer liest flüssiger, wer kann mehr Vokabeln? Der diesbezügliche Beitrag des ergebnisorientierten Mathematikunterrichts ist beträchtlich. Es geht vielfach nicht um ein Miteinander, sondern um den Wettbewerb gegen andere oder die Uhr: Wer rechnet schneller, wer macht weniger Fehler, wer findet das beste Beispiel, wer ist als Erstes fertig? Auch die meisten in der Schule verankerten Mathematikspiele beugen sich diesem kompetitiven Ansatz. Man denke z. B. an beliebte Spiele, wie Eckenrechnen, Wandtafelfußball oder Ähnliches. Solche Spiele führen systematisch zu einem oder wenigen gewinnenden Kindern, während die meisten Kinder verlieren. Dieser Band steuert bewusst dagegen und zeigt Möglichkeiten auf, das Potenzial des kooperativen Lernens auszuschöpfen: Kinder arbeiten zusammen und streben gemeinsame Ziele an. Erfolge werden in Kooperation erzielt, ohne dass dabei andere diskriminiert oder klein gemacht werden. Das Ziel ist es, in und mit der Gruppe Probleme zu lösen und im gemeinsamen Tun durch eigene Verantwortlichkeit im mathematischen Selbstwert „zu wachsen".

Wenn das angestrebte kooperative Design der Aufgaben nicht bei allen Lernumgebungen in letzter Konsequenz gelungen ist, liegt dies nicht an unserem Willen. Es ist vielmehr unser gemeinsamer Erfahrungshintergrund und unsere überlieferte Kultur, die es uns manchmal eventuell nicht ermöglicht hat, Lernumgebungen so kooperativ zu gestalten, wie wir es selbst gerne hätten. Auch der Spielraum in den Lernumgebungen, um weniger leistungsstarke Kinder erfolgreich zu integrieren, ist sicher noch nicht voll ausgeschöpft. Die Einschätzung über das Gelingen unseres Unterfangens steht Ihnen, liebe Leserin, lieber Leser, zu. Machen Sie das Buch zu Ihrem eigenen. Wir liefern Ihnen mit diesem Band einen Korb voller Anregungen. Wir kennen Ihre Lerngruppe nicht und denken, dass es vielfach vonnöten sein wird, die von uns entwickelten kooperativen Lernumgebungen an die jeweilige Lerngruppe anzupassen. Wir freuen uns über Kolleginnen und Kollegen, die unsere Ideen aufnehmen, weiterentwickeln und einen Mathematikunterricht konzipieren helfen, der Kinder nicht systematisch zu Verlierenden beim Mathematiklernen macht.

Auch freuen wir uns sehr, wenn Sie uns Rückmeldungen geben, wie Sie mit dem Buch arbeiten oder an welchen Stellen Sie gewinnbringende Veränderungen von Lernumgebungen vorgenommen haben. In diesem Sinne wünschen wir Ihnen spannende Mathematikmomente gemeinsam mit Ihren Lerngruppen.

Wie ist dieser Band zustande gekommen?

2020 erschienen die Bände *Mathematik kooperativ, spielen, üben, begreifen* für die Klassen 3 bis 5 bzw. 5 bis 7 (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b). Damals schien für uns, die Autoren und Autorin, das Projekt „Mathematiklernen kooperativ rahmen" nach fast 4 Jahren gemeinsamer Arbeit erfolgreich beendet. Von unterschiedlichen Seiten wurden wir, Beat Wälti von der PH Bern, Marcus Schütte von der Universität Hamburg und Rachel-Ann Böckmann von der Leibniz Universität Hannover, in der Folge darauf hingewiesen, dass es sich lohnen würde, auch für Kinder in der 1. und 2. Klasse entsprechende kooperative Lernumgebungen zu designen, zu erproben und zu publizieren. Nachdem sich im Kanton Bern Alexandra Tanner und Corinne Odermatt, zwei Expertinnen für das Lernen von Mathematik in der Eingangsstufe und Dozentinnen an der PH Bern, interessiert zeigten, an einem neuen Band tatkräftig mitzuarbeiten, und von der Universität Hamburg Peter Ludes-Adamy für eine Mitarbeit gewonnen wurde, der im Rahmen seiner Promotion kooperative Lernumgebungen für die frühe informatische Bildung entwickelt, haben wir uns an die Arbeit gemacht. Im Verlauf des Projekts hat sich mit Melanie Simonini-Widmann, eine Lehrerin der Primarstufe aus Österreich und Dozentin an der PH Tirol, als weitere Autorin zum Team gesellt, die sich insbesondere in Sachen Erprobung der Lernumgebungen verdient gemacht hat.

In den Gesprächen dieses bunt gemischten Kreises an Autorinnen und Autoren stellte sich schnell heraus, dass es für die nun bewusst sehr junge Zielgruppe der Lernenden in Bezug auf Inhalte der Lernumgebungen und anzustrebende Aushandlungsprozesse neue Akzente braucht, verfügen doch viele Lernende noch über einen wenig systematisch aufgebauten und verinnerlichten Grundstock von mathematischen Rechenfertigkeiten und mathematischen Grundvorstellungen. Somit wurde der Fokus auf das spielerische kooperative Lernen im vorliegenden Band theoretisch umfassender erarbeitet. In der Retroperspektive auf die Lernumgebungen in den beiden Bänden zu den Jahrgangsstufen 3 bis 5 und 5 bis 7 wurden alle Lernumgebungen auch schon als mathematische Lernspiele modelliert. Im Kreise des neuen Teams an Herausgeberinnen und Herausgebern wurde uns nun verstärkt bewusst, dass der Fokus auf mathematisches Spielen als ein theoretischer Grundpfeiler der von uns entwickelten Lernumgebungen zu verstehen ist, alle Lernumgebungen systematisch durchdringt und in den jungen Jahren des mathematischen Lernens noch mehr an Bedeutung gewinnen soll.

Wir sind stolz, mit diesem Band die Lücke zu schließen und kooperative spielerische Akzente für das 1. bis 3. Schuljahr, also vor allem für die 6- bis 9-Jährigen setzen zu können. Da der nun vorliegende Band den beiden bisherigen Bänden aufgrund der Abfolge der Schulstufen vorangestellt wird, nennen wir ihn Band 1a. Der bisherige Band 1 für das 3. bis 5. Schuljahr wird entsprechend zu Band 1b.

