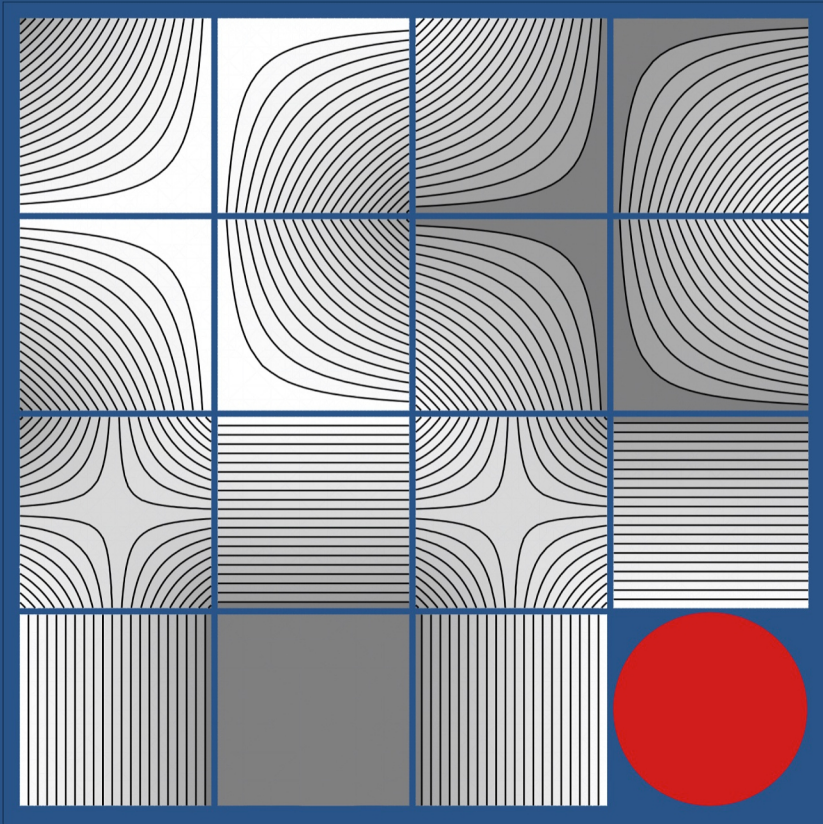


Kumulations-Logik

Eine Theorie für vage Aussagen



Frank Kowalewski

Kumulations-Logik

Eine Theorie für vage Aussagen

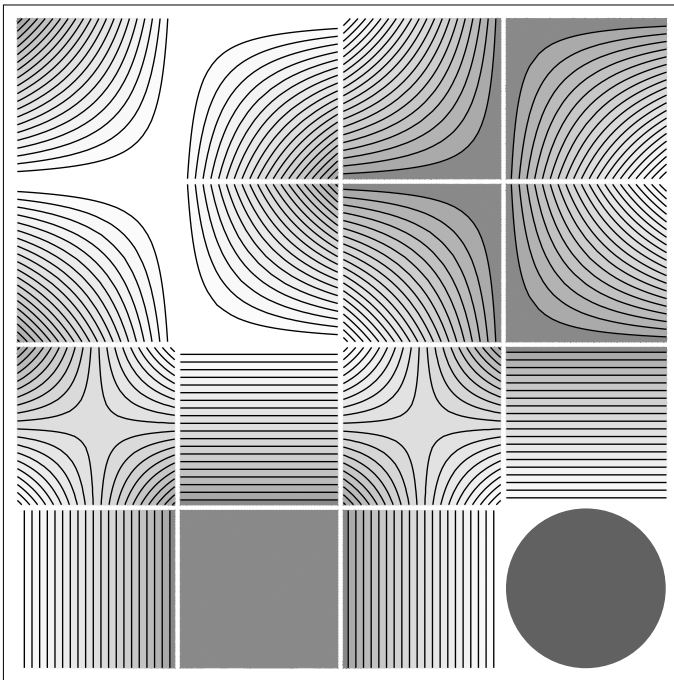
Über die Titelgrafik:

Die Titelgrafik ist aus den Graphen der kumulativ unabhängigen Bewertungen aller zweistelligen logischen Junktoren zusammengesetzt. Die Graphen sind so zusammengesetzt, dass sie stetig aneinander anschließen.

Die Anordnung stellt den Schriftzug "c-lo" dar (für c-logic = cumulation logic).

Kumulations-Logik

Eine Theorie für vage Aussagen



Frank Kowalewski

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2015 Frank Kowalewski

Umschlaggestaltung und Bilder: Frank Kowalewski

Herstellung und Verlag:
BoD - [Books on Demand](#), Norderstedt

ISBN 978-3-7392-0676-9 (Print)
ISBN 978-3-7392-8409-5 (EPDF)

Inhalt

1	Einführung	7
2	Logische Aussagen	9
2.1	Bewertungen	11
2.2	Schwellwert – Bewerter	14
3	Kumulative Bewertungen	17
3.1	Wertebereich kumulativer Bewertungen	22
3.2	Mächtigkeit einer kumulativen Bewertung	24
3.3	Dissonanz einer kumulativen Bewertung	25
3.4	Hierarchien kumulativer Bewertungen	29
4	Kumulative Bewertung zusammengesetzter Aussagen	33
4.1	Negation	34
4.2	Konjunktion	35
4.3	Disjunktion	39
4.4	Berechnung beliebiger zweistelliger Junktoren, Beispiel Subjunktion	41
4.5	Andere Junktoren	42
4.6	Tautologien und Kontradiktionen	43
4.7	Allgemeine Berechnung beliebiger logischer Ausdrücke	45
5	Abhängigkeit und Subjektivität kumulativer Bewertungen	55
5.1	Kumulative Abhängigkeit	55
5.2	Subjektivität	66
5.3	Charakterisierung von Objektivität	69
5.4	Eigenschaften der Subjektivität	70
5.5	Zweistellige Junktoren bei kumulativer Unabhängigkeit	81

6	Berechenbarkeit kumulativer Bewertungen	85
6.1	Kumulativ verträgliche Bewertungen	88
6.2	Erzeugende Bewertungen	93
6.3	Bewertungs – bestimmte Junktionen	96
6.4	Verkumulierung	99
6.5	Verkumulierung der Fuzzy – Logik	100
7	Spezielle kumulative Logiken	103
7.1	Kumulative Logik maximaler Subjektivität	103
7.2	Kumulative Logik minimaler Subjektivität	107
7.3	Kumulative Logik verschwindender Subjektivität	112
7.4	Diskrete kumulative Logiken	116
8	Wahrheits – Übertragung	123
8.1	Sorites – Paradox	123
8.2	Wahrheitsverlust und – gewinn	127
8.3	Charakterisierung der Äquivalenz und Kontravalenz durch Wahrheitsverlust und – gewinn	129

1

Einführung

Klassische Logik beruht auf zweiwertigen Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

Es gibt verschiedene Versuche, klassische Logik auf mehrwertige (vage) Aussagen zu erweitern. Zum Beispiel lässt die Fuzzy-Logik neben wahr und falsch auch andere Wahrheitsgrade für Aussagen zu. Dies tut sie allerdings mit dem Nachteil einer willkürlich festgelegten Bedeutung ihrer Zwischen-Wahrheitswerte.

Außerdem gelten weder der für die klassische Logik grundlegende Satz vom ausgeschlossenen Dritten noch der für Schlussfolgerungen grundlegende Modus Ponens.

Die im Folgenden beschriebene Logik vermeidet diese Nachteile und vereint die Vorteile vager Logik mit denen der klassischen Logik.

