Dr. Wolfgang Hummel

Sudoku Kompendium

Ein Lehr- und Arbeitsbuch, vierte erweiterte Ausgabe

Sudoku Kompendium

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Dr. Wolfgang Hummel

Impressum

Vierte, erweiterte Ausgabe
Umschlaggestaltung, Titelfoto: Wolfgang Hummel
Lektorat: Stefanie Lerchner, Lucia Hummel
Korrektorat: Lars Rudi, Stefanie Lerchner
easter monster Rätsel: Glen Fowler
cigarette Rätsel: eleven
fata morgana Rätsel: Tarek
#1582-eleven Rätsel: eleven
alle weiteren Rätsel: Wolfgang Hummel
Herstellung und Verlag: BoD - Books on Demand GmbH
ISBN: 9-783755-724568

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.dnb.de
abrufbar.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Ausgabe

Die nun vorliegende vierte Ausgabe des Sudoku Kompendium ist vor allem eine erweiterte Ausgabe. Im Unterschied zur dritten Ausgabe ist das Kapitel *Monster Ketten* in *Exotische Muster* umbenannt. Dieses Kapitel, das urprünglich nur die Methode der *hidden pair loop* beinhaltete, ist nun durch die Methoden des *Junior Exocet Musters* und der *Allgemeinen Set Logik* erweitert. Die daraus abgeleiteten Methoden des *Multi Fisch*, des *Multi Sektor Locked Sets* und des *Hais* werden in weiteren Abschnitten dieses Kapitels beschrieben. Auch wenn diese Techniken nur für die schwierigsten Rätsel einsetzbar sind, war es mir ein besonderes Anliegen das Kompendium durch die *Allgemeine Set Logik* zu vervollständigen.

München, den 23.8.2021

1 Vorwort zur ersten Ausgabe

Dieses Buch richtet sich an Sudoku-Liebhaber, Rätsel-Fans und Tüftler, die auch schwierige Sudokus lösen möchten und die verstehen wollen, wie anspruchsvolle Lösungsmethoden in einfachen Schritten erklärt anzuwenden sind, um die kniffligen Rätselvarianten effektiv zu knacken.

Ich hatte schon länger den Wunsch, die mir bekannten Lösungstricks, einem Kompendium gleich, in Buchform zusammenzufassen. Der finale Entschluss, dieses Vorhaben in die Tat umzusetzen, kam nach der Schließung der Internet-Foren *Eureka* im Januar 2007 und *Sudoku Player's Forum* im April 2010, infolge dessen eine wertvolle Sammlung von Beiträgen nicht mehr öffentlich zur Verfügung stand.

Wer also selbst Sudoku spielt und gleichzeitig Interesse hat, schwere Rätsel ohne Raten und Ausprobieren, sondern mit gezielten Strategien zu lösen, ist bei diesem Buch an der richtigen Stelle. Es geht hier nicht nur um einfache Sudokus, wie sie in der Tagespresse abgedruckt sind, sondern vor allem um wirklich anspruchsvolle Rätsel, wie sie nur in entsprechenden Magazinen, oder auf Sudoku-Seiten im Internet zu finden sind. In diesem Buch finden Sie das nötige Rüstzeug um auch die schwierigsten Sudokus zu lösen. Dennoch sind für den interessierten Leser keine Vorkenntnisse von Nöten. Als Lehrbuch werden zuerst die einfachsten, dem Leser vielleicht bereits bekannten Tricks verraten, bevor die Reise Schritt für Schritt tiefer in das Innenleben von Sudokus geht.

Ich habe so weit wie möglich versucht, mathematische und logische Fachbegriffe zu vermeiden, jedoch nicht vollständig außen vorgelassen.

Viele Methoden wurden erstmals in englischsprachigen Internetforen vorgestellt und haben deshalb ursprünglich englische Namen. Bei der Übersetzung ins Deutsche ist, soweit möglich, der englische Name mit angegeben.

Wie das Inhaltsverzeichnis zeigt, sind die vielen unterschiedlichen Lösungsmethoden in verschiedene Gruppen eingeteilt. Das Buch ist dabei folgendermaßen aufgebaut: In jedem Kapitel werden mehrere Methoden der gleichen Gruppe erklärt, angefangen mit den einfachsten und populärsten jeder Art bis zu den komplizierteren. Es wird deshalb empfohlen, in einem ersten Lesen nur die ersten Abschnitte eines jeden Kapitels zu lesen, da die einfachsten Methoden jeder Gruppe auch am häufigsten Anwendung finden. Die kompliziertesten Methoden innerhalb einer Gruppe, die in den jeweiligen Kapiteln weiter hinten beschrieben sind, werden seltener gebraucht und sind vor allem von akademischem Interesse, um die Methodik der Lösungsverfahren besser aufzuhellen.

Neben der Schlagkraft einer Lösungsmethode ist für den Spieler die Auffindbarkeit eines Musters wichtig. Schlagkräftige Lösungsmethoden ohne effizientes Suchschema bleiben von geringem praktischen Nutzen. So werden neben den Methoden auch Suchverfahren vorgestellt.

Zu den ersten zehn Kapiteln gibt es eine Anzahl von Übungsrätseln. Die Rätsel sind so aufgebaut, dass die zu übende Lösungsmethode gleichzeitig die schwierigste Stelle im Lösungsweg, also die Schlüsselstelle des Rätsels darstellt. Im ausgegliederten Band *Sudoku Trainer, Lösungen zu den Übungsaufgaben* wird in den Lösungshinweisen immer der Zwischenstand vor der Schlüsselstelle in einer Abbildung dargestellt. Man kann also das Übungsrätsel entweder von Anfang an lösen, oder nur die neu behandelte Methode mit Hilfe des im Zusatzband abgebildeten Zwischenstandes üben.

Ich wünsche dem Leser viel Freude beim Kennenlernen der Tricks und viel Spaß beim Lösen der Sudokus.

2 Was ist Sudoku

Sudoku ist ein Zahlenrätsel, welches erstmals 1979 von dem amerikanischen Architekten Howard Garns als eine Erweiterung der viel älteren lateinischen Quadrate erfunden und unter dem Namen 'Number Place' (engl. Zahlenplatz) im amerikanischen Rätselmagazin 'Dell Pencil Puzzles & Word Games' veröffentlicht wurde. 1984 wurde das Rätsel in der japanischen Zeitschrift 'Nikoli' des gleichnamigen Verlegers zum Erfolg, wo es 1986 in 'Sudoku' (eine japanische Kurzform von: *die Zahlen dürfen nur einmal vorkommen*) umbenannt wurde. Nachdem die 'Times' von 2004 an Sudokus veröffentlicht, wurde das Rätsel innerhalb kürzester Zeit weltweit zu einem großen Erfolg.

Die Sudokuregeln sind hierbei einfach:

Die leeren Felder sind so mit Zahlen auszufüllen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der 3×3 Blöcke die Zahlen von 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

Auf der nächsten Seite in Abb. 2.1 ist ein typisches Sudoku Rätsel, hier mit 27 Ausgangsziffern gezeigt. Ebenso ist die gesuchte Lösung abgebildet.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3					7	2		
B		9			4			1	
C			1	5					8
D			7	4					5
E		4			3			6	
F	2					6	8		
G	1					4	6		
H		7			9			3	
I			4	2					7

Abbildung 2.1: Ein schwieriges Sudoku mit 27 Ausgangsziffern

3	8	5	6	1	7	2	9	4
7	9	2	3	4	8	5	1	6
4	6	1	5	2	9	3	7	8
6	3	7	4	8	1	9	2	5
5	4	8	9	3	2	7	6	1
2	1	9	7	5	6	8	4	3
1	2	3	8	7	4	6	5	9
8	7	6	1	9	5	4	3	2
9	5	4	2	6	3	1	8	7

Lösung von Abb. 2.1.

3 Einstieg

3.1 Begriffe

Um sich im Spielfeld besser zurechtzufinden, ist es nützlich einige Bezeichnungen einzuführen:

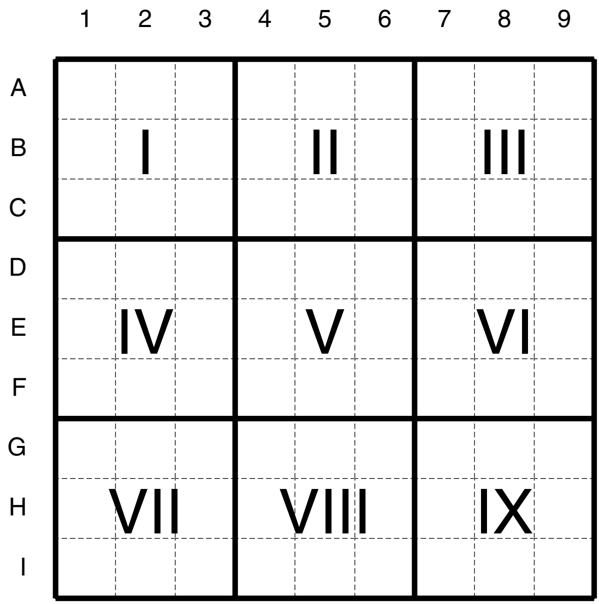


Abbildung 3.1: Bezeichnungen im Sudoku Spielfeld

Hier, sowie in den kommenden Kapiteln, werden die Spalten von 1 bis 9 durchnummeriert. Die Zeilen werden von oben nach unten mit

Buchstaben A bis I gekennzeichnet. Die neun 3×3 Blöcke werden von links oben nach rechts unten in Schreibrichtung mit römischen Ziffern I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII und IX bezeichnet, siehe Abb. 3.1. Der häufig wiederkehrende Begriff **Einheit** steht für Zeile, Spalte oder Block. Drei Blöcke in einer Reihe (senkrecht oder waagrecht) werden als Bahn bezeichnet. Ein Feld wird z. B. mit D7 bezeichnet. Die Felder mit vorgegebenen Ziffern sind grau unterlegt, damit sie von gefundenen Ziffern besser zu unterscheiden sind. Alternativ wird bei schwierigeren Methoden ab Kapitel 14 die Notation `r4c7` für die Bezeichnung eines Feldes benutzt, welche hier für Reihe 4 (engl. row), Spalte 7 (engl. column) steht. Die Namen der Methoden werden *kursiv* geschrieben.

Um Sudokus effizient zu lösen, sollte man sich die folgenden grundlegenden Zusammenhänge klarmachen:

Die Sudokuregel lautet, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem Block eine Ziffer genau einmal steht. Diese Regel kann man in zwei Teilregeln aufspalten: Jede Ziffer steht *mindestens* einmal und *höchstens* einmal in jeder Einheit.