Dank

Gegenüber den Bänden 1b und 2 hat das Projekt seine Kreise deutlich vergrößert. Das Team der Autorinnen und Autoren erstreckt sich mittlerweile über drei Länder – Deutschland, Österreich und die Schweiz. Bei den Erprobungen der Lernumgebungen ist dieser Kreis noch größer geworden, sodass mittlerweile in Deutschland in den Bundesländern Hamburg und Sachsen, in Österreich in den Bundesländern Tirol und Vorarlberg, in der Schweiz in den Kantonen Bern und Solothurn, in Italien in der Provinz Südtirol und in einer Schule in Australien Lernumgebungen erprobt wurden. Dass das Projekt nun international gut verankert ist, erfüllt uns mit großer Freude. Insbesondere möchten wir folgenden Personen danken, die uns durch Erprobungen der Lernumgebungen, hilfreiche Rückmeldungen und eigene Ideen tatkräftig unterstützt haben:

- In Deutschland: Anne Lang aus Sachsen, Christiane Brix aus Hamburg und Sophie Jacobsen aus Hamburg, die in Australien eine Lernumgebung erprobt hat.
- In Österreich: Michaela Holly und Martin Ahamer aus Tirol, sowie Gabriele Erath aus Vorarlberg.
- In der Schweiz: Barbara Guggisberg, Etelka Kobrehel, Susanne Schwab, Simona Tschumi aus Bern sowie Lisa Loosli und Samuel Knüsel aus Solothurn.
- In Italien: Sonja Pichler aus Südtirol.

Ganz besonderer Dank gilt natürlich auch den vielen Kindern, die mit viel Neugier und Freude unsere Lernumgebungen bearbeitet haben und uns so unverzichtbares Feedback geben konnten. Und natürlich dürfen die Personen in unserem privaten und beruflichen Umfeld nicht vergessen werden, die sich an der Entwicklung interessiert zeigten und uns bei unserer Arbeit unterstützten.

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Böckmann, Peter Ludes-Adamy, Corinne Odermatt, Melanie Simonini-Widmann, Alexandra Tanner

Februar 2024

Lernumgebungen für einen kooperativ gestalteten Unterricht

Einleitung
Woran denken Sie bei einem Blick in den aktuellen Mathematikunterricht? An Kinder, die gemeinsam Mathematik betreiben, in Kleingruppen nach Wegen suchen und argumentativ um Lösungen ringen? Wohl eher nicht.

Wie sieht nun aber der Mathematikunterricht von Kindern in den ersten Schuljahren der Grundschule konkret aus? Meist werden Inhalte in einer Mischung aus frontalen Arbeitsphasen und selbstorganisiertem Lernen bzw. Wochenplanarbeit erarbeitet und geübt. Dies geschieht nur selten spielerisch und vor allem in nur sehr geringem Maße kooperativ, mit einem ausgeprägten inhaltlichen Schwerpunkt auf der Arithmetik. Dies ist verwunderlich, findet das alltägliche (nicht institutionell initiierte) Lernen von Kindern in den frühen Jahren der Entwicklung doch meist im Austausch mit anderen Kindern oder Eltern statt, und dies vielfach motivational spielerisch gerahmt. Zudem ist vor- und außerschulisches mathematisches Lernen nicht nur auf Zählen oder Rechnen ausgerichtet, sondern enthält etwa durch Bauen oder Spielen im Sand auch Zugänge zur Geometrie oder zum Messen. Kinder bringen somit Erfahrungen mit in die Schule, die durch spielerische, kooperative Zugänge zur Mathematik über alle mathematischen Inhalte hinweg aufgenommen werden können. Der Mathematikunterricht der Grundschule greift dieses Potenzial des Lernens bis dato kaum auf.

Auf Basis dieser Lücke in der gängigen Forschungs- und Lehrlandschaft zum Lernen von Mathematik haben die Autorinnen und Autoren des vorliegenden Bandes Lernumgebungen zum frühen Mathematiklernen entwickelt, die gerade das kooperative spielerische Lernen mit dem Fokus auf alle mathematischen Inhaltsbereiche ins Zentrum stellen. Die Lernumgebungen basieren auf einer bereits entwickelten Konzeption „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b). Diese Konzeption fußt auf der Synergie zweier theoretischer Positionen, die sich in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik in den letzten drei Jahrzehnten durchgesetzt haben und ergänzt sie um eine spieltheoretische Betrachtung des Lernens im Fach.

Beginnen wir mit den beiden theoretischen Positionen des Lernens von Mathematik, die wir diesem Band zugrunde legen. Beide Positionen distanzieren sich von behavioristisch geprägten Lerntheorien, streiten jedoch in ihrer Spezifität über ihre theoretischen Grundpositionen sowie über die Effektivität der je entwickelten mathematikdidaktischen Konzepte. Während eine Position auf Theorien des Konstruktivismus aufbaut, nimmt die andere eine interaktionistische Perspektive auf das Lernen von Mathematik ein.

Ein konstruktivistisches Verständnis von Mathematiklernen
Als Antwort auf die Frage nach dem bestmöglichen Umgang zum Lernen von Mathematik bei vielfältigen Lernausgangslagen einer heterogenen Schülerschaft hat sich in der Mathematikdidaktik seit den 1990er Jahren in Deutschland, Österreich und der Schweiz eine spezielle Form der Differenzierung – die natürliche Differenzierung (Krauthausen/Scherer 2014) – etabliert. Diese Differenzierungsform basiert auf konstruktivistischen Vorstellungen zur Entwicklung bzw. zum Lernen von Menschen. Im Zentrum des Konstruktivismus steht der Gedanke, dass Lernen ein aktiver Prozess des Individuums in Auseinandersetzung mit seiner Umwelt ist. Die Anlagen zum Lernen sind hiernach vor allem in der psychischen Konstitution des Individuums zu suchen. Eine solche konstruktivistische Sicht auf Mathematiklernen fußt auf der genetischen Epistemologie von Piaget (1974), nach der das Individuum durch Auseinandersetzung mit fordernden Lerninhalten selbstständig aktiv entdeckend Mathematik lernt (Winter 2016; Wittmann 1995). In nahezu einem Atemzug mit dem Konzept der natürlichen Differenzierung wird die besondere Passung mit sogenannten substanziellen Lernumgebungen erwähnt

(Krauthausen/Scherer 2014, S. 110). So bieten sich substanzielle Lernumgebungen aufgrund ihrer Offenheit und fachlichen Komplexität zur Umsetzung einer natürlichen Differenzierung in heterogen zusammengesetzten Lerngruppen an. Im Fokus steht dabei immer, dass alle Lernenden an einer gemeinsamen Thematik oder einem gemeinsamen Aufgabenformat arbeiten, damit im Anschluss an die Bearbeitung ein Austausch zwischen allen Lernenden ermöglicht wird, der zur Reflexion über das eigene zuvor Entdeckte anregt und das Nachvollziehen von Sichtweisen von anderen auf den mathematischen Inhalt ermöglicht (Hirt/Wälti 2010, S. 19).

