Rüdiger Günttner

Übungsbuch Mathematik für Biologen und Anwender, Teil II.

Mit 211 vollständig gelösten Aufgaben und Beispielen.

Auch zum Selbststudium geeignet!

Differenzial- und Integralrechnung, Differenzialgleichungen, Vektoralgebra, Vektorprodukt, Lineare Gleichungssysteme, Einführung in die Elemente der Statistik.

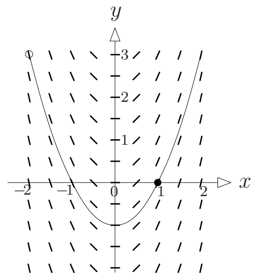

TANZSPORT 1899 WALZERKÖNIG e.V.
SIE TANZEN IRGENDWIE DIE BESTE DREHUNG BEIM WALZER!
...SIE ESSEN JA AUCH DEN GANZEN TAG NUR RECHTSDREHENDEN JOGHURT!
Jury
Jury
Jury

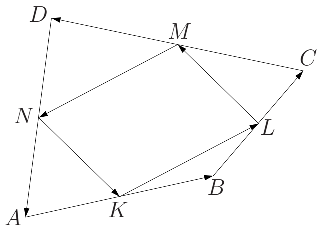
Rüdiger Günttner

Übungsbuch Mathematik für Biologen und Anwender, Teil II .

Mit 211 vollständig gelösten Aufgaben und Beispielen.

Auch zum Selbststudium geeignet!

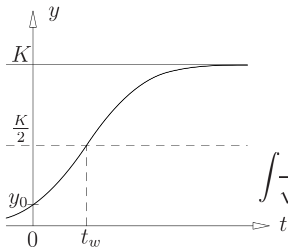




Spezielle Lösung $y = K$

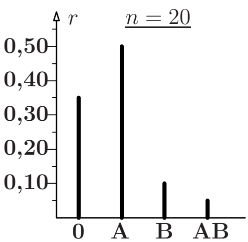
$$\frac{dy}{dt} = r\,y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$
$$y(0) = y_0$$

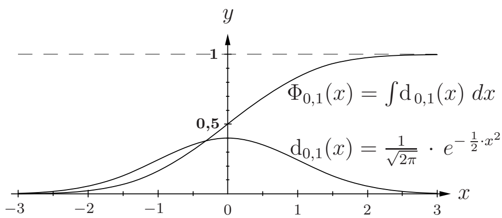
Spezielle Lösung $y = 0$



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{f}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$





Differenzial- und Integralrechnung, Differenzialgleichungen, Vektoralgebra, Vektorprodukt, Lineare Gleichungssysteme, Einführung in die Elemente der Statistik.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet u¨ber http://dnb.dnb.de abrufbar.

Überarbeitete Neuauflage, 1. Auflage 2019 ISBN 978-3-7481-2503-7
Illustration: Hannes Mercker
Herstellung und Verlag: BoD – Books on Demand, Norderstedt
ISBN 978-3-7481-2504-4

Auf ein Wort, oder zwei ...

Dieses Buch eignet sich zum *Selbststudium* für Biologen und all die Anwender, die nicht auf sämtliche Beweise der benutzten Theoreme angewiesen sind! Für mathematisch orientierte Leser ist es aufgrund der vielen und vollständig gelösten Übungsaufgaben eine praktische Ergänzung zum entsprechenden *Lehrbuch* 'Mathematik für Biologen und Anwender'.

Im vorliegenden *Übungsbuch* geschieht das Erlernen des Lehrstoffes allein anhand der sorgfältig ausgewählten Beispiele und Aufgaben!

Den besten Lernerfolg erzielen Sie selbstverständlich, wenn Sie die angegebene Lösung einer Aufgabe erst zum Schluss mit Ihrer eigenen Lösung vergleichen! Davon abgesehen existieren gelegentlich auch mehrere Lösungsmöglichkeiten, die natürlich nicht alle berücksichtigt werden können.

Die Einteilung der Abschnitte im Lehr– bzw. Übungsbuch ist völlig analog! Falls Sie doch am Beweis einiger Sätze interessiert sein sollten, finden Sie diesen ganz sicher im entsprechenden Abschnitt des Lehrbuchs.

Ergänzend enthält der erste Teil des Übungsbuches eine kurze Einführung in die komplexen Zahlen und beim zweiten Teil in die elementare Statistik.

Für die Richtigkeit von Tabellenangaben wird keine Gewähr übernommen. Die durchgehende Nummerierung der Seiten von Teil I und Teil II vermeidet Verwechslungen bei der Angabe von Seitenbezügen. Aus ähnlichen Gründen wurden Beispiele und Aufgaben im jeweiligen Abschnitt fortlaufend gezählt.

Ganz nebenbei eignen sich die Cartoons von *H. Mercker* auch zum Ausmalen!

Rüdiger Günttner, Osnabrück 2019.

Auf Wunsch vieler Leser wurde das Kapitel 6 noch um zwei Abschnitte über Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert. Hierdurch stieg die Anzahl der Aufgaben und Beispiele auf 211.

Rüdiger Günttner, Osnabrück 2020.

(Weitere Anregungen und konstruktive Kritik bitte an: rguenttn@uos.de).

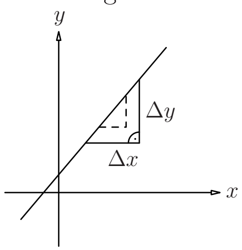
Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4

Differenzial– und Integralrechnung

4 a) Definition der Ableitung

Anschauliche Interpretation Die Steigung einer Geraden lässt sich leicht mit einem sogenannten *Steigungsdreieck* bestimmen:

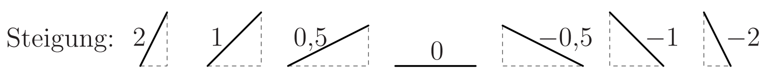


$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{array}{c}\text{Änderung in y–Richtung}\\ \text{geteilt durch}\\ \text{Änderung in x–Richtung}\end{array}$$

Die *Größe* des Steigungsdreiecks ist ohne Bedeutung. Das kleinere Dreieck, gestrichelt gezeichnet, liefert natürlich dasselbe Ergebnis (Strahlensatz)!