Stillschweigend wird dabei vorausgesetzt, dass alle Sudokus nur eine einzige Lösung besitzen. Dem ist nicht immer so. Ein Rätsel mit zu wenigen Ausgangsziffern - man denke an ein extremes Beispiel eines Rätsels mit nur zwei oder drei Ausgangsziffern - besitzt mehr als eine Lösung. Man kann sich auch Rätsel vorstellen, die keine Lösung besitzen. Ein Rätsel beispielsweise, bei dem eine Ausgangsziffer zweimal in einer Zeile vorkommt, widerspricht den Sudokuregeln und ist nicht lösbar.

Alle hier gezeigten Übungsrätsel besitzen nur eine Lösung. Alle gezeigten Methoden, bis auf die in Kapitel 15, funktionieren bis zu einem gewissen Schritt auch bei mehrdeutigen Sudokus.

3.2 Wirkungsbereich

Betrachtet man ein beliebiges Feld, sind die Felder, die in mindestens einer gemeinsamen Einheit stehen besondere Felder. In Abb. 3.2 sind für zwei beliebige Felder A alle Felder der gleichen Spalte, der gleichen Zeile und des gleichen Blocks grau unterlegt. Alle grauen Felder zusammen nennt man *die im Wirkungsbereich von A stehenden Felder* (engl. peers, buddies). Kann man Feld A lösen und die Ziffer eintragen, kann man in allen anderen Feldern die Feld *A sehen*, also in den grauen Feldern von Abb. 3.2, die entsprechende Ziffer als Möglichkeit ausschließen.

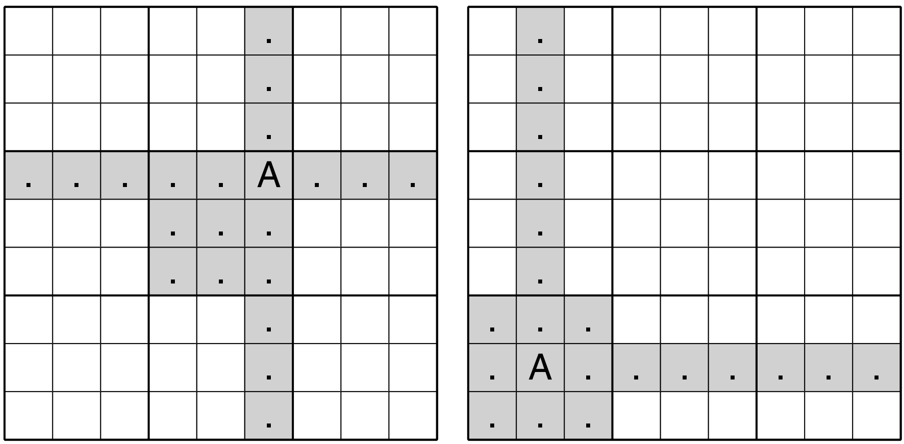


Abbildung 3.2: Der Wirkungsbereich eines Feldes (A) an zwei Beispielen. Die grau markierten Felder befinden sich entweder in derselben Zeile, in derselben Spalte oder im selben Block wie das Feld A. Führt der Spielverlauf zu einer Änderung in Feld A, hat das direkte Auswirkung auf die Felder im Wirkungsbereich von Feld A.

Einheiten können sich überschneiden: Eine Zeile schneidet sich mit einer Spalte in nur einem Feld (siehe Abb. 3.3 Links). Ein Block überschneidet sich mit einer Zeile oder Spalte in genau drei Feldern, Blockreihenfelder genannt (siehe Abb. 3.3 Rechts).

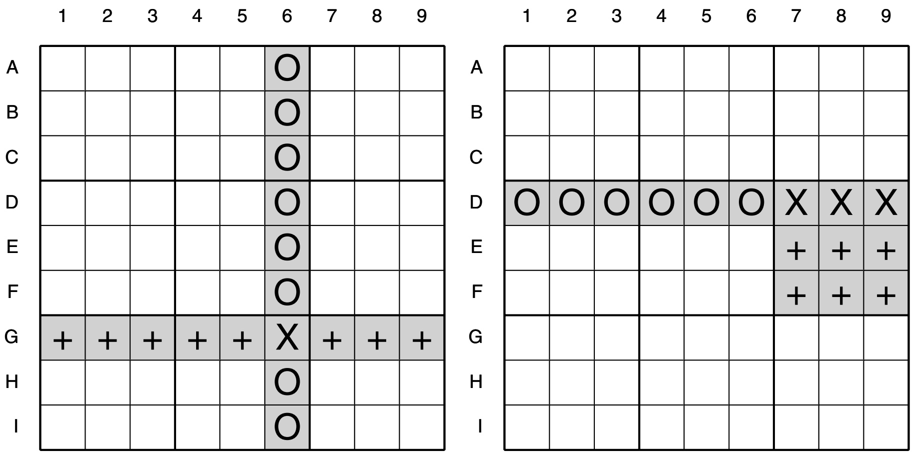


Abbildung 3.3: Links: Eine Zeile und eine Spalte überschneiden sich in einem einzigen Feld. Hier Zeile G und Spalte 6 im Feld G6. Rechts: Blöcke können sich mit Zeilen oder Spalten schneiden. Der Überlappungsbereich umfasst drei Felder, Blockreihenfelder genannt. Hier Zeile D und Block VI in D7, D8 und D9.

4 Erste Lösungshinweise

4.1 Volles Haus

Sind in einer Zeile, in einer Spalte oder in einem 3×3 Block bereits acht der neun geforderten Ziffern eingetragen, kann die letzte fehlende Ziffer direkt durch Auszählen ermittelt und eingetragen werden. Dazu ein Beispiel: Im Rätsel von Abb. 4.1 gibt es 3×3 Blöcke, in denen nur noch eine Ziffer fehlt, die durch Auszählen direkt eingetragen werden kann.

Die **2** kann in C5 als letzte fehlende Ziffer in Block II eingetragen werden.

Danach kann die **6** in G5 als letzte fehlende Ziffer in Spalte 5 oder als letzte fehlende Ziffer von Block VIII eingetragen werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9			5	1	4			7
B		6		9	7	8		1	
C			4	6		3	5		
D	8	3	9		4		2	5	1
E	1	4		3	5	2		7	9
F	5	2	7		8		4	6	3
G			8	2		7	1		
H		5		8	9	1		4	
I	6			4	3	5			2

Abbildung 4.1: Beispielrätsel für die Lösungsmethoden *volles Haus* und *Bestimmen*.

9	8	3	5	1	4	6	2	7
2	6	5	9	7	8	3	1	4
7	1	4	6	2	3	5	9	8
8	3	9	7	4	6	2	5	1
1	4	6	3	5	2	8	7	9
5	2	7	1	8	9	4	6	3
4	9	8	2	6	7	1	3	5
3	5	2	8	9	1	7	4	6
6	7	1	4	3	5	9	8	2

Lösung von Abb. 4.1

4.2 Scannen

Scannen bedeutet in etwa: Systematisches Durchsuchen. Dabei sucht man **für eine gegebene Ziffer das einzig mögliche Feld**. Der Sudoku-Anfänger kann als kleine Hilfe Teile des Spielfeldes abdecken, um sich auf drei Zeilen und drei Blöcke zu konzentrieren. Abb. 4.2 zeigt den unteren Abschnitt des Beispielrätsels von Abb. 4.3, an dem diese Vorgehensweise demonstriert wird:

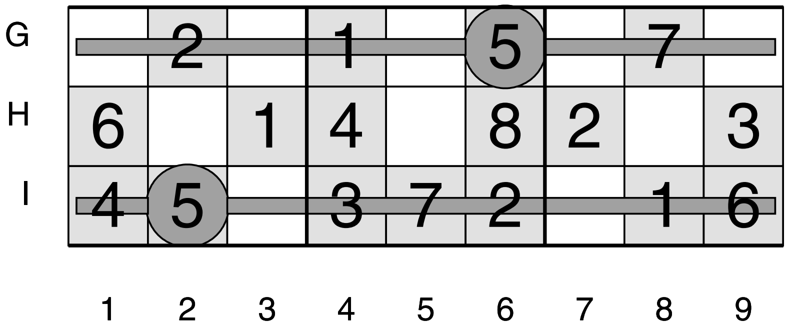


Abbildung 4.2: Unterer Bereich des Rätsels von Abb. 4.3. Im linken und mittleren Block steht die 5 bereits in Zeile G und Zeile I. Im rechten Block bleibt für die 5 nur Zeile H, also Feld H8 übrig.

1. Die 5 steht bereits in Zeile G im mittleren Block und in Zeile I im linken Block. Für die fehlende 5 im rechten Block bleibt nur Zeile H übrig, somit Feld H8 (siehe Abb. 4.2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	8		9	3	1		6	2
B	3		2	7		4	1		9
C		1		2		6		3	
D	2	9	7				6	4	8
E	1				4				7
F	5	4	6				3	9	1
G		2		1		5		7	
H	6		1	4		8	2		3
I	4	5		3	7	2		1	6

Abbildung 4.3: Beispielrätsel für die Lösungsmethode *Scannen*.

7	8	5	9	3	1	4	6	2
3	6	2	7	5	4	1	8	9
9	1	4	2	8	6	7	3	5
2	9	7	5	1	3	6	4	8
1	3	8	6	4	9	5	2	7
5	4	6	8	2	7	3	9	1
8	2	3	1	6	5	9	7	4
6	7	1	4	9	8	2	5	3
4	5	9	3	7	2	8	1	6

Lösung von Abb. 4.3

2. Wie Abb. 4.4 zeigt, belegt die 6 im linken Block bereits Zeile H und im rechten Block bereits Zeile I. Somit kann die 6 im mittleren Block nur noch in Zeile G, in Feld G5, stehen.

   Des weiteren fehlt im mittleren Block nur noch die 9 in H5, die das Haus (hier den mittleren Block) voll macht.

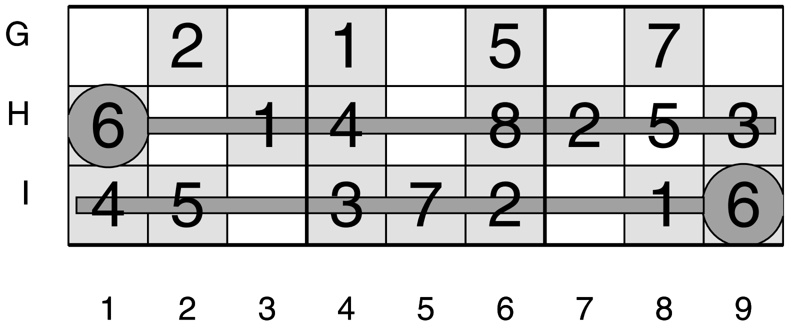


Abbildung 4.4: Unterer Bereich des Rätsels von Abb. 4.3. Die 6 kann nur in Zeile G im mittleren Block stehen, in Feld G5.

3. Der einzig mögliche Ort für die 7 ist das zweite Feld in Zeile H (linker Block zwischen der 6 und der 1).

Dieses Schema kann man nun auf die drei oberen und die drei mittleren Blöcke oder in senkrechter Ausrichtung, z. B. auf die drei rechten Blöcke anwenden, um weitere Felder zu lösen.