Eine interaktionistische Perspektive auf Mathematiklernen

Was bedeutet nun eine interaktionistische Perspektive auf das Lernen von Mathematik im Gegensatz zu einem konstruktivistischen Lernverständnis? Wie der Name schon andeutet, versteht eine solche Perspektive die Interaktion als grundlegenden unhintergehbaren Kern von Lernprozessen. Sie lässt sich verstehen als eine alternative Sichtweise zu einem Lernverständnis des Konstruktivismus, bei dem das Lernen des Individuums ausschließlich vom Individuum und seinen Fähigkeiten bestimmt wird. Eine interaktionistische Perspektive auf Mathematiklernen begreift Lernen also als einen Prozess im Austausch mit anderen.

Hiernach lässt sich Mathematiklernen zwar weiterhin als ein Prozess verstehen, der beim Individuum zu kognitiven Umstrukturierungen führt, der aber zuvor grundlegend in Aktivitäten des Kollektivs verankert ist. Lernen findet so sowohl im Inneren eines Individuums, im Sinne einer kognitiven Umstrukturierung, als auch in den Interaktionsprozessen, an denen das Individuum partizipiert, statt. Einer solchen interaktionistischen Perspektive folgend benötigen Menschen zur Überschreitung der eigenen kognitiven Grenzen – also zum Lernen von Neuem in Mathematik – grundsätzlich die mathematisch-argumentative Aushandlung mit anderen. Das Individuum verarbeitet diese kollektiven Lernprozesse erst anschließend reflexiv individuell. Eine solche eher soziologische Betrachtung von Mathematiklernen hat sich in den letzten gut 40 Jahren der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung unter dem Begriff „Interaktionistische Ansätze der Interpretativen Unterrichtsforschung“ etabliert (vgl. z. B. Friesen 2020; Jungwirth/Krummheuer 2008; Schütte 2009).

Verbindung beider Ansätze

Findet der kollektive Moment des Lernens mit konstruktivistischem Lernverständnis gängigerweise erst nach individuellen Entdeckungsphasen in Form eines kollektiven reflektierenden Austauschs über das bereits Entdeckte statt, verhält sich dies nach einem interaktionistischen Verständnis von Lernen eher andersherum bzw. wechselseitiger. Lernen wird durch Interaktionen initiiert bzw. Lernprozesse sind grundlegend interaktiv und führen zu nachträglichen wechselseitig verschränkten Reflexionen, die im Anschluss zu individuellen kognitiven Umstrukturierungen führen können. Man verarbeitet sozusagen das kollektiv Erarbeitete im Nachhinein individuell (Jung 2019, S. 105 f.; Schütte/Jung/Krummheuer 2021, S. 528 ff.; siehe hierzu auch Voigt 1995, S. 164 ff.).

Wir möchten an dieser Stelle und im Weiteren keine Grundsatzdiskussion über die theoretische Begründbarkeit beider beschriebenen Ansätze des Mathematiklernens anstoßen. Sowohl die Vorstellung, dass Mathematiklernen im Individuum zu verorten ist und vor allem durch individuelle Entdeckungen initiiert wird, als auch das Verständnis von Mathematiklernen als kollektivem Prozess, in dem Lernen durch den Austausch mit anderen initiiert wird und grundlegend kollektiv ist, haben die mathematikdidaktische Forschung bereichert und stellen bewährte Ansätze zur Beschreibung von Lernprozessen von Mathematik dar. Es handelt sich unserem Verständnis folgend um zwei Seiten der gleichen Medaille. Beide Ansätze werden jedoch vielfach nicht zusammengedacht. So wurden auf der Basis einer konstruktivistischen Grundorientierung bereits umfassende Ausarbeitungen zu Lernumgebungen in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik veröffentlicht, die aber kaum Aufgaben oder Anregungen zum Mathematiklernen berücksichtigen, die explizit bereits während der entdeckenden Bearbeitungsphase Kooperation initiieren. Dies wirkt sich auch auf den aktuellen Mathematikunterricht aus, indem nur wenig gemeinsames Mathematiktreiben stattfindet, wo in Lerngruppen nach Lösungswegen gesucht und argumentativ miteinander verhandelt wird. Die mathematikdidaktische Lehr- und Lernforschung, die die Bedeutung des gemeinsamen Lernens seit Langem hervorhebt, hinterlässt somit bedauerlicherweise in der Unterrichtspraxis bisher nur geringe Spuren. Diese Lücke wird mit dem von uns entwickelten Konzept „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 15 f.) geschlossen (→ Kap. 5).

Mathematiklernen im Spiel

In beiden Ansätzen zum Mathematiklernen wird einem weiteren Aspekt des (frühen) Mathematiklernens zu wenig Beachtung geschenkt. Durch die „Akademisierung“ der Schule, insbesondere in den frühen Schuljahren, wurde in der Vorschule aktives, spielerisches Lernen auf Kosten von spezifischen Trainingsprogrammen verkürzt (z. B. Bergen 2018; Hauser 2016; Stamm 2011). Dies führte in Forschungskreisen zu heftigen Debatten über die Bedeutung des Spiels für die kognitive Entwicklung. Fachleute im Bereich der Lernforschung sowie der Pädagogik fordern vermehrt, Lernen und Spielen gemeinsam zu denken (z. B. Bergen 2018; Kübler/Rüdisüli 2020; Smith/Pellegrini 2013).

Jüngere Forschungsbefunde weisen eindeutig darauf hin, dass spielerisches Lernen die kognitive Entwicklung von Kindern im Grundschulalter positiv beeinflusst, besondere bei der Initiierung von tiefgreifenden kognitiven Denkprozessen (Bergen 2018). Ebenso wird die Konzentrationsfähigkeit durch spielbasiertes Lernen nachweislich gesteigert, Strategien zielgerichteter eingesetzt und positive Emotionen erlebt (Hauser 2016; Kangas 2010). Spielen ist neben dem frühen fachlichen Lernen ebenso bedeutsam für die soziale Entwicklung und scheint positive motivationale Auswirkungen auf das Lernen zu erzielen (z. B. Hauser 2016; Stamm 2011, S. 151 f.), wie auch unsere internen Evaluationen mit Studierenden zeigen. So führt das Mathematiklernen in Lernumgebungen mit einem spielerischen Charakter bei den Lernenden zu einer nachhaltigeren intrinsischen Motivation, sich und andere zu fordern. Nührenbörger und Schwarzkopf (2021) bringen bringen dieses unserer Meinung nach nicht unwesentliche Problem des aktuellen Mathematiklernens wie folgt auf den Punkt:

