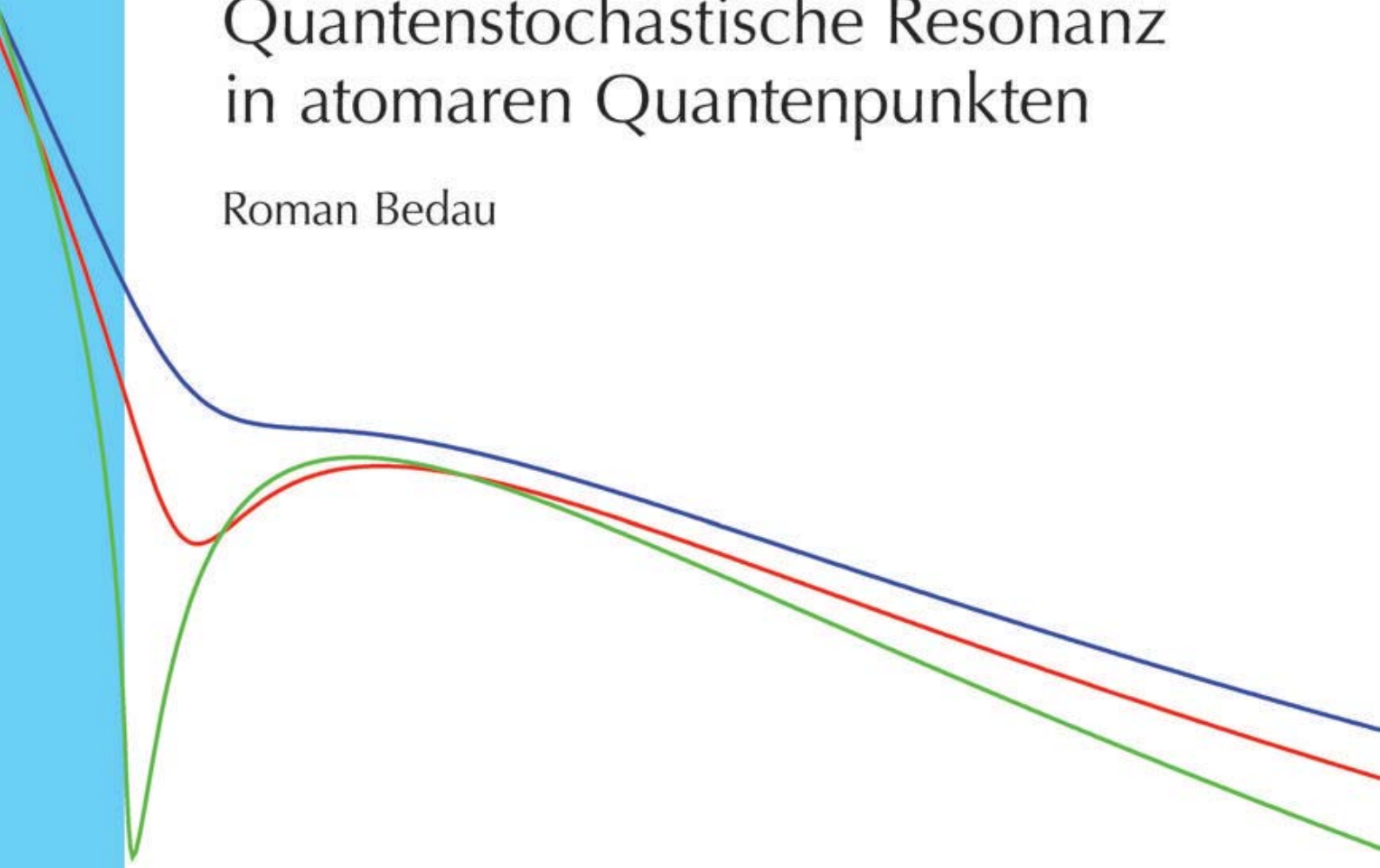
Quantenstochastische Resonanz in atomaren Quantenpunkten

Roman Bedau



Cuvillier Verlag Göttingen

Quantenstochastische Resonanz in atomaren Quantenpunkten

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Roman Bedau

aus Neustadt an der Weinstraße

Hauptberichter: Prof. Dr. Ulrich Weiß
Mitberichter: Prof. Dr. Günter Mahler

Tag der Einreichung: 29.01.2010
Tag der mündlichen Prüfung: 30.03.2010

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart
2010

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2010
Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2010

978-3-86955-517-1

D 93

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2010
Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86955-517-1