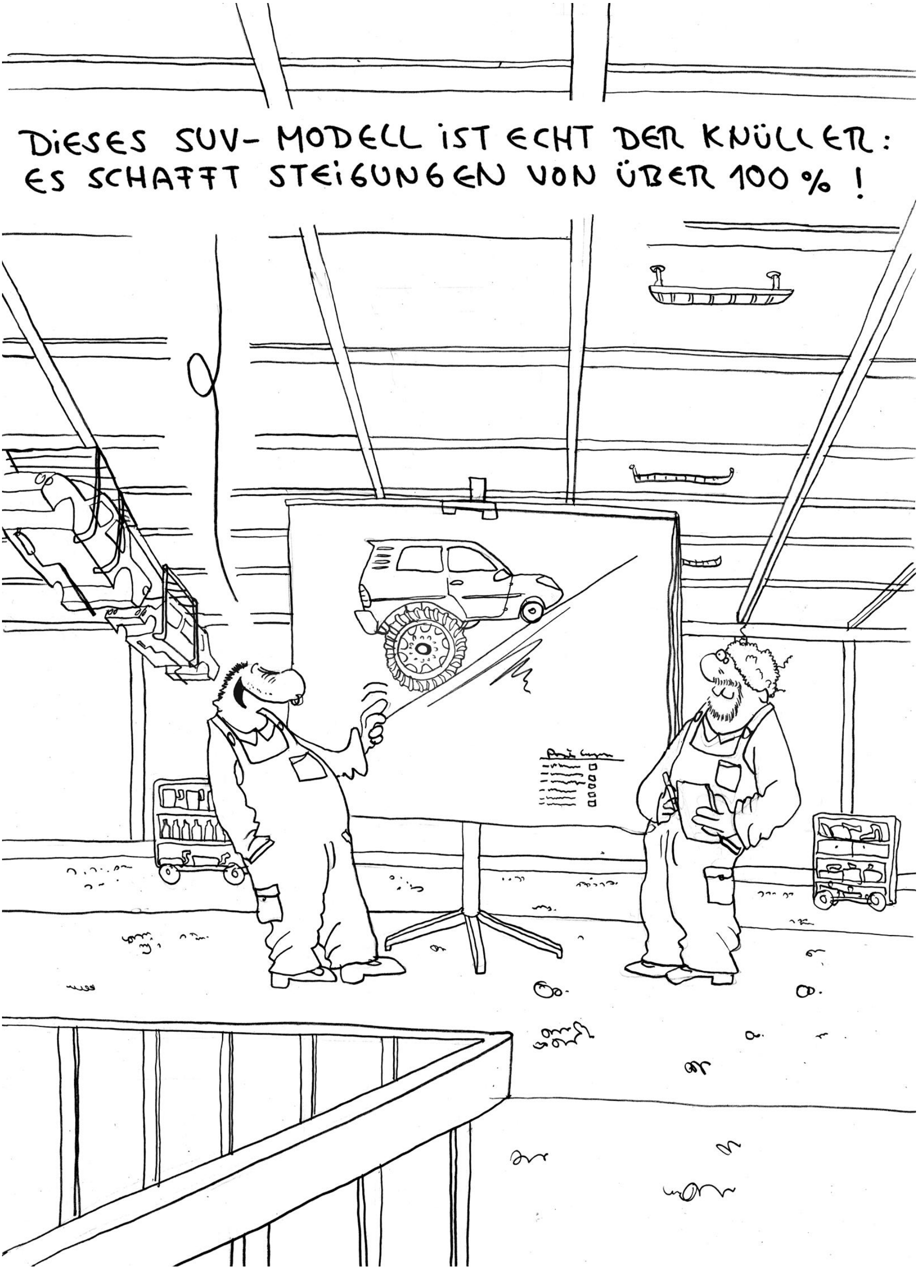
Dieser Quotient q ist außerdem gleich dem Tangens des Steigungswinkels α. Das wäre aber nur von Bedeutung, falls wir neben der Steigung auch den Steigungs*winkel* $\alpha = \tan^{-1} q$ bestimmen wollten. Im allgemeinen interessiert aber nur der Zahlenwert des Quotienten q, also der Wert der *Steigung*! [*]

Einfache Steigungswerte einer Geraden illustriert folgende Skizze:

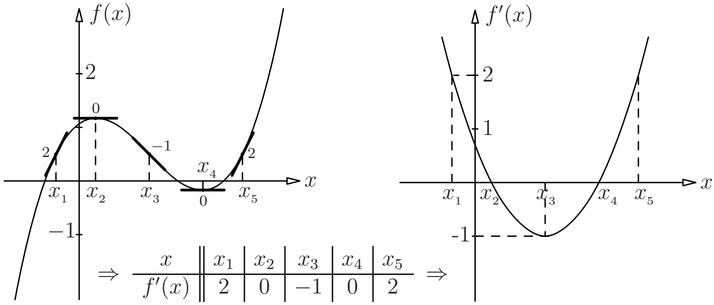


Bei einer Steigung von 3 wäre nur zu beachten: Geht man einen Schritt nach rechts, also in positiver Richtung, geht es die 3 fache Strecke nach oben. Günstig ist hier eine Schrittlänge von genau einer Längeneinheit nach rechts, dann sind es genau 3 Längeneinheiten nach oben. Bei einer negativen Steigung geht es entsprechend nach unten.

[*] Diese wird im Straßenverkehr in Prozent angegeben: Steigung 0,12 = 12 %, folglich Steigung 1 = 100 % !


DIESES SUV-MODELL IST ECHT DER KNÜLLER: ES SCHAFFT STEIGUNGEN VON ÜBER 100 % !

Die Steigung einer Kurve $y = f(x)$ *in einem Punkt* (!) definiert man anschaulich als Steigung der *Tangente* in diesem Punkt $P = (x|y)$ der Kurve. Vergleichen Sie die 'Tangentenstücke', linke Skizze (lat. *tangere* = berühren).



$\Rightarrow$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f'(x)$	2	0	−1	0	2

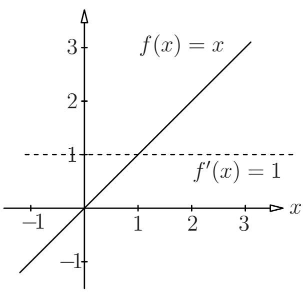
$\Rightarrow$

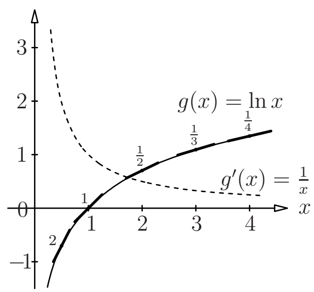
Bestimmen wir die Werte dieser Steigung in Abhängigkeit von x, erhalten wir eine neue Funktion, Skizze rechts! Man nennt sie die *Ableitung von* $f(x)$, übliche Kurzschreibweise $f'(x)$. Üben wir das doch konkret an obigem Beispiel:

Für $x = x_1$ hat die Tangente von $f(x)$ die Steigung 2. Somit ist $f'(x_1) = 2$, vgl. rechts! Für $x = x_2$ ist die Steigung von $f(x)$ gleich Null, das bedeutet, $f'(x)$ hat hier eine Nullstelle! Für x–Werte zwischen x_2 und x_4 ist $f(x)$ fallend, also sind die Werte von $f'(x)$ hier negativ! $x = x_4$ ist eine weitere Nullstelle der Ableitung, und für größere x-Werte wird die Ableitung wieder positiv, so zum Beispiel $f'(x_5) = 2$.