> In der Grundschule beginnt, so die Einschätzung vieler Erwachsener, der „Ernst des Lebens“ und das Spielen hört auf. Gerade die Mathematik scheint besonders ernst zu sein, geht es doch dabei um abstrakte Zahlen, Rechenzeichen und geometrische Formen. Allerdings ist dies bestenfalls nur die halbe Wahrheit, denn das Spiel ist auch im Mathematikunterricht eine natürliche Lernumgebung der Kinder …
> (Nührenbörger/Schwarzkopf 2021, S. 13)

Wir haben uns mit diesem Band zum Ziel gesetzt, einen solchen „natürlichen“ Zugang zum mathematischen Lernen durch das Spielen der Kinder in frühen Jahren zu stärken und dabei die vielfältigen Vorteile des kooperativen Lernens zu nutzen und kooperative spielerische Lernumgebungen zum Lernen von Mathematik zu entwickeln. So werden die äußerst zahlreichen auf einem konstruktivistischen Lernverständnis basierenden Publikationen um reichhaltige kooperative spielerische Lernumgebungen für das Mathematiklernen in den frühen Jahren des schulischen Lernens erweitert. Die Lernumgebungen gründen sich dabei aber auf einem interaktionistischen Lernverständnis. Die Kinder stehen von Anfang an der Bearbeitung gewollt im Austausch miteinander.

Zum Aufbau des Buches

Das Buch gliedert sich in einen theoretischen und einen praktischen Teil. Im theoretischen Teil werden in **Kapitel 1** zunächst die Grundannahmen eines konstruktivistischen und eines interaktionistischen Lernverständnisses skizziert. Die jeweiligen aktuellen Standards für die Konzeption mathematischer Lernumgebungen, basierend auf einem konstruktivistischen Lernverständnis, werden in **Kapitel 2** aufgezeigt. In **Kapitel 3** wird mit der Aufarbeitung kooperativen Lernens im Mathematikunterricht die Grundlage für eine interaktionistische Basis zur Konstruktion von Lernumgebungen geschaffen. In Synergie der ersten drei Kapitel wird in **Kapitel 4** das Konzept „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ dargestellt, welches Grundsätze zur Konstruktion von Lernumgebungen mit Ideen des kooperativen

Lernens und einer interaktionistischen Perspektive auf Mathematiklernen verbindet. Anschließend wird in **Kapitel 5** die Bedeutung des Spielens für das Mathematiklernen näher beleuchtet. Im Anschluss werden Konsequenzen des hier vorliegenden Konzepts „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ für den Aufbau und die Umsetzung der entwickelten Lernumgebungen in **Kapitel 6** abgeleitet und dargestellt. In **Kapitel 7** werden einzelne zentrale Fragen aufgegriffen und beantwortet.

Im zweiten, praktischen Teil des Buches folgen die Lernumgebungen, unterteilt in die Themenbereiche *Zahlenraum erforschen* **(Teil 1)**, *Mit Zahlen operieren* **(Teil 2)**, *Mit Größen handeln* **(Teil 3)**, sowie *Geometrische Grunderfahrungen sammeln* **(Teil 4)**. Die konkrete Arbeit mit den kooperativen Lernumgebungen in diesem Buch wird durch Bilder, Arbeitsbeispiele und Transkripte aus den Erprobungen illustriert. Die Erprobung der Lernumgebungen fand sowohl in jahrgangsgemischten als auch jahrgangshomogenen Lerngruppen primär in der Schweiz, in Österreich, in Südtirol und in Deutschland statt. Dementsprechend werden unterschiedliche Begriffe für die ersten Schuljahre genutzt (z. B. Volksschule, Eingangsstufe, Grundschule).

Die Kapitel in diesem theoretischen Teil des Buches sind an den theoretischen Rahmen der Bände 1b bzw. 2 (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b) angelehnt, wodurch einige Passagen mit diesen identisch sind, einige stark verändert und einige zusammengefasst wurden. Die gesamte Struktur der Theorie wurde grundlegend überarbeitet und durch das Kapitel 5 zum Spielen erweitert. Speziell die Merkmale des Konzeptes „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ (→ Kap. 4) wurden inhaltlich umfassend überarbeitet, erweitert und präzisiert:

- Die Darstellung des konstruktivistischen und interaktionistischen Lernverständnisses in Kap. 2 stellt eine gekürzte Version der jeweiligen Texte in Band 1b und 2 dar (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 17 und 22 ff.). Auch die Darstellung in Kap. 2.3 stellt eine gekürzte Version des Kapitels 2 in Band 1b und 2 dar (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 18 ff.).
- Kap. 3 stellt eine Überarbeitung des Kapitels 5 in Band 1b und 2 dar (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 10 ff.)
- Kap. 6 stellt eine grundlegende Überarbeitung der Einführung in die Lernumgebungen in Band 1b und 2 dar (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 31 ff.).

1 Konstruktivistisches und Interaktionistisches Lernverständnis

1.1 Ein konstruktivistisches Lernverständnis

Die derzeit wohl verbreitetste Vorstellung von Lernen basiert auf lerntheoretischen Grundlagen des Konstruktivismus. Nach diesen lernt das Individuum auf Basis bereits entwickelter individueller innerer Schemata. Es deutet und interpretiert Ereignisse oder Informationen der es umgebenden Welt auf Basis der bereits bestehenden eigenen inneren Schemata. Diese Prozesse können durch die Außenwelt gestört werden, wodurch Veränderung angeregt wird. Treten Widersprüche beim Versuch auf, Neues mit Altem abzugleichen, wird das Individuum diese durch die Konstruktion neuer Schemata oder Modulierung bereits vorhandener „alter" Schemata auflösen – es schreitet so in der kognitiven Entwicklung voran (siehe u. a. Entwicklungstheorien von Piaget 1972).

Lernen, insbesondere das für diesen Band maßgebende Mathematiklernen, wird gemäß einem solchen konstruktivistischen Lernverständnis als ein monologischer Prozess im Individuum selbst verortet. Die Interaktion mit anderen stellt eine nachgeordnete Kategorie dar, die eine individuelle Entwicklung beeinflussen kann, aber nicht muss. Im Sinne des Konzeptes des „kognitiven Konfliktes" (Piaget 1985) führt die soziale Interaktion zur Irritation der individuellen Schemata, die grundsätzlich monologische Orientierung des Lernens wird damit jedoch nicht aufgegeben. Lernen ist damit grundsätzlich ein Prozess, der im Individuum abläuft und durch das Individuum mit seinen Erfahrungen und Fähigkeiten bestimmt wird.