Inhaltsverzeichnis

Notations- und Symbolverzeichnis

AQP	atomarer Quantenpunkt
BEK	Bose–Einstein–Kondensat
BHM	Bose–Hubbard–Modell
FDT	Fluktuations–Dissipations–Theorem
NIBA	noninteracting–blip approximation
PRD	Phasenraumdichte
QP	Quantenpunkt
QSR	quantenstochastische Resonanz
RDM	reduzierte Dichtematrix
SBM	Spin–Boson–Modell
SR	stochastische Resonanz
WW	Wechselwirkung
ZZS	Zweizustandssystem

a_{s}	s–Wellen–Streulänge
$\lvert a\rangle$, $\lvert b\rangle$	Hyperfeinzustände der Kondensatatome
$\hat{b}, \hat{b}^{\dagger}$	bosonischer Erzeugungs- und Vernichtungsoperator
$\lvert c\rangle$	Zwischenzustand im Raman–Übergang
$C_j(t)$	Gleichgewichtsautokorrelation des Paulioperators $\hat{\sigma}_j$
$\mathcal{F}_{\mathrm{FV}}$	Feynman–Vernon Influenzfunktional
H	Hamiltonfunktion
$\hat{H}$	Hamiltonoperator
$\hat{H}_{\mathrm{BHM}}$	Hamiltonoperator des Bose–Hubbard–Modells
$\hat{H}_{\mathrm{eff}}$	effektiver Hamiltonoperator
$\hat{H}_{\mathrm{LF}}$	Hamiltonoperator der Luttinger Flüssigkeit
$\hat{H}_{\mathrm{LL}}$	Lieb–Liniger–Hamiltonoperator

$\hat{H}_{\mathrm{QP}}$	Hamiltonoperator eines Quantenpunktes
$\mathrm{Im}[\cdot]$	Imaginärteil
J	Sprungterm im BHM
$J(\omega)$	spektrale Dichte
J_{FV}	Propagationsfunktion im Feynman–Vernon Modell
$J_n(z)$	Besselfunktion erster Gattung n-ten Grades
k_{B}	Boltzmann Konstante
$L(t)$	Bad–Korrelationsfunktion
$\hat{N}$, $\hat{n}$	Besetzungszahloperator
$P(t)$	Besetzungswahrscheinlichkeit, Population
$P^{(\mathrm{as})}(t)$	Asymptotisches Verhalten von $P(t)$
$\hat{P}$	Projektionsoperator
p_{F}	Fermi–Impuls
$\mathrm{Re}[\cdot]$	Realteil
r_{TF}	Thomas–Fermi–Radius
$\mathcal{S}_{\mathrm{FV}}$	Influenzwirkung im Feynman–Vernon Modell
sgn	Signumfunktion
U	Onsite–Wechselwirkung im BHM
$\lvert\mathrm{vak}\rangle$	Vakuumzustand
V_{F}	äußeres Fallenpotential
V_0	Potential des optischen Gitters
$\hat{W}$	Dichtematrix des Gesamtsystems
$X_{j,k}$	Blip–Sojourn Korrelation
Z	Zustandssumme

β	inverse Temperatur
γ_{r}	Dämpfungsrate
$\gamma(\omega)$	frequenzabhängiger Dämpfungsparameter
δ, Δ	Verstimmungsparameter im Raman–Übergang
Δ	Tunnelmatrixelement im SBM
ϵ	allgemeiner Verkippungsparameter im SBM

$\epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1(t)$	zeitabhängiger Verkippungsparameter im SBM
ϵ_0	statischer Anteil von $\epsilon(t)$
$\epsilon_1(t)$	dynamischer Anteil von $\epsilon(t)$
ϵ_1	Amplitude von $\epsilon_1(t)$ bei periodischer Variation
Δ_r	renormiertes Tunnelmatrixelement
Δ_e	effektives Tunnelmatrixelement
$\Lambda_{j,k}$	Inter–Blip Korrelation des Blip–Paares $\{j, k\}$
λ_dB	de–Broglie–Wellenlänge
χ	lineare Suszeptibilität
Φ_FV	Influenzphase im Feynman–Vernon Modell
$\lvert\Psi_\mathrm{MI}\rangle$	Mott–Isolator Zustand
$\lvert\Psi_\mathrm{sf}\rangle$	suprafluider Zustand
ω_c	Trennfrequenz/Cutoff Frequenz
ω_L	Frequenz des kohärenten Lichtfeldes
Ω_0	resonante Rabifrequenz
$\Omega_{ab}^{(\mathrm{eff})}$	effekt. Rabifrequenz des Raman–Übergangs $\lvert a\rangle \leftrightarrow \lvert b\rangle$
ρ	reduzierte Dichtematrix
σ_x, σ_y, σ_z	Pauli–Spinmatrizen
$\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$	Pauli–Spinoperatoren
$\Theta(t)$	Heaviside-/Stufenfunktion
η	Viskositätskoeffizient
$\eta(t)$	symmetrische Pfadkoordinate im SBM
$\xi(t)$	antisymmetrische Pfadkoordinate im SBM