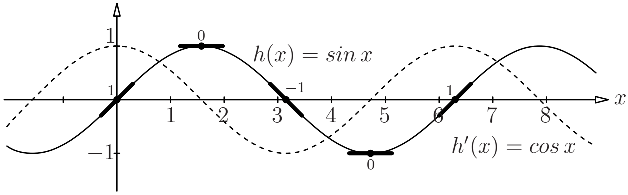
Es gibt sogar Geräte zur zeichnerischen Bestimmung der Ableitung, sogenannte 'Derivimeter'. Es ist durchaus nützlich, anhand einer Skizze von $f(x)$ auch den Kurvenverlauf von $f'(x)$ abschätzen zu können, und umgekehrt!

Üben wir das noch einmal an einigen elementaren, aber wichtigen Funktionen wie zum Beispiel $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$ und $h(x) = \sin x$:



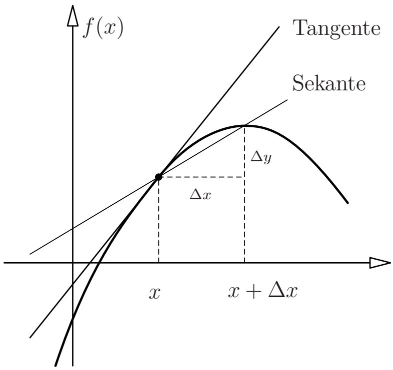


Zur besseren Unterscheidung ist der Kurvenverlauf von f', g', h' gestrichelt.



(Zur Einteilung auf der x–Achse beachten Sie nur: $180° = \pi = 3{,}14\ldots$)

Definition der Ableitung Die zeichnerische Vorgehensweise lässt sich auch *rechnerisch exakt* formulieren. Der eigentlich kritische Vorgang beim Zeichnen ist offenbar der Grenzübergang von der Sekante zur Tangente, vgl. Skizze:



Unterscheiden sich die beiden x–Werte zunächst um Δx, so unterscheiden sich die y–Werte um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Die Steigung der Sekante beträgt demnach

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(Griechisch Δ = „Delta“ für Differenz).

Mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ *gelangen wir schließlich zur Tangente.* Zeichnerisch ist das prekär, rechnerisch aber bilden wir einfach den Grenzwert!

Falls nun dieser *Grenzwert* existiert, ordnet man der Kurve bzw. Tangente an dieser Stelle diesen Grenzwert als Steigung zu – im anderen Fall gibt es definitionsgemäß keine Steigung und keine Tangente!

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *auf dem Intervall* D *heißt differenzierbar an der Stelle* $x \in D$, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

existiert. Anstelle $f'(x)$ *schreibt man auch* $(f(x))'$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$, *u.a.*
f *heißt differenzierbar (auf* D*), wenn* f *für jedes* $x \in D$ *differenzierbar ist.*

Aufgrund der gebräuchlichen Schreibweise $y = f(x)$ ist für die Ableitung auch die Notation y' und $\frac{dy}{dx}$ üblich. Je nach Problemstellung wählt man anstelle von y auch andere Symbole wie u, s, V, ...; und t, p, ... anstelle von x. Gewöhnen Sie sich daher schon früh an Schreibweisen wie $\frac{du}{dx}$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dV}{dp}$, usw.

Beispiele

Für die Praxis ist die obige Definition äußerst aufwendig. Tatsächlich genügen nur *drei* konkrete Beispiele und *sechs* Rechenregeln, um das Differenzieren fast aller Funktionen zu einer Routine werden zu lassen!
Bei den folgenden drei Beispielen benutzen wir also 'notgedrungen' die obige Definition der Ableitung (erforderlich ist sie auch noch zum Beweis der grundlegenden Rechenregeln und bei einigen Sonderfällen von Funktionen):

(i) Für die wichtige Funktion $f(x) = e^x$ erhalten wir gemäß obiger Definition:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x$$

Den Grenzwert e^x hatten wir nämlich schon in Abschnitt 3 d) als Lösung von Aufgabe 1 bestimmt (die Bezeichnung ξ anstelle von Δx ist nebensächlich)!

<u>Ergebnis:</u> $(e^x)' = e^x$.

(ii) Im Falle von $f(x) = \sin x$ führen einfache trigonometrische Umformungen der Differenz $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ zu folgendem Zwischenergebnis

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{1}{2} \cdot \Delta x} = \cos(x+\tfrac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Die erforderlichen Grenzwerte für $\Delta x \to 0$ kennen wir ebenfalls schon von 3 d):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\tfrac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

<u>Ergebnis:</u> $(\sin x)' = \cos x$

(iii) Das letzte Beispiel ist so einfach, das es manchem vielleicht schon wieder Schwierigkeiten bereitet: Für $f(x) = x$ war eigentlich anschaulich schon klar, dass die Steigung dieser Geraden überall gleich 1 ist, s. Skizze S. 227 unten! Aber natürlich lässt sich das auch rechnerisch bestätigen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Ergebnis: $x' = 1$

Das einfachste Beispiel ist gewiss eine konstante Funktion $f(x) = c$, $(c \in \mathbb{R})$. Anschaulich ist sofort klar, dass die Steigung in diesem Falle Null beträgt. Das folgt entsprechend rechnerisch wegen $f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$ und somit letztendlich auch für den Grenzwert.

Vergessen Sie bei alledem nicht die praktische Bedeutung der Ableitung. Sie beschreibt die *Änderung* der Funktionswerte: $f'(x) > 0$ bedeutet $f(x)$ steigt, $f'(x) < 0$ bedeutet $f(x)$ fällt. Genaueres dazu finden Sie im Abschnitt 4 f).