Vor diesem theoretischen Blickwinkel lässt sich die heute gängige Orientierung am aktiv-endeckenden Lernen (Winter 2016) verstehen, indem Kinder mathematische Muster und Strukturen zuerst allein entdecken und so mathematische Lernfortschritte vollziehen bzw. mathematisches Wissen konstruieren (vgl. u. a. Wittmann 1990, S. 162 f.). Winter (2016) stellt dazu folgende These auf:

> Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller […], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht.
>
> (Winter 2016, S. 1)

Aufgaben sind somit erst einmal als Lernangebote bzw. „Lernermöglichungen" für Schülerinnen und Schüler zu verstehen. Erst eine aktive eigenständige Auseinandersetzung mit dem äußeren Impuls bzw. der Aufgabenstellung und einer dadurch angeregten Modifikation der individuellen kognitiven Schemata führt zur Aneignung des intendierten Lerngegenstands (Winter 2016, S. 2 f.). Die Herausforderung für Lehrende besteht nach diesem Verständnis von Mathematiklernen darin, aktiv-entdeckendes Lernen im Unterricht zu ermöglichen. Gut vorbereitete und passend gewählte Aufgabenstellungen sind dabei von zentraler Bedeutung (Winter 2016, S. 3 f.).

1.2 Ein interaktionistisches Lernverständnis

Nahezu parallel zur in 1.1 dargestellten konstruktivistischen lerntheoretischen Orientierung, die eine individuelle Eigentätigkeit stets als Grundlage von fundamentalen Lernprozessen ansieht und die Interaktion als eher zweitranging, nachgeschaltet betrachtet, entwickelten sich in den letzten gut 40 Jahren in der mathematikdidaktischen Lehr-Lern-Forschung auch andere Lernorientierungen. So haben soziologische und sozial-konstruktivistische Betrachtungen von Lernprozessen im Verlauf dieser Zeit immer mehr Einfluss auf die theoretischen Entwürfe von fachlichem mathematischen Lernen genommen (Lerman 2000). Auch das Verständnis von Mathematik hat sich in dieser Zeit ausdifferenziert. So kann man Mathematik als eine „sozio-kulturelle Praxis" betrachten, die von den Beteiligen kollektiv konstruiert, miteinander geteilt, verändert, stabilisiert und weitergegeben wird (Jung/Schütte 2022, S. 218; Kitcher 1984; Prediger 2004; Solomon 2009; Wilder 1981). Mathematische Objekte lassen sich hiernach als intersubjektiv geteilte mentale Konzepte verstehen. Mitte der 1980er Jahre haben sich innerhalb dieser Entwicklung in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik interaktionistische Ansätze der Interpretativen

Unterrichtsforschung entwickelt (Bauersfeld 1978; Krummheuer 1992; Schütte 2009; Voigt 1984). Diese Ansätze heben – vielfach mit einem Verweis auf die soziologische Lerntheorie von Miller (1986) – den interaktiven Austausch als grundlegend für fundamentales Lernen von Neuem hervor.

Diese alternative Sichtweise begreift Lernen als einen dialogisch initiierten Prozess, der sich als Koordination mentaler Aktivitäten von mindestens zwei Individuen, wie sie z. B. in Gesprächen stattfinden, beschreiben lässt. Der Interaktionismus geht davon aus, dass erst soziale Interaktionsprozesse zwischen den Individuen einer Gruppe dem einzelnen Individuum fundamentale Lernschritte ermöglichen, die sich nicht nur auf die Anwendung oder Reproduktion von bereits bestehendem Wissen zurückführen lassen. Das Lernen wird dabei weiterhin als ein Prozess des Individuums aufgefasst, welcher aber grundlegend in Aktivitäten des Kollektivs verankert ist. Es findet so „dialektisch“ sowohl in Interaktionsprozessen als auch nachfolgend im Inneren eines Individuums, im Sinne einer kognitiven Umstrukturierung, statt (siehe hierzu auch Voigt 1995, S. 164 ff.). Nicht allein die individuellen Erfahrungen und Fähigkeiten aller am Lernprozess-Beteiligten bestimmen demnach die Entwicklung des Einzelnen, sondern erst der gemeinsame Austausch auf Basis dieser Erfahrungen und Fähigkeiten mit anderen bedingen individuelles Lernen. Lernen fußt hiernach auf sozialer Interaktion.

Miller (1986, 2006) greift zur Veranschaulichung solcher, wie er es nennt, „kollektiver Lernprozesse“ auf ein altes Experiment der Balkenwaage zurück (Piaget/Inhelder 1980). Bei diesem Experiment werden die Problemlösefähigkeiten von Kindern in Einzel- und in Gruppenbearbeitungsprozessen miteinander verglichen. Die Kinder erhalten den Auftrag zu bestimmen, wie eine blockierte Balkenwagen ausschlägt, wenn ihre Blockade aufgehoben wird. In mehreren Durchläufen werden dabei die Bedingungen verändert. So werden z. B. unterschiedliche Gewichte an unterschiedlichen Positionen befestigt. Miller (1986) stellt fest, dass Kinder in der Gruppe, die sich in sogenannten kollektiven Argumentationen (siehe zum Begriff ebd., S. 23 ff.) auf eine gemeinsame Lösung einigen, ein Problemlöseniveau erreichen, das ihnen bei Versuchen, die Probleme allein zu lösen, verwehrt scheint. Er schlussfolgert, dass fundamentales Lernen nicht durch Reifungsprozesse oder individuelle Entwicklung innerhalb des Einzelnen ohne Austausch mit anderen abläuft, sondern stets erst in Interaktionen mit anderen initiiert wird und die Interaktionen als Lernmoment den individuellen Konstruktionen vorweggehen. Eindrücklich zeigt damit Miller, dass das individuelle Überschreiten der eigenen kognitiven Kapazitäten des Austausches und der Aushandlung in der Gruppe bedürfen und dass das Individuum diese Prozesse erst anschließend reflexiv für sich verarbeitet. Fundamentales Lernen wäre dieser Argumentation folgend grundsätzlich in Aktivitäten des Kollektivs verankert (ebd., S. 10). Das nach konstruktivistischer Grundorientierung durch die Interaktion mit anderen auftretende „störende Außen“ gibt dem Individuum nach interaktionistischer Lernorientierung erst die Möglichkeiten, die eigenen „begrenzten“ kognitiven Fähigkeiten systematisch durch den Austausch mit anderen zu überschreiten (Miller 1986, 2006).