Die neue Logik umfasst sowohl die klassische Logik als auch Supervaluationen und Teile der Fuzzy-Logik und vereint diese Theorien so in einer einzigen.

Die nicht durch die neue Theorie erfassten Teile der Fuzzy-Logik sind gerade die unbefriedigenden Teile der Fuzzy-Logik. Die Theorie zeigt die Ursachen für deren Unbefriedigtsein und macht einen Korrekturvorschlag.

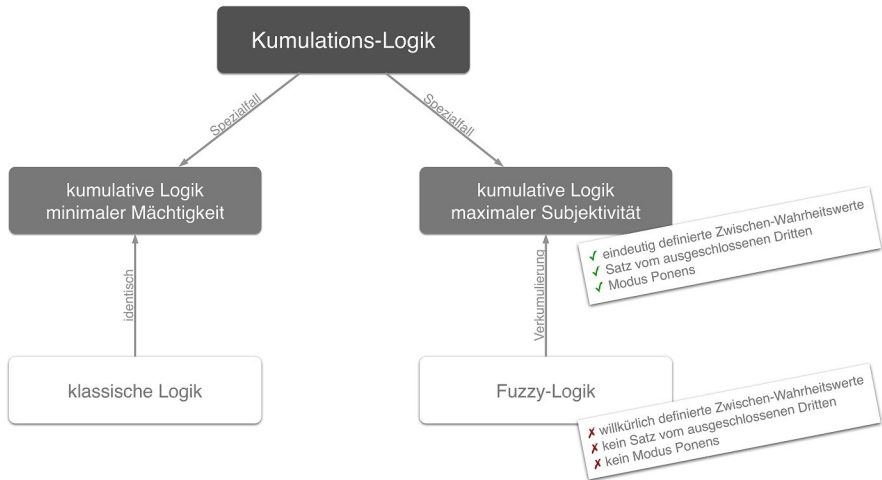


Bild 1.1: Kumulations-Logik.

Das Grundprinzip der neuen Logik ist die Zusammenfassung mehrerer klassischer Bewertungen zu kumulativen Bewertungen. Wir nennen die Logik daher Kumulations-Logik.

2

Logische Aussagen

Logische Aussagen sind Aussagen, denen Wahrheitswerte zugeordnet werden können.

Klassische Aussagen-Logik ist zweiwertig: Entweder ist eine Aussage wahr, oder sie ist falsch. Keine anderen Werte sind zugelassen.

Zur Beschreibung der realen Welt scheint es in vielen Fällen angemessener, auch vage (d.h. nicht eindeutig wahre oder falsche) Aussagen zuzulassen.

Zum Beispiel kann die Aussage "der Ball ist groß" in klassischer Logik nur die Werte wahr oder falsch annehmen. Diese Einschränkung scheint nicht angemessen, um einen Ball zu beschreiben, der weder eindeutig groß noch eindeutig klein ist, weil seine Größe zwischen diesen Werten liegt.

Entsprechend üblichem Sprachgebrauch erscheint es angemessener, verschiedene Grade von "Großsein" zuzulassen - z.B. "gar nicht groß", "etwas groß", "mittelgroß", "groß", "sehr groß".

Die Unbestimmtheit des Wahrheitswertes einer vagen Aussage kann durch Wahrheitsgrade erfasst werden, die zwischen den Werten wahr und falsch liegen. Vage Aussagen werden dann graduell und mehrwertig.

Beide Arten von Aussagen, zweiwertige ("der Ball ist groß") und mehrwertige ("der Ball ist groß zu einem bestimmten Grad"), haben das Problem, nicht in eindeutiger Weise mit der Welt verbunden zu sein. Je nach Aussagendem erhält man verschiedene Bewertungen für die Aussage "der Ball ist groß". Beide Aussage-Arten erscheinen nicht wohldefiniert, da ihre Bedeutung nicht eindeutig ist.

Die im Folgenden beschriebene Kumulations-Logik löst diese Probleme. Sie vereinigt zweiwertige und mehrwertige Aussagen in einer Theorie und gibt Aussagen eine eindeutige Verbindung mit der realen Welt.

Das Grundprinzip der Kumulations-Logik ist es, mehrwertige Aussagen durch zweiwertige Aussagen zu modellieren, indem viele zweiwertige Aussagen zu einer mehrwertigen Aussage zusammengefasst werden.

Viele reale physikalische Messungen (damit sind auch Wahrnehmungen durch Lebewesen gemeint) scheinen auf diesem Grundprinzip zu basieren:

Zum Beispiel kann die Messung von "Größe" über Fotorezeptoren der Retina erfolgen. Ein Fotorezeptor ist entweder aktiv, oder er ist nicht aktiv. Wenn ein Fotorezeptor aktiviert ist, so bedeutet dies, dass die Ausdehnung (d.h. die Größe) des Balls über einem bestimmten Schwellwert liegt. Der Fotorezeptor macht also zweiwertige Aussagen über die Größe des Balls.

Viele Fotorezeptoren an unterschiedlichen Stellen der Retina messen die Größe des Balles mit verschiedenen "Größe"-Schwellwerten.

Aus den vielen Einzelmessungen von "Größe" kann ein "Größe"-Grad bestimmt werden: Alle Fotorezeptoren stimmen über die Aussage "der Ball ist groß" ab. Die Häufigkeit der positiven (d.h. als wahr bewerteten) zweiwertigen "Größe"-Aussagen der Fotorezeptoren kann dann als Grad der "Größe" des Balls angesehen werden (Bild 2.1)

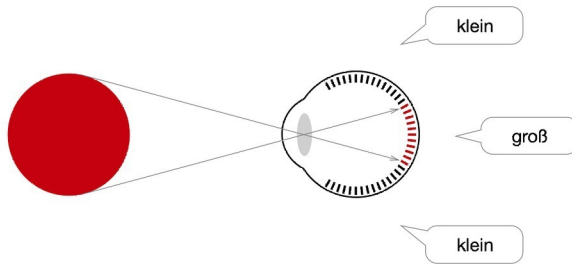


Bild 2.1: Grundprinzip der Kumulations-Logik am Beispiel von Fotorezeptoren.

Auch Intensitätsmessungen (wie z.B. Helligkeits-Messungen) können auf einer Menge zweiwertiger Messungen basieren. Dabei werden verschiedene Rezeptoren durch verschiedene (z.B. Licht-) Intensitäten aktiviert. Oder die Rezeptoren werden verschieden häufig aktiviert, und die Aktivitäts-Häufigkeit wird durch nachfolgende verarbeitende Neuronen durch zeitliche Integration bestimmt.

Nach demselben Prinzip werden auch in der Physik Energien gemessen. Elementare Messungen kleinster Energie-Pakete (wie z.B. in Form von Photonen oder anderen Elementarteilchen) werden dabei zu einer Gesamtmessung zusammengefasst.

Alle diese Messungen sind mikroskopisch zweiwertig. Sie erscheinen nur makroskopisch mehrwertig, weil viele (zweiwertige) Messungen zu einer Gesamtmessung zusammengefasst werden (Bild 2.2).

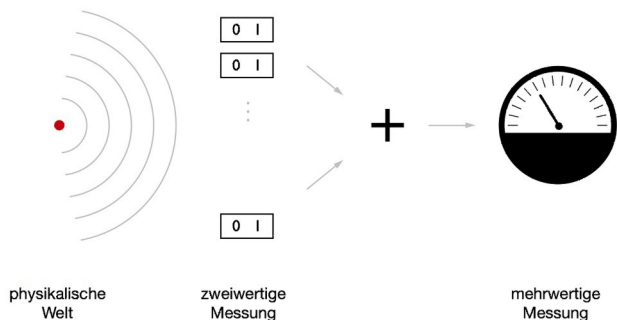


Bild 2.2: Zusammenfassung zweiwertiger Messungen zu einer Gesamtmessung.

Anmerkung:

In der Physik werden die Werte physikalischer Größen nicht nur nach dem Prinzip der Kumulation vieler Einzelmessungen bestimmt. Viele physikalische Größen werden stattdessen durch den Vergleich mit einer definierten Referenz bestimmt. Der Vergleich erfolgt durch eine zweiwertige Messung.

Die folgenden Abschnitte und Kapitel formalisieren und vertiefen den Grundgedanken der Zusammenfassung vieler Aussagen-Bewertungen zu einer kumulativen Bewertung.

2.1 Bewertungen

Logische Aussagen sind dadurch gekennzeichnet, dass ihnen Wahrheitswerte zugeordnet werden können.

Wir definieren:

Definition:

1. Eine Zuordnung v von Wahrheitswerten zu Aussagen p_i :

$$v : p_i \mapsto v(p_i) \quad \text{mit} \quad v(p_i) \in [0, 1]$$

heißt *Bewerter* der Aussagen p_i .

2. Die Gesamtheit der den Aussagen p_i durch den Bewerter v zugeordneten Wahrheitswerte $v_i = v(p_i)$ heißt *Bewertung* der Aussagen p_i .

Bewerter können als Instanzen, die eine Bewertung abgeben, gedacht werden.

Bewertungen können zwei- oder mehrwertig sein.

Zum Beispiel hat die Aussage $p = \text{"der Ball ist rot"}$ als zweiwertige Aussage die möglichen Bewertungen $v(p) = 0$ (falsch) und $v(p) = 1$ (wahr). Als mehrwertige Aussage hat p die möglichen Bewertungen $v(p) \in [0, 1]$.

Aussagen können mehrfach bewertet sein. Wir definieren:

Definition:

1. Eine Menge von Bewertungen $v^{(j)}(p_i)$ derselben Aussagen p_i heißt *Bewertungs-Gemeinschaft der Aussagen p_i* .
2. Die Menge der zugehörigen Bewerter $v^{(j)}$ heißt *Bewerter-Gemeinschaft der Aussagen p_i* .

Anmerkung:

Die Anzahl der Bewertungen einer Bewertungs-Gemeinschaft kann endlich oder aber unendlich sein.

Wenn die Anzahl unendlich ist, kann die Bewertungs-Gemeinschaft abzählbar oder überabzählbar unendlich sein.

Im Falle überabzählbar unendlicher Bewertungs-Gemeinschaften ist der Index j der Bewertungen keine ganze Zahl, sondern Element einer überabzählbaren Menge (wie z.B. der reellen Zahlen \mathbb{R}).

Die Bewertungen einer Bewertungs-Gemeinschaft können verschieden sein.

Gründe für verschiedene Bewertungen durch reale (d.h. auf physikalischen Messungen beruhende) Bewerter können sein (Bild 2.3):

- Verschiedenes Verständnis einer Aussage.
Zum Beispiel kann die Aussage "der Ball ist rot" verstanden werden als Ergebnis einer Messung des absoluten Rotanteils oder aber des relativen Rotanteils der Farbe des Balles. Die Aussage "der Ball ist groß" kann als Ergebnis einer Messung der Höhe, der Breite, der Länge, des Volumens oder des Umfangs des Balles verstanden werden. Für zweiwertige Messungen können außerdem verschiedene Schwellwerte angenommen sein.
- Verschiedene Messgenauigkeiten (Auflösungen) von Messgeräten.
Zum Beispiel ist die räumliche Auflösung des menschlichen Auges in der Fovea größer als in Randbereichen der Retina.
- Verschiedene systematische Messfehler.
Zum Beispiel nimmt das menschliche Auge Objekte systematisch größer wahr, wenn eine vergrößernde Brille getragen wird.