Rechenregeln

Sind die beiden Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$ und $v : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D, dann auch $u + v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$, $c \cdot u$ (c eine Konstante), und es gilt:

(1)	$\Big(c \cdot u(x)\Big)'$	$=$	$c \cdot u'(x)$	*Vielfachenregel*
(2)	$\Big(u(x) \pm v(x)\Big)'$	$=$	$u'(x) \pm v'(x)$	*Summenregel*
(3)	$\Big(u(x) \cdot v(x)\Big)'$	$=$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	*Produktregel*
(4)	$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'$	$=$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$	*Quotientenregel*

Kurz: $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

„Die Ableitung eines Vielfachen ist gleich dem Vielfachen der Ableitung“.
„Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen“.

Entsprechendes gilt auch für die Differenz, $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$, aber offensichtlich *nicht*(!) für Produkt oder Quotient zweier Funktionen!

Doch nun ist das Differenzieren sogar auch *ohne Grenzwertbildung* möglich:

Aufgabe 1 *Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen, (für* $x \in \mathbb{R}$*):*

$$f(x) = 5x \qquad g(x) = x + \sin x \qquad h(x) = x^2 \qquad k(x) = x^3 \qquad q(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$

<u>Lösung:</u> $f'(x) \;=\; (5 \cdot x)' \;\overset{(1)}{=}\; 5 \cdot (x)' \;=\; 5 \cdot 1 \;=\; 5$ (gemäß Regel (1))

$g'(x) \;=\; (x + \sin x)' \;\overset{(2)}{=}\; (x)' + (\sin x)' \;=\; 1 + \cos x$ (mit Regel (2), usw.)

$$h'(x) \;=\; (x^2)' \;=\; (x \cdot x)' \;\overset{(3)}{=}\; (x)' \cdot x + x \cdot (x)' \;=\; 1 \cdot x + x \cdot 1 \;=\; 2x$$

$$k'(x) \;=\; (x^3)' \;=\; (x^2 \cdot x)' \;\overset{(3)}{=}\; (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' \;=\; 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 \;=\; 3x^2$$

$$q'(x) \;=\; \left(\frac{\sin x}{e^x}\right)' \;\overset{(4)}{=}\; \frac{(\sin x)' \cdot e^x - \sin x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} \;=\; \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{e^{2x}} \;=$$

$$=\; \frac{(\cos x - \sin x) \cdot e^x}{e^{2x}} \;=\; \frac{\cos x - \sin x}{e^x} \;=\; (\cos x - \sin x) \cdot e^{-x} \qquad \clubsuit$$

Üben wir doch gleich einmal den Wechsel zu anderen Bezeichnungsweisen:

$$y = 5x: \;\; \frac{dy}{dx} = 5\,. \qquad z = 5u: \;\; \frac{dz}{du} = 5\,. \qquad u = v + \sin v: \;\; \frac{du}{dv} = 1 + \cos v\,.$$

Am wichtigsten beim Differenzieren ist wahrscheinlich die sog. Kettenregel! Sie ist nicht schwierig, sofern man die Verkettung (Hintereinanderausführung) von Abbildungen auch wirklich verstanden hat. Zu differenzieren ist natürlich die Verkettung zweier Funktionen wie z.B. u und v, also $u \circ v\,(x) = u(v(x))$. Schwierig ist hier nur der in der Regel auftretende Term $u' \circ v\,(x) = u'(v(x))$. Haben Sie auch letztere Verkettung verstanden, ist die eigentliche Kettenregel beim Differenzieren kein Problem mehr! Ausführlich behandelt finden Sie die Verkettung in 2 f). Wir wiederholen sie nur kurz mit folgenden Beispielen:

$$\begin{array}{llllllll}
v(x) = \sin x & \text{und} & u(x) = x^2 & \text{ergibt:} & u(v(x)) & = & (v(x))^2 & = & (\sin x)^2 \\
 & & u'(x) = 2 \cdot x & \text{ergibt:} & u'(v(x)) & = & 2 \cdot v(x) & = & 2 \cdot \sin x\,! \\
v(x) = x^2 & \text{und} & u(x) = \sin x & \text{ergibt:} & u(v(x)) & = & \sin(v(x)) & = & \sin(x^2) \\
 & & u'(x) = \cos x & \text{ergibt:} & u'(v(x)) & = & \cos(v(x)) & = & \cos(x^2)\,!
\end{array}$$

Für die Ableitung verketteter Funktionen gilt nun gemäß Lehrbuch die Regel:

> *Ist* $v : D \to W$ *und* $u : W \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, dann auch* $(u \circ v) : D \to \mathbb{R}$. *Für die Hintereinanderausführung (Komposition)* $u \circ v\,(x) \;=\; u(v(x))$ *gilt:*
>
> (5) $$\Big(u(v(x)\Big)' = \; u'(v(x)) \cdot v'(x) \qquad \textit{Kettenregel}$$
>
> *Man bezeichnet den ersten Faktor* $u'(v(x))$ *meistens als 'äußere Ableitung', den Faktor* $v'(x)$ *(Ableitung der inneren Funktion* v*) als 'innere Ableitung'.*

Bitte verwechseln Sie den viel einfacheren Ausdruck $u'(x)$ nicht mit $u'(v(x))$! Achten Sie in folgendem Beispiel genau auf den Unterschied:

Beispiel 2 Bestimme die *äußere* Ableitung von $u(v(x)) = \sin(x^2)$:

$$v(x) = x^2\,, \quad u(x) = \sin x\,, \quad u'(x) = \cos x\,, \quad u'(v(x)) = \cos(x^2)$$

Wie bestimmt man also die *äußere* Ableitung von $\sin(x^2)$ der Reihe nach:

Von links nach rechts können wir das störende x^2 durch x ersetzen und dann $\sin x$ nach x differenzieren, ergab $\cos x$. Nun mussten wir umständlich wieder x durch $v = x^2$ ersetzen. Das lieferte die gesuchte äußere Ableitung $\cos(x^2)$.

Einfacher ersetze man zu Beginn x^2 wieder durch v, differenziert $\sin v$ nach v, ergibt $\cos v$, und notiert sofort $\cos v = \cos(x^2)$ als *ersten Faktor* der Ableitung!