Hierbei muss man sich nach Krummheuer das Argumentieren in der Grundschule jedoch nicht als fachmathematische, analytische Argumentationen vorstellen (Krummheuer/Fetzer 2005, S. 30), sondern als den Versuch von mehreren Kindern, sich die „Welt der Mathematik“ in Klassengesprächen oder Gruppensituationen gemeinsam wechselseitig zu konstruieren. Wie sich mathematisches Lernen innerhalb solcher kollektiver Argumentationen nach interaktionistischen Ansätzen beschreiben lässt, findet sich in Band 1b und 2 (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 22 ff.) und beispielsweise auch in Jung (2019, S. 105 ff.) oder Schütte, Krummheuer und Jung (2021, S. 529 f.).

Eine interaktionistische Perspektive auf das Lernen von Mathematik stellt eine neue, ergänzende theoretische Grundlage für die Entwicklung von substanziellen mathematischen Lernumgebungen dar (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b). Wenn fundamentales, mathematisches Lernen in Interaktionen mit anderen seinen Ursprung hat, sollte es das Ziel von Mathematikunterricht sein, möglichst vielfältige mathematische Interaktionsprozesse zu initiieren, um den Lernenden zu ermöglichen, durch den mathematisch-argumentativen Austausch mit anderen immer wieder herausgefordert zu sein, die eigenen „kognitiven“ Grenzen gemeinsam zu überschreiten und sich so bestmöglich fachlich zu entwickeln.

1.3 Mathematische Lernumgebungen nach einem konstruktivistischen Lernverständnis

Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluss die unterschiedlichen Zugänge zum Lernen von Mathematik auf die konkrete Unterrichtspraxis haben. Unterricht ist im Allgemeinen dadurch geprägt, dass Lernende im Klassenzimmer zusammenkommen, die sich hinsichtlich verschiedenster Aspekte, wie u. a. der kognitiven Leistung, Motivation oder dem sprachlich-kulturellen Hintergrund stark unterscheiden. Diese Heterogenität der Lernenden stellt Lehrpersonen immer wieder vor die Herausforderung, alle Kinder ihren individuellen Fähigkeiten entsprechend im Unterricht durch Differenzierung bestmöglich zu fördern. In der Mathematikdidaktik hat sich seit den 1990er Jahren in Deutschland, Österreich und der Schweiz eine spezielle Form der Differenzierung – die „natürliche Differenzierung“ (Wittmann/Müller 1990; Hirt/Wälti 2008; Krauthausen/Scherer 2010) – etabliert.

Vier Merkmale charakterisieren das Konzept der natürlichen Differenzierung:
1. die gesamte Lerngruppe erhält das gleiche Lernangebot,
2. das Lernangebot ist inhaltlich ganzheitlich und hinreichend komplex,
3. die Lernenden können Freiheitsgrade in ihren Bearbeitungswegen wahrnehmen,
4. soziales Lernen von- und miteinander findet statt (vgl. Krauthausen/Scherer 2014, S. 50 f.).

Mit dem Bereitstellen des gleichen Lernangebots für die gesamte Lerngruppe **(Merkmal 1)** wird verhindert, dass es – wie bei einer inneren Differenzierung durch individuelle Aufgabenstellungen – zu einer Vereinzelung der Lernenden kommt (siehe u. a. Krauthausen/Scherer 2014, S. 25 ff.). Selbst in Lerngruppen mit einer konzeptionell erweiterten Heterogenität, wie z. B. bei jahrgangsübergreifenden Klassen, ist das gemeinsame Arbeiten an Aufgabenstellungen möglich (vgl. u. a. Nührenbörger/Pust 2006, S. 46). Damit es dabei nicht zu einer Über- oder Unterforderung einzelner Lernender kommt, wird mit inhaltlich ganzheitlichen und hinreichend komplexen Aufgaben gearbeitet **(Merkmal 2)**. Durch die Komplexität der Aufgaben ist es möglich, dass die Lernenden verschiedene Bearbeitungs- und Lösungswege einschlagen bzw. die jeweilige Aufgabenstellung unterschiedlich „tief“ durchdringen und trotz ihrer unterschiedlichen Fähigkeiten und Interessen an denselben Aufgabenstellungen gewinnbringend arbeiten (Nührenbörger/Verboom 2005, S. 4). Bei der natürlichen Differenzierung können die Lernenden während der Bearbeitung der Aufgabenstellungen Hilfs- und Arbeitsmittel selbstständig wählen und sind in Bezug auf Darstellungsweisen und Lösungswege frei **(Merkmal 3)**. Die drei ersten Merkmale sind Voraussetzungen für **Merkmal 4**. Erst eine gemeinsame Aufgabenstellung mit individuellen Entdeckungen macht einen anschließenden Austausch über Lösungswege und Erkenntnisse und damit auch ein Von- und Miteinanderlernen sinnvoll. Dies findet in der Regel im Anschluss an eine individuelle Entdeckungs- bzw. Arbeitsphase im Rahmen einer reflektierenden Plenums- oder Gruppenphase statt.

Das Konzept der natürlichen Differenzierung lässt sich besonders gut mit reichhaltigen mathematischen Aufgaben, sogenannten „substanziellen Lernumgebungen“, umsetzen (Hirt/Wälti 2008; Krauthausen/Scherer 2014, S. 110). Diese eignen sich aufgrund ihrer Offenheit und fachlichen Komplexität ausdrücklich auch für heterogen zusammengesetzte Lerngruppen und lassen sich als eine mögliche Antwort auf das Problem der Vereinzelung durch Individualisierung in großer Heterogenität deuten. Nach Hirt und Wälti (2010, S. 13) und Wollring (2008, S. 13) bezeichnet der Begriff „substanzielle Lernumgebung“ eine „flexible große Aufgabe“, die aus mehreren Teilaufgaben besteht. Ein übergeordneter, auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur basierender Leitgedanke verbindet jeweils die verschiedenen Teilaufgaben (Hengartner u. a. 2006, S. 17 ff.). Substanzielle, natürlich differenzierende Lernumgebungen sollen dabei so konstruiert sein, dass Lernende mit unterschiedlichen Fähigkeiten und von unterschiedlichem Alter an der gleichen Aufgabe arbeiten können und dabei zentrale mathematische Inhalte ganzheitlich erfahren. Die Differenzierung erfolgt nicht organisatorisch, sondern „natürlich“, innerhalb derselben Aufgabe (Wittmann 2001, S. 2). So kann jedes Kind auf dem eigenen Niveau arbeiten und individuelle Konstruktionsprozesse können stattfinden.