$[\hat{A}, \hat{B}]$	Kommutator der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$
$[\hat{A}, \hat{B}]_+$	Antikommutator der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$
$\langle\cdot\rangle_t$	zeitabhängiger Erwartungswert
$\langle\cdot\rangle_\beta$	thermischer Erwartungswert

Abstract

Due to advances in controlling and manipulating systems on an atomic level new possibilities to experimentally study fundamental questions concerning open quantum systems emerge. This thesis describes the dynamics of atomic quantum dots embedded in a quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensate. The system dynamics is mapped onto the driven Spin-Boson model. Based on this approach it is shown that within the presented experiment the phenomena of quantum stochastic resonance can be observed for the first time.

The first chapter of this thesis gives an introduction into the theory of open quantum systems. Starting from the classical Langevin equation for Ohmic and frequency dependent damping the Feynman-Vernon influence functional is presented for different preparations of the initial state. The Spin-Boson model is explicated with regard to the experiment to be explained and its theoretical description. Due to the experimental relevance the preparation of the initial states is elucidated with respect to its consequences on the dynamics. The exact formal solution for the system dynamics is given. Based on that solution the exact expressions for the conditional propagation function, the expectation values as well as the correlation and response functions for the populations and the coherences are derived. In comparison with an general quantum master equation the expressions for the irreducible kernels of the system dynamics are identified in a self-consistent manner. The modifications to theoretically describe the driven Spin-Boson model are given based upon the theory presented so far. The system dynamic is then explained in the Markov and the high-frequency limit.

In the following chapter an experiment consisting of a Bose-Einstein condensate with one or several embedded atomic quantum dots is presented. This experiment allows us to detect certain phenomena of the driven Spin-Boson model. First, the experimental setup and its theoretical description is explained. Different potential landscapes for the implementation of one or several atomic quantum dots are discussed. Their assets and drawbacks are listed and compared. The theories explaining the experimentally controlled systems are briefly stated. Among these are light-matter interaction, Bose-Einstein condensation, the Bose-Hubbard model, scattering processes as well as Raman transitions, and the Luttinger liquid model of low-energy excitations in one-dimensional systems.

The third chapter covers the necessary transformations to map the aforementioned theoretical characterisation onto the driven Spin-Boson model. First, the Luttinger liquid Hamiltonian is diagonalized and an effective description for the occupation of the atomic quantum dot and its interaction with the condensate atoms by scattering and induced transitions is derived. Applying a unitary transformation brings the effective Hamiltonian onto a form which can be identified with the Spin-Boson model and its

characteristical parameters. Using this mapping the bias ϵ and the tunneling matrix element Δ of the Spin-Boson model can be expressed in terms of the experimentally controlled parameters. Finally the damping parameter α is calculated and the range of the experimentally accessible values is discussed.
The fourth chapter has two parts. In the first part the phenomena of quantum stochastic resonance as an effect observable in a driven Spin-Boson model is analysed. Different asymptotic limits of the dynamics are highlighted and the corresponding approximations for the effective models, inter alia the noninteracting-blip approximation (NIBA), are presented.These methods of approximation permit the use of numerical simulations to study the dynamics. The so computed data exhibits all signatures of quantum stochastic resonances and thus substantiates the theoretical predictions. In the second part of this chapter the theoretical findings are applied to the experiment presented in the second chapter and its parametrical specifications.
The results of this thesis are summarized and interpreted in the fifth chapter. Further possible lines of investigations close to the treated topic are pointed out.
In the appendix short reviews about the theory of path integrals and Kubo's Linear Response theory are given.