Der noch fehlende *zweite Faktor* ist $v'(x) = (x^2)'$, also $2x$. Somit folgt das

Ergebnis: $$\big(\sin(x^2)\big)' = \big(\cos(x^2)\big) \cdot 2x$$

Noch einmal ausführlich, einschließlich der gedanklichen Zwischenschritte:

$$\Bigg(\sin \underbrace{(x^2)}_{v}\Bigg)' = \tfrac{d}{dv}\sin v \cdot \tfrac{dv}{dx} = (\cos v)\cdot v' = \big(\cos(x^2)\big)\cdot 2x$$ ♣

Aufgabe 3 *Bestimmen Sie die Ableitung nach x von folgenden Funktionen:* *(i)* $y = e^{x^2}$ *(ii)* $y = e^{2x}$ *(iii)* $y = (e^x)^2$ *(iv)* $y = (\sin x)^2$ *(v)* $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Lösung: Die Zwischenschritte sind nur als Hilfestellung angegeben:

(i) mit $v = x^2$: $y' = \frac{d}{dx}e^{x^2} = \frac{d}{dv}e^v \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot v' = e^{x^2} \cdot 2x$

(ii) mit $v = 2x$: $y' = \frac{d}{dx}e^{2x} = \frac{d}{dv}e^v \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot v' = e^{2x}\cdot 2 = 2\,e^{2x}$

(iii) mit $v = e^x$: $y' = \frac{d}{dx}(e^x)^2 = \frac{d}{dv}v^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 2\,v \cdot v' = 2\,e^x \cdot e^x = 2\,e^{2x}$

(iv) mit $v = \sin x$: $y' = \frac{d}{dx}(\sin x)^2 = \frac{d}{dv}v^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 2\,v\cdot v' = 2\sin x \cdot \cos x$

(v) mit $v = x+\frac{\pi}{2}$: $y' = \frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{dv}\sin v \cdot \frac{dv}{dx} = \cos v \cdot v' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1$

♣

Das Ergebnis von Aufgabenteil (v) lautet also: $(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right))' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$! Nun gilt aber, man nutze z.B. das Additionstheorem: $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, und $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. Wir haben folglich mit (v) auch gezeigt:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Die Gleichheit der Ergebnisse im Falle von (iii) $y = (e^x)^2$ und (ii) $y = e^{2x}$ ist kein Zufall! Die beiden Funktionen sind ja gleich: $(e^x)^2 = e^{x\cdot 2} = e^{2\cdot x}$.

Selbstverständlich folgt aus der Gleichheit zweier Funktionen $f(x) = g(x)$ auf einem Intervall D auch die Gleichheit der Ableitungen $f'(x) = g'(x)$. Kurz: $f = g \;\Rightarrow\; f' = g'$. Noch einmal etwas ausführlicher:

$$\boxed{f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in D \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \text{ für alle } x \in D}$$

Ist eine Funktion h umkehrbar und differenzierbar, lässt sich mit obiger Regel und Kettenregel die Ableitung ihrer Umkehrung h^{-1} bestimmen. Wir nutzen hierfür die bereits in Abschnitt 2 f) diskutierte Eigenschaft $h(h^{-1}(x)) = x$:

> *(6) Ist $h : D \to W$ differenzierbar, dann auch $h^{-1} : W \to D$.*
>
> *Die Ableitung von h^{-1} erhält man zum Beispiel durch Differerenzieren der Beziehung $h(h^{-1}(x)) = x$, $(x \in W)$.*

Beispielsweise ist die Exponentialfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $h(x) = e^x$ differenzierbar, folglich auch deren Umkehrung, also $h^{-1}(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$:

Beispiel 4 Die Umkehrung der $e-$Funktion $h(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $h^{-1}(x) = \ln x$, $(x > 0)$. Folglich ergibt $h(h^{-1}(x)) = x$ hier

$$e^{\ln x} = x, \quad (x > 0).$$

Bestimmen Sie nun mit (6) und der Kettenregel (5) die Ableitung von $\ln x$:

<u>Lösung :</u>

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \\ (e^{\ln x})' &= x' \qquad \text{mit } \ln x = v \text{ und (5):} \\ e^{\ln x} \cdot (\ln x)' &= 1 \\ x \cdot (\ln x)' &= 1 \end{aligned}$$

<u>Ergebnis :</u> $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$ ♣

Beispiel 5 Nur wenig schwieriger ist die Ableitung $(\sin^{-1} x)'$, $x \in [-1; 1]$:

$$(\sin(\sin^{-1} x))' = x', \quad (\cos(\sin^{-1} x)) \cdot (\sin^{-1} x)' = 1, \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

Das war‘s eigentlich! Nutzt man aber noch $\cos z = \sqrt{1 - (\sin z)^2}$, erhält man $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$, und somit die übliche Form.

<u>Ergebnis:</u> $$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$ ♣

Aufgabe 6 *Bestimmen Sie* $(\cos^{-1} x)'$, $x \in [-1; 1]$.

Lösung: Ganz analog zu vorigem Beispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(\cos(\cos^{-1} x)) &= x && \Rightarrow \\
(\cos(\cos^{-1} x))' &= x' && \Rightarrow \\
\cos'(\cos^{-1} x) \cdot (\cos^{-1} x)' &= 1 && \Rightarrow \\
-\sin(\cos^{-1} x) \cdot (\cos^{-1} x)' &= 1 && \Rightarrow \\
(\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)}
\end{aligned}$$

Nutzt man analog die Umformung $\sin z = \sqrt{1-(\cos z)^2}$, erhält man sofort $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-(\cos(\cos^{-1} x))^2} = \sqrt{1-x^2}$, und somit die übliche Form:

Ergebnis: $$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ ♣

Etwas mühsamer ist schon die Lösung der folgenden

Aufgabe 7 *Zeigen Sie:* $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Hinweise:* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\tan(\tan^{-1} x) = x$, *und Aufgabe 5 in Abschnitt 2f).*

Lösung: Zuerst erhalten wir mit der Quotientenregel

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Nun folgern wir weiter mit der Beziehung $f(f^{-1}(x)) = x$ und der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\tan(\tan^{-1} x) &= x && \Rightarrow \\
\big(\tan(\tan^{-1} x)\big)' &= x' && \Rightarrow \\
\tan'(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1} x)' &= 1 && \Rightarrow \\
\frac{1}{(\cos(\tan^{-1} x))^2} \cdot (\tan^{-1} x)' &= 1 && \Rightarrow \\
(\tan^{-1} x)' &= (\cos(\tan^{-1} x))^2 && \Rightarrow
\end{aligned}$$

Ergebnis: $$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$ ♣

Mit Hilfe der Regeln (1) – (6) lassen sich auch die Ableitungen aller weiteren elementaren Funktionen der folgenden Tabelle bestimmen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
const.	0
x	1
x^2	$2x$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
x^h $(m \in \mathbb{Z},\ h \in \mathbb{R})$	$h \cdot x^{h-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{(\sin x)^2}$
$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$c \cdot u(x)$	$c \cdot u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) - v(x)$	$u'(x) - v'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$u^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{u'(u^{-1}(x))}$

Die Ableitungen gelten für den gesamten Definitionsbereich der betreffenden Funktion, mit Ausnahme von Nullstellen im Nenner.

Die Bestimmung der Extremwerte einer Funktion, also der Minima und Maxima, ist eine wichtige Anwendung der Ableitung. Bei differenzierbaren Funktionen muss man hierfür nur die Nullstellen der Ableitung untersuchen:

Hat $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in]a;b[$ ein relatives Extremum, so folgt $f'(x_0) = 0$.

Kurz: Relatives Extremum für $x_0 \in]a;b[\;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$. Weiteres Seite 244 ff.
Eine differenzierbare Funktion ist außerdem auch immer stetig (s. Teil I, 3 d):

Ist $f(x)$ für $x \in [a;b]$ differenzierbar, so ist $f(x)$ für $x \in [a;b]$ auch stetig.

Vorsicht allerdings bei Verallgemeinerungen:

Aus $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a;b]$ folgt bekanntlich auch $f'(x) = g'(x)$.
Aus $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a;b]$ folgt *nicht* unbedingt $f'(x) \le g'(x)$!

Kleine Funktionswerte können durchaus zu großen Ableitungswerten führen! Beispiel: $\sqrt{x} \le 1$ gilt für alle $x \in]0;1[$, aber $(\sqrt{x})' \le (1)'$, also $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \le 0$ ist falsch! Vielmehr wird $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ für genügend kleine $x \in]0;1[$ sogar beliebig groß, obwohl oder gerade weil die Funktionswerte $\sqrt{x}$ so klein sind! Vorsicht also beim Umgang mit Ungleichungen, wogegen das Differenzieren von Gleichungen keine Probleme bereitet! Hier eine nützliche Anwendung:

Aufgabe 8 *Differenzieren Sie folgende bekannte Beziehung nach α :*

$$\sin 2\alpha \;=\; 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad \textit{bzw.} \quad \tfrac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha \;=\; \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

<u>Lösung:</u> Die linke Seite der zweiten Gleichung ergibt mit der Kettenregel

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{d}{d\alpha}\sin 2\alpha \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot(\cos 2\alpha)\cdot 2 \;=\; \cos 2\alpha$$

Die rechte Seite liefert mit der Produktregel

$$\tfrac{d}{d\alpha}\sin\alpha\cdot\cos\alpha \;=\; \cos\alpha\cdot\cos\alpha \;+\; \sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)$$

Zusammenfassend also, was Sie so in jeder guten Formelsammlung finden, das

<u>Ergebnis:</u> $\cos 2\alpha \;=\; (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$. ♣

Gelegentlich ist eine Regel auch mehrmals hintereinander anzuwenden, Bsp.:

$$\Big(\big(\sin(x^2)\big)^8\Big)' \overset{(5)}{=} 8\cdot\big(\sin(x^2)\big)^7\cdot\big(\sin(x^2)\big)' \overset{(5)}{=} 8\cdot\big(\sin(x^2)\big)^7\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$$

In den meisten Fällen lässt sich eine Funktion auch mehrmals differenzieren. Man spricht dann von 1. Ableitung $f'(x)$, 2. Ableitung $(f'(x))' = f''(x)$, usw. Statt f' und f'' usw. schreibt man auch $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ usw. Einfaches Beispiel:

$$(\sin x)'' \;=\; ((\sin x)')' \;=\; (\cos x)' \;=\; -\sin x.$$

Aufgabe 9 *Bestimmen Sie* (i) $(\ln(3x))''$ (ii) $(\sin(2x))''''$

<u>Lösung:</u> (i) $(\ln(3x))'' = (\frac{1}{3x}\cdot 3)' = (\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(ii) $(\sin(2x))'''' = (2\cdot\cos(2x))''' = (-4\cdot\sin(2x))'' = (-8\cdot\cos(2x))' = 16\cdot\sin(2x)$

♣

Ein bisschen Übung erfordert der zumeist ungewohnte Wechsel zu anderen Bezeichnungen der Variablen und der Konstanten, denn diese sind natürlich beim Differenzieren verschieden zu handhaben.
Achten Sie im Folgenden also darauf: Welche Bezeichnung trägt die Variable, nach der differenziert werden soll – und was sind nur einfache Konstante, mögen Sie auch gelegentlich etwas kompliziert aussehen!

Beispiel 10 Wir benutzen nur die bekannten Regeln für das Differenzieren und verzichten aus Platzgründen auf weitere 'kosmetische' Vereinfachungen. A und C bezeichnen Konstante; konstant sind also auch A^2, $\sin A$, C^2, usw. !

$a)$ $\frac{d}{dx}x^{10} = 10\cdot x^9$

$b)$ $\frac{d}{dx}\left(3\cdot x^{10}\right) = 3\cdot 10\cdot x^9$

$c)$ $\frac{d}{dt}(3t)^{10} = 10\cdot(3t)^9\cdot 3$

$d)$ $\frac{d}{dx}(\sin x)^{10} = 10\cdot(\sin x)^9\cdot\cos x$

$e)$ $\frac{d}{dt}(\sin(3t))^{10} = 10\cdot(\sin(3t))^9\cdot\cos(3t)\cdot 3$

$f)$ $\frac{d}{dx}(C\cdot e^x) = C\cdot e^x$

$g)$ $\frac{d}{dx}(C^2\cdot e^x) = C^2\cdot e^x$

$h)$ $\frac{d}{du}(C^2\cdot\sin u) = C^2\cdot\cos u$

$i)$ $\frac{d}{dx}C = 0$

$j)$ $\frac{d}{dx}(C\cdot x) = C$

$k)$ $\frac{d}{dx}A = 0$

$l)$ $\frac{d}{dt}(A\cdot t) = A$

$m)$ $\frac{d}{dt}A^2 = 0$

$n)$ $\frac{d}{dv}(A^2\cdot v) = A^2$

$o)$ $\frac{d}{dt}(A^2\cdot t^3) = A^2\cdot 3\cdot t^2$

$p)$ $\frac{d}{dx}(e^A\cdot x) = e^A$

$q)$ $\frac{d}{dx}(x\cdot\sin A) = \sin A$

$r)$ $\frac{d}{dt}e^{C\cdot t} = e^{C\cdot t}\cdot C$

$s)$ $\frac{d}{dt}\left(e^{C\cdot t}\cdot\sin A\right) = e^{C\cdot t}\cdot C\cdot\sin A$

$t)$ $\frac{d}{dw}\left(e^C\cdot\sin(Aw)\right) = e^C\cdot A\cdot\cos(Aw)$

$u)$ $\frac{d}{dx}\left(e^{C\cdot x}\cdot\sin(A\,x)\right) = C\cdot e^{C\cdot x}\cdot\sin(A\,x) + e^{C\cdot x}\cdot A\cdot\cos(A\,x)$

Fitness - Studio

Partielle Ableitungen Als Vorübung sei Ihnen wieder Beispiel 10 empfohlen! Üben wir den Sachverhalt aber noch einmal ganz kurz:
Im Folgenden seien $a, b, \ldots$ irgendwelche Konstanten wie zum Beispiel $a=3$, $b=4$, $e=2{,}71828\ldots$ Auch a^2 oder e^b sind Konstante und beim Differenzieren dann auch so zu behandeln. Wegen $(e^x)' = e^x$ folgt z.B. mit der Regel (1):
$\frac{d}{dx}(9 \cdot e^x) = 9 \cdot e^x$, $\frac{d}{dx}(3^2 \cdot e^x) = 3^2 \cdot e^x$, $\frac{d}{dx}(a^2 \cdot e^x) = a^2 \cdot e^x$. Ob die Konstante als 9 notiert wird oder als 3^2, oder allgemein als a^2, ist natürlich gleichgültig. *Die Klammern um das Produkt darf man auch weglassen*! Halten wir fest:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\,(a^2 \cdot e^x) \;=\; a^2 \cdot e^x \qquad \text{(weil } a \text{ konstant)}$$

Sie werden gleich den Sinn dieser Übung erfahren. Zuvor noch das Beispiel:
$\frac{d}{dt}\, t^2 \cdot 16 \;=\; 2t \cdot 16$, $\frac{d}{dt}\, t^2 \cdot 2^4 \;=\; 2t \cdot 2^4$, $\frac{d}{dt}\, t^2 \cdot e^4 \;=\; 2t \cdot e^4$, $\frac{d}{dt}\, t^2 \cdot e^b \;=\; 2t \cdot e^b$:

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\,(t^2 \cdot e^b) \;=\; 2t \cdot e^b \qquad \text{(weil } b \text{ konstant)}$$

Recht häufig hat es der Naturwissenschaftler mit mehreren Variablen zu tun. Beispielsweise in der Meteorologie ist der Luftdruck eine Funktion des Ortes *und* der Zeit. Wir wählen zunächst ein einfaches Übungsbeispiel mit nur einer Ortskoordinaten: Diskutieren wir also die Funktion

$$f(x,t) \;=\; t^2 \cdot e^x$$

wobei x die Rolle des Ortes übernehmen soll und t hierbei die Zeit bezeichne. Es ist zum Beispiel sinnvoll, $f(x,t)$ beziehungsweise den Luftdruck zu einem festen Zeitpunkt t zu betrachten. Der Luftdruck ändert sich dann *immer noch* als Funktion des Ortes, was sich durch Ableiten $\frac{d}{dx}$ nach x bestimmen lässt! t spielt hierbei nur die Rolle einer Konstanten.

Ebenso sinnvoll ist es, den Luftdruck an einem festen Ort x zu betrachten. Der Luftdruck ändert sich dann als Funktion der Zeit, was sich durch Ableiten $\frac{d}{dt}$ nach t ermitteln lässt. In diesem Falle spielt x die Rolle einer Konstanten! Diese spezielle Art Differenzieren bei Funktionen mehrerer Veränderlicher wird aber durch eine spezielle Bezeichnungsweise hervorgehoben! Statt $\frac{d}{dx}$ benutzt man $\frac{\partial}{\partial x}$, anstelle $\frac{d}{dt}$ entsprechend $\frac{\partial}{\partial t}$. Wir erhalten analog zu oben:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\,(t^2 \cdot e^x) \;=\; t^2 \cdot e^x \qquad \text{(weil } t \text{ konstant)}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,(t^2 \cdot e^x) \;=\; 2t \cdot e^x \qquad \text{(weil } x \text{ konstant)}$$

Diese Vorgehensweise heißt auch *partielles Differenzieren.* Das Ergebnis sind die *partiellen Ableitungen* nach den einzelnen Variablen. Selbstverständlich sind auch höhere Ableitungen möglich, und neu in diesem Falle, auch *gemischte Ableitungen* nach x und nach t:

Aufgabe 11 *Bestimmen Sie von* $f(x,t) = t^2 \cdot e^x$, *(für bel.* $x, t \in \mathbb{R}$*)* :
(a) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\, f(x,t)$ *und* $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\, f(x,t)$; *(b)* $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\, f(x,t)$ *und* $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\, f(x,t)$.

Lösung: (Im Fall (b) bedeutet $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}$ zuerst nach x und dann nach t ableiten.)

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\,(t^2 \cdot e^x) = \frac{\partial}{\partial x}\,(t^2 \cdot e^x) = t^2 \cdot e^x \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\,(t^2 \cdot e^x) = \frac{\partial}{\partial t}\,(2t \cdot e^x) = 2\,e^x$
(b) $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\,(t^2 \cdot e^x) = \frac{\partial}{\partial t}\,(t^2 \cdot e^x) = 2t \cdot e^x \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\,(t^2 \cdot e^x) = \frac{\partial}{\partial x}\,(2t \cdot e^x) = 2t \cdot e^x$
♣

Als abkürzende Schreibweisen sind f_x und f_t anstelle von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial t}$ üblich. Interessant ist das Ergebnis von (b), nämlich: $f_{tx} = f_{xt}$. Das gilt allgemein, sofern f und die betreffenden Ableitungen stetig sind. Und es gilt auch für mehrmaliges Ableiten, also zum Beispiel $f_{ttxxx} = f_{xttxx} = f_{txtxx} = \ldots = f_{xxxtt}$ Da nun das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Exponieren und Verketten von stetigen Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt, ist die erforderliche Voraussetzung praktisch immer erfüllt. Natürlich muss die Anzahl der jeweiligen Ableitungen übereinstimmen, doch ansonsten gilt auch bei mehr als zwei Variablen für gemischte Ableitungen der *Satz von Schwarz*:

Das Ergebnis ist unabhängig von der Reihenfolge beim Differenzieren

Das ist recht nützlich, denn das partielle Differenzieren ist mühsam genug. Es erfordert vor allem Konzentration, und falls Sie Schwierigkeiten haben, ersetzen Sie doch zunächst die Variablen, nach denen nicht differenziert wird, konkret oder gedanklich durch Zahlen oder Bezeichnungen wie etwa $a, b, c \ldots$ Produktregel, Kettenregel usw. finden also weiterhin Anwendung wie bisher!

Es ist eher ein psychologisches Problem, eine so gewohnte Variable wie zum Beispiel x nun pötzlich als Konstante behandeln zu müssen. Wie schon gesagt, alles nur eine Frage der Übung und Konzentration:

Aufgabe 12 *Gegeben sei die Funktion*

$$f(x,t) \;=\; \sin\,(x^2 + \omega t)\,, \qquad \omega \text{ („omega“) eine Konstante.}$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen (i) $f_x(x,t)$ *und (ii)* $f_t(x,t)$.

Lösung: (i) Bei der Ableitung nach x ist t wie eine Konstante zu behandeln, genau wie ω. Sie müssen also nur einen Ausdruck wie etwa $\sin(x^2 + 7)$ nach x differenzieren können! Zur Anwendung der Kettenregel (5) setzen Sie dann $v = x^2 + 7$. Die äußere Funktion $u = \sin v$ ergibt nach v abgeleitet $\cos v = \cos(x^2+7)$. Die Ableitung von $v = x^2+7$ nach x ergibt als zweiten Faktor nur $2x$. Insgesamt erhalten Sie also das Ergebnis $\big(\cos(x^2+7)\big) \cdot 2x$. Nun allgemein, einfach nur mit der Konstanten ωt anstelle von 7:

Ergebnis: $$f_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{\sin}_{u}(\underbrace{x^2+\omega t}_{(\,v(x)\,)})) = \big(\cos(x^2+\omega t)\big) \cdot 2x$$

Man schreibt die Kettenregel hierfür gerne kurz und einprägsam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

(ii) Im Fall f_t ist x^2 wie eine Konstante zu behandeln, ebenso wie auch ω. Zu differenzieren ist also lediglich ein Ausdruck der Form $\sin(9+5t)$ nach t. Hierfür setzen Sie natürlich $v = 9 + 5t$. Die äußere Ableitung ergibt dann $\cos v = \cos(9+5t)$. Die innere Ableitung von v nach t ergibt den Faktor 5. Allgemein folgt mit den Konstanten x^2 anstelle 9 sowie ω anstelle 5:

Ergebnis: $$f_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\sin}_{u}(\underbrace{x^2+\omega t}_{(\,v(t)\,)})) = \big(\cos(x^2+\omega t)\big) \cdot \omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$ ♣

Auch hier sollten Sie sich an andere Bezeichnungen oder Schreibweisen von Funktion und Variablen gewöhnen. Im folgenden und letzten Beispiel etwa ist $z = f(r,w)$ eine Funktion der Variabeln r und w.

Beispiel 13 Wir zeigen für $z = e^r \cdot \tan^{-1}(w-r)$: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial w} = z$

1. Der Summand $\frac{\partial z}{\partial r}$: Hierfür ist zuerst die Produktregel (3) anzuwenden:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r}e^r\right) \cdot \tan^{-1}(w-r) + e^r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\tan^{-1}(w-r)\right)$$

Es gilt einfach $\frac{\partial}{\partial r}e^r = e^r$. Für $\frac{\partial}{\partial r}\tan^{-1}(w-r)$ ist wieder die Kettenregel (5) anwendbar mit $v = w - r$: $\tan^{-1} v$ nach v abgeleitet ergibt $\frac{1}{1+v^2} = \frac{1}{1+(w-r)^2}$ Die innere Ableitung von $v = w - r$ nach r ergibt -1. Hiermit folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \underbrace{e^r \cdot \tan^{-1}(w-r)}_{=z} + e^r \cdot \frac{-1}{1+(w-r)^2} = z + e^r \cdot \frac{-1}{1+(w-r)^2}$$

2. Der Summand $\frac{\partial z}{\partial w}$: Hier ist e^r nur ein konstanter Faktor. Es genügt die Kettenregel mit $v = w - r$, die innere Ableitung nach w ist einfach nur 1:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = e^r \cdot \frac{1}{1+(w-r)^2}$$

Recht mühsam, aber beide Ableitungen addiert ergibt nun die Behauptung:

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} = z + e^r \cdot \frac{-1}{1+(w-r)^2} + e^r \cdot \frac{1}{1+(w-r)^2} = z \qquad \clubsuit$$

Für die Fehlerabschätzung bei Funktionen mehrerer Variablen werden sich die partiellen Ableitungen als sehr nützlich erweisen: Viele Funktionen sind von der Bauart $p = K \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c$ mit Konstanten $a, b, c, \ldots$ und K. Hierzu

Aufgabe 14 *Zeige: Für die partiellen Ableitungen von* $p = K \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c$ *gilt:*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a \cdot \frac{p}{x} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = b \cdot \frac{p}{y} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = c \cdot \frac{p}{z}$$

Lösung: Die Ableitung von x^a nach x ergibt $a \cdot x^{a-1}$. Die konstanten Faktoren K, y^b, z^c bleiben nach Regel (1) erhalten, ihre Reihenfolge ist frei wählbar:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cdot a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot z^c = a \cdot K \cdot \frac{x^a}{x} \cdot y^b \cdot z^c = a \cdot \frac{K \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c}{x} = a \cdot \frac{p}{x}$$

Die partiellen Ableitungen für die anderen Variablen sind ganz analog. $\clubsuit$

Bei höheren partiellen Ableitungen sind abkürzende Schreibweisen üblich, z.B. (vergleichen Sie mit der analogen abkürzenden Notation $\mathrm{cm}^3 = \mathrm{cm\,cm\,cm}$):

$$\frac{\partial^5}{\partial x^3 \cdot \partial y^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{anstelle von} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$$

(Entsprechend natürlich auch bei Funktionen von mehr als zwei Variablen.)

Aufgabe 15 $A(x,t) = \sin(x + c\,t)$ *ist eine Lösung der 'Wellengleichung'*:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x,t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t) \qquad (c \textit{ die Lichtgeschwindigkeit}).$$

Lösung: $\frac{\partial}{\partial x} A(x,t) = \cos(x + c\,t)$ $\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t) = -\sin(x + c\,t)$

$\frac{\partial}{\partial t} A(x,t) = c \cdot \cos(x + c\,t)$ $\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x,t) = -c^2 \cdot \sin(x + c\,t)$

Ergebnis: Die Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x,t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t)$ ist erfüllt! $\clubsuit$

Weitere Lösungen sind $A(x,t) = A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x + c\,t)\right)$. Hierbei bedeuten: A_0 maximale Auslenkung, λ Wellenlänge. Beachten Sie: $A(x+\lambda\,, t) = A(x,t)$.