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik spiegelt sich das obig hergeleitete konstruktivistische Lernverständnis besonders in Veröffentlichungen wider, in welchen substanzielle mathematische Lernumgebungen entwickelt wurden. Zu dem von Wittmann (1995) vorgezeichneten Rahmen substanzieller Lernumgebungen sind verschiedene Handreichungen für die Unterrichtspraxis entstanden (Wittmann/Müller 1990; Hengartner u. a. 2006; Hirt/Wälti 2008; Krauthausen/Scherer 2010; Nührenbörger/Pust 2006; Ulm 2008). In ihren Grundzügen sind die Aufgaben jeweils ähnlich strukturiert, auch wenn leicht unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. Außerdem entstehen im Rahmen von Dissertationen immer wieder einzelne Lernumgebungen (z. B. Link 2012; Weskamp 2019) oder es werden unterrichtspraktische Umsetzungen bereits bestehender Lernumgebungen in Zeitschriften veröffentlicht (z. B. Franz 2014; Haug 2016; Kiefer 2013; Krauthausen 1995; Loska/Hertmann 2006; Lutz/Korber 2016; Scherer 1997).

Für die Umsetzung von substanziellen Lernumgebungen werden in der Regel im Sinne einer konstruktivistischen Lerntheorie drei Phasen empfohlen (Hirt/Wälti 2010, S. 17):

1. Inszenierung der Lernumgebung,
2. längere Phase der Eigenaktivität, fachliche Dialoge und individuelle fachliche Begleitung durch Lehrperson und
3. Austausch (der Situation angepasst).

Die Lehrperson führt zu Beginn einer Unterrichtsstunde die Lernumgebung für die gesamte Lerngruppe ein, illustriert sie anhand von ein bis zwei Beispielen und steckt den Rahmen für die Bearbeitung ab (Hirt/Wälti 2010, S. 17). Eine Diskussion möglicher Beispiele, Lösungswege oder Bearbeitungsstrategien sollte dabei nicht zu viel Entdeckungspotenzial vorwegnehmen, sondern auf das jeweilige Lernziel ausgerichtet sein (Weskamp 2019, S. 310).

Nach der gemeinsamen Inszenierung arbeiten die Lernenden eigenständig. Der Fokus der Lehrperson liegt hier nicht auf der Vermittlung, sondern auf fachlicher Begleitung individueller Konstruktionsprozesse. Der zuvor geklärte mathematische Rahmen ist offen in Bezug auf Anspruchsniveau, Bearbeitungstiefe, Darstellungsformen sowie Denk- und Rechenwege und lässt dadurch eigene Entscheidungen der Lernenden zu. Die Lernenden erarbeiten mathematische Strukturen und konstruieren individuell neue mathematische Bedeutungen. Für diese Phase wird ausreichend Zeit eingeplant, damit Lernende nicht mitten in der Bearbeitung aus ihren Entdeckungsprozessen herausgerissen werden (Hirt/Wälti 2010, S. 17 f.). Es sind jedoch keineswegs nur die leistungsstärkeren Lernenden, die Strukturen und Muster erkennen bzw. problemstrukturierte Fragestellungen beantworten können. Gerade durch die natürliche Differenzierung ist es möglich, unterschiedlich weit in eine Aufgabe „einzudringen“, beispielhaft konkret oder allgemein vorzugehen und individuell passende Darstellungen und Modelle zu wählen (Krauthausen/Scherer 2014, S. 118). Es wird ausdrücklich davon abgeraten, dass die Kinder sich von Beginn an austauschen, um zu verhindern, dass die schnelleren Schülerinnen und Schüler ihre Ideen mitteilen und damit Entdeckungen der langsameren Lernenden vorwegnehmen. Dennoch ist ein spontaner Austausch während der weiteren Bearbeitung erwünscht (Hirt/Wälti 2010, S. 18). Im Unterschied zu den kooperativen Lernumgebungen in diesem Band ist der Austausch jedoch spontaner Natur und setzt die Eigeninitiative der Kinder voraus. Besonders für die arithmetischen und geometrischen Lernumgebungen aus dem Buch von Hirt und Wälti (2010) wird dieses Vorgehen vorgeschlagen; für die Lernumgebungen zum Sachrechnen wird dort bereits von Anfang an eine Bearbeitung in Kleingruppen angeregt.

Bei den meisten substanziellen Lernumgebungen wird erst nach der eigentlichen Bearbeitung der Aufgabenstellung empfohlen, entsprechende fachliche Dialoge zu initiieren (Hirt/Wälti 2010, S. 19). Der Diskussionsbedarf ist gegeben, sind doch die entstandenen Produkte aufgrund der Offenheit der Aufgabenstellung sowie aufgrund der unterschiedlichen Fähigkeiten der Lernenden individuell deutlich verschieden (Krauthausen/Scherer 2014, S. 53). Eine solche Diskussion kann wiederum zu soziokognitiven Konflikte führen, die die Lernenden dazu veranlassen, ihre eigenen Denkschemata zu verändern oder neue Denkschemata aufzubauen (→ Kap. 1.1).

Klassische substanzielle Lernumgebungen sind bislang demzufolge hauptsächlich so konzipiert, dass Kinder zwar an demselben übergeordneten Thema arbeiten, eine kollektive Austauschphase aber eher zum Schluss als gemeinsame Reflexion des Entdeckten unter den Beteiligten erfolgt. Die Ursache hierfür ist das bereits hergeleitete zugrunde liegende konstruktivistische Lernverständnis, welches in der Tradition Piagets (1972) eine individuelle Phase der Eigentätigkeit als grundlegenden Ausgangspunkt von fundamentalen Lernprozessen ansieht und Interaktionen mit anderen nachgeschaltet nach dieser Phase der individuellen Entdeckung verortet.