Kurzfassung

Durch die fortschreitende Entwicklung, Systeme auf atomarer Ebene beeinflussen und kontrollieren zu können, enstehen neue Möglichkeiten, grundlegende Fragestellungen und Modelle offener Quantensysteme experimentell zu beleuchten. In dieser Arbeit wird die Dynamik von atomaren Quantenpunkten beschrieben, die in ein quasi–eindimensionales Bose–Einstein–Kondensat eingebettet sind. Die Systemdynamik wird auf das getriebene Spin–Boson–Modell abgebildet. Davon ausgehend wird gezeigt, dass das vorgestellte Experiment erstmalig die Beobachtung eines quantenstochastischen Resonanzphänomens erlaubt.

Das erste Kapitel fasst einführend die Theorie der offenen Quantensysteme zusammen. Ausgehend von der klassischen Langevin–Gleichung mit Ohm'scher und frequenzabhängiger Dämpfung wird im Anschluss auf die quantenphysikalische Influenzfunktionalmethode von Feynman und Vernon für spezielle sowie allgemeine Anfangsbedingungen eingegangen. In der Folge wird im Hinblick auf das zu beschreibende Experiment und seiner Übertragung in ein formales theoretisches Modell das Spin–Boson–Modell behandelt. Dabei wird auch der experimentell relevante Aspekt der Anfangspräparation der Zustände und deren Integration in die theoretischen Modelle beleuchtet. Die formal exakte Lösung der Systemdynamik wird präsentiert und anhand dieser die Ausdrücke für die bedingten Propagationsfunktionen, die Erwartungswerte sowie die Korrelationen und Antwortfunktionen der Besetzungen und Kohärenzen abgeleitet. Im Vergleich mit der allgemeingültigen exakten Quantenmastergleichung lassen sich selbstkonsistent die irreduziblen Kerne der Systemdynamik identifizieren. Darauf aufbauend werden die Erweiterungen und Modifikationen dargestellt, die zur Beschreibung eines getriebenen Spin–Boson–Modells erforderlich sind. Abschließend wird die Systemdynamik im getriebenen Fall in den Grenzfällen des Markov sowie des Hochfrequenz Regimes erörtert.

Im folgenden Kapitel wird ein Experiment vorgestellt, in dem atomare Quantenpunkte in ein Bose–Einstein–Kondensat eingebettet werden und welches die Beobachtung spezieller Phänomene eines getriebenen Spin–Boson–Modells erlaubt. Zunächst werden der experimentelle Aufbau und seine theoretische Beschreibung dargelegt. Mögliche Potentiallandschaften zur Realisierung eines oder mehrerer atomarer Quantenpunkte sowie deren Vor- und Nachteile werden diskutiert. Anschließend werden die zur Beschreibung der experimentell manipulierten Systeme erforderlichen Theorien knapp dargestellt. Darunter befinden sich die Theorie der Wechselwirkung zwischen Atomen und kohärenten Lichtfeldern, die Physik der Bose–Einstein–Kondensation, das Bose–Hubbard–Modell, Stoßprozesse sowie Raman Kopplung und abschließend das Luttinger Flüssigkeitsmodell zur Beschreibung niederenergetischer Anregungen in eindimensionalen Systemen.

Die Transformationen der zuvor aufgestellten theoretischen Beschreibungen auf das Spin–Boson–Modell sowie deren Gültigkeitsbereich werden im dritten Kapitel ausführ-

lich dargelegt. Als Vorarbeit wird der hydrodynamische Hamiltonoperator des Luttinger Flüssigkeitsmodells diagonalisiert und eine effektive Beschreibung für die Besetzung der Quantenpunkte sowie deren Wechselwirkung mit Kondensatatomen durch Stoßprozesse und induzierte Übergänge hergeleitet. Die nun zur Verfügung stehende effektive Beschreibung wird anschließend durch eine unitäre Transformation explizit auf das Spin–Boson–Modell abgebildet. Die experimentellen Größen können daraufhin den Basisgrößen des Spin–Boson–Modells wie dem Verkippungsparameter ϵ und dem Tunnelmatrixelement Δ zugeordnet werden. Abschließend wird der Dämpfungsparameter α identifiziert sowie die im Experiment gegebenen Möglichkeiten zur Veränderung seines Wertes untersucht.
Das vierte Kapitel untergliedert sich in zwei Teile: Im ersten Teil wird ausgehend von der im ersten Kapitel vorgestellten Theorie eines getriebenen Spin–Boson–Modells das Phänomen der quantenstochastischen Resonanz untersucht. Die Dynamik wird dabei in verschiedenen Grenzfällen betrachtet und die Näherungsmethoden der zugehörigen approximativen Beschreibungen, unter anderem die NIBA, erläutert. Diese erlauben es, die Dynamik durch numerische Simulationen zu erfassen. In den so gewonnenen Daten lassen sich die Signaturen der quantenstochastischen Resonanz aufspüren und damit die theoretisch getroffenen Aussagen untermauern. Im zweiten Teil werden die zuvor gewonnenen Erkenntnisse auf das im zweiten Kapitel vorgestellte Experiment übertragen. Es wird ausführlich analysiert, in welchem durch das Experiment vorgegebenen Parameterraum die verschiedenen Aspekte der quantenstochastischen Resonanz beobachtbar sind. Gestützt werden die Überlegungen durch Simulationen mit denen durch das Experiment vorgegebenen Parametern.
Die Ergebnisse werden im fünften Kapitel interpretiert und zusammengefasst. Weitere Fragestellungen, die thematisch an die Arbeit anknüpfen könnten, werden diskutiert.
Im Anhang findet sich eine kurze Übersicht über die Theorien der Pfadintegrale und des Kubo–Formalismus.