Wenn man nun die Abdeckung wieder aufhebt und das vollständige Sudoku von Abb. 4.3 betrachtet, sieht man wie die Ziffern in den zuvor abgedeckten Zeilen und Spalten nun kreuzweise weitere Felder ausschließen können. Abb. 4.5 links zeigt: Die 3er in B1, in H9 und in I4 lassen im Block links unten die 3 nur noch in Feld G3 zu. Ebenso wie in Abb. 4.5 rechts gezeigt, bleibt für die 7 in Block V nur noch Feld F6 übrig.

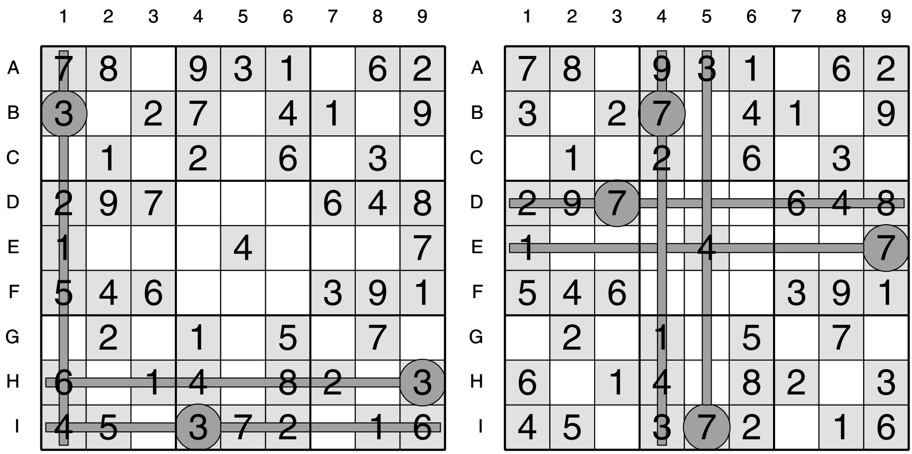


Abbildung 4.5: *Scannen* Links: In Block VII kann die 3 nur in G3 stehen. Rechts: Für die 7 bleibt im mittleren Block V nur Feld F6 übrig.

4.3 Erweitertes Scannen

Eine erweiterte Form des *Scannens* (engl. double scanning) benutzt Blockreihenfelder, von denen eines der Felder die Ziffer enthalten muss. In Übungsrätsel 1 von Abb. 4.7 auf Seite 21 und (Abb. 4.6 oben links) steht in G9 eine 6. Damit bleiben mit einer weiteren 6 in C2 mittels *Scannen* im Block links unten immer noch drei Felder H1, H3, und I1 als mögliche Plätze für die 6 übrig. Da die 6 in Block VIII entweder H5 oder H6 einnehmen muss (das sind die markierten Blockreihenfelder) und damit H1 und H3 ausschließt, bleibt in Block VII für die 6 nur noch Feld I1 übrig. Die 6 kann in I1 als Lösung eingetragen werden.

Ein weiteres Beispiel: Im selben Übungsrätsel kann man mit der 9 in E3 die 9 im mittleren Block auf die drei Blockreihenfelder D4, D5 und D6 einschränken und damit im Block rechts daneben in D7 und D9 ausschließen, womit man die 9 in F9, in das einzig mögliche Feld als Lösung eintragen kann (siehe oben rechts in Abb. 4.6).

Eine sehr anspruchsvolle, fast umständliche Form des *erweiterten Scannens* kann man im Rätsel von Abb. 2.1 auf Seite 4 (und Abb. 4.6 unten links) anwenden. Durch *Scannen* findet man wegen der 4er in I3 und in E2 die 4 in C1. Im rechten oberen Block kann die 4 deshalb nur in A8 oder A9 stehen (siehe Abb. 4.6 unten rechts). Im Block darunter kann die 4 nur in F8 oder F9 stehen. Ebenfalls nur in Spalte 8 oder 9. In Spalte 7 kann die 4 nur noch in H7 stehen und kann dort als Lösung eingetragen werden.

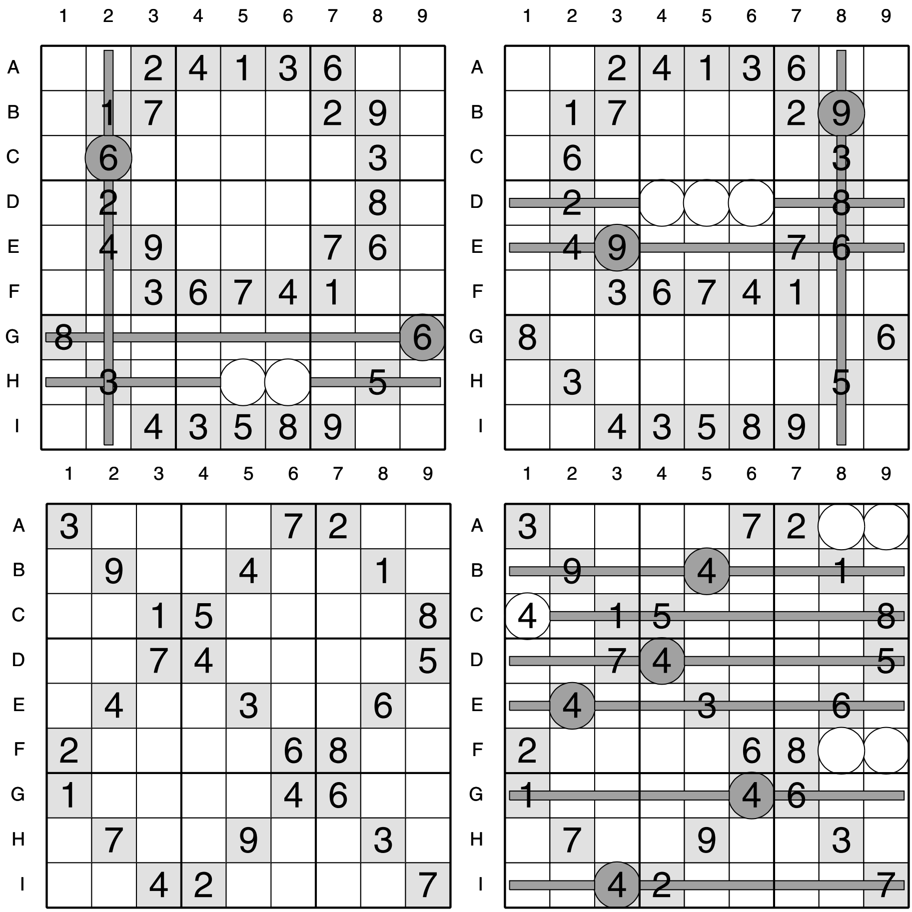


Abbildung 4.6: *Oben Links*: Erweitertes Scannen im Übungsrätsel 1. Wegen der 6 in G9 kann die 6 in Block VIII nur in Zeile H und somit in Block VII nur in Zeile I. Mit der 6 in C2 folgt: I1=6. *Oben Rechts*: Die 9 in E3 zwingt die 9 innerhalb von Block V in Zeile D und in Block VI in Zeile F. Mit der 9 in B8 folgt: F9=6. *Unten Links*: Rätsel von Abb. 2.1. *Unten Rechts*: Erweitertes Scannen in der 4.

4.4 Bestimmen

Bei der dritten Methode *Bestimmen* (oder Auszählen) sucht man umgekehrt **für ein festgehaltenes Feld die einzig mögliche Ziffer**. Dabei zählt man einfach für ein Feld alle Ziffern von 1 bis 9 durch und überprüft, ob es für dieses Feld nur noch eine mögliche Ziffer gibt. Dazu ein Beispiel:

Betrachtet man das Feld B9 im Rätsel von Abb. 4.1 ergibt sich:

1. Die 1, die 2 und die 3 können nicht in B9 stehen, denn die drei Ziffern stehen schon in derselben Spalte.

2. Die 4 kommt für B9 infrage.

3. Die 5 kann nicht in B9 stehen, denn es gibt bereits eine 5 im selben Block.

4. Die 6, die 7, die 8 oder die 9 können schließlich auch nicht in B9 stehen, denn diese 4 Ziffern stehen bereits in derselben Zeile B; die 7 steht sogar zusätzlich im selben Block.

Die 4 ist also die einzig mögliche Ziffer und kann deshalb direkt in das Feld in B9 als Lösung eingetragen werden.

Für das *Bestimmen* erfolgversprechende Felder sind solche, bei denen möglichst viele Felder derselben Zeile, derselben Spalte und desselben Blocks, kurz Felder des Wirkungsbereichs (siehe Abb. 3.2 auf Seite 7), bereits gelöste Felder sind. Dazu kann man für jede Zeile und für jede Spalte die Anzahl der gelösten Felder an den Rand schreiben und damit leichter die Felder mit der höchsten Anzahl gelöster Felder in denselben Einheiten ermitteln.

4.5 Erweitertes Bestimmen

Beim *erweiterten Bestimmen* zählt man die möglichen Ziffern für mehrere Felder, für die letzten ungelösten Felder einer Einheit, nacheinander durch. Insofern ist *erweitertes Bestimmen* streng genommen keine eigenständige Methode.

In Spalte 7 des Rätsels von Abb. 4.1 findet man durch Auszählen der Felder von oben nach unten: [A7]=368 (soll heißen: in [A7] kann nur die 3, die 6 und die 8 stehen), [B7]=3 und [E7]=8, die man sofort als Lösung eintragen kann. Damit rückwirkend [A7]=6. Dann weiter in Spalte 7 mit [G7]=7 und [I7]=9.

In Zeile C des Rätsels von Abb. 4.1 findet man durch Auszählen der Felder von links nach rechts: [C1]=27, [C2]=178, [C5]=2 und damit rückwirkend [C1]=7. Weiter mit [C8]=89 und [C9]=8 und damit rückwirkend [C2]=1 und [C8]=9 (als *volles Haus*).

In Block III des Rätsels von Abb. 4.1 findet man durch Auszählen der Felder: [B7]=3, [B9]=4 und [C9]=8. Damit weiter [A8]=2, [C8]=9 und [A7]=6.

4.6 Strategien

Bei der am häufigsten angewendeten Methode des *Scannens* hat man mehrere Strategien bezüglich der Reihenfolge zur Wahl. Eine Möglichkeit besteht darin, zuerst eine der sechs Bahnen (drei nebeneinander liegende oder übereinander liegende Blöcke) zu betrachten, und bei festgehaltener Bahn nacheinander die Ziffern von 1 bis 9 zu *scannen*, wie in Abb. 4.2 auf Seite 12 gezeigt.

Eine weitere Variante besteht darin, bei einer Ziffer zu bleiben, und kreuz und quer zu *scannen*, um möglichst viele Ziffern dieses Wertes als Lösung einzutragen und erst danach mit dem *Scannen* einer weiteren Ziffer fortzufahren.

Es zeigt sich nun, dass die letztere Strategie (bei einer Ziffer bleiben) bei Weitem schneller zum Ziel führt als zuerst alle Ziffern in einer Bahn zu durchlaufen und dann auf die nächste Bahn zu wechseln.

Mit den in diesem Kapitel behandelten Methoden sind alle leichten Sudokus, wie sie weltweit in der Tagespresse angeboten werden, lösbar. Es sind dazu auch bis auf die Methode der *reisenden Paare* die einzigen Methoden, die ohne Merkziffern (siehe nächsten Kapitel) auskommen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			2	4	1	3	6		
B		1	7				2	9	
C		6						3	
D		2						8	
E		4	9				7	6	
F			3	6	7	4	1		
G	8								6
H		3						5	
I			4	3	5	8	9		

Abbildung 4.7: Übungsrätsel 1

9	5	2	4	1	3	6	7	8
3	1	7	8	6	5	2	9	4
4	6	8	2	9	7	5	3	1
7	2	6	1	3	9	4	8	5
1	4	9	5	8	2	7	6	3
5	8	3	6	7	4	1	2	9
8	9	5	7	2	1	3	4	6
2	3	1	9	4	6	8	5	7
6	7	4	3	5	8	9	1	2

Lösung von Abb. 4.7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9			7					
B	6			9	2		1		
C	8		1		6				
D			9					8	1
E			5		9		3		
F	3	1					9		
G					1		5		6
H			7		3	4			9
I						5			2

Abbildung 4.8: Übungsrätsel 2

9	5	3	7	4	1	2	6	8
6	7	4	9	2	8	1	5	3
8	2	1	5	6	3	7	9	4
7	4	9	3	5	2	6	8	1
2	8	5	1	9	6	3	4	7
3	1	6	4	8	7	9	2	5
4	3	2	8	1	9	5	7	6
5	6	7	2	3	4	8	1	9
1	9	8	6	7	5	4	3	2

Lösung von Abb. 4.8

5 Kandidaten

Ein erster Schritt, um bei schwierigeren Sudokus weitere Fortschritte zu erzielen, besteht darin, in die freien Felder die *möglichen* Ziffern, die sogenannten Kandidaten, einzutragen und anhand dieser mit etwas Kombination nacheinander Kandidaten auszuschließen.

Das Sudoku von Abb. 5.1 auf Seite 24 ist leicht und kann mit den in Kapitel 4 besprochenen Mitteln gelöst werden. Dasselbe Rätsel ist nochmals in Abb. 5.2 mit Kandidaten dargestellt, um die folgenden zwei Zusammenhänge darzustellen:

- Einige Felder wie z. B. E3 und G7 beinhalten nur einen einzigen Kandidaten, den man sofort als Lösung in das Feld eintragen kann. Die Felder mit nur einem Kandidaten, sind identisch mit den Feldern die man mit *Bestimmen* (siehe Kapitel 4) lösen kann. Den vereinsamten Kandidaten selbst nennt man *nackter Einser* (engl. naked single).

- Einige Kandidaten kommen innerhalb einer Einheit (innerhalb einer Zeile, einer Spalte oder eines Blocks) nur ein einziges mal vor. Beispielsweise kommt die 1 innerhalb von Spalte 9 nur ein einziges mal als mögliche Ziffer vor.

  Diese Kandidaten kann man ebenfalls direkt als Lösung in das Feld eintragen. Sie sind identisch mit den Kandidaten, die man mittels *Scannen* als Lösung findet. Den Kandidaten selbst, die 1 in F9, nennt man *versteckter Einser* (engl. hidden single), da er nur einmalig innerhalb einer Einheit versteckt vorkommt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A					5				
B			5		1		9		
C		4		9		6		1	
D			1				8		
E	4	2						3	7
F			6				2		
G		3		5		7		4	
H			8		3		1		
I					8				

Abbildung 5.1: Ein leichtes Sudoku ohne Kandidaten. Es kann mit den Methoden aus Kapitel 4 gelöst werden. Die 8 als Lösung für G9 (man beachte die 8 in D7, H3 und I5) ist mittels *Scannen* abzuleiten. Die 9 als Lösung von E3 ist mit *Bestimmen* schwieriger zu finden.

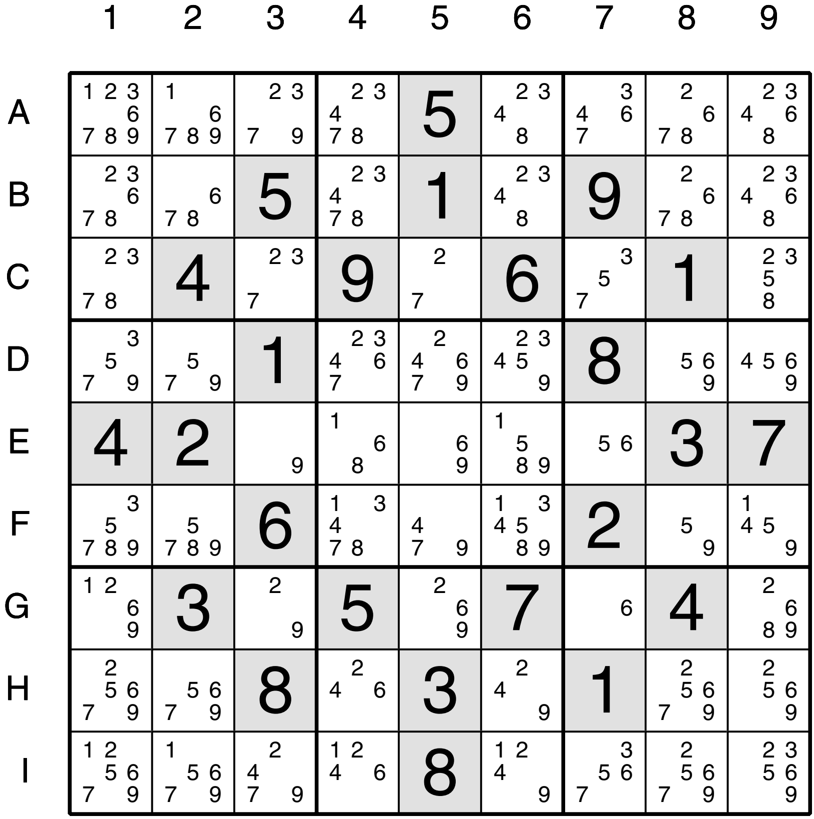


Abbildung 5.2: Das Sudoku von Seite 24, diesmal mit eingetragenen Kandidaten. Die 8 als Lösung für G9 als *versteckter Einser* ist nicht sehr auffällig. Der Kandidat 8 in G9 ist die einzige 8 in Zeile G und in Block IX. Die 9 als Lösung von E3 fällt als *nackter Einser* sofort ins Auge.

Hat man eine Ziffer gefunden und als Lösung in ein Feld eingetragen, kann man den entsprechenden Kandidaten in allen Feldern des Wirkungsbereichs streichen.

Hat man in Abb. 5.2 z. B. die 9 als Ziffer in E3 eingetragen, kann man die 9 als Kandidat in den Feldern D1, D2, F1, F2, A3, G3, I3, E5 und E6 streichen, womit sich in G3 ein neuer *nackter Einser* zeigt.

Sehr viele *Einser* sind zugleich *nackt* als auch *versteckt*. Löst man leichte Sudokus, wie in Kapitel 4 beschrieben ohne Kandidaten (siehe Abb. 5.1), findet man *versteckte Einser* leichter mittels *Scannen*, als *nackte Einser* mittels *Bestimmen*. Löst man umgekehrt Sudokus wie hier beschrieben mit Kandidaten (siehe Abb. 5.2), — und bei schwierigeren Sudokus sind Kandidaten unerlässlich — sind umgekehrt *nackte Einser* im Rätselfeld auffälliger als *versteckte Einser*.

6 Block-Reihen Wechselwirkung

Die beiden einfachsten Möglichkeiten Kandidaten auszuschließen, verwenden den Überlappungsbereich zwischen einer Zeile (oder Spalte) und einem Block, der maximal drei Felder umfasst (siehe Abb. 3.3 auf Seite 8). Diese Methoden sind logisch gleichwertig mit *erweitertem Scannen*, welches in Kapitel 4 als Methode ohne den Gebrauch von Kandidaten bereits behandelt wurde.

6.1 Verweisende Paare

Die Verteilung der 9er in der Spielsituation von Abb 6.1 zeigt in Block II (mit Kreisen markiert) eine kleine Besonderheit. Alle 9er befinden sich in einer einzigen Zeile (hier Zeile B). Egal wo die 9 letztendlich in Block II steht, sie beansprucht nur Zeile B. Die übrigen 9er Kandidaten in Zeile B, außerhalb von Block II sind somit überflüssig und können ausgeschlossen werden. Im besagten Beispiel von Abb. 6.1 sind das die 9er in B3, B8 und B9. Die beiden umkreisten 9er nennt man *verweisende Paare* (engl. pointing pairs).

Ist die Verteilung von Kandidaten des gleichen Wertes innerhalb eines Blocks auf eine Zeile (Spalte) beschränkt, können alle weiteren Kandidaten dieses Wertes in dieser Zeile (Spalte) außerhalb des Blocks ausgeschlossen werden.

Sind anstatt zwei Kandidaten drei in einer Zeile angeordnet, stünde zum Beispiel in B6 ebenfalls eine 9 als Kandidat, spricht man von einem *verweisenden Dreier*. Die Ausschlussmöglichkeiten bleiben dieselben.

Der weitere Lösungsweg kann wie folgt skizziert werden: Nach Ausschluss der 9er ergibt sich im konkreten Beispiel von Abb. 6.1 die 9 in C8 als die letzte 9 in Block III und kann als *versteckter Einser* (siehe Kapitel 4) direkt eingetragen werden. Damit kann man die 9 in C1, in C3 und in D8 streichen, womit in Block VI eine weitere 9 zum *versteckten Einser* wird.

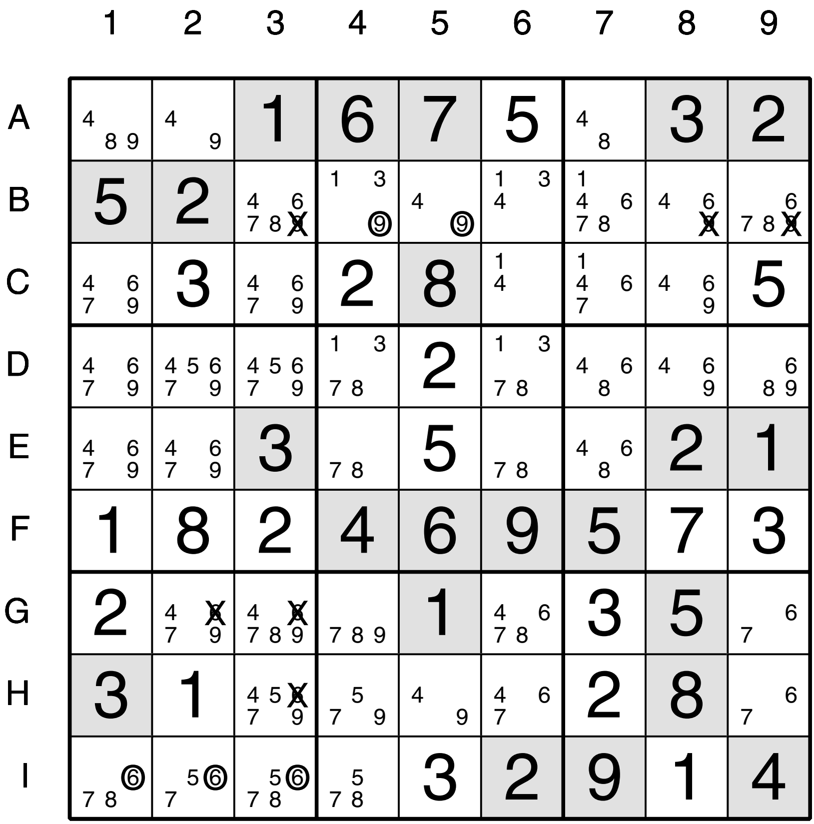


Abbildung 6.1: Block-Reihen Wechselwirkung. Mit dem *verweisenden Paar* in Zeile B können drei 9er ausgeschlossen werden. Die 6 *beansprucht* in Zeile I nur Block VII, womit drei 6er ausgeschlossen werden können.

6.2 Beanspruchen

Die Verteilung der 6er in Abb. 6.1 zeigt in Zeile I (mit Kreisen markiert) den umgekehrten Fall. Alle 6er von Zeile I befinden sich in einem einzigen Block (hier Block VII). Egal wo die 6 letztendlich in Zeile I steht, sie beansprucht nur Block VII für sich. Somit sind die übrigen 6er Kandidaten in Block VII, außerhalb von Zeile I, überflüssig und können ausgeschlossen werden. Im besagten Beispiel sind das die 6er in G2, G3 und H3. Diese Methode, *Beanspruchen* (engl. claiming) genannt, kann wie folgt formuliert werden:

Ist die Verteilung von Kandidaten des gleichen Wertes innerhalb einer Zeile (Spalte) auf einen Block beschränkt, können alle weiteren Kandidaten dieses Wertes in diesem Block, die nicht in der Zeile (Spalte) liegen, ausgeschlossen werden.

Die beiden Ausschlussvarianten sind logisch identisch mit dem *erweiterten Scannen* aus Kapitel 4 für leichte Rätsel, das nur gelöste Felder betrachtet und ohne Kandidaten auskommt. *Verweisende Paare* und *Beanspruchen*, kurz Block-Reihenausschlüsse, tauchen vor allem im Lösungsverlauf von schwierigen Rätseln auf, wenn z. B. Kandidaten durch eine andere Methode ausgeschlossen werden und die verbleibenden Kandidaten erst dann das Verteilungsmuster für die Block-Reihenausschlüsse bilden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		8	9		1				
B				6	7				5
C						9			6
D			5					4	
E	9	4						2	3
F		1					8		
G	2			9					
H	4				8	6			
I					4		9	7	

Abbildung 6.2: Übungsrätsel 3: *Verweisende Paare* und *Beanspruchen*

6	8	9	5	1	4	2	3	7
1	2	3	6	7	8	4	9	5
7	5	4	3	2	9	1	8	6
8	6	5	2	9	3	7	4	1
9	4	7	8	6	1	5	2	3
3	1	2	4	5	7	8	6	9
2	7	8	9	3	5	6	1	4
4	9	1	7	8	6	3	5	2
5	3	6	1	4	2	9	7	8

Lösung von Abb. 6.2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B			9	2		1			8
C	3					4	6		
D			4		7				
E			3	5					4
F		8	1	3			5		2
G					5	7			
H		9		8	2				3
I			8	4					5

Abbildung 6.3: Übungsrätsel 4: *Verweisende Paare* und *Beanspruchen*

8	1	6	9	3	5	2	4	7
7	4	9	2	6	1	3	5	8
3	2	5	7	8	4	6	9	1
2	5	4	6	7	8	1	3	9
9	7	3	5	1	2	8	6	4
6	8	1	3	4	9	5	7	2
4	3	2	1	5	7	9	8	6
5	9	7	8	2	6	4	1	3
1	6	8	4	9	3	7	2	5

Lösung von Abb. 6.3

7 Gebundene Sets

Die im letzten Kapitel behandelten Block-Reihen Methoden gehören zur Gruppe der Ein-Ziffer Methoden, denn für den Ausschluss wird die Verteilung nur eines Kandidaten (die Verteilung aller Kandidaten desselben Wertes, z. B. aller 6er) betrachtet. In diesem Kapitel geht es um die ersten Mehr-Ziffer Methoden .

7.1 Nacktes Paar

Das folgende Rätsel in Abb. 7.1 zeigt mehrere Felder mit nur zwei Kandidaten. Die beiden interessantesten davon sind B6 und G6. Beide Felder sehen sich und beinhalten dieselben zwei Kandidaten, d. h. beide Felder befinden sich hier in derselben Spalte. Man kann nun eine einfache Fallunterscheidung durchführen: Angenommen, dass die 4 in B6 steht, kann in G6 folglich keine 4 stehen; dort muss eine 7 stehen. Steht umgekehrt in B6 die 7, kann in G6 nur die 4 stehen. Das bedeutet, es gibt nur zwei mögliche Belegungen. Entweder B6=4 und G6=7 oder umgekehrt. Beide Fälle zusammengefasst bedeuten: Die 4 und die 7 sind an die beiden Felder B6 und G6 gebunden. Sie können innerhalb von Spalte 6 nirgendwo sonst stehen. Man kann deshalb beide Kandidaten, die 4 und die 7, in den restlichen Feldern der gemeinsamen Einheit (hier Spalte 6) streichen. Allgemeiner formuliert:

Gibt es in einer Einheit zwei zweiwertige Felder mit den gleichen Kandidaten, können beide Kandidaten in den restlichen Feldern der Einheit ausgeschlossen werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	7 9	3	5	8	1	6	7 9	2
B	6	2 5 7	2 7 8	3	9	4 7	1 4 8	4 5 7 8	1 5 7
C	7 8	5 7 9	1	4 7	6	2	3	4 5 7 8 9	5 7
D	5	6	9	8	2	3	7	1	4
E	3	1	2 7	4 7 9	4 7	~~4~~ 5 ~~7~~ 9	2 5	6	8
F	2 7	8	4	6 7	1	5 6 ~~7~~	2 5	3	9
G	1 7 8	3 4 7	6	2	3 4 7	4 7	9	4 5 7 8	1 5 7
H	1 2 7 8	2 4 7	2 7 8	1 4 6 7 9	5	~~4~~ 6 ~~7~~ 9	1 4 8	2 4 7 8	3
I	9	2 3 4 7	5	1 4 7	3 4 7	8	1 4	2 4 7	6

Abbildung 7.1: B6 und G6 mit den Kandidaten 4 und 7 bilden ein *nacktes Paar*. Die Kandidaten 4 und 7 können in allen weiteren Feldern von Spalte 6 ausgeschlossen werden.

7.2 Nackter Dreier

Das Prinzip des *nackten Paares*, oder allgemeiner formuliert, das Prinzip der Bindung von zwei Kandidaten an zwei Felder innerhalb einer Einheit, lässt sich leicht auf drei Kandidaten, die an drei Felder gebunden sind, erweitern. Im selben Rätsel in Abb. 7.1 in Zeile G gibt es drei Felder G2, G5 und G6, die insgesamt drei Kandidaten besitzen. Wie die genaue Aufteilung der 3, der 4 und der 7 auf die Felder G2, G5 und G6 letztendlich aussieht ist zwar nicht bekannt, aber in diesen drei Feldern können keine weiteren Kandidaten stehen, als die 3, die 4 und die 7. Die drei Kandidaten und die drei Felder bilden ein sogenanntes gebundenes Set von Kandidaten (engl. locked set). Damit können alle drei Kandidaten in den restlichen Feldern der Einheit ausgeschlossen werden. In diesem Fall sind das die 7 in G1, die 4 und die 7 in G8 und die 7 in G9. Was nach dem Ausschluss in Zeile G übrig bleibt ist ein *nackter Dreier* (engl. naked triplet): Die 3, 4, und 7 in G2, G5, G6. Die restlichen Kandidaten in Zeile G bilden einen *nackter Dreier* mit 1, 5 und 8 in G1, G8 und G9.

Wie das Beispiel in Zeile G von Abb. 7.1 zeigt, ist es nicht notwendig, dass in jedem der drei Felder des gebundenen Sets alle drei Kandidaten stehen. Bezeichnet man die drei Kandidaten eines *nackten Dreier* mit a, b, und c, sind folgende Konstellationen und ihre Vertauschungen denkbar:

$$[\mathtt{a\,b\,c}]\ [\mathtt{a\,b\,c}]\ [\mathtt{a\,b\,c}],\ \text{oder}\ [\mathtt{a\,b}]\ [\mathtt{a\,b\,c}]\ [\mathtt{a\,b\,c}]$$

$$\text{oder}\ [\mathtt{a\,b}]\ [\mathtt{b\,c}]\ [\mathtt{a\,b\,c}],\ \text{oder}\ [\mathtt{a\,b}]\ [\mathtt{b\,c}]\ [\mathtt{a\,c}]$$

Entscheidend ist, dass in den drei Feldern neben `a`, `b` und `c` keine weiteren Kandidaten stehen.

Gibt es in einer Einheit drei Felder mit insgesamt nur drei unterschiedlichen Kandidaten, können alle drei Kandidaten in den restlichen Feldern der Einheit ausgeschlossen werden.

7.3 Nackter Vierer

Das Ausschlussprinzip des *nackten Dreiers* ist ohne Weiteres auf die Stellung von vier Kandidaten in vier Feldern erweiterbar. Allerdings ist eine solche Situation sehr selten anzutreffen. Abb. 7.2 zeigt in Spalte 7 vier Felder, die zusammen nicht mehr als vier unterschiedliche Kandidaten zeigen. Damit können analog wie beim *nackten Dreier* Kandidaten ausgeschlossen werden. Alle nackten Sets können daher mit einer einzigen Regel zusammengefasst werden:

Gibt es in einer Einheit N Felder mit insgesamt N unterschiedlichen Kandidaten, können alle N Kandidaten in den restlichen Feldern der Einheit ausgeschlossen werden.

7.4 Versteckes Paar

In Abb. 7.1 zeigt Zeile H eine besondere Anordnung der Kandidaten 6 und 9. Die 6 kommt in Zeile H nur in zwei Feldern vor, in H4 und H6. Die 9 ebenso. Angenommen die 6 steht in H4. Dann steht zwangsläufig die 9 in H6. Steht umgekehrt die 9 in H4, dann muss die 6 in H6 stehen. Wieder sind zwei Kandidaten an zwei Felder gebunden, auch wenn in den beiden Feldern noch andere Kandidaten stehen. Da die 6 und die 9 beide Felder für sich beanspruchen, können die restlichen Kandidaten

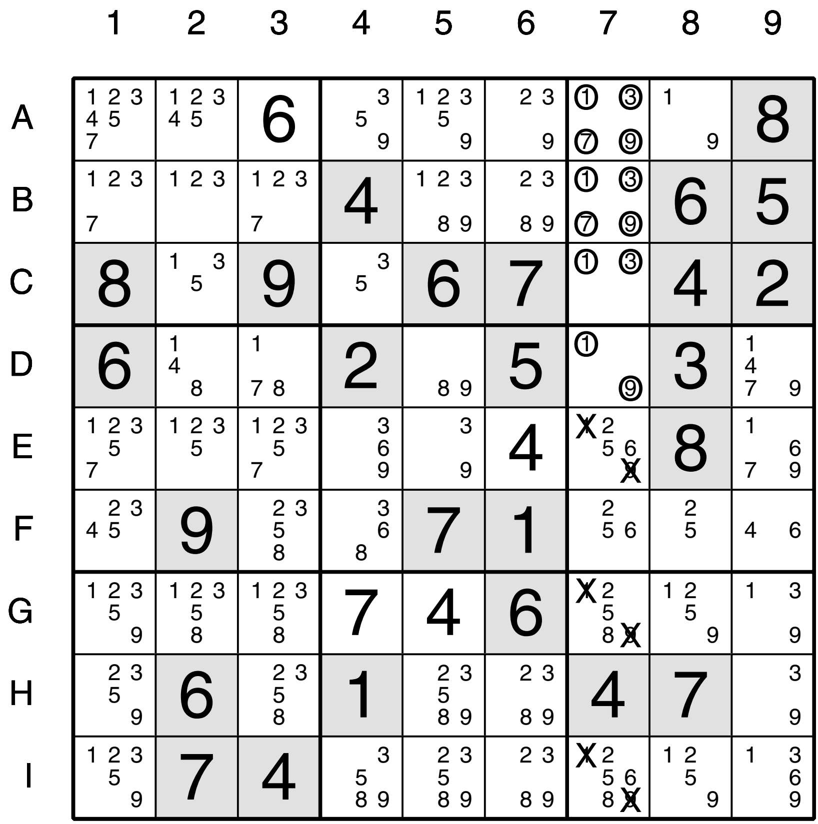


Abbildung 7.2: Die Felder ABCD7 bilden einen *nackten Vierer* in den Kandidaten 1, 3, 7 und 9. Diese Kandidaten können in den weiteren Feldern von Spalte 7 ausgeschlossen werden.

in beiden Feldern ausgeschlossen werden, in diesem Fall die 1, die 4 und die 7 in H4 und die 4 und die 7 in H6. Man spricht von einem *versteckten Paar*, da in den beiden Feldern noch andere Kandidaten stehen.

Kommen zwei unterschiedliche Kandidaten innerhalb einer Einheit in insgesamt nur zwei Feldern vor, können die restlichen Kandidaten in den beiden Feldern ausgeschlossen werden.

Der Unterschied zwischen einem *nackten Paar* und einem *versteckten Paar* kann wie folgt zusammengefasst werden:

Beim ***nackten Paar*** stehen in zwei Feldern A und B derselben Einheit nur dieselben zwei Kandidaten x und y. Durch die daraus folgende Bindung von x und y an A und B können die Kandidaten des *nackten Paares* x und y **außerhalb der beiden Felder** ausgeschlossen werden. Beim ***versteckten Paar*** treten die beiden Kandidaten des Paares x und y außerhalb der beiden Felder A und B nicht mehr auf. Die Bindung der beiden Kandidaten x und y an die beiden Felder A und B bewirkt, dass nun alle weiteren Kandidaten (nicht x und nicht y) **in den Feldern des versteckten Paares** ausgeschlossen werden können. Das Ergebnis ist in beiden Fällen, ob *verstecktes Paar* oder *nacktes Paar*, das Gleiche:

- a) in Feld A und B stehen nur x und y
- b) in den Feldern der Einheit jenseits von A und B stehen nicht mehr x und y.

Die Menge aller Kandidaten ist innerhalb der Einheit in zwei Gruppen aufgeteilt: Eine Gruppe mit x und y in den zwei Feldern A und B und die zweite Gruppe mit allen weiteren Kandidaten (also ohne x und ohne y) in allen weiteren Feldern (ohne A und ohne B) der Einheit.

7.5 Versteckter Dreier

In Spalte 6 des Rätsels von Abb.7.1 auf Seite 34 kommen die 5, die 6 und die 9 in insgesamt nur drei verschiedenen Feldern vor: In E6 mit Kandidaten 4, 5, 7 und 9, in F6 mit Kandidaten 5, 6 und 7 und in H6 mit Kandidaten 4, 6, 7 und 9. Auch in dieser Anordnung ist nicht bekannt, wie genau die drei Kandidaten 5, 6 und 9 letztendlich auf die drei Felder E6, F6 und H6 verteilt sind. Die drei Kandidaten sind jedoch an die drei Felder gebunden, da sie sonst nirgendwo in Spalte 6 in Erscheinung treten. Für weitere Kandidaten ist in E6, F6 und in H6 kein Platz, sodass in diesem Fall die 4 und die 7 in allen drei Feldern ausgeschlossen werden können.

Die Eliminierungen des *versteckten Dreiers* sind identisch mit denen des *nackten Paares* in B6 und G6. Nach dem Ausschluss zeigt Spalte 6 ein *nacktes Paar* und einen *nackten Dreier*. Da Spalte 6 nur noch fünf freie Felder besitzt, muss es zu einem *nackten Paar* einen *versteckten Dreier* als ergänzendes Gegenstück geben.

Ebenso muss es zu dem *versteckten Paar* aus 6 und 9 in Zeile H bei den sieben noch freien Feldern einen *nackten Fünfer* als Gegenstück geben. Tatsächlich bilden die fünf Felder H1, H2, H3 H7 und H8 einen *nackten Fünfer* mit den fünf Kandidaten 1, 2, 4, 7 und 8, denn die 6 und die 9 befinden sich in H4 und H6 und bilden als Gegenstück das *versteckte Paar*. Den Ausschluss der 1, der 4 und der 7 in H4 und in H6 kann man entweder mit einem *versteckten Paar* oder mit einem *nackten Fünfer* begründen.

Da es, wie oben beschrieben, zu jedem *versteckten Set* innerhalb einer Einheit ein entsprechendes *nacktes Set* gibt, könnte man auf *versteckte Sets* vollständig verzichten und sich auf die Suche nach *nackten Sets* beschränken.

7.6 Versteckter Vierer

Ein *versteckter Vierer* besteht aus vier Kandidaten, die innerhalb einer Einheit auf nur vier Felder verteilt sind. Allgemein kann die Ausschlussregel für versteckte Sets wie folgt formuliert werden:

Kommen N unterschiedliche Kandidaten innerhalb einer Einheit in insgesamt nur N Feldern vor, können alle weiteren Kandidaten in den N Feldern ausgeschlossen werden.

7.7 Wie man versteckte Sets findet

Während *nackte Sets* leicht unter den Kandidaten eines Rätsels ausfindig zu machen sind, sind *versteckte Sets*, wie der Name schon sagt, etwas schwieriger zu finden. Es gibt jedoch ein einfaches Hilfsmittel zum Auffinden von *versteckten Sets*. Gegeben sei die folgende in Abb. 7.3 gezeigte Belegung einer Zeile mit einem *versteckten Dreier*:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 2 3 4 5	2 3 4 9	3 4 9	4 6 9	3 4 6	3 4 5 8 9	1 2 3 4 8 9	7	3 4 9

Abbildung 7.3: Rätselzeile mit einem *versteckten Dreier*.

Man trägt nun, wie in Tabelle 7.1 auf Seite 42 geschehen, für jeden Kandidaten dieser Zeile die Spaltennummern auf, in denen der

Kandidat vorkommt. Tabelle 7.1 der Spaltennummern ist wie folgt zu lesen: Die 6 kommt nur in Spalte 4 und 5 vor, deshalb 45. Die 2 kommt in den Spalten 1, 2 und 7 vor, deshalb: 127.

In der zweiten Tabellenspalte, erkennt man, dass Kandidat 1, Kandidat 5 und Kandidat 8 in insgesamt nur drei verschiedenen Spielfeldspalten vorkommen: In Spalte 1, 6 und 7. Dies kann man deshalb leicht erkennen, weil sich die Spaltennummern in der zweiten Spalte von Tabelle 7.1 wie ein *nackter Dreier* verhalten. In der zweiten Tabellenspalte bilden 17, 16 und 67 einen *nackten Dreier* in den Spaltennummern, der besser zu finden ist, als der entsprechende *versteckte Dreier* in den Kandidaten der gezeigten Rätselzeile.

Darüber hinaus kann man in Tabelle 7.1 nicht nur den *nackten Dreier* entdecken, man kann auch Spaltennummern ausschließen. Dieser Ausschluss von Spaltennummern in Tabelle 7.1 entspricht dem Ausschluss von Kandidaten durch den *versteckten Dreier* im Spielfeld. Der Ausschluss von Spaltennummer 1 und 7 für den Kandidaten 2 in der Spaltennummern-Tabelle bedeutet, dass im Spielfeld die 2 in Spalte 1 und in Spalte 7 ausgeschlossen werden kann. Mit diesem *nackten Dreier* in den Spaltennummern von Tabelle 7.1 kann man alle übrigen Spaltennummern 1er, 6er und 7er in der Tabelle streichen und ebenso im Spielfeld die entsprechenden Kandidaten:

Man kann im Spielfeld die 2 in Spalte 1 und 7 entfernen, die 3 und die 4 in Spalte 1, 6 und 7, und die 9 in Spalte 6 und 7.

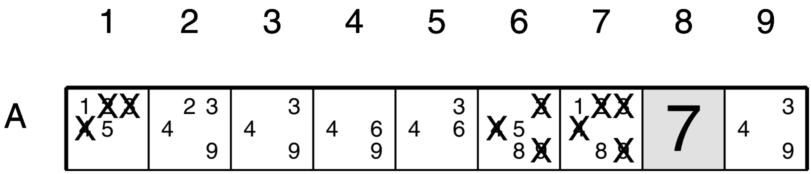


Abbildung 7.4: Ausschlüsse des *versteckten Dreiers*.

Kandidat	Spaltennummer
1	**17**
2	$\cancel{1}2\cancel{7}$
3	$\cancel{1}235\cancel{6}\cancel{7}9$
4	$\cancel{1}2345\cancel{6}\cancel{7}9$
5	**16**
6	45
7	8
8	**67**
9	$234\cancel{6}\cancel{7}$

Tabelle 7.1: Spaltennummern-Tabelle zum Auffinden von *versteckten Sets* in Spielfeldzeilen. Zu lesen: Kandidat 6 befindet sich nur in Spalte 4 und 5. Die Kandidaten 1, 5 und 8 kommen nur in drei Spalten 1, 6 und 7 vor und bilden innerhalb der Tabellenspalte einen *nackten Dreier* in den Spaltennummern und einen *versteckten Dreier* im Spielfeld. Die Ausschlüsse der Spaltennummer 1 für Kandidat 2 bedeutet: Kandidat 2 kann in der betreffenden Zeile nicht in Spalte 1 stehen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			9	2		3	7		
B		2						4	
C	4		1		6		9		2
D	1			4	9	2			3
E			7	1	3	8	2		
F	3			5	7	6			1
G	9		6		5		1		8
H		1						6	
I			4	6		1	5		

Abbildung 7.5: Übungsrätsel 5: *Versteckter Dreier*

8	6	9	2	4	3	7	1	5
7	2	3	9	1	5	8	4	6
4	5	1	8	6	7	9	3	2
1	8	5	4	9	2	6	7	3
6	4	7	1	3	8	2	5	9
3	9	2	5	7	6	4	8	1
9	7	6	3	5	4	1	2	8
5	1	8	7	2	9	3	6	4
2	3	4	6	8	1	5	9	7

Lösung von Abb. 7.5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7			3			5		
B			5			8			6
C	6		4	5		7	3		2
D	5			9			8		
E			1			2			3
F	8		2	4		3	6		9
G	4			6			2		
H			8			9			4
I	1		6	8		4	9		5

Abbildung 7.6: Übungsrätsel 6: *Nackter Dreier*

7	8	9	3	2	6	5	4	1
2	3	5	1	4	8	7	9	6
6	1	4	5	9	7	3	8	2
5	4	3	9	6	1	8	2	7
9	6	1	7	8	2	4	5	3
8	7	2	4	5	3	6	1	9
4	9	7	6	1	5	2	3	8
3	5	8	2	7	9	1	6	4
1	2	6	8	3	4	9	7	5

Lösung von Abb. 7.6

Das gezeigte Suchschema kann ebenso auf *versteckte Sets* in Spalten angewendet werden. Dabei muss eine Zeilennummern-Tabelle angelegt werden, die für jeden Kandidaten einer Spalte die Zeilennummer angibt, in denen er vorkommt.

7.8 Praktische Hinweise und Spielphasen

Als Sudokuspieler will man Rätsel schnell und effizient lösen. Zumindest möchte man das Rätsel gelöst haben, bevor man die Lust verliert oder bevor die Konzentration nachlässt. Nachteilig hierbei ist, dass man einem Rätsel den Grad der Schwierigkeit nicht sofort ansieht, sondern ihn erst im Spielverlauf abschätzen kann.

Den Spielverlauf kann man je nach Schwierigkeitsgrad in bis zu vier Phasen einteilen.

7.8.1 Phase 1, ohne Kandidaten

In der ersten Phase probiert man das Rätsel ohne Kandidaten mit den in Kapitel 4 besprochenen Methoden zu lösen:

- *Scannen*
- *erweitertes Scannen*
- *Bestimmen* und
- *erweitertes Bestimmen.*

Es müssen keine Kandidaten eingetragen werden. Bei leichten Sudokus kommt man beim Lösen über diese erste Phase nicht hinaus.

7.8.2 Phase 2, teilweise mit Kandidaten

Ist das Rätsel nicht mit den in Phase 1 vorgesehenen Mitteln zu lösen, schreitet man zur nächsten Phase. In der zweiten Phase trägt man Kandidaten ein, allerdings nicht sofort alle, sondern nur Ausgewählte. Jeder Sudokuspieler entwickelt mit der Zeit seine eigenen Wege, um mit möglichst wenigen Kandidaten weitere Fortschritte im Spielverlauf zu machen. Hier werden zwei davon vorgestellt:

- **Blockpaare**: Eine einfache Auswahl besteht darin, Kandidaten einzutragen, die **in einem Block nur zweimal vorkommen**. Diese Kandidaten fallen gewissermaßen als Nebenprodukt beim *Scannen* und *erweiterten Scannen* an. Diese Kandidaten dienen zum Ersten als Merkhilfe. Zum Zweiten bilden diese Kandidatenpaare *starke Paare* (siehe Kapitel 11) in dem Sinne, dass sich beide Kandidaten gegenseitig ausschließen. Nur einer von beiden kann wahr sein. Damit können sich — wie weiter unten gezeigt wird — nach Ausschluss eines dieser Kandidaten in vielen Fällen direkt weitere Ausschlüsse ergeben. Mit diesem einfachen Verfahren können alle *nackten* und *versteckten Paare*, die sich auf einen Block beschränken, gefunden und gelöst werden. Ebenso lassen sich alle *Block-Reihen Wechselwirkungen* finden.

- **zweiwertige Felder**: Bei der Suche nach *nackten Einsern*, also nach Feldern mit nur einem Kandidaten mit *erweitertem Bestimmen* findet man oft Felder mit nur zwei Kandidaten. Trägt man nur die Kandidaten zweiwertiger Felder ein, ergibt sich in vielen Fällen die Belegung von weiteren Feldern. Zwischen den Kandidaten in einem zweiwertigen Feld besteht dieselbe entweder-oder-Beziehung wie zwischen einem *starken Paar* (siehe Kapitel 12). Mit diesem Verfahren können alle *nackten Paare*, die sich über verschiedene 3×3 Böcke erstrecken, gefunden werden.

- Nur für den Fall, dass man beide Verfahren gleichzeitig oder nacheinander benutzt, ist es sinnvoll, zweiwertige Felder eigens zu markieren, um Kandidaten, welche die vollständige Feldbelegung eines zweiwertigen Feldes anzeigen von denen, die Blockpaare darstellen, zu unterscheiden.

7.8.3 Phase 3, mit allen Kandidaten

Erst wenn sich das Rätsel mit den Verfahren der Phase 2 nicht lösen lässt, kann man in der dritten Phase die restlichen Kandidaten eintragen und das Gitter vervollständigen. Man trägt dabei in jeden Block die Kandidaten ein, die nicht schon vorher in Phase 2 eingetragen wurden. In einem Gitter, in dem nun alle Kandidaten eingetragen sind, ist die spezielle Markierung zweiwertiger Felder wieder überflüssig. Auch gehen die mühsam bei den Blockpaaren gefundenen starken Paare innerhalb eines Blocks in der Menge aller Kandidaten wieder verloren. Im so aufgefüllten Kandidatengitter braucht man in dieser Spielphase weder nach *versteckten Einsern*, noch nach *Block-Reihen Wechselwirkung* oder nach auf Blöcke beschränkte *nackte Paare* zu suchen. Diese wurden bereits in Phase 2 gelöst. Wenn man Phase 2 überspringt und nach *Scannen* und *Bestimmen* sofort alle Kandidaten einträgt, sollte man nach *Block-Reihen Wechselwirkungen* und nach *gebunden Sets* Ausschau halten. Findet man keine im Spielverlauf übersehenen *nackte Einser*, ist das nächstschwierigere Muster, nach dem man suchen kann *nackte* und *versteckte Dreier* und *Vierer*, die sich in einer Zeile oder Spalte über mehr als einen Block erstrecken.

7.8.4 Phase 4, mit Merkhilfen

In der vierten Phase, wenn es darum geht komplizierte Muster ausfindig zu machen und Beziehungen höherer Ordnung zwischen Kandidaten oder Kandidatengruppen herauszufinden, reichen

Kandidaten als Gedächtnisstütze nicht mehr aus. Hier helfen nur noch zusätzliche Markierungen der Kandidaten im Spielfeld oder eigens auf einem Extrablatt erstellte Diagramme oder Tabellen.

Es gibt auch Sudokus, die so schwer sind, dass die genannten Merkhilfen der Phase 4 nicht mehr ausreichen um zur Lösung zu kommen. Die Muster und Ketten, die es zu finden gilt, sind zu komplex und zu groß, sodass die Suche nach ausschließbaren Kandidaten zu aufwendig wird. Diese extremen Rätsel sind für den Spieler nicht mehr geeignet. Ein Beispiel ist im Abschnitt über *logische forcing chains* beschrieben.

7.8.5 Beispiele für Phase 2

Zwei Beispiele erläutern die Vorgehensweise von Phase 2. In Abb. 7.7 ist die Ausgangsstellung eines Rätsels und das Ende der Phase 1, nachdem alle *versteckten Einser* mittels *Scannen* und *erweitertem Scannen* eingetragen worden sind, dargestellt.

Anstatt nun alle Kandidaten einzutragen, werden wie oben beschrieben die bereits beim *Scannen* gefundenen Kandidaten eingetragen, die in einem Block nur zweimal vorkommen. Diese Stellung ist in Abb. 7.8 gezeigt. Die 1 und die 6 in A4 und in A6 kommen innerhalb von Zeile A nur in Spalte 4 und Spalte 6 vor, bilden also ein *verstecktes Paar*. Hätte man nach Phase 1 sofort alle Kandidaten eingetragen, hätte man wegen des *versteckten Paars* die restlichen Kandidaten in A4 und A6 wieder entfernen müssen, was dem Spieler in Phase 2 erspart bleibt. (16)[A46] ist somit ein gelöstes Paar. In den verbleibenden Feldern von Block II, in C4 und C6, können nur die 4 und die 5 stehen, die nun ebenfalls ein Paar (ein *nacktes Paar*) in Zeile C bilden und somit weitere 4er und 5er in Zeile C verhindern.

Mit dem *nackten Paar* (45)[C46] wird die 5 als Kandidat in C1 ausgeschlossen und in A1 als Lösung eingetragen, womit sich ein neues Kandidatenpaar [B89]=5 ergibt. Wegen [C46]=4 und 4[D3] ergeben

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B				8	2	9			
C		9	3				1	6	
D		8	4		5		6	2	
E	9				6				1
F		6	1		9		5	4	
G		1	5				4	3	
H				7	1	3			
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A					3				
B	1		6	8	2	9			
C		9	3		7		1	6	
D		8	4		5		6	2	9
E	9	5			6				1
F		6	1		9		5	4	
G		1	5	9	8		4	3	
H				7	1	3			
I		3			4			1	

Abbildung 7.7: Spielphasen: Ausgangsrätsel (oben) und nach Phase 1 (unten). Alle *versteckten* und *nackten Einser* sind eingetragen.

sich zwei weitere Kandidatenpaare: [AB9]=4 und [AB2]=4. Damit folgt H2≠4 und somit H1=4. Ein weiteres Kandidatenpaar innerhalb eines Blocks ist [C1,A3]=8. Betrachtet man Spalte 2, ergibt sich mittels *erweitertem Bestimmen* H2=2 und das *nackte Paar* (47)[AB2] sowie ergänzend (28)[A3,C1].

Weitere Anwendungen von *erweitertem Bestimmen* in den Einheiten mit den am noch wenigsten offenen Feldern, wie z. B. Zeile G und Spalte 8 scheitern am häufigen Vorkommen der 7. Deshalb probiert man *erweitertes Bestimmen* in Einheiten, in denen die 7 bereits als Lösung oder als Vorgabe steht: Zeile H. Hier ergibt sich mit dem Auszählen der noch offenen Felder (= *erweitertes Bestimmen*) H9=6 und weiter H8=5, B8≠5, B9=5, A9=4, B7=3, E7≠3, F9=3, F1≠3 und D1=3. Weiterhin A2=7, B2=4, B8=7 und weiter so mit *Einsern* zur Lösung.

Die Spielphasen eines zweiten Beispiels sind in Abb. 7.9 dargestellt. Startet man von der Ausgangsstellung oben erreicht man mit *Scannen* die Spielstellung unten, in der alle *versteckten Einser* eingetragen sind. In Phase 2 trägt man nur Kandidaten ein, die in einem Block zweimal vorkommen, um damit *versteckte* und *nackte Paare*, die sich auf einem Block beschränken, ausfindig zu machen. Wie Abb. 7.10 oben zeigt, gibt es bei diesem Beispiel keine solchen Paare. Anschließend trägt man die durch *erweitertes Bestimmen* gefundenen Kandidaten der zweiwertigen Felder ein und markiert diese Felder, hier mit einem ○, um sie als Felder mit der vollständigen Liste von Kandidaten von anderen Feldern zu unterscheiden, die nicht alle Kandidaten enthalten. In Abb. 7.10 ist (57)[A3] ein wirklich zweiwertiges Feld, während (23)[B3] noch die 4 und die 7 enthalten kann.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5			1 6	3	1 6	9	9	
B	1		6	8	2	9	3		3
C	5	9	3	4 5	7	4 5	1	6	
D	3	8	4	1	5	1	6	2	9
E	9	5	2	4	6	4 8	3		1
F	2 3	6	1		9	8	5	4	3
G		1	5	9	8		4	3	
H	4	4	9	7	1	3		5	5
I		3	9	5	4	5		1	

Abbildung 7.8: Nur die Kandidaten der starken Paare in Blöcken sind eingetragen.

In der Spielstellung von Abb. 7.10 unten erkennt man ein *nacktes Paar* in Spalte 3: (57)[A3,D3]. In H3 und I3 kann keine 5 und keine 7 stehen. In Block VII kann die 5 nur zweimal vorkommen: In G2 und H1. Die 5 kann in H1 als Kandidat eingetragen werden, bringt jedoch keinen weiteren Ausschluss. Da C2 als zweiwertiges Feld keine 7 enthält, kann schon mal festgehalten werden, dass in H1, in H3 und in I3 keine 7 stehen kann. In (47)[B7] und (47)[I7] zeigt sich ein weiteres *nacktes Paar*, womit in A7 und in H7 nur die 1 und die 5 stehen kann, sich also zwei weitere zweiwertige Felder ergeben. Dieser Spielstand ist in Abb. 7.11 dargestellt. Falls das Rätsel schwieriger ist und nur mit höheren Methoden als mit *nackten Paaren* zu lösen ist, muss man nun die restlichen Kandidaten in die (nicht mit ○ markierten Felder) eintragen und mit Phase 3 weiterarbeiten.

Wie bereits erwähnt, kann in H1 und in H3 keine 7 stehen, womit 7[H4] als versteckter Einser die einzige 7 in Zeile H darstellt. Damit: **H4=7** und G4=1. Damit wird 1[H7] versteckter Einser in Block IX: H7=1, A7=5, A3=7, D3=5, D1=7. Weiterhin folgt A8=1, F8=5, F9=1. Damit G9=5, G2=7 u. s. w. Dabei wurden in Phase 2 nicht alle, sondern nur die notwendigsten Kandidaten eingetragen.

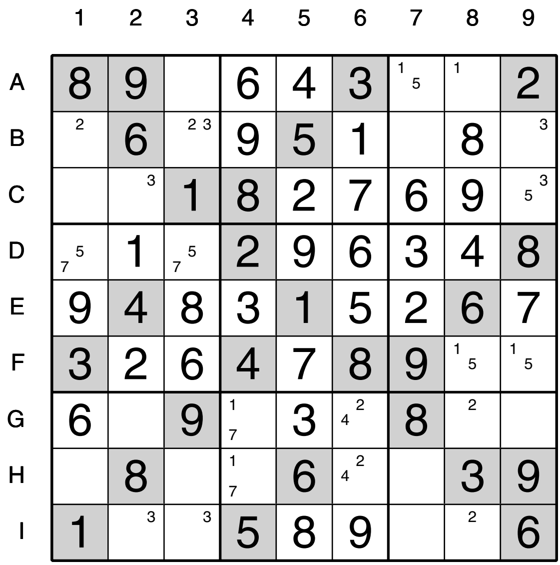
7.9 Auswahl der Verfahren

Wie im Abschnitt über *versteckte* und *nackte Sets* angesprochen, gibt es in jeder Spielstellung der Rätsel mehrere Möglichkeiten Kandidaten auszuschließen. In der ersten Spielphase hat man meistens mehrere Ziffern zur Auswahl, die mit *Scannen* direkt als Lösung eingetragen werden können. Zudem hat man in Phase 3 ebenfalls mehrere Ausschlussverfahren zur Auswahl, von denen man die Leichteste oder die am leichtesten zu Erkennende anwendet. Mehr noch kommt es vor, dass ein und der selbe Kandidat mit verschiedenen Methoden, die unterschiedliche Einheiten oder Felder benutzen, ausgeschlossen werden kann. Wie im weiteren Verlauf gezeigt wird, gibt es Stellungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	9				3			2
B		6			5				
C			1	8					
D				2					8
E		4			1			6	
F	3			4		8	9		
G			9				8		
H		8			6			3	9
I	1			5					6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	9		6	4	3			2
B		6		9	5	1		8	
C			1	8	2	7	6	9	
D		1		2	9	6	3	4	8
E	9	4	8	3	1	5	2	6	7
F	3	2	6	4	7	8	9		
G	6		9		3		8		
H		8			6			3	9
I	1			5	8	9			6

Abbildung 7.9: Spielphasen: Ausgangsrätsel (oben) und nach Phase 1 (unten).



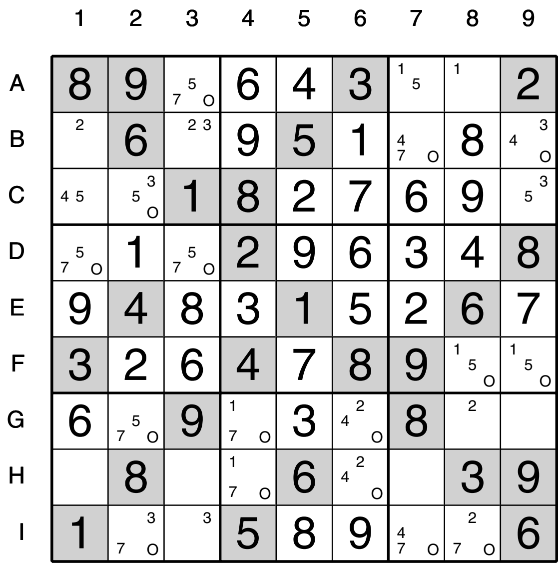


Abbildung 7.10: Spielphasen: Oben: Mit Blockpaaren. Unten: Mit Blockpaaren und Kandidaten aus zweiwertigen Feldern. Um Blockpaar-Kandidaten von Kandidaten zweiwertiger Felder zu unterscheiden, sind die gefundenen zweiwertigen Felder eigens mit (○) markiert.

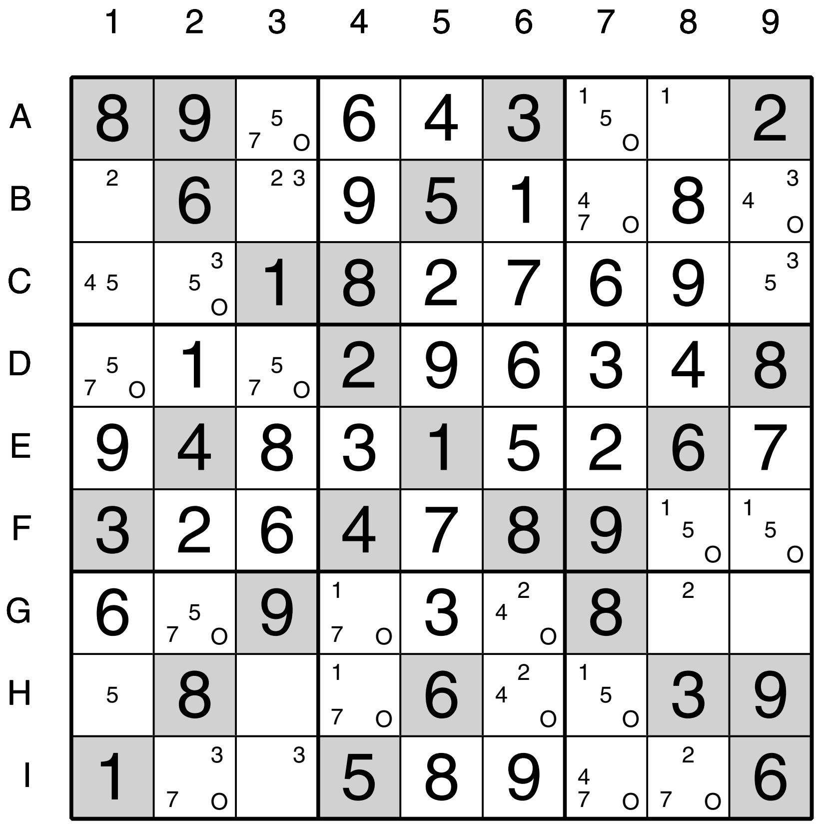


Abbildung 7.11: Nach der Schlüsselstelle des Rätsels von Abb. 7.9. Nur die Kandidaten der starken Paare in Blöcken und die der zweiwertigen Felder (○) sind eingetragen. In H1 und H3 kann keine 7 stehen. Mit dem *versteckten Einser* 7[H4] in Zeile H ist das Rätsel (bis auf weitere *Einser*) gelöst, ohne dass alle Kandidaten, sondern nur die Kandidaten der Blockpaare und der zweiwertigen Felder, eingetragen wurden.

die unterschiedlich interpretiert werden und mit denselben Feldern, Einheiten oder Kandidatenbeziehungen den gleichen Ausschluss erzielen.

Beim Lösen selber kann es natürlich vorkommen, dass man versehentlich eine der einfachen Verfahren übersieht und statt dessen eine unnötig schwierigere Methode benutzt.