2 Kooperatives Mathematiklernen

Ein interaktionistisches Lernverständnis rückt den argumentativen Austausch über mathematische Bedeutungen und Inhalte schon zu Beginn des Lernprozesses in den Fokus der Betrachtung. Ansätze in der Mathematikdidaktik, die sich mit gemeinsamem interaktivem Lernen von Mathematik befassen, lassen sich unter dem Begriff „kooperatives Lernen“ zusammenfassen. Diese Ansätze gründen sich auf viele Studien, die die Wirksamkeit kooperativen Lernens für die Entwicklung von Kindern auf kognitiver, sozialer, motivationaler und emotionaler Ebene hervorheben (für einen Überblick siehe z. B. Borsch 2019, S. 106 ff.). In Bezug auf die kognitive Entwicklung nimmt beispielsweise nicht nur die Quantität, sondern auch die Qualität des erworbenen Wissens beim kooperativen Lernen zu (Hasselhorn/Gold 2017, S. 301). Rothenbächer (2016, S. 26) stellt in diesem Zusammenhang fest, dass unterschiedlich leistungsstarke Kinder durch den Austausch mit anderen Kindern von deren Wissen profitieren können und sich durch das Erklären zugleich ihre eigenen Wissensbestände erweitern (vgl. auch Ebbens/Ettekoven 2011, S. 31 f. und Jung 2019, 121 ff.). Gerade der Erwerb typischer prozessbezogener Kompetenzen beim mathematischen Lernen scheint folglich vom kooperativen Lernen positiv beeinflusst, wie z. B. die Fähigkeiten zu argumentieren oder Probleme zu lösen (Röhr 1995, S. 75 ff.). Kooperatives Lernen fördert überdies nach Johnson und Johnson (1999), Solomon u. a. (1988) und Rothenbächer (2016) soziale Fähigkeiten, wie z. B. sich gegenseitig zu respektieren, die Perspektive zu wechseln, sich zuzuhören, Kompromisse einzugehen, Konflikte auszutragen oder sich gegenseitig zu unterstützen. Nicht zuletzt hat das kooperative Lernen aber auch positive Effekte auf das Wohlbefinden, die Lernfreude, Motivation und Anstrengungsbereitschaft der Lernenden und erhält eine sozialintegrative Wirkung über eine bessere Akzeptanz der Kinder und die Anerkennung und Wertschätzung ihrer jeweiligen Fähigkeiten untereinander (Avi-Werning/Lanphen 2013; Hasselhorn/Gold 2017, S. 301; Rothenbächer 2016, S. 22 ff.).

Wer nach konkreten Anregungen zu kooperativem Lernen sucht, wird bei genauerem Hinsehen große Unterschiede in der Art der Aufgabenstellungen bzw. deren Umsetzung finden. Als gemeinsamen Kern definieren Konrad und Traub (2019) kooperatives Lernen als:

> eine Interaktionsform, bei der die beteiligten Personen gemeinsam und in wechselseitigem Austausch Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben. Im Idealfall sind alle Gruppenmitglieder gleichberechtigt am Lerngeschehen beteiligt und tragen gemeinsam Verantwortung. (Konrad/Traub 2019, S. 5)

Aber wodurch zeichnen sich geeignete Aufgaben zum kooperativen Mathematiklernen aus und wie lassen sich diese in der Unterrichtspraxis inszenieren? Im Folgenden werden drei gängige Konzeptionen kooperativen Lernens skizziert und durch die in Kapitel 4 dargestellte und diesem Band zugrunde liegende Konzeption „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ ergänzt. Die Tabelle vermittelt einen ersten Überblick zu den vier diskutierten Konzeptionen.

Konzeptionen kooperativen Lernens	methodenzentriertes kooperatives Lernen	kooperatives, dialogisches Lernen	kooperatives Lernen aus der Sache heraus	Mathematiklernen kooperativ rahmen
Literatur	*u. a. nach Johnson/ Johnson (1999); Konrad/Traub (2019); Borsch (2019)*	*u. a. nach Gallin/Ruf (2011)*	*u. a. nach Röhr (1995); Yackel/Cobb/Wood (1991)*	*nach Wälti/Schütte/ Friesen (2020a/b); Wälti (2022); Schütte/ Böckmann (2022)*
Positionierung	allgemeindidaktische Konzeption	deutsch- und mathematikdidaktische Konzeption	mathematikdidaktische Konzeption	mathematikdidaktische Konzeption
Charakteristik	Aufgaben werden in eine bestimmte Methode „eingefüllt" und sind austauschbar. Dient oft zur Automatisierung fachlicher Grundfertigkeiten.	Reichhaltige Lernaufgaben und Lernumgebungen, welche individuell bearbeitet werden. Reflexiver Austausch in Lerntandems am Ende des individuellen Bearbeitungsprozesses und abschließend im Klassengespräch.	Problemhaltige Aufgaben führen zu aktiv-entdeckendem Lernen in Kooperation mit anderen. Die Aufgaben sind häufig auch alleine bearbeitbar.	Im Zentrum stehen substanzielle mathematische Inhalte, welche untrennbar mit den Aufgaben verbunden sind. Verbindung spielerischer und problemorientierter Aspekte. Zu fachlichen Anliegen gibt es eine „maßgeschneiderte" Kooperation.
zentrale Merkmale der Aufgaben	Methoden beinhalten oft extrinsische Belohnungssysteme, wodurch positive Interdependenzen zwischen Lernenden und individuellen Verantwortlichkeiten entstehen.	Reichhaltige Aufgaben werden nach dem „Ich-Du-Wir-Prinzip" geplant und durchgeführt.	Kooperatives Arbeiten erleichtert die Bearbeitung der problemhaltigen Aufgaben. Dadurch werden Lernende intrinsisch zur Kooperation motiviert.	Die Aufgaben sind so konstruiert, dass deren Bearbeitung prinzipiell interaktiv und in der Regel spielerisch ist.
Beispiele	Gruppenpuzzle, Quiz, Wandtafelfußball	produktive Übungen, Aufgaben zum Problemlösen	produktive Übungen, Aufgaben zum Problemlösen	kooperative Lernumgebungen
Publikationen	Anregungen u. a. in Ratgebern zu kooperativem Lernen	seit ca. 1990 zahlreiche Lehrmittel und Begleitliteratur zu diesem Konzept	bislang nur wenige publizierte Lernumgebungen oder Lehrmittel	alle Lernumgebungen in diesem Band, sowie in den Bänden 1b und 2, vereinzelte Anregungen in Lehrmitteln

Übersicht zu verschiedenen Konzeptionen des kooperativen Lernens (Wälti/Schütte/Friesen 2020a/b, S. 11)

2.1 Methodenzentriertes kooperatives Lernen

Anregungen und Umsetzungsbeispiele zu einem „methodenzentrierten[1] kooperativen Lernen" sind vielerorts zu finden. Diese sind meist allgemeindidaktischer Natur und nicht vom Fach her durchdacht. Die meisten entsprechenden Veröffentlichungen bieten einen Strauß von kooperativen Methoden an (z. B. Gruppenpuzzle), mithilfe derer in Lerngruppen oder im Klassenverband gearbeitet wird (Green/Green 2006; Konrad/Traub 2019). Entsprechende kooperative Lernprozesse gründen sich nach Johnson und Johnson (1999), Green

1 Wir sprechen an dieser Stelle von „methodenzentriertem" kooperativen Lernen, um den Unterschied zu anderen Konzeptionen hervorzuheben.