Einleitung

Seit dem ersten experimentellen Nachweis eines Bose–Einstein–Kondensats (BEK) im Jahre 1995, der unabhängig voneinander den Gruppen um Eric A. Cornell und Carl E. Wieman in Boulder und der Gruppe um Wolfgang Ketterle am MIT gelang[1], hat sich dieses Forschungsgebiet der ultrakalten Quantengase — bosonischer wie auch fermionischer Natur — sowie der Kondensate rasant entwickelt. Davon zeugen allein die seit diesen experimentellen Pionierarbeiten mehr als 25.000 [1] erschienenen wissenschaftlichen Veröffentlichungen [siehe Tabelle in Abb. 0.1]. In den ersten Jahren galt das

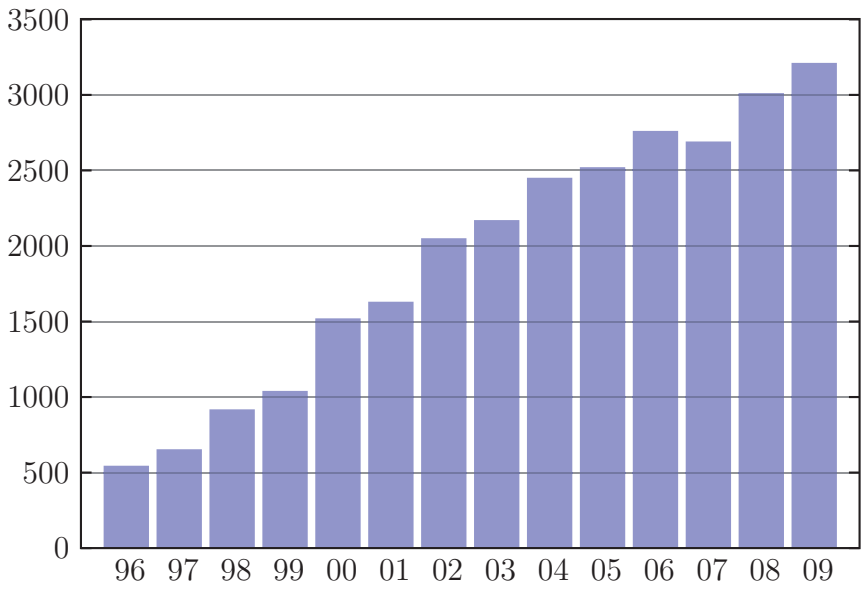


Abbildung 0.1: Jährliche Anzahl der Veröffentlichungen von 1996 bis 2009, in denen in der Kurzzusammenfassung der Begriff „Bose–Einstein condensation“ vorkommt.

Hauptinteresse der Untersuchungen den Eigenschaften der kohärenten Materiewellen und den damit einhergehenden Phänomenen. Unter anderem seien hier als Beispiele die Beobachtung von Interferenzen zweier überlappender Kondensate [4], der langreichweitigen Phasenkohärenz [8], der Nachweis quantisierter Wirbel und Wirbelgitter [2, 64, 67] sowie die Erzeugung molekularer Kondensate aus gebundenen Paaren von Fermionen [38, 51, 90] genannt. Die letzten Jahre sind maßgeblich durch zwei neue Entwicklungen geprägt: Zum einem durch die Möglichkeit, die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Atomen im kalten Gas durch Feshbachresonanzen zu variieren und zum anderen durch

[1] Bereits sechs Jahre später wurden diese Leistungen mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet.