

ANALYTISCHE MECHANIK

Joseph-Louis Lagrange

Historische deutsche Ausgabe

Analytische Mechanik

von Joseph-Louis Lagrange

Deutsche Ausgabe von Dr. H. Servus

Neuausgabe von Marco Bernard

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über dnb.dnb.de abrufbar.

Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäß §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt.

© 2026 Marco Bernard
Lektorat: Marco Bernard
Korrektorat: Marco Bernard
Kontakt: caldauen.verlag@gmail.com

Weitere Mitwirkende: Joseph Louis Lagrange, H. Servus

Herstellung und Verlag:
BoD · [Books on Demand GmbH](#), Überseering 33, 22297 Hamburg

ISBN: 978-3-6963-4739-0

Vorwort

Im Jahr 1887 legte H. Servus eine deutsche Übersetzung der zweiten Originalausgabe von Lagranges *Analytischer Mechanik* vor. Inzwischen ist Servus' Übertragung selbst zu einem historischen Dokument geworden. Wie schon zu Lebzeiten des Übersetzers gilt: Das Werk sollte eigentlich „im Besitze aller Mathematiker und Physiker sein“, ist antiquarisch jedoch kaum noch greifbar.

Im Unterschied zu bloßen Reproduktionen folgt diese Neuausgabe der von Servus zugrunde gelegten zweiten Originalausgabe. Sie macht damit nicht nur die historische deutsche Übersetzung erneut zugänglich, sondern bewahrt auch den erweiterten Textbestand dieser Ausgabe, einschließlich der in der zweiten Ausgabe enthaltenen Erweiterungen und der überlieferten Fragmente aus Lagranges Nachlass.

Da das Original von Servus nur in wenigen Bibliotheken vorhanden ist und dort oft nur im Lesesaal eingesehen werden kann, macht die vorliegende Neuausgabe diese deutsche Ausgabe eines Grundtextes der theoretischen Mechanik einer breiteren Fachöffentlichkeit aus Physik, Mathematik und Ingenieurwesen sowie interessierten Laien zugänglich. Die digitale Erschließung erleichtert zudem die Stichwortsuche und das wissenschaftliche Zitieren.

Während an heutigen Hochschulen die Grundlagen der analytischen Mechanik oft als feststehende Resultate vermittelt werden, lässt sich von Lagrange vor allem seine methodische Herangehensweise lernen. Er versteht es, den damaligen Stand der Wissenschaft darzulegen, kritisch zu diskutieren und daraus eigene Schlüsse abzuleiten. Besonders eindrucksvoll ist dabei der Rückgriff auf seine Vordenker von Archimedes und Galilei bis hin zu Newton, Euler und D'Alembert. So schlägt das Werk eine Brücke von der Mathematik zur Physik und von der Geometrie zur Analytik.

Die historischen Notationen und Begrifflichkeiten erschweren jedoch bisweilen das gezielte Lesen einzelner Kapitel. Um den Einstieg in diese Epoche zu erleichtern, wurden im folgenden Abschnitt Hinweise zu möglichen Missverständnissen sowie ein Begriffsregister zusammengestellt. Da diese Übersicht keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, empfiehlt sich auch für fortgeschrittene Leser ein Blick in die grundlegenden Kapitel „Über die verschiedenen Prinzipie der Statik“ und „Über die verschiedenen Prinzipie der Dynamik“.

Bei der Herstellung dieser Neuausgabe lag ein besonderer Schwerpunkt auf der präzisen Wiedergabe der Formeln, der historischen Notationen und der griechischen Formelzeichen.

Ich wünsche Ihnen eine erkenntnisreiche Lektüre!

Wissenschaftliche Grüße

Marco Bernard

Definitionen

Dieser Abschnitt soll die Orientierung in der historischen Terminologie und Notation von Lagranges Werk erleichtern. Die Begriffe sind daher nicht alphabetisch, sondern in der Reihenfolge ihres sachlichen Zusammenhangs angeordnet.

Grundbegriffe der Mechanik

Statik

„Die Statik ist die Wissenschaft vom Gleichgewicht der Kräfte.“

„Das Gleichgewicht resultiert, wenn die Wirkungen der betreffenden Kräfte sich gegen einander aufheben [...]; Ziel der Statik ist es, die Gesetze anzugeben, denen gemäss diese Vernichtung vor sich geht.“

„Es sind aber diese Gesetze auf allgemeine Prinzipie begründet, die man auf drei zurückführen kann: das Prinzip des Hebels, das der Zusammensetzung von Kräften und das der virtuellen Geschwindigkeiten.“

Dynamik

„Die Dynamik ist die Wissenschaft von den beschleunigenden oder verzögernden Kräften und von den Veränderungen, welche diese Kräfte in den Bewegungszuständen von Körpern hervorrufen.“

„Die Theorie der variierenden Bewegungen und der beschleunigenden Kräfte, welche dieselben hervorbringen, gründet sich auf die folgenden allgemeinen Gesetze [...].“

„Man kann also auch die ganze Dynamik auf eine allgemeine Formel bringen [...].“

Kraft

„Unter Kraft versteht man im allgemeinen die Ursache, gleichviel welcher Art, welche den Körper, an dem man sie sich wirkend denkt, in Bewegung setzt oder in Bewegung zu setzen strebt [...].“

„Im Zustande des Gleichgewichts bringt die Kraft keine Wirkung hervor; sie erzeugt nur ein einfaches Streben nach Bewegung [...].“

„Nimmt man die Intensität irgend einer Kraft oder die Wirkung dieser Kraft als Einheit an, so stellt sich der Ausdruck für jede andere Kraft als ein Verhältniss zu jener dar, bildet also eine mathematische Grösse, welche durch Zahlen oder Linien dargestellt werden kann.“

Gleichgewicht

„Das Gleichgewicht resultiert, wenn die Wirkungen der betreffenden Kräfte sich gegen einander aufheben, die Kräfte also einander entgegenarbeiten und ihre Wirkungen vernichten [...].“

„In diesem Gesetz besteht das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, ein Prinzip, das [...] schon seit langer Zeit als das Fundamentalprinzip des Gleichgewichts angesehen wird [...].“

„[...] Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn sie im umgekehrten Verhältnisse ihrer virtuellen Geschwindigkeiten stehen, diese in den Richtungen dieser Kräfte gemessen.“

Statische Prinzipien und Momentbegriffe

Hebel

„Es besteht dieses Prinzip darin, dass, wenn ein geradliniger Hebel zu beiden Seiten des Unterstützungspunkts mit zwei irgendwo angebrachten Gewichten so belastet wird, dass deren bezüglich die Entfernungen vom Unterstützungspunkt sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte selbst, derselbe im Gleichgewicht verharrt [...].“

„Man kann es also als eine streng bewiesene Wahrheit ansehen, dass ein gerader, horizontaler Hebel sich im Gleichgewicht befindet, falls die Gewichte, mit denen er belastet ist, im umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen vom Unterstützungspunkte stehen.“

„[...] der übrig bleibende ungleicharmige Winkelhebel, der an seinen Endpunkten von senkrechten Kräften angegriffen wird, die im umgekehrten Verhältniss der Längen der Arme stehen, [muss] im Gleichgewicht sein [...].“

Superposition von Kräften

„[...] wenn zwei Kräfte zugleich, aber in verschiedenen Richtungen auf einen Körper wirken, diese Kräfte dann einer einzigen Kraft äquivalent sind, welche fähig ist dem Körper dieselbe Bewegung zu erteilen, die ihm die beiden getrennt wirkenden Kräfte erteilen würden.“

„Wenn nun ein Körper sich gleichförmig nach zwei verschiedenen Richtungen zugleich bewegen soll, so durchläuft er notwendig die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten er in Folge jeder der beiden Bewegungen getrennt durchlaufen hätte.“

„Man schliesst daraus, dass zwei beliebige Kräfte, welche vereint auf den selben Körper wirken, einer einzigen Kraft gleich sind, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird [...].“

Virtuelle Geschwindigkeit und virtuelle Verschiebung

Bei Lagrange ist die virtuelle Geschwindigkeit der historische Leitbegriff; operativ erscheint sie jedoch meist in Form infinitesimaler Verschiebungen oder Wegdifferentiale wie dp, dq, dr , so dass beide Begriffe im Gebrauch eng zusammenfallen.

„Unter virtueller Geschwindigkeit muss man die Geschwindigkeit verstehen, welche ein Körper, der sich gerade im Gleichgewicht befindet, bereit ist anzunehmen, in dem Augenblicke, wo das Gleichgewicht gestört worden ist [...].“

„Die allgemeine Bedingung des Gleichgewichts bei den Maschinen besteht darin, dass die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Geschwindigkeiten der Punkte, an denen sie wirken, wenn diese Geschwindigkeiten in der Richtung der Kräfte gemessen werden.“

„[...] mit dp, dq, dr etc. die Variationen oder Differentiale dieser Linien bezeichnen, insofern sie von einer unendlich kleinen Veränderung in der Stellung der verschiedenen Körper oder Punkte des Systems herrühren.“

„Es ist klar, dass diese Differentiale die Räume ausdrücken werden, welche die Angriffspunkte der Kräfte P, Q, R etc. in einem und demselben Augenblick in den Richtungen dieser Kräfte durchlaufen [...].“

„Die Differentiale dp, dq, dr etc. werden also proportional den virtuellen Geschwindigkeiten [...] sein und werden der Einfachheit halber für diese Geschwindigkeiten gesetzt werden können.“

Virtuelle Arbeit

„Wenn ein beliebiges System [...] im Gleichgewicht ist, und man diesem System eine beliebige kleine Bewegung erteilt [...], so ist die Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit der Strecke, welche der Punkt, an dem sie wirkt, in der Richtung dieser Kraft durchläuft, [...] immer gleich Null [...].“

„[...] und diese Gleichung bildet eben den analytischen Ausdruck des allgemeinen Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten.“

In moderner Lesart steht diese Gleichgewichtsbedingung dem Prinzip der virtuellen Arbeit am nächsten.

Moment

Im heutigen Sprachgebrauch liegt dieser allgemeine Momentbegriff näher an einem Beitrag zur virtuellen Arbeit als am Drehmoment. Das Drehmoment um eine Achse erscheint bei Lagrange als ein speziellerer Fall innerhalb dieses weiteren Begriffs.

„Galilei versteht unter *Moment* eines Gewichtes oder einer an einer Maschine wirkenden Kraft die Anstrengung, die Wirkung, die Energie oder den Anstoss (impetus) dieser Kraft, um die Maschine in Bewegung zu setzen.“

„Heute versteht man gewöhnlich unter *Moment* nur das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Richtung von einem Punkte oder von einer Linie oder von einer Ebene, d. h. in den Hebelarm, an welchem sie wirkt. Es scheint mir aber, dass die durch Galilei und Wallis gegebene Auffassung des Momentes natürlicher und allgemeiner ist [...].“

„Wir wollen jedes Glied der Formel, wie z. B. Pdp , das Moment der betreffenden Kraft [...] nennen, und das Wort Moment in der Bedeutung nehmen, welche Galilei ihm gegeben hat, nämlich als das Produkt aus der Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit. Die allgemeine Formel der Statik sagt dann aus, dass beim Gleichgewicht die Summe der Momente aller Kräfte Null sein muss.“

„[...] die Momente Pdp , Qdq etc. [werden] positiv oder negativ sein, je nachdem ihre virtuellen Geschwindigkeiten dp , dq etc. positiv oder negativ sind [...].“

„[...] die Größen $(yX - xY)$, $(xZ - zX)$, $(zY - yZ)$ [drücken] die Momente der Kräfte aus, welche diesen Körper um die einzelnen Axen der Coordinaten x, y, z drehen wollen [...].“

Analytische Beschreibung des Systems

Coordinaten als Grundlage der Kraftdarstellung

„Wir wollen die Coordinaten der Punkte, an denen die Kräfte angreifen, im allgemeinen mit x, y, z bezeichnen [...].“

„Wir bezeichnen ferner mit a, b, c die Coordinaten für die Kraftcentren. Es ist klar, dass die Entfernungen p, q, r etc. zwischen den Angriffspunkten und Kraftcentren allgemein durch die Grösse ausgedrückt werden“

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

„Die identische Gleichung

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = Xdx + Ydy + Zdz,$$

die wir im Art. 1 gefunden haben, zeigt, dass das System der Kräfte P, Q, R etc., welche nach den Linien p, q, r etc. gerichtet sind, mit dem System der drei Kräfte X, Y, Z gleichwertig ist, die nach

den Linien x, y, z gerichtet sind (Abschn. II, Art. 15). Die Grössen X, Y, Z geben also die Werte der Kräfte P, Q, R etc., wenn diese nach den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z zerlegt sind; sie streben, diese Coordinaten zu verkleinern, da von den Kräften P, Q, R etc. vorausgesetzt ist, dass sie die Linien p, q, r etc. zu verkleinern suchen.“

Gestrichene Grössen — Punktkoordinaten

Bei Lagrange kennzeichnen Striche meist verschiedene Punkte des Systems; in einigen dynamischen Formeln können sie jedoch auch Ableitungen nach der Zeit bezeichnen.

„[...] und sie in der Folge durch einen Strich oder durch mehrere Striche unterscheiden, entsprechend den verschiedenen Punkten des Systems.“

„[...] gehen die Grössen a, b, c in x''' etc., y''' etc., z''' etc. über und sind variabel“

„Wir wollen ferner mit einem kleinen Strich oder mit zwei, drei etc. Strichen alle Grössen andeuten, die sich auf bestimmte Punkte der Masse beziehen [...].“

„Setzen wir der Einfachheit halber $d\xi = \xi' dt, d\psi = \psi' dt, d\varphi = \varphi' dt, \dots$, so wird die Grösse T eine Function von $\xi, \psi, \varphi, \dots$ und von $\xi', \psi', \varphi', \dots$ [...].“

Unabhängige Variablen, Freiheitsgrade und Generalisierte Coordinaten

„[...] so kann man doch stets die Variablen, welche die Lage dieser Punkte im Raum bestimmen, auf eine kleine Zahl von unabhängigen Variablen zurückführen [...].“

„Bezeichnet man diese unabhängigen Variablen mit ξ, ψ, φ etc. und betrachtet die Werte von p, q, r etc. als Functionen dieser Variablen [...].“

„Wir nehmen an, dass wir [...] die Coordinaten x, y, z jedes Körpers als Functionen anderer Variablen ξ, ψ, φ etc. ausgedrückt haben, die unter sich von einander gänzlich unabhängig sind und zur Bestimmung der Lage des Systems in jedem Augenblick dienen.“

„[...] wählt also diese Variablen so, dass dieselben gänzlich von einander unabhängig sind, und dass folglich ihre Variationen $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi$ etc. absolut unbestimmt bleiben [...].“

Schwerpunkt

„Um diesen Punkt zu bestimmen, hat man nur die Entfernung desselben von drei auf einander senkrechten gegebenen Ebenen zu suchen. [...] Man erhält also diese Entfernung, wenn man die Summe der Produkte der Massen in ihre Entfernungen durch die Summe der Massen selbst dividiert.“

„Wir wollen jetzt annehmen, dass der Körper, zu dem die Coordinaten x', y', z' gehören, sich im Schwerpunkte des ganzen Systems befinde [...].“

„Bezieht man die Coordinaten x', y', z' auf den Schwerpunkt des Systems, so hat man infolge der Eigenschaften dieses Punktes“

$$x' S m = S x m$$

$$y' S m = S y m$$

$$z' S m = S z m$$

„[...] doch sind die Coordinaten x, y, z , deren Ursprung im Raume fest ist, in ξ, η, ζ , deren Ursprung der Schwerpunkt ist, verwandelt.“

Zwangsbedingungen als Bedingungsgleichungen

„Ist aber die Natur des Systems so beschaffen, dass die Körper in ihren Bewegungen besonderen Bedingungen unterworfen sind, so muss man damit den Anfang machen, dass man diese Bedingungen durch analytische Gleichungen ausdrückt, die wir als Bedingungsgleichungen bezeichnen [...].“

„Es seien $L = 0, M = 0, N = 0$ etc. die verschiedenen Bedingungsgleichungen, die durch die Natur des Systems gegeben sind [...].“

„Hat man die Bedingungsgleichungen so oder anders gefunden, so muss man vermittelst derselben so viele Differentiale als möglich in den Ausdrücken für dp, dq, dr etc. fortschaffen [...].“

Multiplicatoren und Zwangskräfte

„[...] man [erhält] dieselben Resultate auch [...], wenn man nur zur genannten Gleichung die verschiedenen Bedingungsgleichungen $dL = 0, dM = 0, dN = 0$ etc., jede mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, addirt und hernach die Summe aller Glieder, die mit einerlei Differentialen multiplicirt sind, gleich Null setzt. Man bekommt so sovieler besondere Gleichungen, als Differentiale vorhanden sind, und kann endlich aus diesen letzteren Gleichungen die unbestimmten Coefficienten, mit denen man die Bedingungsgleichungen multiplicirt hat, eliminiren.“

„Ich bemerke jetzt, dass die Glieder $\lambda dL, \mu dM, \nu dN$ etc. der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts auch als Grössen angesehen werden können, die Momente verschiedener am System angreifender Kräfte vorstellen.“

„Umgekehrt können diese Kräfte die Bedingungsgleichungen, die aus der Natur des gegebenen Systems herrühren, ersetzen, so dass, wenn man diese Kräfte in Rechnung bringt, man die Körper als ganz frei und ohne Verbindung untereinander ansehen kann. [...] gerade hierin besteht das Wesen der in diesem Abschnitt auseinanderzusetzenden Methode.“

„[...] diese Kräfte sind nichts anderes als die Kräfte dieser Widerstände selbst, die den von den Körpern ausgeübten Druckkräften gleich und genau entgegengerichtet sind.“

d — Zeitdifferential oder gewöhnliches Differential

„[...] wir wollen daher durch d künftig Differentialgrössen von der ersten Art andeuten, die mit denen analog sind, welche man gewöhnlich in der Geometrie betrachtet [...].“

δ — Variationsdifferential

„[...] die Differentialgrössen der zweiten Art aber, die dem Gegenstand, den wir hier abhandeln, eigen sind, wollen wir durch δ andeuten [...].“

$\int$ — partielles oder unbestimmtes Integral

„Diese ganzen (bestimmten), d. h. in Bezug auf Umfang der ganzen Masse genommenen Integrale, wollen wir durch den grossen Buchstaben S andeuten, das gewöhnliche Zeichen $\int$ aber gebrauchen, wo es sich um partielle oder unbestimmte Integrale handelt.“

S — Integral über die ganze Masse

„Diese ganzen (bestimmten), d. h. in Bezug auf Umfang der ganzen Masse genommenen Integrale, wollen wir durch den grossen Buchstaben S andeuten [...].“

„Hiernach erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte des Systems den Integraalausdruck $S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots)dm$.“

„Um dann die Summe der Momente aller Kräfte des Systems zu bekommen, braucht man nur diesen Ausdruck über die ganze gegebene Masse zu integrieren.“

Dynamische Größen und Funktionen

Beschleunigende Kraft

Bei Lagrange bezeichnet die „beschleunigende Kraft“ zunächst das, was wir heute als Beschleunigung auffassen würden.

„[...] so stellen die Variationen dieser Coordinaten offenbar die von dem Körper nach den Richtungen dieser Coordinaten durchlaufenen Räume vor; folglich drücken die zweiten Differentiale eben dieser Coordinaten, durch das Quadrat des constanten Differentials der Zeit dividiert, die beschleunigenden Kräfte aus, welche in Richtung dieser Coordinaten wirken müssen [...].“

„Das constante Verhältniß [...] zwischen den Geschwindigkeiten und Zeiten, oder zwischen den Räumen und Quadraten der Zeiten [...] kann hiernach als Maass einer beschleunigenden Kraft angesehen werden [...].“

„Nimmt man das Element dt der Zeit als constant, so werden die genannten beschleunigenden Kräfte durch

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$$

ausgedrückt [...].“

Lebendige Kraft und Funktion T

Bei Lagrange bezeichnet die „lebendige Kraft“ zunächst die historische *vis viva*, also für einen einzelnen Körper die Größe mv^2 und für ein System deren Summe. Zugleich verwendet er später die Größe

$$T = \frac{1}{2} S mv^2$$

als die Funktion, die die lebendige Kraft des Systems ausdrückt; für heutige Leser übernimmt T damit die Rolle der kinetischen Energie.

„[...] so wird

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} m$$

die lebendige Kraft des betreffenden Körpers sein.“

”

$$S \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) m$$

gibt also die Summe der lebendigen Kräfte aller Körper oder die lebendige Kraft des ganzen Systems [...].“

$$„T = S \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} \right) m; \quad V = S \Pi m“$$

„Die Grösse T drückt die lebendige Kraft des Systems aus und ist gleich $H - V$.“

Die GröÙe V

Lagrange spricht hier nicht von einem Potential, sondern von der GröÙe V , die er aus den Integralen der Kraftmomente bildet.

„[...] falls man T und V definiert durch

$$T = S \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} \right) m; \quad V = S \Pi m$$

und Π gemäss der Beziehung

$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \dots$$

wählt.“

„Die GröÙe V ist, wenn die Kräfte nach festen Centren gerichtet sind, oder nach Körpern desselben Systems, eine einfache Function von $\xi, \psi, \varphi, \dots$ “

„Wenn die Kräfte P, Q, R etc. nach festen Punkten oder nach Körpern eben des sich bewegenden Systems streben [...], so wird die GröÙe V , welche die Summe der Momente $m \int (Pdp + Qdq + Rdr + \dots)$ für alle Körper m des Systems ausdrückt, eine algebraische Function der Entfernungen sein [...].“

Bewegungsgleichungen und Variationssätze

Allgemeine Formel der Dynamik

„Man kann also auch die ganze Dynamik auf eine allgemeine Formel bringen [...].“

$$S m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) + S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) = 0.$$

„Dies ist die allgemeine Formel der Dynamik für die Bewegung irgend eines Systems von Körpern.“

„Es ist klar, dass diese Formel von der allgemeinen [...] Formel der Statik nur durch die von den Kräften $m \frac{d^2x}{dt^2}, m \frac{d^2y}{dt^2}, m \frac{d^2z}{dt^2}$ herrührenden Glieder sich unterscheidet [...].“

Transformation auf ξ, ψ, φ

Mit dieser Transformation überführt Lagrange die allgemeine Dynamikformel von den Koordinaten- und KraftgröÙen x, y, z, p, q, r auf unabhängige Variablen ξ, ψ, φ . Die GröÙen Ξ, Ψ, Φ sind dabei die Koeffizienten der unabhängigen Variationen in der transformierten Gleichung.

„Wir wollen also annehmen, dass es sich darum handle, an die Stelle der Variablen x, y, z gegebene Functionen anderer Variablen ξ, ψ, φ etc. zu substituieren. Differentiirt man diese Functionen, so hat man Ausdrücke von der Form

$$dx = A d\xi + B d\psi + C d\varphi + \dots,$$

$$dy = A' d\xi + B' d\psi + C' d\varphi + \dots,$$

$$dz = A'' d\xi + B'' d\psi + C'' d\varphi + \dots.$$

In ähnlicher Weise sind die Werte von $\delta x, \delta y, \delta z$ auszudrücken; man hat nur d in δ zu verwandeln.“

„Durch diese Transformation geht die allgemeine Formel der Dynamik (Art. 2) über in

$$\Xi \delta \xi + \Psi \delta \psi + \Phi \delta \varphi + \dots = 0.$$

„[...] so hat man sofort die besonderen Gleichungen $\Xi = 0; \Psi = 0; \Phi = 0$ etc., und diese Gleichungen dienen dazu, die Bewegung des Systems zu bestimmen [...].“

Die GröÙe $Z = T - V$

Lagrange geht hier in zwei Schritten vor. Zuerst werden die Koeffizienten Ξ, Ψ, Φ durch T und V dargestellt und anschließend führt er $Z = T - V$ als HilfsgröÙe ein.

$$\Xi = d \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$\Psi = d \frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$\Phi = d \frac{\partial T}{\partial d\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

„Setzen wir der Einfachheit halber $d\xi = \xi' dt, d\psi = \psi' dt, d\varphi = \varphi' dt, \dots$, so wird die GröÙe T eine Function von $\xi, \psi, \varphi, \dots$ und von $\xi', \psi', \varphi', \dots$, und die GröÙe V ist, wenn die Kräfte nach festen Centren gerichtet sind, oder nach Körpern desselben Systems, eine einfache Function von $\xi, \psi, \varphi, \dots$

In diesem Falle hat man, wenn

$$Z = T - V$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi} = \frac{\partial Z}{\partial \xi' dt}, \quad \frac{\partial T}{\partial d\psi} = \frac{\partial Z}{\partial \psi' dt}, \quad \frac{\partial T}{\partial d\varphi} = \frac{\partial Z}{\partial \varphi' dt}, \dots$$

[...]“

„Die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems [...] reduciren sich also, wenn man mit dt multipliciert, auf die einfache Form“

$$d \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt = 0$$

$$d \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt = 0$$

$$d \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt = 0$$

In moderner Lesart erinnert diese GröÙe an die spätere Lagrange-Funktion.

Variation-Calcul

Der von Lagrange vorausgesetzte „Variation-Calcul“ wird hier nicht eigens entwickelt. Es wird weiterführende Literatur empfohlen. Einige Bezeichnungen und Rechenregeln führt Lagrange selbst ein:

„[...] wir wollen daher durch d künftig Differentialgrößen von der ersten Art andeuten, die mit denen analog sind, welche man gewöhnlich in der Geometrie betrachtet, die Differentialgrößen der zweiten Art aber, die dem Gegenstand, den wir hier abhandeln, eigen sind, wollen wir durch δ andeuten, welches Zeichens ich mich schon in der Variationsrechnung bedient habe, mit welcher die gegenwärtige Rechnung in innerer und notwendiger Verbindung steht.“

„Man wird also bedenken müssen, dass die Zeichen d und δ zwei Arten von unter einander völlig unabhängigen Differentialen sind [...]. Es wird also δdx dasselbe sein, wie $d\delta x$, und ähnlich wird δd^2x gleich $d^2\delta x$ sein etc.“

„Gleiches gilt von den Integrationszeichen $\int$ oder S im Verhältniss zum Zeichen der Variationen δ ; man darf immer die Symbole $\delta \int$ oder δS in $\int \delta$ oder $S \delta$ ändern.“

„Diese Vertauschbarkeit der einzelnen Operationen bildet das erste Fundamentalprinzip der Variationsrechnung.“

„Die Differentiale $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$, $d^2\delta x$ etc., die sich unter dem Zeichen S befinden, können aber durch das bekannte Verfahren der partiellen Integration fortgeschafft werden [...].“

$$\int \Omega d\delta x = \Omega \delta x - \int \delta x d\Omega; \quad \int \Omega d^2\delta x = \Omega d\delta x - d\Omega \delta x + \int \delta x d^2\Omega$$

„Bezeichnet man also mit einem Strich die Größen, die sich auf den Anfang der ganzen durch S bezeichneten Integrale beziehen, und durch zwei Striche diejenigen, die sich auf das Ende derselben beziehen, so hat man folgende Reductionen [...].“

$$S \Omega d\delta x = \Omega'' \delta x'' - \Omega' \delta x' - S \delta x d\Omega$$

$$S \Omega d^2\delta x = \Omega'' d\delta x'' - d\Omega'' \delta x'' - \Omega' d\delta x' + d\Omega' \delta x' + S \delta x d^2\Omega$$

...

„[...] welche dazu dienen, alle Differentiale der Variationen, die unter dem Zeichen S vorkommen können, verschwinden zu lassen. Diese Reductionen bilden das zweite Fundamentalprinzip der Variationsrechnung.“

Grundsatz der kleinsten Wirkung

„Nimmt man ferner noch an, dass die Variationen δx , δy , δz auch gleich Null seien für die Punkte, wo die Integrale $\int u ds$ endigen, so wird überhaupt das rechts stehende Glied verschwinden, und man hat einfach

$$\delta \left(S^m \int u ds \right) = 0$$

d. h. die Variation der Grösse $S^m \int u ds$ wird gleich Null, es wird also die Grösse $S^m \int u ds$ ein Maximum oder ein Minimum sein.“

„Bei der Bewegung irgend eines Systems von Körpern, welche durch gegenseitige Anziehungskräfte oder durch Kräfte angegriffen werden, welche nach festen Centren gerichtet und irgend welchen Functionen der Entfernungen proportional sind, sind die von den verschiedenen Körpern beschriebenen Curven und die Geschwindigkeiten notwendigerweise so beschaffen, dass die Summe der

Produkte der einzelnen Massen in die zugehörigen Integrale der mit dem Curvenelement multipliierten Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum ist, vorausgesetzt, dass man die ersten und die letzten Punkte jeder Curve als in ihrer Lage von vornherein vorgeschrieben ansieht, so dass, wie auch die Curven variieren mögen, die Variationen der diesen Punkten entsprechenden Coordinaten gleich Null sind.“

„Dies ist der Grundsatz, dem ich hier [...] den Namen der kleinsten Wirkung gebe, und den ich nicht als einen metaphysischen Grundsatz, sondern als ein einfaches und allgemeines Resultat der Gesetze der Mechanik betrachte. Dieser Grundsatz, verbunden mit dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte und nach den Regeln des Variation-Calculs entwickelt, gibt sogleich alle zur Auflösung einer Aufgabe nötigen Gleichungen [...].“

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Definitionen	
Grundbegriffe der Mechanik	vi
Statische Prinzipien und Momentbegriffe	vii
Analytische Beschreibung des Systems	viii
Dynamische Größen und Funktionen	xi
Bewegungsgleichungen und Variationssätze	xii
Vorwort - H. Servus.	1
Lagrange's Anzeige der ersten Ausgabe.	2
Lagrange's Anzeige der zweiten Ausgabe.	3
Joseph-Louis Lagrange.	7
ERSTER TEIL. STATIK	18
Abschnitt I.	
Über die verschiedenen Prinzipie der Statik.	18
Abschnitt II.	
Allgemeine Formel der Statik für das Gleichgewicht irgend eines Systems von Kräften, nebst der Methode von dieser Formel Gebrauch zu machen.	32
Abschnitt III.	
Allgemeine Eigenschaften des Gleichgewichts eines Systems von Körpern, abgeleitet aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.	43
Abschnitt IV.	
Über eine einfache und umfassendere Methode, von der allgemeinen Bedingungs- gleichung des Gleichgewichts Gebrauch zu machen.	63
Abschnitt V.	
Lösung verschiedener Probleme der Statik.	84
CAPITEL I. Über das Gleichgewicht mehrerer Kräfte, die an demselben Punkte angreifen. Über die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften.	84
CAPITEL II. Vom Gleichgewicht mehrerer an einem System von Körpern, die als Punkte betrachtet werden und durch Fäden oder Stäbe mit einander verbunden sind, wirkenden Kräfte.	91
CAPITEL III. Vom Gleichgewicht eines Fadens, dessen sämtliche Punkte durch irgend welche Kräfte gezogen werden, und der als biegsam oder unbiegsam, oder elastisch und zu gleicher Zeit als dehnbar oder undehnbar angesehen wird. . . .	105
CAPITEL IV. Vom Gleichgewicht eines festen Körpers von messbarer Grösse und beliebiger Gestalt, dessen sämtliche Punkte durch irgend welche Kräfte angegrif- fen werden.	128

Abschnitt VI.

Prinzipien der Hydrostatik. 133

Abschnitt VII.

Vom Gleichgewicht incompressibler Flüssigkeiten. 138

Abschnitt VIII.

Vom Gleichgewicht compressibler und elastischer Flüssigkeiten. 158

ZWEITER TEIL. DYNAMIK

164

Abschnitt I.

Über die verschiedenen Prinzipien der Dynamik. 164

Abschnitt II.

Allgemeine Formel der Dynamik für die Bewegung eines Systems von Körpern, welches durch irgendwelche Kräfte angetrieben wird. 178

Abschnitt III.

Allgemeine aus der Bewegungsgleichung abgeleitete Eigenschaften der Bewegung. . . 184

Abschnitt IV.

Differentialgleichungen für die Lösung aller Probleme der Dynamik. 214

Abschnitt V.

Allgemeine Annäherungsmethode für die Auflösung von Problemen der Dynamik, begründet auf die Variation arbiträrer Constanten. 226

Abschnitt VI.

Über sehr kleine Oscillationen eines Systems von Körpern. 242

Abschnitt VII.

Die Bewegung eines Systems von freien Körpern, die als Punkte gedacht werden, und durch Attractionskräfte bewegt werden. 290

CAPITEL I. Über die Bewegung eines als Punkt gedachten Körpers, der durch Kräfte, die einer Function der Entfernung proportional sind, nach einem festen Centrum hin gezogen wird, und insbesondere über die Bewegung der Planeten und Cometen um die Sonne. 291

CAPITEL II. Über die Variation der Elemente elliptischer Bahnen, welche durch eine Impulsionskraft oder durch beschleunigende Kräfte hervorgerufen wird. . . 332

CAPITEL III. Über die Bewegung eines Körpers, der durch Kräfte, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen sind, gegen zwei feste Centren gezogen wird. 358

CAPITEL IV. Über die Bewegung zweier oder mehrerer freier Körper, die sich gegenseitig anziehen, und besonders über die Bewegung der Planeten um die Sonne und über die säkularen Störungen ihrer Elemente. 366

Abschnitt VIII.	
Über die Bewegung unfreier Körper, die auf eine beliebige Weise auf einander wirken.	404
CAPITEL I. Allgemeine Formeln für die Variation der willkürlichen Constanten bei der Bewegung eines beliebigen Systems von Körpern, die durch endliche und momentane, oder durch unendlich kleine und continuierliche Impulse erzeugt wird.	406
CAPITEL II. Über die Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Fläche oder Linie.	411
Abschnitt IX.	
Über die Rotationsbewegung.	427
CAPITEL I. Über die Rotation eines beliebigen Systems von Körpern.	427
Abschnitt X.	
Über die Prinzipie der Hydrodynamik.	471
Abschnitt XI.	
Über die Bewegung incompressibler Flüssigkeiten.	476
Abschnitt XII.	
Über die Bewegung compressibler und elastischer Flüssigkeiten.	511
FRAGMENTE.	524
I.	
Über die Bestimmung der Kometenbahnen.	524
II.	
Über die Rotationsbewegung.	526
III.	
Fragment über die allgemeinen Gleichungen der Rotationsbewegung eines beliebigen Systems.	531
IV.	
Anderes Fragment über die Rotation irgend eines Systems.	533

Vorwort - H. Servus.

Die Analytische Mechanik von Lagrange ist unstreitig ein Werk ersten Ranges, welches wohl im Besitze aller Mathematiker und Physiker sein sollte, das aber, da im Original vergriffen, doch nur selten in Privatbibliotheken zu finden ist. Um dieses **Fundamentalwerk** nun den Studirenden zugänglich zu machen, habe ich mich entschlossen, eine deutsche Ausgabe erscheinen zu lassen, mit welcher hoffentlich einem wirklichen Bedürfnisse entsprochen wird.

Die erste Auflage des französischen Originals erschien in einem Bande im Jahre 1788. Eine zweite Auflage gelangte in den Jahren 1811 bis 1815 zur Ausgabe, doch konnten nur der erste Band und die Hälfte des zweiten Bandes von Lagrange selbst herausgegeben werden, da der Tod diesen Forscher am 10. April 1813 nach kurzer Krankheit seinem Wirken entriss. Prony, Garnier und Lacroix übernahmen die Vollendung des zweiten Bandes; eine dritte, von Bertrand veranstaltete und mit Anmerkungen versehene Ausgabe erschien 1853—1855.

Der vorliegenden deutschen Ausgabe ist die zweite Original-Ausgabe dieses Werkes zu Grunde gelegt. Ich habe die Eigentümlichkeiten des Originals durch möglichst wortgetreue Übertragung zu wahren gesucht, ohne dass die Klarheit des Ausdrucks dadurch beeinträchtigt sein dürfte.

Die Herren Privatdocent Dr. B. Weinstein und Dr. L. Levy haben das Manuskript einer Durchsicht unterzogen und mich bei der Erledigung der Korrekturen unterstützt; von ihnen rühren auch einzelne, das Verständnis erleichternde Erweiterungen und Noten her. Ich habe für diese Hülfe, welche es ermöglichte, dem genialen und sehr schwierigen Werke gerecht zu werden, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

So hoffe ich denn, dass das vorliegende Werk in jeder Weise korrekt ausgefallen ist und die Anerkennung aller Leser findet.

Charlottenburg, im August 1887.

Dr. H. Servus.

Lagrange's Anzeige der ersten Ausgabe.

Es giebt bereits mehrere Werke über Mechanik, aber der Plan dieses Werkes ist gänzlich neu. Ich habe mir vorgenommen, die Theorie der Mechanik und die Kunst, die darauf sich beziehenden Probleme zu lösen, auf allgemeine Formeln zurückzuführen, deren einfache Entwicklung alle für die Lösung jedes Problems notwendigen Gleichungen ergibt. Ich hoffe, dass die Art, wie ich dies zu erfüllen bestrebt gewesen bin, nichts zu wünschen übrig lassen wird.

Dieses Werk wird übrigens noch einen anderen Nutzen haben, es wird, um die Lösung der mechanischen Fragen zu erleichtern, die verschiedenen Prinzipien vereinigen und unter einen Gesichtspunkt stellen, und es wird die gegenseitige Verbindung und Abhängigkeit derselben sowie ihre Richtigkeit und Ausdehnung zeigen. Ich teile es in zwei Teile: Die Statik, oder Theorie des Gleichgewichts, und die Dynamik, oder Theorie der Bewegung; jeder dieser Teile wird getrennt über die festen und flüssigen Körper handeln.

Man wird in diesem Werke keine geometrischen Figuren finden. Die Methoden, welche ich auseinandersetze, erfordern weder Constructionen, noch geometrische oder mechanische Betrachtungen, sondern nur algebraische, einem regelmässigen und gleichförmigen Gange unterworfenen Operationen. Alle, welche die Analyse lieben, werden mit Vergnügen sehen, dass die Mechanik ein neuer Zweig derselben wird, und werden mir Dank wissen, dass ich die Herrschaft derselben in dieser Weise ausgedehnt habe.

Lagrange's Anzeige der zweiten Ausgabe.

Es giebt bereits mehrere Werke über Mechanik, aber der Plan des vorliegenden ist gänzlich neu. Ich habe mir vorgenommen, die Theorie der Mechanik und die Kunst, die darauf sich beziehenden Probleme zu lösen, allein auf allgemeine Formeln zu bringen, deren einfache Entwicklung alle für die Lösung jedes Problems nötigen Gleichungen liefert.

Dieses Werk wird übrigens noch einen anderen Nutzen haben; es wird, um die Lösung mechanischer Probleme zu erleichtern, die verschiedenen Prinzipie vereinigen und unter einen Gesichtspunkt stellen, und es wird die gegenseitige Verbindung und Abhängigkeit derselben, sowie ihre Richtigkeit und Ausdehnung zeigen.

Ich theile es in zwei Theile: Die Statik, oder Theorie des Gleichgewichts, und die Dynamik, oder Theorie der Bewegung, und in jedem dieser Theile behandle ich getrennt die festen und flüssigen Körper.

Man wird in diesem Werke keine geometrischen Figuren finden. Die Methoden, die ich auseinandersetze, erfordern weder Constructionen noch geometrische oder mechanische Betrachtungen, sondern allein algebraische, einem regelmässigen und gleichförmigen Gange unterworfenen Operationen. Alle, welche die Analyse lieben, werden mit Vergnügen sehen, dass die Mechanik ein neuer Zweig derselben wird, und werden mir Dank wissen, dass ich die Herrschaft derselben in dieser Weise ausgedehnt habe.

Dies ist der Plan, den ich in der ersten Auflage dieses Werkes von 1788 auszuführen versucht habe. Die vorliegende neue Ausgabe ist in mehreren Hinsichten ein neues Werk auf demselben, aber erweiterten Plan. Wir haben den Prinzipien und allgemeinen Formeln mehr Entwicklung und den Anwendungen eine größere Ausdehnung gegeben, weil in ihnen die Lösung der Hauptprobleme, die in das Gebiet der Mechanik gehören, enthalten ist.

Wir haben die gewöhnliche Bezeichnung der Differentialrechnung beibehalten, weil sie dem System der unendlich kleinen Grössen entspricht, das in diesem Werke angenommen ist. Wenn man den Geist dieses Systems recht begriffen hat, und wenn man sich von der Genauigkeit seiner Resultate durch die geometrische Methode der ersten und letzten Gründe, oder durch die analytische Methode der derivierten Functionen überzeugt hat, so kann man die unendlich kleinen Grössen als ein sicheres und bequemes Mittel anwenden, um die Beweise abzukürzen und zu vereinfachen. In gleicher Art kürzt man die Beweise der Alten durch die Methode der unteilbaren Grössen ab.

Wir wollen nun die hauptsächlichsten Vermehrungen mittheilen, welche diese Ausgabe von der vorigen unterscheiden.

Der erste Abschnitt des ersten Theils enthält eine vollständigere Analyse der drei Prinzipie der Statik mit neuen Bemerkungen über die Natur und den Zusammenhang dieser Prinzipie; er endigt mit einem directen und von den beiden andern Prinzipien gänzlich unabhängigen Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Im zweiten Abschnitt haben wir auf eine strengere Weise gezeigt, dass das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine beliebige Zahl von im Gleichgewicht befindlichen Kräften aus dem Fall abgeleitet werden kann, wo nur zwei Kräfte vorhanden sind, wodurch das Prinzip direct auf dasjenige des Hebels zurückgeführt ist; wir bringen die Gleichungen, welche aus diesem Prinzipie folgen, auf eine allgemeinere Form, und geben die Bedingungen an, welche nötig sind, damit ein System von Kräften einem andern System von Kräften gleichwertig sei und an die Stelle desselben treten könne.

Im dritten Abschnitt stellen wir auf eine directere Weise die Formeln der momentanen Rotationsbe-

wegungen und ihrer Zusammensetzung auf, und leiten daraus die Theorie der Momente und ihrer Zusammensetzung ab; wir setzen eine wenig bekannte Eigenschaft des Schwerpunktes auseinander und geben einen neuen Beweis für die Maxima und Minima, welche beim Gleichgewichtszustand stattfinden.

Der vierte Abschnitt enthält allgemeinere und einfachere Formeln für die Lösung der Probleme, welche von der Methode der Variationen abhängen, und aus der Vergleichung dieser Formeln mit denen des Gleichgewichts der Körper von veränderlicher Gestalt zeigen wir, wie die auf ihr Gleichgewicht bezüglichen Probleme zu der Classe derjenigen gehören, die unter dem Namen des allgemeinen isoperimetrischen Problems bekannt sind, und lösen sie auf dieselbe Weise auf.

Der fünfte Abschnitt bietet einige neue Probleme und wichtige Bemerkungen über einige schon in der ersten Ausgabe gegebene Lösungen.

Im sechsten Abschnitt haben wir einige auf die historische Analyse der Prinzipie der Hydrodynamik bezügliche Einzelheiten hinzugefügt.

Im siebenten Abschnitt haben wir der Berechnung der Variationen von Flüssigkeitsmolekülen mehr Strenge und Allgemeinheit gegeben und die Analyse der Glieder, welche sich auf die Grenzen der Flüssigkeitsmasse beziehen, einfacher gemacht; aus diesen Gliedern haben wir die Theorie der Wirkung von Flüssigkeiten auf feste Körper, welche sie bedecken, oder auf die Wände der Gefässe, in denen sie eingeschlossen sind, abgeleitet und daraus einen directen Beweis des Problems hergeleitet, dass beim Gleichgewicht eines festen Körpers der mit einer Flüssigkeit bedeckt ist, die Kräfte, welche auf den festen Körper wirken, dieselben sind, als wenn die Flüssigkeit nur eine einzige Masse mit dem festen Körper bildet. Wir haben auch sowohl in diesem, als im folgenden Abschnitt, welcher vom Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten handelt, einige Anwendungen der allgemeinen Formeln des Gleichgewichts der Flüssigkeiten hinzugefügt.

Der zweite Teil, welcher die Dynamik enthält, hat eine grössere Zahl von Vermehrungen erhalten.

Im ersten Abschnitt haben wir eine vollständigere und in einzelnen Punkten genauere historische Analyse der Prinzipie der Dynamik gegeben.

Im zweiten Abschnitt geben wir einen wichtigen Zusatz, worin wir zeigen, in welchen Fällen die allgemeine Formel der Dynamik, folglich auch die Gleichungen, welche daraus für die Bewegung eines Systems von Körpern folgen, von der Lage der Coordinatenachsen im Raume unabhängig sind, woraus sich das Mittel ergibt, eine Lösung, in welcher man einige Constanten gleich Null gesetzt hat, durch Einführung dreier neuer willkürlicher Constanten zu vervollständigen.

Im dritten Abschnitt haben wir den Eigenschaften, welche sich auf die Bewegung des Schwerpunktes und auf die durch ein System von Körpern beschriebenen Flächen beziehen, mehr Ausdehnung gegeben; wir haben die Theorie der Hauptaxen oder der gleichförmigen Rotation hinzugefügt, welche aus der Betrachtung der momentanen Rotationsbewegungen durch eine von derjenigen verschiedene Analyse hergeleitet ist, die man sonst dafür anwendete; wir beweisen ferner einige neue Theoreme über die Rotation eines festen Körpers oder eines Systems von Körpern, wenn dieselbe von einem ursprünglichen Anstoss abhängt.

Der vierte Abschnitt ist fast derselbe wie in der ersten Ausgabe geblieben.

Der fünfte Abschnitt aber ist ganz neu; er enthält die Theorie der Variation willkürlicher Constanten, welche Gegenstand dreier Abhandlungen gewesen ist, die unter den „Mémoires de la première classe de l'Institut“ 1808 gedruckt sind; diese Theorie aber ist hier auf eine einfachere Weise und als allgemeine Annäherungsmethode für alle mechanischen Probleme dargestellt, wenn im Verhältniss zu den Hauptkräften nur wenig beträchtliche störende Kräfte vorhanden sind.

Wir bemerken hier, dass, um dieser Theorie die ganze Ausdehnung zu geben, deren sie fähig ist, die Function V , welche von den Hauptkräften abhängt, nur eine ganze Function der einzigen unabhängigen Variabeln ξ, ψ, φ etc. und der Zeit t sein kann, dass aber die mit Ω bezeichnete Function,

welche von den störenden Kräften abhängt, nicht von derselben Natur zu sein braucht. Wie diese Kräfte auch beschaffen sein mögen, so braucht man doch nur, wenn man sie für jeden Körper m des Systems in die drei Kräfte X, Y, Z in Richtung der Coordinaten x, y, z zerlegt, welche diese Coordinaten zu vergrössern streben, diese Coordinaten als Functionen der unabhängigen Variablen ξ, ψ, φ etc. darzustellen; man kann dann an die Stelle der partiellen Differentiale $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}$ etc. die respectiven Summen

$$Sm \left(X \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right),$$

$$Sm \left(X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right), \dots$$

und folglich für $\Delta \Omega$ die Grösse

$$Sm(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)$$

setzen, wo Δ eine die willkürlichen Constanten betreffende Variation bedeutet, so dass man $\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}$ in

$$Sm \left(X \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)$$

verwandeln kann. Aehnliche Ausdrücke erhält man für die andern partiellen Differentiale von Ω . Auf diese Weise wird die Methode auch auf störende Kräfte, welche durch beliebige Variable dargestellt sind, anwendbar gemacht.

Der sechste Abschnitt endlich, welcher der letzte dieses Bandes ist, und welcher dem ersten Paragraphen des fünften Abschnittes der vorigen Ausgabe entspricht, ist um verschiedene Bemerkungen und besonders um die Lösung einiger Probleme über die sehr kleinen Oscillationen der Körper vermehrt; er schliesst mit der Theorie schwingender Saiten, welche ich im ersten Bande der *Mémoires de Turin* gegeben habe, und welche hier auf eine einfache Weise und mit Beachtung der Einwendungen, welche d'Alembert gegen diese Theorie im ersten Bande seiner *Opuscules* gemacht hat, dargestellt ist.

Über die Veröffentlichung des zweiten Bandes in der zweiten Ausgabe der Analytischen Mechanik.

(Von den französischen Herausgebern des zweiten Bandes.)

Die Veröffentlichung des zweiten Bandes der Analytischen Mechanik hat eine Verzögerung erlitten, deren Hauptgründe wir hier angeben wollen. Lagrange hatte bereits einige Blätter davon drucken lassen, als der Tod ihn der Wissenschaft entriss. Prony übernahm die Herausgabe dieses Bandes, wobei er in der Revision durch den Professor Garnier von der königl. Militärschule unterstützt wurde. Das Manuskript der Abschnitte VII und VIII fand sich geordnet vor, aber bei dem Abschnitt IX zeigte es sich, dass er unvollständig und nur der erste Paragraph davon vollendet war. Binet, Prony und Lacroix übernahmen es dann unter den Papieren Lagrange's nachzusuchen, ob man diesen nicht vielleicht Stoff entnehmen könnte, um diesen Abschnitt zu vervollständigen. Ihre Untersuchungen führten zu der Überzeugung, dass der berühmte Autor diesen Teil nur vorbereitet hatte, und dass nichts völlig Vollendetes mehr vorhanden war.

Zahlreiche anderweitige Beschäftigungen verhinderten jedoch bald Prony, den Druck zu überwachen, der besonders in Abschnitt IX eine grosse Aufmerksamkeit erforderte, wo es sich darum handelte, den Stoff und die Bezeichnungsweisen der alten Ausgabe mit denen der neuen Ausgabe in Übereinstimmung zu bringen. Binet unterzog sich deshalb dieser oft sehr schwierigen Arbeit. Dabei wurden alle Randbemerkungen in dem Lagrange'schen Exemplar, die er selbst geschrieben hatte, benutzt. Einzelne auf die Rotationsbewegung sich beziehende Notizen konnten in den Text nicht

mit aufgenommen werden, da sie zu unvollständig waren; sie wurden deshalb als Fragmente an das Ende des Bandes gestellt.

Unter den Fragmenten findet sich noch eine Notiz, die sich ebenfalls unter den Manuskripten vorfand, und die sich auf die Bahnbestimmung der Kometen bezieht, welches Problem im Abschnitt VII, § 3 behandelt worden war.

Joseph-Louis Lagrange.

Joseph-Louis comte de Lagrange wurde am 25. Januar 1736 zu Turin geboren; er war der Sohn von Joseph-Louis Lagrange und Maria Theresia Grass, einzigen Tochter eines reichen Arztes in Cambiano. Sein Vater hatte das Amt eines Kriegsschatzmeisters inne und war, da er eine sehr vorteilhafte Heirat gemacht hatte, reich; allein in Folge von unglücklichen Speculationen verarmte er später. Unser Lagrange war das jüngste Kind einer zahlreichen mittellosen Familie und deshalb darauf angewiesen, sich sobald als möglich eine selbständige Stellung zu verschaffen und seinen Lebensunterhalt aus eigenen Kräften zu erwerben. Er selbst betrachtete dies später als sein besonderes Glück und sagte eines Tages: „Wenn ich Vermögen gehabt hätte, so hätte ich mich wahrscheinlich nicht der Mathematik gewidmet.“ Für die Mathematik interessierte er sich anfangs gar nicht; Cicero und Virgil und das Studium der Alten zogen ihn an, erst das Studium einer Abhandlung von Halley in den *Philosophical Transactions* vom Jahre 1693: *On the superiority of modern algebra in determining the foci of object-glasses* führte ihn der Mathematik zu und zeigte ihm seine wirkliche Bestimmung. Er widmete von nun an der Mathematik seine ganzen Kräfte, und mit ausserordentlicher Energie brachte er es bald dahin, dass er im Alter von 16 Jahren (andere sagen 15 oder 19 Jahren) zum Professor der Mathematik an der Königlichen Artillerieschule zu Turin ernannt wurde, trotzdem er jünger als alle seine Schüler war. Trotz seiner grossen Jugend folgten seine Schüler dennoch seinen Vorlesungen mit der grössten Aufmerksamkeit, und er selbst schloss mit einigen derselben enge Freundschaften. Aus dieser Vereinigung bildete sich die Akademie zu Turin. Allein das angestrengte Denken hatte bald seiner Gesundheit in erheblicher Weise geschadet; er arbeitete beständig mit dem Kopfe und durchdachte seine Werke derartig, dass er sie bei der Abfassung ohne jede Correctur niederschrieb. Diese Geistesanstrengung in seiner Jugend versetzte ihn oft in eine Art fieberhafter Aufregung, und seit jener Zeit behielt er einen unregelmässigen und anomalen Pulsschlag bis an sein Ende. Im Jahre 1759 erschien der erste Band der Denkschriften der Turiner Akademie unter dem Titel: *Actes de la Société privée*. Lagrange war einstimmig zum Direktor der physikalisch-mathematischen Sektion dieser Akademie erwählt worden, und der genannte erste Band enthält hauptsächlich seine Arbeiten. Nachdem er neue Methoden zur Berechnung der Maxima und Minima jeder Art angegeben und die Unzulänglichkeit der bekannten Formeln dargelegt hatte, zeigt er die Fortsetzung in einem besonderen Werke an, in dem er aus denselben Prinzipien die ganze Mechanik fester und flüssiger Körper herleiten will. Im Alter von 23 Jahren hatte er also bereits die Grundlage zu den grossen Werken gelegt, welche später die allgemeinste Bewunderung erregten.

In demselben Bande führt er die Theorie der recurrenten Reihen und die Lehre vom Zufall auf die Differentialrechnung zurück, er zeigt ferner, dass die Prinzipien, welche Newton bei seinen Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles zu Grunde legt, ungenügend und falsch sind, und er gründet seine neuen Untersuchungen auf die bekannten Gesetze der Dynamik. Das ganze Problem führt er auf dasjenige der schwingenden Saiten zurück, indem er in der Luft nur diejenigen Teilchen betrachtet, welche in gerader Linie liegen. Die Rechnungen, welche bis dahin die grössten Geometer über das Problem schwingender Saiten angestellt hatten, weist er als ungenügend nach, um diese Frage zu entscheiden und unternimmt selbst eine allgemeine Lösung auf Grundlage einer neuen und höchst interessanten Analyse, vermöge deren er zugleich eine unbestimmte Anzahl von Gleichungen zu lösen vermag, und welche sich sogar auf discontinuierliche Functionen ausdehnen lässt. Es würde uns hier zu weit führen, alles anzugeben, was in diesen Abhandlungen Neues vorhanden ist, und er selbst bezeichnet es als sein Ziel, die Vorurteile derer zu zerstören, welche daran zweifeln, dass die Mathematik im Stande sei, Licht in physikalische Fragen zu bringen.

So stellt sich Lagrange mit einem Schlage in die Reihe der grossen Geometer Newton, Taylor, Bernoulli, d'Alembert und Euler, er ist ihnen ebenbürtig geworden, und zeigt ihnen an dem schwierigen Problem der schwingenden Saiten, worin sie sich geirrt hatten und giebt selbst die wirkliche Lösung des Problems, welche jene nicht finden konnten. So fest begründet seine Rechnungen auch waren und so weit sie auch alle bis dahin behandelten Fragen lösten, so verhehlte sich Lagrange doch nicht, dass sie noch nicht hinreichend waren, um alle einschlägigen Probleme zu lösen, und dass man bei den Blaseinstrumenten nicht die Annahme machen könne, dass die Luft in gerade Linien geteilt sei.

Nach der Entdeckung seiner Methode der Maxima und Minima zeigten sich im Alter von 25 Jahren Symptome von Schwermut und eines Gallenleidens. Man weiss ja, dass diese Art von Leiden bei Männern von viel sitzender und denkender Lebensweise vielfach vorkommt; Lagrange wurde nervös und melancholisch und dazu trug wohl zum grössten Teil das damals beliebte Aderlassen die Schuld, zu dem man bei den schon erwähnten Fieberanfällen seiner Jugend häufig griff; 29 Mal liess man ihn in seinem Leben zur Ader, und es ist klar, dass dies seine Constitution schwächen musste. Lagrange beschäftigte sich sogar mit der Medizin, er stellte Untersuchungen über die Organisation, über die Natur der Gifte und verschiedener schädlichen Substanzen an. So hatte er sich eine eigene Meinung über die Physiologie gebildet und glaubte, dass die Melancholie hauptsächlich aus der Oberherrschaft des Nervensystems über das Arteriensystem herrühre. Fortgesetzte körperliche Übungen, die Unterbrechung seiner geistigen Arbeit und vor allem seine Jugend stellten bald seine unterbrochene Gesundheit wieder her. Er machte Gebrauch von Pflanzensäuren, z. B. Citronensäure, und von den Früchten und Gemüsen des Sommers, wie er überhaupt die Pflanzenkost der Fleischkost beständig vorzog, und diese Gewohnheit trug nicht wenig dazu bei, ihm die Gesundheit des Körpers und den natürlichen Frieden seiner Seele wieder zu geben.

Seine ersten Entdeckungen brachten ihn schon in Beziehung zu d'Alembert und Euler, welche mit ihm als mit ihresgleichen correspondirten. Im Jahre 1764 gewann der 28 jährige Lagrange den grossen mathematischen Preis der Pariser Akademie für seine Theorie der Libration des Mondes.

Als Euler, obgleich mit grosser Mühe, von Friedrich dem Grossen die Erlaubnis erhielt, an die Akademie von Petersburg zurückzukehren, und dadurch die Stelle eines Directors der Berliner Akademie frei wurde, berief der König d'Alembert auf diesen Posten. Dieser aber, welcher in Frankreich in den Wissenschaften einen ausserordentlichen Einfluss besass, den er in Preussen hätte aufgeben müssen, schlug das Anerbieten des Königs aus, empfahl ihm aber Lagrange, dessen Ruhm schon durch ganz Europa gegangen war. So wurde denn im Jahre 1766 Lagrange nach Berlin berufen mit einem jährlichen Gehalte von 1500 Thalern; am 26. November 1766 nahm er Besitz von seiner Stellung. Friedrich der Grosse achtete ihn hoch und Lagrange sagte später selbst einmal: „Der König behandelte mich mit Wohlwollen, ich glaube, dass er mich Euler vorzog, welcher ein wenig devot war, während ich mich von jeder Discussion über Religion fern hielt und so mit Niemandem darüber in Streit geriet.“ Lagrange's Ruhm wurde immer grösser und die Gesandten verschiedener Staaten, besonders die von Neapel und Spanien, machten ihm die verlockendsten Anerbieten; sie wollten diesen grossen Mann an ihr Land ketten (1773), allein Lagrange schlug alle Anerbieten aus und verblieb auf seinem Posten, auf dem er sich die Hochachtung und Liebe der Deutschen im höchsten Masse erworben hatte. Eine grosse Anzahl der tiefsten und gelehrtesten mathematischen Abhandlungen füllen die „Abhandlungen der Berliner Akademie“ und sind eine Zierde derselben geworden.

Das Klima von Preussen sagte ihm aber weniger zu als dasjenige von Italien; vom Genuss des Weines, den er stets mit der grössten Mässigkeit trank, kam er jetzt ganz ab und zog das Bier vor, welches ihm dienlicher war. Er verheirathete sich auch in jener Zeit mit seiner Cousine, vielleicht weil er hoffte, durch diese Verbindung aller häuslichen Sorgen ledig zu werden, die er denn auch mit vollstem Vertrauen seiner Gattin überliess. Allein diese wurde bald von einer langen und grausamen Krankheit befallen, und Lagrange vergass seine geometrischen Studien, um sich nur mit der Pflege seiner Gattin zu beschäftigen. Er selbst nahm alle seine medicinischen Kenntnisse zusammen und griff zu

neuen Heilmitteln, um seine Gattin dem Tode zu entreissen, jedoch vergebens. Sie starb ohne ihm Kinder zu hinterlassen und eine lange Zeit blieb Lagrange Wittwer.

Der Tod Friedrichs des Grossen rief aber dann grosse Veränderungen in Preussen hervor; die Gelehrten fanden nicht mehr dieselbe Beachtung wie früher. Lagrange blieb noch einige Zeit nach dem Tode des Königs in Berlin; als er aber bei den damaligen Machthabern, besonders bei dem allgewaltigen Minister Hertzberg nicht mehr die zuvorkommende Behandlung erfuhr, welche ihm während der Lebenszeit des grossen Königs zu Teil geworden war, legte er sein Amt nieder, um nach Frankreich zurückzukehren. Sehr schwer nur willigte der König darein, diesen grossen Gelehrten zu entlassen, endlich aber erhielt er die Erlaubnis unter dem Versprechen, dass er noch mehrere Abhandlungen für die Berliner Akademie schreiben wollte. Lagrange hat sein Versprechen gehalten und die Bände von 1792, 1793 und 1803 enthalten wertvolle Abhandlungen von ihm.

Im Jahre 1787 siedelte Lagrange nach Paris über und wurde von der Königin Marie-Antoinette mit Wohlwollen aufgenommen; sie betrachtete ihn als einen Deutschen, der ihr von Wien aus empfohlen worden war. Er erhielt eine freie Wohnung im Louvre und lebte hier glücklich bis zur Revolution. Man war glücklich in Paris, diesen Gelehrten jetzt zu besitzen.

Lagrange war gesprächig und liebenswürdig, wenn man ihn um etwas fragte, dagegen drängte er sich nie vor, um zu sprechen, er erschien zerstreut und melancholisch. In den Versammlungen, die wöchentlich bei Lavoisier stattfanden, und bei denen sich die hervorragendsten Gelehrten des ganzen Landes zusammenfanden, konnte man ihn gleichgültig ein Fenster oder andere Dinge betrachten sehen, ohne auf das, was um ihn her gesprochen wurde, zu hören. Er selbst gestand dann, dass er jeden Geschmack an mathematischen Untersuchungen nun verloren habe.

Die schönen Experimente des unglücklichen Lavoisier scheinen sein ganzes Interesse in Anspruch genommen zu haben, denn er widmete sich jetzt der Chemie; seit seiner Jugend schon hatte er sich mit der Physik beschäftigt, jetzt aber beschäftigte er sich auch in aller Stille mit anderen Wissenschaften. Er stellte tiefsinnige Untersuchungen über die verschiedenen Religionen und über die Metaphysik an, obgleich es nie seine Absicht gewesen ist, darüber etwas zu veröffentlichen. Er besass ausserordentliche physikalische und litterarische Kenntnisse und liebte die Musik und Botanik. Einst untersuchte er auch, warum die Jugendzeit um so viel schöner sei als das Alter und kam mit Montaigne zu dem Schluss, dass im Alter der Geist, ebenso wie der Körper, Runzeln erhält und sich mit Systemen und Vorurteilen belastet, die die Jugend nicht kennt.

Am 31. Mai 1792 verheirathete er sich wieder mit einer Tochter des berühmten Astronomen Lemonnier, welche noch in der Blüte der Jugend stand, als er bereits 56 Jahre zählte. Sie sorgte für ihn auf das zärtlichste, und die Hingebung, mit der sie ihn während seiner Krankheit pflegte, verbindet ihren Namen unzertrennlich mit dem seinigen. Er selbst gab ihr einst öffentlich das Zeugnis, dass, wenn es ihm schwer werde aus diesem Leben zu scheiden, so rühre es nur daher, dass er sich von so viel Tugenden und Güte trennen müsse, die ihm sein Leben köstlich machten. Vor ihr hatte er keine Geheimnisse, die zartesten Interessen vertraute er ihr voll und ganz, und mit hingebendster Treue und Liebe lohnte sie ihm dafür.

In dieser Zurückgezogenheit lebte er bis zum Ausbruch der Revolution, ohne auch nur das geringste zu seinen mathematischen Entdeckungen hinzuzufügen, ja ohne auch nur einmal seine „Analytische Mechanik“ aufgeschlagen zu haben, welche schon zwei Jahre vorher erschienen war.

Während der Revolution enthielt er sich jeder politischen Aeusserung und überstand so glücklich jene schwere Zeit. Als man ihm nach der Hinrichtung Lavoisier's riet, Frankreich zu verlassen, konnte er sich dazu nicht entschliessen, sondern setzte sich lieber der Gefahr aus, das Schicksal Lavoisier's zu teilen. Im Jahre 1792 wurde er in die Münzcommission und dann in jene Commission gewählt, welche zur Festsetzung eines neuen Maasssystemes bestimmt worden war. Nach der Unterdrückung der Akademie wurde jene Commission noch eine Zeitlang bestehen gelassen, dann aber einer Reinigung unterworfen und Lagrange beibehalten. Später wurde er zum Professor an der „École Norma-

le“ ernannt, als diese aber nach kurzer Zeit zu bestehen aufhörte, ging er in gleicher Eigenschaft an die neu begründete „École Polytechnique“ über. Er hielt hier Vorlesungen über die Mathematik und veröffentlichte im Journal jener Schule mehrere mathematische Schriften, so die „Theorie der analytischen Functionen“ 1797, eine Abhandlung über die Auflösung von numerischen Gleichungen 1798 etc. Napoléon, welcher ihn die „haute pyramide des sciences mathématiques“ nannte, überhäufte ihn mit Ehrenbezeugungen; er machte ihn zum Senator, erhob ihn in den Grafenstand und ernannte ihn dann zum Gross-Offizier der Ehrenlegion.

Über seine Vorlesungen an der École Polytechnique sagt Lacroix: „Alle diejenigen, denen es vergönnt war, seinen interessanten Lectionen zu folgen, haben mit Vergnügen bemerkt, wie er unter den Augen der Zuhörer fast alle Theile seiner Theorie erst erschuf.“

In diese Zeit fallen auch die Vorarbeiten für die zweite Ausgabe seiner **Analytischen Mechanik**. Sein Plan war, die gebräuchlichsten Theile derselben weiter zu entwickeln. Er arbeitete daran mit dem ganzen Eifer und der ganzen Kraft seines Geistes. Diese Anstrengung brachte aber eine Geistesabmattung hervor, die ihn mehrfach einer Ohnmacht nahe brachte. Eines Tages fand ihn seine Gattin im Zustande der Ohnmacht auf der Erde liegen, sein Kopf war beim Fallen auf die Ecke eines Gegenstandes geschlagen und dieser Schlag hatte ihn seiner Sinne beraubt. Dies Ereignis zwang ihn, sich mehr zu schonen, doch lag ihm die Vollendung seines Werkes zu sehr am Herzen; der erste Band erschien einige Zeit vor seinem Tode, der zweite erst im Jahre 1815 nach seinem Tode. Kurz nach dem ersten Bande der Mechanik erschien ferner eine neue Ausgabe seiner Analytischen Functionen, und es ist klar, dass eine solche Fülle von Arbeiten seine Kräfte aufzehren musste. Gegen Ende März stellte sich das Fieber wieder ein, der Appetit war fort und der Schlaf unruhig. Er merkte wohl die Gefahr, die ihm jetzt drohte, aber mit seiner unzerstörbaren Heiterkeit studierte er selbst alles, was in ihm vorging. Als am Morgen des 8. April Lacépède und Monge und Chaptal ihn besuchten, sagte Lagrange zu ihnen: „Ich habe mich vorgestern sehr schlecht befunden, meine Freunde, ich fühlte mich dem Tode nahe; die Kräfte meines Körpers schwanden mehr und mehr und meine geistigen und physischen Kräfte erloschen allmählich. Mit Vergnügen beobachtete ich das stufenweise Verschwinden meiner Kräfte und ich war ohne Schmerz und ohne Bedauern am Ende angelangt. O! der Tod ist nicht zu fürchten, und wenn er ohne Schmerz kommt, so ist er nur eine letzte Function, die weder peinlich noch unangenehm ist.“

Ein weiteres Zeugnis für die schon erwähnte Hingebung seiner Gattin gab er denselben Freunden in folgenden Worten: „Ich wollte sterben, ja ich wollte sterben und fand Vergnügen daran, aber meine Frau wollte es nicht. In diesen Momenten hätte ich lieber eine weniger gute Frau gehabt, die weniger dafür besorgt gewesen wäre, meine Kräfte wieder herzustellen, und die mich mein Leben hätte sanft beschliessen lassen. Meine Laufbahn ist vollendet, ich habe einige Berühmtheit in den mathematischen Wissenschaften erlangt, ich habe Niemanden gehasst, nichts Übles gethan und muss mein Leben enden; doch meine Frau hat es nicht so gewollt.“

Lagrange behielt bis an sein Ende sein grosses Gedächtnis und seine Fähigkeit zu arbeiten; seine Sinne waren alle sehr gut, mit Ausnahme des Gehörs, das gegen Ende seines Lebens schwach wurde. Wie Descartes schlief er ziemlich lange, stand erst gegen 10 Uhr auf und legte sich erst gegen Mitternacht zur Ruhe nieder. Am Morgen genoss er Kaffee mit Milch, er ass sehr mässig zum Mittag mit nur wenig Fleisch und zog Gemüse und süsse Früchte vor. Er trank nur Bier und hasste alle starken Liqueure. Dann trank er sehr süssen Kaffee, so heiss als er ihn nur ertragen konnte, da er die Wärme liebte, und setzte sich an schönen Tagen in den warmen Sonnenschein. Abends um 10 Uhr nahm er sehr heissen und sehr süssen Thee, den er häufig mit Citronensaft versetzte, um sich zu erfrischen. Er war nicht unempfindlich für die Reize der Musik und des französischen Schauspiels, und nur in der letzten Zeit seines Lebens mied er das Theater, weil die Luft eines geschlossenen Raumes mit so vielen Menschen ihm nicht zusagte; überhaupt liebte er die freie Luft sehr und ging jeden Tag spazieren. Seine Krankheit nahm in der That einen schlechten Verlauf; seine angestrengte geistige Thätigkeit hatte seine Kräfte aufgezehrt und schon am 10. April 1813, in seinem 78. Lebensjah-

re, verschied dieser grosse Mathematiker an vollständiger Entkräftung. Seine sterblichen Überreste wurden im Panthéon bestattet und seine berühmten Collegen und Freunde Laplace und Lacépède hielten die Leichen- und Gedächtnisrede. „Unter jenen“, sagt Laplace, „welche am wirksamsten die Grenzen unserer Wissenschaft erweitert haben, haben Newton und Lagrange jene glückliche Kunst im höchsten Masse besessen, die allgemeinen Prinzipie zu entdecken, welche das eigentliche Wesen der Wissenschaft ausmachen. Diese Kunst, verbunden mit einer seltenen Eleganz in der Entwicklung der abstraktesten Theorien ist's, was Lagrange charakterisiert.“

Im Folgenden wollen wir noch einiges über seine Werke sagen.

Weiter vorn haben wir schon gezeigt, dass die im ersten Bande der Turiner Abhandlungen erschienenen Abhandlungen den Namen Lagrange's über die ganze gelehrte Welt verbreitet und ihn in Beziehungen zu den grössten damals lebenden Mathematikern gebracht hatten. Euler schrieb ihm darüber: „Ihre Lösung des isoperimetrischen Problems lässt nichts zu wünschen übrig und ich freue mich, dass dieser Gegenstand, mit dem ich mich seit den ersten Anfängen beschäftigt habe, durch Sie zu einem so hohen Grade von Vollendung gebracht worden ist. Die Wichtigkeit der Materie hat mich vermöge der Lichtpunkte, welche Sie geben, angeregt, eine analytische Lösung des Problems zu suchen, die ich aber nicht eher veröffentlichen werde, als bis Sie selbst Ihre folgenden Untersuchungen veröffentlicht haben, um Ihnen keinen Teil des Ruhmes zu entreissen, der Ihnen gebührt.“ Die Abhandlung, in welcher Euler die Lagrange'sche Methode und die Theorie dieser neuen Rechnung, welche er Variations-Rechnung nennt, auseinandersetzt, beginnt Euler mit den Worten: „Nachdem ich mich lange und vergeblich bemüht hatte, jenes Integral zu finden, wie gross war da mein Erstaunen, als ich hörte, dass in den Turiner Abhandlungen das Problem mit ebenso viel Leichtigkeit als Glück gelöst sei. Diese schöne Entdeckung hat mir um so mehr Bewunderung abgenötigt, als sie gänzlich von den Methoden, die ich gegeben habe, verschieden ist und dieselben an Einfachheit bei Weitem übertrifft.“ Das Hauptwerk von Lagrange ist seine Analytische Mechanik; er schrieb dieselbe in Berlin, wünschte aber, dass sie in Paris gedruckt würde, weil er der Meinung war, dass dort seine Formeln sorgfältiger abgedruckt würden. Wohl trug er Besorgnis, das Manuskript einem Reisenden anzuvertrauen, der den Wert desselben gar nicht kannte; er verfertigte deshalb eine Abschrift, welche Duchâtelet an den Abbé Marie überbrachte. Der Abbé liess es sich nun angelegen sein, einen Verleger für das Werk zu finden und, was man kaum glauben könnte, er fand keinen Verleger. Endlich nahm sich Desaint des Werkes an, er liess es aber nur drucken unter der Bedingung, dass Lagrange die nach Ablauf einer festgesetzten Zeit nicht verkauften Exemplare auf seine Kosten ankaufen sollte. So erschienen denn das Werk im Jahre 1788, allein es hatte nur wenig Erfolg; die Ideen und Theorien waren zu neu und der verständigen Leser zu wenige.

Im Verlauf seiner Vorlesungen an der École polytechnique hatte er den Plan gefasst, die Anwendungen seiner Theorien zu vermehren und eine zweite Ausgabe seiner analytischen Mechanik zu unternehmen. Sein Plan war, die gebräuchlichsten Teile derselben weiter zu entwickeln und mit der grössten geistigen Anstrengung arbeitete er an der Vollendung dieses seines Hauptwerkes, dessen erster Band im Jahre 1811 erschien, während es ihm nicht mehr vergönnt war, den zweiten Band zu vollenden; derselbe wurde nach seinem Tode von Prony, Garnier und Binet herausgegeben.

Dieses grosse Werk gründet sich ganz auf die Variationsrechnung, deren Erfinder Lagrange ist. Seit Galilei die Dynamik begründet hatte, waren die einzelnen Forscher bestrebt gewesen, diejenigen allgemeinen, prinzipiellen Sätze aufzufinden, welche einen gewissen Kreis von mechanischen Aufgaben in sich begreifen, und diese Sätze wurden für um so wichtiger gehalten, je grösser die Anzahl der mechanischen Probleme war, die unter ein solches Prinzip gebracht werden konnten. Auf diese Weise entstand eine gewisse Anzahl von Prinzipien, welche vermöge der sich stetig entwickelnden mathematischen Analysis in leicht übersichtliche mathematische Formeln umgesetzt werden konnten und vermöge der rein algebraischen Eigenschaften der Zahlengebilde, die in jenen Formeln vorkommen, auf neue Sätze von prinzipieller Wichtigkeit für die Mechanik führten. Bis zu Lagrange hin kannte man schon den Satz vom Parallelogramm der Kräfte, den Hebelsatz, das d'Alembert'sche

Prinzip, das Prinzip der kleinsten Wirkung und verschiedene andere Sätze, und man bemühte sich vergebens für sämtliche mechanischen Probleme einen einzigen Satz aufzustellen, ein einziges Prinzip, das alle Fälle der Wirkung von beliebig vielen Kräften auf ein beliebiges System enthielte. Diesen Schritt zu thun, war Lagrange vorbehalten. Indem er das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem d'Alembert'schen Prinzip verband, gelangte er zu der „allgemeinen Formel der Dynamik für die Bewegung eines beliebigen Systems von Körpern“, wie er sie nennt. (Analyt. Mechanik, Teil II, Abschn. II.) Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist eigentlich so alt wie die Mechanik selber, aber erst bei Galilei und Johann Bernoulli nimmt es festere Gestalt an; bei Lagrange endlich ist es die Basis der gesamten Mechanik. Zuerst verwendete er es in seiner Preisschrift „Recherches sur la libration de la lune“ (1764). In der ersten Ausgabe seiner Mechanik von 1788 ist ihm dies Prinzip noch ein Axiom ohne jede Begründung, das er zum Ausgangspunkt seiner Entwicklungen macht. In der zweiten Ausgabe führt er das Prinzip auf eine einfache mechanische Kombination von Kraftwirkungen an einer ideellen Maschine zurück. Er bedient sich dazu einer Verbindung ideeller Flaschenzüge, deren sovieler angebracht gedacht werden, als Angriffspunkte von Kräften vorhanden sind. Um alle festen und beweglichen Rollen aller Flaschenzüge windet sich ein einziger unausdehnbarer Faden, der mit dem einen Ende an einem festen Punkte befestigt ist, während das andere Ende ein Gewicht trägt, welches die Gesamtwirkung der Kräfte ausdrückt. Die Anzahl der beweglichen Rollen eines jeden Flaschenzuges ist der am entsprechenden Angriffspunkte wirkenden Kraft proportional. Man kann nun leicht zeigen, dass 1. das Produkt des Gewichtes am freien Ende des Seiles multipliciert mit der Strecke, um welche dieses bei irgend einer Verrückung der Angriffspunkte der Kräfte herabsinkt, gleich ist der Summe der Produkte der einzelnen Kräfte, multipliciert mit den auf der Richtung der entsprechenden Kraft projizierten Verschiebungen der bezüglichen Angriffspunkte und 2. dass im Falle des Gleichgewichts die genannte Summe von Produkten verschwindet, oder mit anderen Worten: sich in ihrer Gesamtwirkung auf das freie Ende des Fadens aufhebt. Der Flaschenzugbeweis kommt zum ersten Male bei Lagrange im „Journal de l'école polytechnique“ (tome II, cahier 5, 1796) unter dem Titel: „Sur le principe des vitesses virtuelles“ vor, im dritten Teile der zweiten Ausgabe seiner Funktionentheorie findet er sich in höchster Vollendung. Hier tritt an die Stelle der Flaschenzüge ein System fester Rollen, und an das eine Ende des Fadens, der die Kraftwirkungen vermittelt, ist kein Gewicht angebracht gedacht, sondern beide Enden sind an feste Punkte befestigt.

Aus diesem einen Prinzipie entwickelt nun Lagrange auf rein analytischem Wege die Grundgleichungen der Mechanik, welche die Prinzipie der Bewegung des Schwerpunkts, der Erhaltung der Flächen, der lebendigen Kräfte etc. genannt werden.

Als Carnot Minister des Innern war, setzte er es bei der Regierung durch, dass die Manuskripte Lagrange's käuflich erworben wurden. Es wurde dann eine Commission ernannt, welche diejenigen Schriften auswählte, die zur Publikation geeignet waren, während alle anderen in der Bibliothek des Instituts deponiert wurden. Die Commission bestand aus Legendre, Prony, Poisson und Lacroix.

In neuester Zeit ist eine Gesamtausgabe der Werke Lagrange's durch Serret veranstaltet worden, wovon der erste Band im Jahre 1867 erschien.

Für die Biographie Lagrange's sind folgende Schriften anzuführen: Éloge de Lagrange (Mém. de l'institut pour 1812). Journal de l'Empire du 28 avril 1813. Virey et Potel: Précis historique sur la vie et la mort de Lagrange 1813. Cossali: Éloge de Lagrange, Padova 1813.

Seine Werke sind folgende:

Miscellanea Taurinensia. Tome I. Recherches sur la méthode de maximis et minimis. Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes. Recherches sur la propagation du son.

Tome II. Nouvelles Recherches sur la propagation du Son. Essai sur une nouvelle Méthode pour déterminer les Maxima et Minima des formules intégrales indéfinies. Application de cette Méthode

à la solution de différents Problèmes de Dynamique.

Tome III. Sur différents Problèmes de Calcul intégral.

Tome IV. Solution d'un Problème d'Arithmétique. Sur l'intégration de quelques Équations différentielles où les indéterminées sont séparées mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. Sur la méthode des Variations. Sur le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, premier et deuxième Mémoire.

Tome V. Sur la figure des Colonnes. Sur l'utilité de la Méthode de prendre un milieu entre les observations.

Mémoires de l'Académie de Turin. 1784—85. Teil I. Sur la percussion des fluides.

Teil II. Nouvelle Méthode de Calcul intégral, pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le 4^e degré.

Abhandlungen der Berliner Akademie. Band XXI. 1765. Sur les courbes tautochrones. Band XXII. 1766. Sur le passage de Venus, du 3. juin 1769 (ou sur les Parallaxes). Band XXIII. 1767. Sur la solution des Problèmes indéterminés du second degré. Sur la résolution des équations numériques. Band XXIV. 1768. Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés, en nombres entiers. Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales, par le moyen des séries. Band XXV. 1769. Sur la force des ressorts pliés. Sur le problème de Kepler. Sur l'élimination.

Neue Abhandlungen der Berliner Akademie. 1770. Nouvelles réflexions sur les tautochrones. Démonstration d'un théorème d'Arithmétique. Réflexions sur la résolution algébrique des équations.

1771. Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers. Suite des réflexions sur la résolution algébrique des équations.

1772. Sur une nouvelle espèce de Calcul relatif à la différentiation et à l'intégration. Sur la forme des racines imaginaires des équations. Sur les réfractions astronomiques. Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre.

1773. Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps. Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Recherches d'arithmétique.

1774. Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Sur le mouvement des noeuds des orbites des planètes.

1775. Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur les équations linéaires aux différences finies partielles, et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. Additions au Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. Suite des recherches d'arithmétique imprimées dans le volume de 1773.

1776. Sur l'altération des moyens mouvements des Planètes. Solution de quelques problèmes d'astronomie sphérique, par le moyen des séries. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral.

1777. Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations littérales. Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante. Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent. Réflexions sur l'échappement.

1778. Sur le problème de la détermination des orbites des comètes, premier mémoire, second mémoire. Sur la théorie des lunettes. Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques décrites par des forces inversement proportionnelles au carré des distances.

1779. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières. Sur la construction des cartes géographiques, premier mémoire — second mémoire.

1780. Théorie de la libration de la lune.

1781. Sur la théorie des mouvements des fluides. Théorie des variations séculaires des éléments des orbites des planètes (Teil I).

1782. Théorie des variations séculaires, etc. (Teil II).

1783. Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes (Teil I). - Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes. - Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes. - Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation. - Sur une nouvelle propriété du centre de Gravité. - Sur le problème de la détermination des orbites des comètes (Teil III).

1784. Théorie des variations périodiques du mouvement des planètes. Teil II.

1785. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque les différences ne sont que linéaires.

1786. Théorie géométrique du mouvement des aphélies, pour servir d'addition aux Prinzipes de Newton. - Sur la manière de rectifier deux endroits des Prinzipes de Newton, relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes.

1787. (Lagrange überreicht der Berliner Akademie die Bestimmung der säkularen und periodischen Variationen der Elemente des Herschel (Uranus) von Duval-le-Roi.)

1792—1793. - Sur une question concernant les annuités. - Recherches sur plusieurs points d'analyse, relatifs à différents endroits des mémoires précédents: 1. Sur l'expression du terme général des séries récurrentes; 2. Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques; 3. Sur la méthode d'interpolation; 4. Sur l'équation séculaire de la Lune.

1803. Sur une loi générale de l'Optique.

Recueils de l'Académie des sciences de Paris. Mémoires.

1772. **Teil I.** Recherches sur la manière de former des Tables des planètes d'après les observations.

1774. Recherches sur les équations séculaires du mouvement des noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes.

Preis-Arbeiten. Tome IX. - Recherches sur la libration de la lune, 1764. - Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter, 1766. - Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps, 1772.

Savants étrangers. Tome VII. Sur l'équation séculaire de la Lune. Tome X. Recherches sur le dérangement d'une comète qui passe près d'une planète.

Institut de France. Mémoires de la première classe. 1808. Sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations du grand axe de leurs orbites. Sur la théorie générale des variations des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Supplément au mémoire précédent. 1809. Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

Journal de l'école polytechnique. Tome II, cahier V. Essai d'Analyse numérique sur la transformation des fractions. Sur le principe des vitesses virtuelles. Tome II, cahier VI. Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une analyse complète de ces triangles. Tome VIII, cahier XV. Éclaircissement d'une difficulté singulière qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes peu différents d'une sphère. Tome XIII, cahier XXI. Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur des canons.

Séances des écoles normales. Leçons d'Arithmétique et d'Algèbre données à cette École en l'an III (1794-95).

Connaissances des Temps. 1796. Compas de réduction pour la distance de la lune aux étoiles. 1814.

Sur l'origine des comètes. 1817. Sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes. 1819. Remarque sur la méthode des projections dans le calcul des éclipses de soleil ou d'étoiles. (Diese Abhandlung erschien in deutscher Sprache 1781 im Berliner astronomischen Jahrbuch.) 1821. Nouvelle méthode pour déterminer l'orbite des comètes d'après les observations. (Diese Abhandlung erschien ebenfalls in deutscher Sprache 1783 im Berliner astronomischen Jahrbuch.) **Abhandlungen in deutscher Sprache im Berliner astronomischen Jahrbuch**

- “Bemerkungen über die Projectionsmethode bei der Bestimmung der Sonnenfinsternisse und der Sternbedeckungen durch den Mond.” (1781)
- “Berechnung der den Parallaxen unterworfenen Verfinsterungen. Über die Verminderung der Schiefe der Ekliptik.” (1782)
- “Über Interpolation. Neue Methode, die Bahn der Kometen zu bestimmen. Anwendung der vorigen Methode durch Schultz.” (1783)
- “Jährliche Variationen der Elemente der Planeten.” (1786)
- “Formeln zur Bestimmung der Bahn eines Kometen oder eines Planeten aus drei genäherten Beobachtungen.” (1789)

Als selbständige Werke sind noch zu erwähnen:

- “Additions à l'algèbre d'Euler.”
- “Mécanique analytique. I. Ausgabe 1788. II. Ausgabe, Band I, 1811; Band II, 1815.”
- “Théorie des fonctions analytiques. I. Ausgabe 1797. II. Ausgabe 1813.”
- “Résolution des équations numériques. I. Ausgabe 1798. II. Ausgabe 1808.”
- “Leçons sur le calcul des fonctions. 1801. 1806.”

ERSTER TEIL. STATIK

Abschnitt I.

Über die verschiedenen Prinzipie der Statik.

Die Statik ist die Wissenschaft vom Gleichgewicht der Kräfte. Unter Kraft versteht man im allgemeinen die Ursache, gleichviel welcher Art, welche den Körper, an dem man sie sich wirkend denkt, in Bewegung setzt oder in Bewegung zu setzen strebt; daher muss man auch die Kraft nach der Grösse der erzeugten Bewegung oder nach dem Bestreben, den Körper in Bewegung zu setzen, schätzen. Im Zustande des Gleichgewichts bringt die Kraft keine Wirkung hervor; sie erzeugt nur ein einfaches Streben nach Bewegung, man muss sie dann durch die Wirkung messen, welche sie hervorbringen würde, wenn der Körper, an dem sie wirkt, dem Streben nach Bewegung zu folgen, durch nichts gehindert wäre. Nimmt man die Intensität irgend einer Kraft oder die Wirkung dieser Kraft als Einheit an, so stellt sich der Ausdruck für jede andere Kraft als ein Verhältniss zu jener dar, bildet also eine mathematische Grösse, welche durch Zahlen oder Linien dargestellt werden kann; von diesem Gesichtspunkte aus muss man in der Mechanik die Kräfte betrachten.

Das Gleichgewicht resultiert, wenn die Wirkungen der betreffenden Kräfte sich gegen einander aufheben, die Kräfte also einander entgegenarbeiten und ihre Wirkungen vernichten; Ziel der Statik ist es, die Gesetze anzugeben, denen gemäss diese Vernichtung vor sich geht. Es sind aber diese Gesetze auf allgemeine Prinzipie begründet, die man auf drei zurückführen kann: das Prinzip des Hebels, das der Zusammensetzung von Kräften und das der virtuellen Geschwindigkeiten.

1. Archimedes, der einzige unter den Alten, der uns eine Theorie des Gleichgewichts, und zwar in den beiden Büchern der Schrift *de Aequiponderantibus*, oder *de Planorum aequilibriis*, hinterlassen hat, hat zuerst das Prinzip vom Hebel aufgestellt. Es besteht dieses Prinzip darin, dass, wenn ein geradliniger Hebel zu beiden Seiten des Unterstützungspunkts mit zwei irgendwo angebrachten Gewichten so belastet wird, dass deren bezügliche Entfernungen vom Unterstützungspunkt sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte selbst, derselbe im Gleichgewicht verharrt und sein Unterstützungspunkt mit der Summe beider Gewichte belastet ist. Archimedes nimmt dieses Prinzip für den Fall, dass beide Gewichte gleich sind und sich in gleichen Entfernungen vom Unterstützungspunkt befinden, als ein für sich evidentes Axiom der Mechanik, oder wenigstens als einen Erfahrungssatz an. Auf diesen einfachen und ursprünglichen Fall führt er den einer Beschwerung des Hebels mit ungleichen Gewichten zurück, indem er sich diese Gewichte, wenn sie commensurabel sind, in mehrere unter einander gleiche Teile geteilt denkt, die Teile jedes Gewichtes von einander trennt und sie auf den bezüglichen Armen des Hebels in gleichen Entfernungen von einander anbringt, so dass der Hebel zu beiden Seiten des Unterstützungspunktes von mehreren kleinen unter einander gleichen und in gleichen Entfernungen von den bezüglichen Angriffspunkten der betreffenden Gewichte befindlichen Gewichten (gleichmässig) belastet erscheint. Darauf zeigt er die Richtigkeit dieses Theorems für incommensurable Gewichte mit Hilfe der Exhaustionsmethode, indem er beweist, dass zwischen solchen Gewichten niemals Gleichgewicht stattfinden kann, wenn ihre Beträge nicht im umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen vom Unterstützungspunkte stehen.

Einige moderne Schriftsteller, wie Stevin in seiner Statik, und Galilei in seinen Dialogen über die Bewegung, haben den Archimedischen Beweis vereinfacht, indem sie den an den Hebel angebrachten Gewichten die Form von in ihren Mitten horizontal aufgehängten Parallelepipedon gaben; Breite und Höhe wählen sie bei beiden gleich, die Länge aber machten sie bei jedem Parallelepiped doppelt so gross als die bezüglichen entgegengesetzten Hebelarme. Es stehen dann die beiden Parallelepipede im umgekehrten Verhältniss ihrer Hebelarme, und zu gleicher Zeit liegen sie mit ihren Enden so an einander, dass sie nur ein einziges Ganze bilden, dessen Mitte genau mit dem Unterstützungs-

punkt des Hebels zusammenfällt. Archimedes hatte schon eine ähnliche Betrachtung angestellt, um den Schwerpunkt einer aus zwei parabolischen Flächen zusammengesetzten Figur zu bestimmen, und zwar in dem ersten Lehrsatz des zweiten Buches vom Gleichgewicht der Ebenen.

Andere Schriftsteller aber haben Fehler in dem Archimedischen Beweise zu finden geglaubt und haben ihn auf verschiedene Weisen abgeändert, um ihn strenger zu machen; aber man muss gestehen, dass dadurch die Einfachheit dieses Beweises verloren ging, während an Genauigkeit fast nichts gewonnen worden ist.

Ich muss aber von denen, welche es versucht haben, den Archimedischen Beweis über das Gleichgewicht des Hebels zu ergänzen, Huyghens hervorheben, der hierüber eine kleine Schrift: *Demonstratio aequilibrii bilanci* verfasst hat, welche 1693 in der Sammlung der älteren *Mémoires de l'Académie des Sciences* abgedruckt ist.¹

Huyghens bemerkt, dass Archimedes stillschweigend voraussetzt, dass wenn mehrere gleiche Gewichte in unter einander gleichen Entfernungen an einem horizontalen Hebel angebracht werden, sie dieselbe Kraft ausüben, um den Hebel aus seiner horizontalen Lage zu entfernen, sei es nun, dass sie sich alle auf derselben Seite vom Unterstützungspunkt befinden, oder sei es, dass ein Teil auf der einen, ein anderer auf der andern Seite dieses Punktes angreift. Um nun diese prekäre Voraussetzung zu vermeiden, verteilt er die gleich grossen Teile der Gewichte, nicht wie Archimedes auf denselben Hebel zu beiden Seiten der Punkte, wo die ganzen Gewichte angebracht sein sollten, sondern auf zwei andere horizontale T förmige Hebel, die auf dem betrachteten Hebel in seinen Endpunkten senkrecht stehen: so bekommt er eine mit mehreren gleichen Gewichten belastete Horizontalebene, die offenbar gegen die Linie des ersten Hebels im Gleichgewicht ist, weil die Gewichte zu beiden Seiten dieser Linie gleichförmig und symmetrisch sich verteilt finden. Nun zeigt Huyghens, dass diese Ebene auch im Gleichgewicht ist gegen eine zu jener geneigte gerade Linie, wenn diese nur die Hebellinie in dem Punkte schneidet, welcher den ursprünglichen Hebel in Teile teilt, die umgekehrt proportional sind den Gewichten, mit denen er als belastet gedacht wird, denn auch so finden sich die kleinen Gewichte in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten derselben geraden Linie angebracht: daraus schliesst er, dass die Ebene und folglich auch der gegebene Hebel überhaupt in Bezug auf den bezeichneten Punkt im Gleichgewicht sein muss.

Dieser Beweis ist wohl geistreich, aber er ergänzt nicht völlig das, was man wirklich an dem Beweise des Archimedes vermisst.

2. Dass ein gerader und horizontaler Hebel, dessen Enden mit gleichen Gewichten belastet sind, und dessen Unterstützungspunkt in der Mitte liegt, im Gleichgewicht beharrt, leuchtet von selbst ein, weil kein Grund ersichtlich ist, warum eines dieser Gewichte das andere überwiegen soll. Nicht so evident ist die Voraussetzung, dass die Belastung des Unterstützungspunktes gleich ist der Summe der beiden Gewichte. Es scheint, dass Alle, die sich mit der Mechanik beschäftigt haben, sie als ein Resultat der täglichen Erfahrung angenommen haben, welche lehrt, dass das Gewicht eines Körpers nur von seiner ganzen Masse, keineswegs von seiner Gestalt abhängig ist. Indessen kann man diese Behauptung mit Hilfe des ersten Satzes auch begründen, wenn man wie Huyghens das Gleichgewicht einer Ebene gegen eine gerade Linie betrachtet.

Dazu braucht man sich nur ein ebenes Dreieck zu denken, welches an den beiden Enden seiner Basis mit zwei gleichen Gewichten, und an seiner Spitze mit dem doppelten Gewicht belastet ist. Diese Ebene wird offenbar im Gleichgewicht sein, wenn sie sich auf eine gerade Linie oder feste Axe stützt, welche durch die Mitten der beiden Dreiecksseiten geht; denn man kann jede dieser beiden Seiten als einen Hebel ansehen, der an seinen beiden Enden mit zwei gleichen Gewichten belastet ist und seinen Unterstützungspunkt auf der Axe hat, welche durch seine Mitte geht. Man

¹ Anmerkung: Diese Schrift von Huyghens bildet einen Teil seiner Werke, die von s'Gravesande 1724 (Lyon) veröffentlicht worden sind: tome I, page 282.

kann aber dieses Gleichgewicht auf eine andere Weise auffassen, indem man die Basis des Dreiecks selbst als einen Hebel ansieht, dessen Enden von zwei gleichen Gewichten belastet sind, und indem man sich einen Transversalhebel denkt, welcher die Spitze des Dreiecks mit der Mitte der Basis zu einer Figur von der Form eines T verbindet, und dessen eines Ende von dem an der Spitze angebrachten doppelten Gewichte belastet wird, während das andere dem Hebel, welcher die Basis bildet, als Unterstützungspunkt dient. Es ist offenbar, dass dieser letztere Hebel auf dem Transversalhebel im Gleichgewicht sein wird, da er von ihm in der Mitte unterstützt und an seinen Enden gleichmässig belastet ist, und dass andererseits der Transversalhebel auf der Axe im Gleichgewicht ist, auf welcher das Dreieck im Gleichgewicht ist. Da nun die Axe durch die Mitte der beiden Dreiecksseiten geht, so wird sie notwendig auch durch die Mitte der geraden Linie gehen, welche von der Spitze nach der Mitte der Basis des Dreiecks gezogen ist; der Transversalhebel wird also seinen Unterstützungspunkt in seiner Mitte haben und wird folglich an beiden Enden in gleicher Weise belastet sein müssen: die Belastung, welche der Unterstützungspunkt desjenigen Hebels trägt, welcher die Basis des Dreiecks bildet, und der an seinen beiden Enden zwei gleiche Gewichte trägt, wird also gleich sein dem an der Spitze befindlichen doppelten Gewicht und wird folglich auch gleich sein der Summe der beiden diesen Hebel belastenden Gewichte.

Wenn man an Stelle eines Dreiecks ein Trapez betrachten würde, welches an seinen vier Ecken mit vier gleichen Gewichten belastet ist, so würde man auf dieselbe Weise finden, dass die beiden Hebel von ungleicher Länge, welche die parallelen Seiten des Trapezes bilden, auf ihre Unterstützungspunkte gleiche Kräfte ausüben.

3. Hat man diesen Lehrsatz einmal festgestellt, so ist klar, dass man, wie Archimedes es tat, für ein an einem Hebel im Gleichgewicht sich befindendes Gewicht zwei gleiche halb so grosse Gewichte setzen kann, wenn man diese nur an dem zugehörigen Arm und in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten des Punktes anbringt, in dem das Gewicht befestigt sein sollte. In der Tat ist die Wirkung dieses Gewichtes so gross, wie diejenige eines in seinem Mittelpunkte aufgehängten und an den beiden Enden mit zwei gleichen Gewichten, deren jedes gleich ist der Hälfte jenes Gewichtes, belasteten Hebels, und es ist offenbar, dass nichts daran hindern kann, diesen letzteren Hebel dem ersteren so weit zu nähern, dass er einen Teil desselben bildet. Oder besser und vielleicht noch strenger: man betrachte diesen letzteren Hebel als in Gleichgewicht gehalten durch eine an seinem Mittelpunkt und von unten nach oben wirkende Kraft, die gleich ist demjenigen Gewicht, dessen beide Hälften man sich an den Endpunkten angebracht denkt; legt man nun diesen im Gleichgewicht sich befindenden Hebel auf den ersten Hebel, von dem man annimmt, dass er in seinem Unterstützungspunkte im Gleichgewicht ist, so wird immer ein totales Gleichgewicht stattfinden, und wenn dieses Aufeinanderlegen so geschieht, dass die Mitte des zweiten Hebels zusammenfällt mit dem Ende eines Arms des ersten Hebels, so wird man die Kraft, welche den zweiten Hebel hält, in dem Gewicht selbst angebracht denken, mit welchem dieser Arm belastet ist. Da dieses Gewicht nunmehr unterstützt ist, wird es auf den ursprünglichen Hebel keine Wirkung mehr ausüben, aber es treten jetzt an seine Stelle zwei gleiche Gewichte, die sich zu seinen beiden Seiten auf dem verlängerten ersten Hebel befinden und deren jedes gleich seiner Hälfte ist. Die damit bewiesene Möglichkeit einer Superposition von Gleichgewichten ist für die Mechanik ein nicht minder fruchtbares Prinzip, wie für die Geometrie die Superposition von Figuren.

4. Man kann es also als eine streng bewiesene Wahrheit ansehen, dass ein gerader, horizontaler Hebel sich im Gleichgewicht befindet, falls die Gewichte, mit denen er belastet ist, im umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen vom Unterstützungspunkte stehen. Vermöge des Prinzips der Superposition ist es nun leicht, den Beweis auf irgend einen Winkelhebel auszudehnen, dessen Unterstützungspunkt im Scheitel liegt und dessen Arme durch Kräfte, die senkrecht auf ihren Richtungen stehen, in entgegengesetztem Sinne angegriffen werden. In der That ist es zunächst offenbar, dass ein Winkelhebel mit gleichen Armen, der sich um seinen Scheitel drehen lässt, im Gleichgewicht

gehalten werden wird durch zwei gleiche Kräfte, die die Arme in ihren Endpunkten und senkrecht zu ihren Richtungen angreifen und danach streben, sie in entgegengesetztem Sinne zu drehen. Um aber zu dem Gleichgewicht eines beliebigen Winkelhebels zu gelangen, nimmt man einen geraden ungleicharmigen Hebel, dessen einer Arm die Länge eines der gleichen Arme des Winkelhebels hat und auch mit einem den an den Armen des Winkelhebels angreifenden Kräften gleichwertigen Gewicht belastet ist, und dessen anderer Arm eine beliebige Länge hat und an seinem Endpunkte mit einem solchen Gewicht belastet ist, dass der Hebel sich im Gleichgewicht befindet. Diesen Hebel denkt man sich an den gleicharmigen Winkelhebel so angelegt, dass der Unterstützungspunkt des geraden Hebels mit dem Scheitel und der erste Arm des geraden Hebels mit einem Arm des Winkelhebels zusammenfällt, und dass endlich die beiden an den nunmehr vereinigten Endpunkten der betreffenden Arme der beiden Hebel wirkenden Kräfte einander entgegengesetzt sind. Dann heben sich diese beiden Kräfte auf, die diesen Kräften entsprechenden Arme der beiden Hebel, an denen sie wirken, werden weselos; und da durch die Superposition das gesammte Gleichgewicht nicht geändert ist, muss der übrig bleibende ungleicharmige Winkelhebel, der an seinen Endpunkten von senkrechten Kräften angegriffen wird, die im umgekehrten Verhältniss der Längen der Arme stehen, im Gleichgewicht sein — wie bei einem geraden Hebel.

Nun ist es für die Wirkung einer Kraft gleichgültig, in welchem Punkte ihrer Richtung man diese sich angebracht denkt. Also sind zwei Kräfte, welche an irgend welchen Punkten einer in einem Punkte festgehaltenen Ebene angebracht und in dieser Ebene beliebig gerichtet sind, im Gleichgewicht, wenn sie unter einander im umgekehrten Verhältniss der Lote stehen, die man von dem festen Punkte aus auf ihre Richtungen fallen kann; denn man kann die Lote als einen Winkelhebel betrachten, dessen Unterstützungspunkt der feste Punkt der Ebene ist. Man nennt diesen Satz das Prinzip der Momente, indem man unter Moment das Produkt versteht, welches gebildet wird aus einer Kraft in den Hebelarm, an welchem sie wirkt. Dieses allgemeine Prinzip genügt, um alle Probleme der Statik aufzulösen.

Es ist dieses Prinzip sogleich bei den ersten Schritten, welche man nach Archimedes in der Theorie der einfachen Maschinen gethan hat, durch die Betrachtung der Welle erkannt worden, wie man aus dem Werke von Guido Ubaldi: *Mechanicorum liber*, ersieht, welches 1577 zu Pesaro erschienen ist; aber der genannte Schriftsteller hat es weder auf die schiefe Ebene, noch auf andere Maschinen, welche von derselben abgeleitet werden können, wie den Keil und die Schraube, von denen er eine nur wenig genaue Theorie giebt, anzuwenden verstanden.

5. Das Verhältniss der Kraft zum Gewicht auf einer schiefen Ebene ist unter den modernen Forschern lange ein Problem gewesen. Stevin hat es zuerst gelöst; aber seine Lösung gründet sich auf eine indirekte und von der Theorie des Hebels unabhängige Betrachtung.

Stevin betrachtet ein solides Dreieck, das auf seiner horizontalen Basis aufrecht steht, so dass seine beiden Seiten zwei schiefe Ebenen bilden, und nimmt an, dass ein Kranz von mehreren gleichen in gleichen Entfernungen von einander durch Fäden in geschlossener Reihe verbundenen Gewichten, oder vielmehr eine Kette von überall gleicher Dicke über beiden Seiten dieses Dreiecks gelegt ist. Oben an den beiden Seiten des Dreiecks soll die Kette diesen Seiten sich dicht anschmiegen, der untere Teil soll frei unter der Basis herabhängen, gleichsam als wenn die Kette an den beiden Enden dieser Basis befestigt wäre.

Stevin bemerkt nun, dass die Kette, selbst wenn sie frei über das Dreieck gleiten könnte, dennoch in Ruhe bleiben müsste; denn finge sie von selbst an nach einer Richtung hin zu gleiten, so müsste sie fortfahren immer zu gleiten, da dieselbe Ursache der Bewegung weiter bestehen würde, indem die Kette wegen der Gleichförmigkeit ihrer Teile immer auf dieselbe Art am Dreieck hänge, woraus eine beständige Bewegung folgen würde. Dies ist aber absurd.

Es muss also notwendig Gleichgewicht zwischen allen Teilen der Kette stattfinden; nun kann man aber den unter die Basis herabhängenden Teil der Kette schon an und für sich als von selbst im

Gleichgewicht befindlich ansehen. Die Wirkung aller auf der einen Seite aufliegenden Gewichte muss also der Wirkung aller auf der anderen Seite liegenden das Gleichgewicht halten; aber die Summe der einen steht zu der Summe der andern in demselben Verhältniss wie die Länge der einen Seite zu der der andern. Es bedarf also, um Gewichte auf schiefen Ebenen gleicher Höhe und ungleicher Neigung zu halten, immer derselben Kraft, falls diese Gewichte proportional den Längen der Ebenen sind. Ist aber eine Ebene vertical, so ist die Kraft selbst dem Gewichte gleich; es verhält sich also bei jeder schiefen Ebene die Kraft zum Gewicht, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge.

Ich habe diesen Beweis Stevins hier angegeben, weil er sehr geistreich und sonst wenig bekannt ist. Übrigens leitet Stevin aus dieser Theorie die Bedingung für das Gleichgewicht zwischen drei Kräften her, welche an demselben Punkte angreifen, und er findet, dass dieses Gleichgewicht eintritt, wenn die Kräfte parallel und proportional den drei Seiten irgend eines geradlinigen Dreiecks sind. Man vergleiche hierüber die *Éléments de Statique* und die *Additions à la Statique* dieses Schriftstellers, die *Hypomnemata mathematica*, die 1605 in Leyden gedruckt sind, ferner *Les oeuvres de Stevin*, die in das Französische übersetzt und 1634 durch die Elzevir gedruckt worden sind. Man muss aber beachten, dass dieses **Fundamental-Theorem der Statik**, obgleich es allgemein Stevin zugeschrieben wird, von diesem Schriftsteller nur für den Fall bewiesen worden ist, wo die Richtungen zweier der Kräfte senkrecht zu einander sind.

Stevin bemerkt mit Recht, dass ein Gewicht, welches sich auf einer schiefen Ebene befindet und durch eine Kraft, die parallel zur Ebene ist, festgehalten wird, in demselben Falle sich befindet, als wenn es durch zwei Fäden gehalten würde, von denen der eine senkrecht, der andere aber parallel zur Ebene ist, und findet aus seiner Theorie der schiefen Ebene, dass das Verhältniss des Gewichts zu der zur Ebene parallelen Kraft gleich ist dem Verhältniss der Hypotenuse zur Basis eines rechtwinkligen Dreiecks, welches über der Ebene durch zwei gerade Linien construiert wird, von denen die eine vertical gerichtet ist, die andere senkrecht zur Ebene steht. Stevin begnügt sich damit, diese Proportion auf den Fall auszudehnen, wo der Faden, welcher das Gewicht auf der schiefen Ebene festhält, auch gegen diese Ebene geneigt ist, indem er ein analoges Dreieck construiert mit denselben Linien, die eine vertical, die andere senkrecht zur Ebene, und indem er die Basis in die Richtung des Fadens verlegt; aber um zu dieser Erweiterung berechtigt zu sein, hätte er zeigen müssen, dass dieselbe Proportion bei dem Gleichgewicht eines Gewichtes gilt, welches auf einer schiefen Ebene durch eine zur Ebene schiefen Kraft gehalten wird; dies aber lässt sich nicht aus der Betrachtung der durch Stevin gedachten Kette herleiten.

6. In der Mechanik des Galilei, die durch den Pater Mersenne 1634 zuerst in französischer Sprache veröffentlicht wurde, wird das Gleichgewicht auf einer schiefen Ebene auf dasjenige eines Winkelhebels mit zwei gleichen Armen zurückgeführt. Galilei nimmt an, dass der eine Arm senkrecht zur Ebene steht und mit dem auf der Ebene angebrachten Gewichte belastet ist, während der andere horizontal ist und von einem Gewichte belastet wird, welches der Kraft gleichkommt, die nötig ist, um das Gewicht auf der Ebene festzuhalten. Das Gleichgewicht dieses Winkelhebels wird dann zurückgeführt auf dasjenige eines geraden horizontalen Hebels, indem man das an dem geneigten Arme angebrachte Gewicht so betrachtet, als ob es an einem horizontalen Arme aufgehängt wäre, welcher mit dem horizontalen Arme des Winkelhebels einen geraden Hebel bildet. Es steht dann das Gewicht zu der Kraft, welche es auf der geneigten Ebene festhält, im umgekehrten Verhältniss dieser beiden Arme des geraden Hebels, und es ist leicht zu beweisen, dass diese Arme sich unter einander verhalten, wie die Höhe zur Länge der Ebene.

Man kann sagen, dass dies der erste directe Beweis ist, den man vom Gleichgewicht auf einer schiefen Ebene gegeben hat. Galilei hat sich desselben später bedient, um streng darzutun, dass die durch schwere Körper, welche von derselben Höhe auf verschiedenartig geneigten Ebenen herabfallen, erlangten Geschwindigkeiten stets gleich sind; in der ersten Ausgabe seiner Dialoge hatte er sich begnügt, diese Gleichheit nur vorauszusetzen. Es wäre Galilei leicht gewesen, auch den Fall zu lösen,

wo die Kraft, welche das Gewicht festhält, eine schiefe Richtung zur Ebene hat; aber dieser neue Schritt wurde erst einige Zeit später von Roberval gethan, in dessen *Traité de Mecanique*, der 1636 in der *Harmonie universelle* von Mersenne abgedruckt wurde.

7. Roberval sieht ebenfalls das auf der schiefen Ebene ruhende Gewicht als am Arme eines Hebels angebracht an, der senkrecht zur Ebene ist, und betrachtet die Kraft, mit der man es festhält, als an demselben Arm, aber in einer gegebenen Richtung, wirkend; er hat auf diese Weise einen einarmigen Hebel, dessen eines Ende fest ist, und dessen anderes Ende durch zwei Kräfte, die Kraft des Gewichtes und die festhaltende Kraft, angegriffen wird. Er setzt darauf für diesen Hebel einen Winkelhebel, dessen beide Arme senkrecht auf den bezüglichen Richtungen der Kräfte stehen, und welcher denselben festen Punkt zum Unterstützungspunkt hat und lässt die beiden Kräfte an den Armen dieses Hebels nach ihren wirklichen Richtungen angebracht sein; er erhält so für das Gleichgewicht die Bedingung, dass das Gewicht zur Kraft im umgekehrten Verhältniss der beiden Arme des Winkelhebels steht, das heisst der Lote, welche man von dem festen Punkte auf die Wirkungsrichtungen des Gewichtes und der Kraft fallen kann.

Roberval leitet daraus das Gleichgewicht eines Gewichtes ab, welches durch zwei Fäden gehalten wird, die einen beliebigen Winkel mit einander bilden, indem er an Stelle des zur Ebene senkrechten Hebels einen Faden, der im Unterstützungspunkt des Hebels angebracht ist, und für die Kraft einen anderen Faden, der in der Richtung dieser Kraft gezogen wird, setzt. Durch verschiedene Constructionen und ein wenig complicierte Analogien gelangt er zu folgendem Schluss: wenn man von irgend einem Punkte in der durch das Gewicht gehenden Verticalen eine Parallele zu einem der Fäden so weit zieht, bis sie den anderen Faden schneidet, so werden die Seiten des so entstandenen Dreiecks proportional sein den Gewichten und den Kräften, welche in der Richtung dieser Seiten wirken, und dies ist, wie man sieht, das von Stevin gegebene Theorem.

Ich habe geglaubt, diesen Roberval'schen Beweis erwähnen zu müssen, nicht allein weil er der erste strenge Beweis ist, den man von dem Stevinschen Theorem besitzt, sondern auch weil er in einem heute seltenen *Traité d'Harmonie*, wo ihn niemand zu suchen meint, in Vergessenheit gerathen ist. Übrigens bin ich auf diese Einzelheit, was die Theorie des Hebels anbetrifft, nur eingegangen, um denen Vergnügen zu bereiten, welche es lieben, den Pfaden des Geistes in den Wissenschaften zu folgen, die Wege kennen zu lernen, welche die Erfinder eingeschlagen haben, und die directeren Wege, welche sie hätten einschlagen können.

8. Die Werke der Statik, die nach demjenigen von Roberval erschienen sind, bis zu der Epoche von der Entdeckung des Satzes von der Zusammensetzung der Kräfte haben nichts zu diesem Theile der Mechanik hinzugefügt; man findet darin nur die schon bekannten Eigenschaften des Hebels und der schiefen Ebene und ihre Anwendung auf andere einfache Maschinen; darunter sind einige, welche wenig genaue Theorien enthalten, wie dasjenige von Lami über das Gleichgewicht fester Körper, in welchem ein falsches Verhältniß des Gewichtes zu der Kraft angegeben wird, welche es auf der schiefen Ebene festhält. Ich spreche hier nicht von Descartes, Torricelli und Wallis, weil sie für das Gleichgewicht ein Prinzip angenommen haben, welches sich auf die virtuellen Geschwindigkeiten bezieht, und einen Beweis für dieses Prinzip nicht geben.

9. Das zweite **Fundamentalprinzip** der Statik ist dasjenige von der Zusammensetzung der Kräfte. Es gründet sich auf die Voraussetzung, dass wenn zwei Kräfte zugleich, aber in verschiedenen Richtungen auf einen Körper wirken, diese Kräfte dann einer einzigen Kraft äquivalent sind, welche fähig ist dem Körper dieselbe Bewegung zu erteilen, die ihm die beiden getrennt wirkenden Kräfte erteilen würden. Wenn nun ein Körper sich gleichförmig nach zwei verschiedenen Richtungen zugleich bewegen soll, so durchläuft er notwendig die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten er in Folge jeder der beiden Bewegungen getrennt durchlaufen hätte. Man schliesst daraus, dass zwei beliebige Kräfte, welche vereint auf den selben Körper wirken, einer einzigen Kraft gleich sind, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird,

dessen Seiten die Grössen und Richtungen der beiden gegebenen Kräfte darstellen. Hierin besteht das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte.

Dieses Prinzip ist hinreichend, die Gesetze des Gleichgewichts in allen Fällen zu bestimmen; denn setzt man so nach und nach alle Kräfte immer zwei und zwei zusammen, so muss man zu einer einzigen Kraft gelangen, deren Wirkung derjenigen dieser Kräfte gleich ist. Im Fall des Gleichgewichts ist diese Kraft Null, wenn kein fester Punkt in dem System vorhanden ist; giebt es aber einen solchen festen Punkt, so braucht diese Kraft nicht Null zu sein, sie muss dann aber durch den festen Punkt gehen. Dies kann man in allen Büchern über Statik lesen, und besonders in der *Nouvelle Mécanique* von **Varignon**, in welcher die Theorie der Maschinen allein aus dem eben genannten Prinzip abgeleitet ist.

Es ist offenbar, dass das Theorem von **Stevin** über das Gleichgewicht dreier Kräfte, die parallel und proportional zu den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks sind, eine unmittelbare und notwendige Folgerung aus dem Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte ist, oder dass es vielmehr nichts anderes als dieses Prinzip selbst, nur unter anderer Form ist. Dieses aber hat den Vorteil, auf einfache und natürliche Bemerkungen gegründet zu sein, während das Theorem von **Stevin** nur durch indirekte Betrachtungen gefunden ist.

10. Wie man aus einigen Stellen der *Mechanischen Probleme* von **Aristoteles** ersehen kann, haben die Alten schon die Zusammensetzung der Bewegungen gekannt. Die Geometer besonders haben sie für die Beschreibung von Kurven angewendet, z. B. **Archimedes** für die Spirale, **Nicomedes** für die Conchoide etc.

Unter den Neueren hat **Roberval** daraus eine geistreiche Methode abgeleitet, die Tangenten solcher Kurven zu ziehen, die man sich als durch zwei Bewegungen, deren Gesetz gegeben ist, beschrieben denken kann; **Galilei** aber ist der erste, welcher die Betrachtung der zusammengesetzten Bewegung in der Mechanik angewendet hat, um die Kurve zu bestimmen, welche von einem schweren Körper unter der Einwirkung der Schwerkraft und einer Wurfkraft beschrieben wird.

In dem zweiten Lehrsatz des vierten Tages seiner *Dialoge* zeigt **Galilei**, dass ein Körper, welcher sich mit zwei gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegt, von denen die eine ihn horizontal, die andere vertikal fortreibt, eine Geschwindigkeit annehmen muss, welche durch die Hypotenuse des Dreiecks dargestellt wird, dessen Seiten jene beiden Geschwindigkeiten darstellen.

Galilei scheint aber nicht die ganze Wichtigkeit dieses Satzes für die Theorie des Gleichgewichts erkannt zu haben; denn im dritten Dialog, wo die Bewegung schwerer Körper auf schiefen Ebenen behandelt wird, leitet er diese Bestimmung vielmehr aus der Theorie des Gleichgewichts auf schiefen Ebenen ab, unter Benutzung der Betrachtungen, die er vorher in seinem Werke *Della Scienza Meccanica* angestellt hatte, in welchem er die schiefe Ebene auf den Hebel zurückführt.

Man findet dann die Theorie der zusammengesetzten Bewegungen in den Schriften von **Descartes**, **Roberval**, **Mersenne**, **Wallis** etc.; aber bis zum Jahre 1687, in welchem die *Principia Mathematica* von **Newton** und das Werk *Projet de la Nouvelle Mécanique* von **Varignon** erschienen sind, hatte man noch nicht daran gedacht, bei der Zusammensetzung der Bewegungen die Kräfte an die Stelle der Bewegungen, welche sie erzeugen können, zu setzen, und die zusammengesetzte, aus den beiden gegebenen Kräften resultierende Kraft so zu bestimmen, wie man die zusammengesetzte Bewegung aus zwei gegebenen geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen bestimmt.

Im zweiten Zusatz zum dritten Bewegungsgesetz zeigt **Newton** mit wenigen Worten, wie die Gesetze des Gleichgewichts sich leicht aus der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte herleiten lassen, wenn man die Diagonale eines Parallelogramms als die aus zwei durch die Seiten desselben dargestellten Kräften, zusammengesetzte Kraft annimmt; dieser Gegenstand aber ist bis ins einzelne in dem Werke von **Varignon** behandelt, und die *Nouvelle Mécanique*, welche nach dem 1725 erfolgten Tode ihres Verfassers erschienen ist, enthält eine vollständige Theorie des Gleichgewichts der Kräfte

bei den verschiedenen Maschinen, welche allein aus der Betrachtung der Zusammensetzung oder Zerlegung der Kräfte hergeleitet ist.

11. Das Prinzip von der Zusammensetzung der Kräfte ergibt sofort die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei Kräften, welche auf einen Punkt wirken, während man sie aus dem Gleichgewicht des Hebels nur durch eine Reihe von besonderen Überlegungen hätte herleiten können. Wenn man aber andererseits aus diesem Prinzip die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei an den Enden eines geraden Hebels angebrachten parallelen Kräften finden will, so ist man genöthigt indirecte Betrachtungen anzuwenden, indem man, wie Newton und D'Alembert es gethan haben, an Stelle des geraden Hebels einen Winkelhebel setzt, oder indem man zwei fremde Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, hinzufügt, die aber, wenn man sie mit den gegebenen Kräften zusammensetzt, zu in ihren Richtungen convergenten Kräften führen, oder endlich, indem man annimmt, dass die verlängert gedachten Richtungen der Kräfte sich im Unendlichen treffen, und beweist, dass die zusammengesetzte Kraft durch den Unterstützungspunkt gehen muss. Dies ist die Methode, deren sich Varignon in seiner *Mecanique* bedient. Obgleich also die beiden Prinzipie des Hebels und der Zusammensetzung der Kräfte immer auf dieselben Resultate führen, so ist es doch merkwürdig, dass der einfachste Fall für das eine dieser Prinzipie zum compliciertesten für das andere wird.

12. Man kann aber eine unmittelbare Verbindung zwischen diesen beiden Prinzipien herstellen durch das Theorem, welches Varignon in seiner *Mecanique* (section I., lemme XVI.) gegeben hat, und welches darin besteht, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte in der Ebene eines Parallelogramms Lote auf die Diagonale und auf die beiden der Diagonale anliegenden Seiten fällt, das Produkt der Diagonale in ihr Lot gleich der Summe der Produkte der beiden Seiten in ihre respectiven Lote ist, wenn der Punkt ausserhalb des Parallelogramms liegt, oder gleich der Differenz dieser Produkte, wenn er in dem Parallelogramm liegt. Varignon zeigt durch eine sehr einfache Construction, dass, wenn man Dreiecke bildet, welche die Diagonale und die beiden Seiten zu Grundlinien und den gegebenen Punkt zum gemeinsamen Scheitel haben, das über der Diagonale gebildete Dreieck im ersten Fall gleich der Summe und im zweiten Falle gleich der Differenz der beiden über den Seiten gebildeten Dreiecke ist. Dies ist schon an sich ein schönes Theorem der Geometrie, auch abgesehen von seiner Anwendung auf die Mechanik.

Das Theorem gilt gleichfalls, und der Beweis wäre derselbe, wenn man irgendwo auf der Verlängerung der Diagonale bzw. der Seiten Teile annimmt, welche diesen Linien gleich sind, so dass man, da jede Kraft an jedem beliebigen Punkte ihrer Richtung angebracht gedacht werden kann, allgemein schliessen kann, dass zwei Kräfte, die ihrer Grösse und Richtung nach durch zwei gerade Linien in einer Ebene dargestellt werden, eine zusammengesetzte oder resultierende Kraft haben, die ihrer Grösse und Richtung nach durch eine gerade Linie dargestellt wird, welche in derselben Ebene liegt und, wenn man sie verlängert, durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht. Diese Linie ist ferner so beschaffen, dass, wenn man in dieser Ebene einen beliebigen Punkt annimmt und von diesem Punkte Lote auf sie und die beiden andern verlängerten geraden Linien fällt, das Produkt aus der Resultante in ihr Lot gleich der Summe oder Differenz der respectiven Produkte aus den beiden zusammensetzenden Kräften in ihre Lote ist, je nachdem der Punkt, von dem die drei Lote ausgehen, ausserhalb oder innerhalb der geraden Linien angenommen wird, welche die zusammensetzenden Kräfte vorstellen.

Wenn dieser Punkt in der Richtung der Resultante verlegt wird, so kommt diese Kraft in der Gleichung nicht vor, und es findet Gleichheit zwischen den beiden Produkten der Componenten in ihre Lote statt. Dies ist der Fall bei jedem geraden Hebel und jedem Winkelhebel, wenn der Unterstützungspunkt der Punkt ist, um welchen es sich handelt, weil dann die Wirkung der Resultante durch den Widerstand des Unterstützungspunktes aufgehoben wird.

Das bezeichnete von Varignon herrührende Theorem ist die Grundlage fast aller modernen Lehren über Statik geworden, und in ihm beruht das allgemeine Prinzip der Momente. Sein grosser Vorteil

besteht darin, dass die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf Additionen und Subtraktionen gebracht sind, so dass man, wie gross auch die Zahl der zusammenzusetzenden Kräfte sei, leicht die resultierende Kraft findet, die im Falle des Gleichgewichts Null sein muss.

13. Ich habe den Zeitpunkt der Entdeckung von Varignon auf denjenigen der Veröffentlichung seines *Projet* bezogen, obgleich in der Ankündigung an der Spitze der *Nouvelle Mécanique* bemerkt wird, dass der Verfasser zwei Jahre vorher in der *Histoire de la République des Lettres* eine Abhandlung über die Flaschenzüge veröffentlicht hat, in welcher er sich der zusammengesetzten Bewegungen bediente, um alles zu bestimmen, was auf diese Maschine sich bezieht; aber ich muss bemerken, dass die Angaben dieser Ankündigung nicht exact sind. Die Abhandlung über die Flaschenzüge, um welche es sich handelt, befindet sich nur in den *Nouvelles de la République des Lettres* vom Mai 1687 unter dem Titel *Nouvelle Démonstration générale de l'usage des poulies à moufle*. Der Autor betrachtet darin das Gleichgewicht einer Last, welche an einem Seile befestigt ist, das über eine Rolle geht, und dessen beide Teile nicht parallel sind. Er macht darin weder Gebrauch von dem Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte, noch erwähnt er es auch nur, sondern er wendet die schon bekannten Theoreme über die an Seilen befestigten Gewichte an und citiert die Werke von Pardies und Dechaies über die Statik. In einem zweiten Beweise führt er die Aufgabe auf das Problem des Hebels zurück, indem er die gerade Linie, welche die beiden Punkte verbindet, wo das Seil die Rolle verlässt, als einen Hebel ansieht, der von dem an der Rolle angebrachten Gewicht belastet ist, und dessen Enden durch die beiden Teile des Seiles gezogen werden, welches die Rolle hält.

Um nichts auszulassen, was die Geschichte des Gesetzes von der Zusammensetzung der Kräfte betrifft, muss ich ein Wort über eine kleine von Lami 1687 unter dem Titel *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques* veröffentlichte Schrift sagen. Der Autor bemerkt, dass, wenn ein Körper durch zwei Kräfte nach zwei verschiedenen Richtungen hin gestossen wird, er notwendig einer mittleren Richtung folgt, so dass, wenn der Weg nach dieser Richtung ihm verschlossen wäre, er in Ruhe bleiben würde, und die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht hielten. Er bestimmt nun die mittlere Richtung durch die Zusammensetzung zweier Bewegungen, welche der Körper im ersten Augenblick, vermöge jeder der beiden Kräfte annehmen würde, wenn sie getrennt wirkten, und dies giebt ihm die Diagonale des Parallelogramms, dessen beide Seiten die in gleicher Zeit unter der Einwirkung der beiden Kräfte durchlaufenen Räume und folglich diesen Kräften proportional sein würden. Daraus zieht er sogleich das Theorem, dass die beiden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Sinus der Winkel, welche ihre Richtungen mit der mittleren Richtung bilden, die der Körper einschlagen würde, wenn er nicht gehemmt wäre, und er macht davon Anwendung auf die schiefe Ebene und auf den Hebel, wenn dessen Enden durch Kräfte gezogen werden, deren Richtungen gegen einander geneigt sind; aber für den Fall, wo diese Richtungen parallel laufen, wendet er unsichere und wenig folgerichtige Überlegungen an.

Die Übereinstimmung des von Lami angewendeten Prinzips mit dem von Varignon hat den Verfasser der *Histoire des Ouvrages des Savants* (April 1688) zu dem Ausspruch bewogen, es habe den Anschein, als ob der erstere die Entdeckung seines Prinzips dem letzteren verdanke. Lami hat sich gegen diese Beschuldigung in einem durch das *Journal des Savants* vom 13. September 1688 veröffentlichten Brief gerechtfertigt, auf welchen der Herausgeber der *Histoire* im Monat December desselben Jahres geantwortet hat. Dieser Streit aber, an welchem Varignon nicht Theil nahm, hat nicht länger gedauert, und die Schrift von Lami scheint in Vergessenheit geraten zu sein.

Die Einfachheit des Prinzips von der Zusammensetzung der Kräfte und die Leichtigkeit, mit der dieses Prinzip sich auf alle Probleme des Gleichgewichts anwenden lässt, haben es von allen Forschern sogleich nach seiner Entdeckung annehmen lassen und man kann sagen, dass es als Basis für fast alle Werke der Statik dient, die seitdem erschienen sind.

14. Man kann indessen nicht umhin anzuerkennen, dass das Prinzip des Hebels allein den Vorteil hat, auf die Natur des Gleichgewichts an sich, als eines von der Bewegung unabhängigen Zustandes,

betrachtet, gegründet zu sein. Übrigens besteht ein wesentlicher Unterschied in der Art, die Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, nach diesen beiden Prinzipien zu bemessen. Wenn man nicht dazu gelangt wäre, diese Prinzipie durch ihre Ergebnisse zu verbinden, so hätte man mit Recht zweifeln können, ob es erlaubt ist, an die Stelle des **Fundamentalprinzips** vom Hebel ein Prinzip zu setzen, welches aus der fremden Betrachtung der zusammengesetzten Bewegungen folgt.

In der That sind beim Gleichgewicht des Hebels die Kräfte Gewichte, oder können als solche angesehen werden, und eine Kraft ist nur das doppelte oder dreifache einer anderen, wenn sie durch die Vereinigung zweier oder dreier gleicher Kräfte gebildet wird, deren jede so wirkt wie die andern. Das Bestreben, sich zu bewegen, kann nur bei allen Kräften als gleich stark vorausgesetzt werden, welches auch die Intensität dieser Kräfte sein mag, während man bei dem Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte den Wert dieser Kräfte nach dem Grade der Geschwindigkeit schätzt, welche sie dem Körper, an welchem sie wirken, erteilen würden, wenn jede von ihnen für sich frei wirken könnte. Hierin liegt vielleicht die Differenz in der Art die Kräfte aufzufassen, welche die Gelehrten lange Zeit verhindert hat, die bekannten Regeln für die Zusammensetzung der Bewegungen auf die Theorie des Gleichgewichts anzuwenden, deren einfachster Fall der des Gleichgewichts schwerer Körper ist.

15. Man hat seitdem versucht, das Prinzip von der Zusammensetzung der Kräfte unabhängig von der Betrachtung der Bewegung zu machen und es nur auf an sich evidente Wahrheiten zu gründen. Daniel Bernouilli hat zuerst in den *Commentaren der Petersburger Akademie*, Band I, einen sehr geistreichen, aber langen und complicierten Beweis vom Parallelogramm der Kräfte gegeben, der darauf von D'Alembert in dem ersten Bande seiner *Opuscules* vereinfacht worden ist.

Dieser Beweis gründet sich auf folgende zwei Prinzipie:

1. Wenn zwei Kräfte auf denselben Punkt in verschiedenen Richtungen wirken, so haben sie zur Resultante eine einzige Kraft, deren Richtung den von den beiden Richtungen der beiden Kräfte eingeschlossenen Winkel in zwei gleiche Teile teilt, wenn die beiden Kräfte gleich gross sind, und deren Betrag gleich der Summe der Beträge der beiden Kräfte ist, wenn dieser Winkel Null ist, und gleich der Differenz dieser Beträge, wenn der Winkel ein gestreckter (180°) ist.
2. Gleiche Vielfache derselben Kräfte, oder Kräfte, die gegebenen Kräften proportional sind, haben eine Resultante, welche dasselbe Vielfache der Resultante der gegebenen Kräfte ist, also eine solche, welche dieser Resultante proportional ist, falls die Winkel zwischen den Kräften in beiden Fällen dieselben sind.

Dieses zweite Prinzip ist evident, wenn man die Kräfte als Größen betrachtet, die man addieren oder subtrahieren kann.

Das erstere beweist man, indem man die Bewegung betrachtet, welche ein durch zwei Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind, getriebener Körper annehmen muss, und welche, da nur eine einzige Bewegung möglich ist, von einer Kraft herrühren muss, die allein auf ihn in der Richtung seiner Bewegung wirkt. Man kann also sagen, dass dieses Prinzip nicht gänzlich von der Betrachtung der Bewegung frei ist.

Was die Richtung der Resultante im Fall der Gleichheit beider Kräfte betrifft, so ist klar, dass kein Grund vorhanden ist, warum sie zu einer der beiden Kräfte mehr geneigt sein sollte als zur anderen, sie muss den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Kräfte in zwei gleiche Teile teilen.

Man hat später die Grundlage dieses Beweises in die Analysis übertragen, und man hat diesem Beweise verschiedene mehr oder weniger einfache Formen gegeben, indem man die Resultante als Function der Componenten und des von diesen gebildeten Winkels betrachtete. Es sei auf Band II der *Mélanges de la Société de Turin*, die *Mémoires de l'Académie des Sciences* von 1769, Band VI der *Opuscules* von D'Alembert etc. hingewiesen. Man muss aber gestehen, dass, indem man so das Prinzip von der Zusammensetzung der Kräfte von dem Prinzip der Zusammensetzung der Bewegungen

trennt, man ihm seine Hauptvorteile, die Klarheit und Einfachheit, raubt und es auf ein Resultat geometrischer oder analytischer Constructionen reduziert.

16. Ich komme jetzt zum dritten Prinzip, dem der virtuellen Geschwindigkeiten. Unter virtueller Geschwindigkeit muss man die Geschwindigkeit verstehen, welche ein Körper, der sich gerade im Gleichgewicht befindet, bereit ist anzunehmen, in dem Augenblicke, wo das Gleichgewicht gestört worden ist, d. h. die Geschwindigkeit, welche der Körper wirklich in dem ersten Augenblicke seiner Bewegung annehmen würde. Das genannte Prinzip besteht aber darin, dass Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn sie im umgekehrten Verhältnisse ihrer virtuellen Geschwindigkeiten stehen, diese in den Richtungen dieser Kräfte gemessen.

Schon bei der oberflächlichsten Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen am Hebel und an anderen Maschinen ist es leicht das Gesetz zu erkennen, dass die Last und die Kraft zu einander im umgekehrten Verhältnisse der Räume stehen, welche sie in derselben Zeit durchlaufen können. Trotzdem scheinen die Alten keine Kenntnis von diesem Gesetze gehabt zu haben. Guido Ubaldi ist vielleicht der erste, der es bei dem Hebel und bei den beweglichen Rollen oder Flaschenzügen bemerkt hat. Galilei hat es darauf bei den schiefen Ebenen und den von diesen abhängigen Maschinen erkannt, und er hat es als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts der Maschinen angesehen. Man sehe seine „Mechanik“ und das Scholion zum zweiten Lehrsatz des dritten Dialogs in der Bologneser Ausgabe vom Jahre 1655.

Galilei versteht unter *Moment* eines Gewichtes oder einer an einer Maschine wirkenden Kraft die Anstrengung, die Wirkung, die Energie oder den Anstoss (impetus) dieser Kraft, um die Maschine in Bewegung zu setzen. Nach ihm besteht zwischen zwei Kräften Gleichgewicht, wenn ihre Momente, um die Maschine zu bewegen, gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind, und er zeigt, dass das Moment immer proportional der mit der virtuellen Geschwindigkeit multiplicirten Kraft ist, und von der Art abhängt, wie die Kraft wirkt. Dieselbe Auffassung der Momente hat auch Wallis in seiner 1669 erschienenen Mechanik bekundet. Der Autor nimmt hier das Prinzip der Gleichheit der Momente zur Grundlage der Statik und leitet aus ihm die Theorie des Gleichgewichts bei den hauptsächlichsten Maschinen ab.

Heute versteht man gewöhnlich unter *Moment* nur das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Richtung von einem Punkte oder von einer Linie oder von einer Ebene, d. h. in den Hebelarm, an welchem sie wirkt. Es scheint mir aber, dass die durch Galilei und Wallis gegebene Auffassung des Momentes natürlicher und allgemeiner ist, und ich sehe nicht ein, warum man sie verlassen hat, um an ihre Stelle eine andere zu setzen, welche nur den Wert des Momentes in gewissen Fällen, wie beim Hebel etc., ausdrückt.

Descartes hat auf ähnliche Weise die ganze Statik auf ein einziges Prinzip zurückgeführt, welches seinem Wesen nach mit demjenigen Galilei's übereinkommt, aber auf eine weniger allgemeine Weise dargestellt ist. Dieses Prinzip besagt, dass man weder mehr noch weniger Kraft bedarf, um ein Gewicht auf eine gewisse Höhe zu heben, als dazu nötig ist, um ein schwereres Gewicht auf eine so viel Mal geringere Höhe, oder ein weniger schweres Gewicht auf eine so viel Mal grössere Höhe zu heben. (Man sehe den 73. Brief des I. Bandes, 1657, und die in den hinterlassenen Werken gedruckte *Mécanique*). Daraus folgt, dass Gleichgewicht zwischen zwei schweren Massen besteht, wenn diese so verteilt sind, dass die Wege, geschätzt in Richtung der Verticalen, welche sie zugleich durchlaufen können, im umgekehrten Verhältniss der Gewichte dieser Massen stehen. Aber in der Anwendung dieses Prinzips auf die verschiedenen Maschinen darf man nur die im ersten Augenblick der Bewegung durchlaufenen Räume betrachten, welche den virtuellen Geschwindigkeiten proportional sind, andernfalls würde man nicht die wirklichen Gesetze des Gleichgewichts erhalten.

Ob man nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, wie Galilei, als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts betrachtet, oder ob man es mit Descartes und Wallis für die wahre Ursache des Gleichgewichts nehmen will, jedenfalls muss man gestehen, dass es die ganze Einfachheit hat,

welche man bei einem **Fundamentalprinzip** wünschen kann, und wir werden weiter unten sehen, wie sehr dieses Prinzip in Folge seiner Allgemeinheit empfehlenswert geworden ist.

Torricelli, Galilei's berühmter Schüler, ist der Autor eines anderen Prinzips, welches ebenfalls von demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten abhängt. Es besteht darin, dass wenn zwei Körper mit einander verbunden sind und eine solche Lage haben, dass ihr Schwerpunkt nicht fallen kann, sie in dieser Lage im Gleichgewicht sind. Torricelli wendet es nur auf die schiefe Ebene an, aber man kann sich leicht überzeugen, dass es auch bei den anderen Maschinen gilt. Man sehe sein Werk *de Motu gravium naturaliter descendantium* vom Jahre 1644.

Das Prinzip von Torricelli hat ein anderes zur Folge gehabt, von dem einige Autoren Gebrauch gemacht haben, um mit grösserer Leichtigkeit verschiedene Aufgaben der Statik zu lösen. Es besagt, dass bei einem System von schweren Körpern, wenn diese sich im Gleichgewicht befinden, der Schwerpunkt so tief als möglich liegt. Aus der Theorie der Maxima und Minima weiss man in der That, dass der Schwerpunkt am tiefsten liegt, wenn das Differential seines Falles Null ist, oder was auf dasselbe hinauskommt, wenn der Schwerpunkt weder steigt noch fällt, während das System seine Lage unendlich wenig ändert.

17. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten kann auf folgende Weise sehr allgemein gemacht werden:

Wenn ein beliebiges System von beliebig vielen Körpern oder Punkten, deren jeder durch beliebige Kräfte angegriffen wird, im Gleichgewicht ist, und man diesem System eine beliebige kleine Bewegung erteilt, in Folge deren jeder Punkt eine unendlich kleine Strecke durchläuft, so ist die Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit der Strecke, welche der Punkt, an dem sie wirkt, in der Richtung dieser Kraft durchläuft, — eine Strecke, die man als Maass der virtuellen Geschwindigkeit ansehen und geradezu als virtuelle Geschwindigkeit bezeichnen kann — immer gleich Null, wenn man die kleinen im Sinne der Kräfte durchlaufenen Strecken als positiv, die im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen als negativ ansieht.

Jean Bernoulli ist, so viel ich weiss, der erste, welcher diese grosse Allgemeinheit des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten und seinen Nutzen zur Lösung der Probleme der Statik bemerkt hat. Man sieht dies aus einem seiner Briefe an Varignon von 1717, den der letztere an die Spitze des neunten Abschnittes seiner *Nouvelle Mecanique* gestellt hat, ein Abschnitt, der gänzlich dazu dient, die Wahrheit und den Gebrauch des genannten Prinzips durch verschiedene Anwendungen zu zeigen.

Dasselbe Prinzip hat zur Entstehung eines anderen Prinzips Veranlassung gegeben, welches Maupertuis in den *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* für 1740 unter dem Namen Gesetz der Ruhe vorgeschlagen hat, und welches Euler später in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1751 weiter entwickelt und verallgemeinert hat. Endlich ist es noch dasselbe Prinzip, welches demjenigen als Basis dient, das Courtivron in den *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* für 1748 und 1749 aufgestellt hat.

Im allgemeinen glaube ich voraussagen zu können, dass alle allgemeinen Prinzipie, welche man noch in der Lehre vom Gleichgewicht entdecken könnte, lediglich dieses Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten sein werden, nur anders aufgefasst und anders ausgedrückt.

Aber dieses Prinzip ist nicht nur an sich sehr einfach und allgemein, sondern es hat auch den ausserordentlichen Vorteil vor allen andern voraus, dass es sich in eine allgemeine Formel übersetzen lässt, welche alle Probleme enthält, die man über das Gleichgewicht der Körper aufstellen kann. Wir wollen diese Formel in ihrer ganzen Ausdehnung auseinandersetzen und sogar versuchen, sie auf eine noch allgemeinere Weise darzustellen und neue Anwendungen von ihr zu geben.

18. Was die Natur des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten betrifft, so muss man zugeben, dass dieses Prinzip an sich nicht evident genug ist, dass es als ursprüngliches Axiom hingestellt werden kann; aber man kann es ansehen als den allgemeinen Ausdruck der Gesetze des Gleichge-

wichts, welche aus den beiden vorher erklärten Prinzipien abgeleitet sind. Bei den Beweisen, welche man von diesem Prinzip gegeben hat, hat man es immer durch mehr oder weniger directe Mittel von diesen abhängig gemacht. Aber es giebt in der Statik ein anderes allgemeines Prinzip, das vom Hebelgesetz und der Regel für die Zusammensetzung der Kräfte unabhängig ist, wenn es auch die Forscher gewöhnlich darauf beziehen, welches das natürliche Fundament des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten zu sein scheint; man kann es das Prinzip der Rollen nennen.

Wenn mehrere Rollen mit einander an demselben Kloben verbunden sind, so bilden sie in ihrer Vereinigung einen Flaschenzug (Polispaste). Die Vereinigung zweier Flaschenzüge, von denen der eine fest, der andere beweglich ist, und die durch ein und dasselbe Seil umfasst sind, dessen eines Ende fest gemacht ist und dessen anderes Ende durch eine Kraft gezogen wird, bildet eine Maschine, in welcher die Kraft sich zu der am beweglichen Flaschenzug angebrachten Last, wie die Einheit zu der Zahl der Windungen verhält, in welchen das Seil um diesen Flaschenzug herumgeht, wenn man annimmt, dass diese Windungen alle parallel sind, und man von der Reibung und der Starrheit des Seiles absieht. Denn da das Seil in seiner ganzen Länge gleich stark gespannt ist, so wird die Last durch ebenso viele der Kraft, mit welcher das Seil gespannt ist, gleiche Kräfte gehalten, als Windungen vorhanden sind, welche den beweglichen Flaschenzug halten; denn diese Windungen sollten parallel sein und können als ein einziges Ganze angesehen werden, wenn man sich den Durchmesser der Rollen unendlich klein denkt.

Vermehrt man die festen und beweglichen Rollensysteme und lässt sie alle von demselben Seil vermittelt verschiedener fester, die Richtung des Seils ändernder Rollen umfassen, so wird dieselbe Kraft, die an seinem beweglichen Ende angebracht ist, so viele Lasten halten können, als es bewegliche Flaschenzüge giebt, und jede dieser Lasten wird sich zu dieser Kraft verhalten, wie die Zahl der Seile des Flaschenzuges, welcher es trägt, sich zur Einheit verhält.

Wir wollen der Einfachheit halber ein Gewicht an die Stelle der Kraft setzen und an das Ende des Seils, welches dieses Gewicht trägt, das wir zur Einheit nehmen, über eine feste Rolle gelegt denken. Ferner stellen wir uns vor, dass die verschiedenen beweglichen Flaschenzüge anstatt Lasten zu tragen, an als Punkte gedachten Körpern befestigt sind, und wir verteilen sie unter sich so, dass sie ein beliebiges gegebenes System bilden. Auf diese Weise wird dasselbe Gewicht vermittelt des Seiles, welches alle Flaschenzüge umfasst, verschiedene Kräfte erzeugen, welche auf die verschiedenen Punkte des Systems wirken, und zwar wirkt jede dieser Kräfte in der Richtung, in welcher das Seil von dem betreffenden beweglichen Flaschenzuge in den verschiedenen Windungen zu dem zugehörigen festen läuft, und jede dieser Kräfte verhält sich zu dem am Ende des Seils wirkenden Gewicht, wie die Zahl der Windungen, die den betreffenden Flaschenzug trägt, zur Einheit. Diese Kräfte werden also selbst durch die Zahl der Windungen dargestellt werden, welche zusammenwirken, um sie bezüglich durch ihre Spannung zu erzeugen.

Es ist nun offenbar, dass das Gewicht, wenn das durch diese verschiedenen Kräfte gezogene System im Gleichgewicht bleiben soll, infolge einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung der Punkte des Systems nicht fallen darf; denn da ein Gewicht von selbst schon immer zu fallen strebt, so wird es, wenn eine Verrückung des Systems möglich ist, die ihm zu fallen gestattet, von selbst schon fallen und seinerseits diese Verrückung in dem System erzeugen.

Wir bezeichnen mit α, β, γ etc. die unendlich kleinen Strecken, welche vermöge dieser Verrückung die verschiedenen Punkte des Systems in der Richtung der Kräfte, welche sie ziehen, durchlaufen würden, und mit P, Q, R etc. die bezüglichen Zahlen der Flaschenzugseile, die an diesen Punkten angebracht sind und durch ihre Spannung die Kräfte erzeugen. Zunächst ist klar, dass die Strecken α, β, γ etc. zugleich auch die Strecken angeben, um welche die beweglichen Flaschenzüge sich den festen, welche zu ihnen gehören, bei dieser Verrückung nähern würden, und dass diese Annäherungen die Stücke des Seiles, welches sie umfasst, um die Grössen $P\alpha, Q\beta, R\gamma$ etc. verkürzen würden. Da nun die ganze Länge des Seils sich nicht ändern soll, so wird das an seinem Ende wirkende Gewicht

um die Strecke

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$$

fallen. Also muss, wenn zwischen den durch die Zahlen P, Q, R etc. dargestellten Kräften Gleichgewicht vorhanden sein soll, die Gleichung bestehen:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = 0,$$

und diese Gleichung bildet eben den analytischen Ausdruck des allgemeinen Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten.

19. Es könnte scheinen, dass auch dann, wenn die Grösse $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$ nicht Null, sondern negativ ist, das Gleichgewicht herzustellen wäre, weil es doch unmöglich ist, dass das Gewicht von selbst steige; aber man muss beachten, dass, welches auch die Verbindung der Punkte des gegebenen Systems ist, die Relationen, welche aus dieser Verbindung zwischen den unendlich kleinen Grössen α, β, γ etc. resultieren, nur durch Differential-Gleichungen ausgedrückt werden können, und folglich lineare Relationen zwischen diesen Grössen sind. Es wird also notwendig eine oder mehrere unter diesen Grössen geben, die unbestimmt bleiben, und welche beliebig gross oder klein genommen werden können. Deshalb wird man allen diesen Grössen solche Werte zu verleihen vermögen, dass sie vermöge der zwischen ihnen bestehenden Relationen stets zugleich das Zeichen ändern können. Daraus folgt, dass wenn, bei einer gewissen Verrückung des Systems, der Wert der Grösse $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$ negativ ist, er auch als positiver Wert existieren kann, wenn man die Grössen α, β, γ etc. mit entgegengesetzten Vorzeichen nimmt; die entgegengesetzte Verrückung, welche hiernach in gleicher Weise möglich ist, würde also das Gewicht fallen lassen und das Gleichgewicht zerstören.

20. Man kann umgekehrt zeigen, dass wenn die Gleichung

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = 0$$

für alle möglichen unendlich kleinen Verrückungen des Systems gilt, dasselbe notwendig im Gleichgewicht sein muss; denn da das Gewicht bei diesen Verrückungen in Ruhe bleibt, so bleiben die Kräfte, welche auf das System wirken, in ihrem früheren Zustande, und es ist kein Grund weiter dafür, dass sie eher die eine der beiden Verrückungen, in welchen die Grössen α, β, γ etc. entgegengesetzte Vorzeichen haben, erzeugen sollten als die andere. Dies ist der Fall bei der Waage, die im Gleichgewicht bleibt, weil kein Grund vorhanden ist, dass sie sich nach der einen Seite mehr neige als nach der andern.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das wir so für unter sich commensurable Kräfte bewiesen haben, wird auch für beliebige incommensurable Kräfte gelten, da man weiss, dass jeder Satz, den man für commensurable Grössen beweisen kann, auf gleiche Weise durch die „Zurückführung auf's Absurde“ bewiesen werden kann, wenn diese Größen incommensurabel sind.

Abschnitt II.

Allgemeine Formel der Statik für das Gleichgewicht irgend eines Systems von Kräften, nebst der Methode von dieser Formel Gebrauch zu machen.

1. Die allgemeine Bedingung des Gleichgewichts bei den Maschinen besteht darin, dass die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Geschwindigkeiten der Punkte, an denen sie wirken, wenn diese Geschwindigkeiten in der Richtung der Kräfte gemessen werden.

In diesem Gesetz besteht das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, ein Prinzip, das, wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, schon seit langer Zeit als das Fundamentalprinzip des Gleichgewichts angesehen wird, und das man folglich als eine Art Axiom der Mechanik betrachten kann.

Um diesen Satz in eine Formel zu bringen, wollen wir annehmen, die Kräfte P, Q, R etc., die nach gegebenen Linien wirken, seien unter einander im Gleichgewicht. Wir wollen uns ferner von den Punkten, an denen diese Kräfte wirken, gerade Linien p, q, r etc. ausgehend denken, die in der Richtung dieser Kräfte gezogen sind, und mit dp, dq, dr etc. die Variationen oder Differentiale dieser Linien bezeichnen, insofern sie von einer unendlich kleinen Veränderung in der Stellung der verschiedenen Körper oder Punkte des Systems herrühren.

Es ist klar, dass diese Differentiale die Räume ausdrücken werden, welche die Angriffspunkte der Kräfte P, Q, R etc. in einem und demselben Augenblick in den Richtungen dieser Kräfte durchlaufen, wenn man voraussetzt, dass diese Kräfte die Linien p, q, r zu vergrößern streben. Die Differentiale dp, dq, dr etc. werden also proportional den virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P, Q, R etc. sein und werden der Einfachheit halber für diese Geschwindigkeiten gesetzt werden können.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, dass zuerst 2 Kräfte P und Q im Gleichgewicht sind. Nach dem Gesetze für das Gleichgewicht zweier Kräfte müssen die Grössen P und Q unter einander im umgekehrten Verhältniss der Differentiale dp, dq stehen; aber es ist leicht zu begreifen, dass Gleichgewicht zwischen zwei Kräften nicht stattfindet, wenn diese nicht derart verteilt sind, dass, während die eine von ihnen nach irgend einer Richtung bewegt, die andere gezwungen ist, in einem entgegengesetzten Sinn zu bewegen; daraus folgt, dass die Werte der Differentiale dp und dq entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen; nimmt man die Werte der Kräfte P und Q als positiv an, so folgt also für das Gleichgewicht

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp} \quad \text{oder besser} \quad Pdp + Qdq = 0.$$

Dies ist die allgemeine Formel für das Gleichgewicht zweier Kräfte.

Betrachten wir jetzt das Gleichgewicht dreier Kräfte P, Q, R , deren virtuelle Geschwindigkeiten durch die Differentiale dp, dq, dr dargestellt sind. Es sei $Q = Q' + Q''$, und wir nehmen an, was erlaubt ist, der Teil Q' der Kraft Q sei so beschaffen, dass $Pdp + Q'dq = 0$ ist; Q' wird also der Kraft P das Gleichgewicht halten, und damit völliges Gleichgewicht statfinde, muss der andere Teil Q'' derselben Kraft Q , der dritten Kraft R das Gleichgewicht halten. Daraus folgt

$$Q''dq + Rdr = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so folgt, weil $Q' + Q'' = Q$ ist,

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0.$$

Hat man noch eine vierte Kraft S , deren virtuelle Geschwindigkeit durch ds dargestellt ist, so setzt man

$$Q = Q' + Q'' \text{ und } Pdp + Q'dq = 0$$

und

$$R = R' + R'' \text{ und } Q''dq + R'dr = 0.$$

Der Teil Q' der Kraft Q wird also der Kraft P allein das Gleichgewicht halten; der Teil R' von R wird dem anderen Theil Q'' von Q das Gleichgewicht halten, und damit völliges Gleichgewicht zwischen den Kräften P, Q, R, S stattfindet, muss der restierende Teil R'' der Kraft R der letzten Kraft S das Gleichgewicht halten, und man muss folglich haben

$$R''dr + Sds = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den zwei vorausgehenden entsprechenden, so folgt

$$Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$$

und so weiter, wie gross auch die Zahl der Kräfte sei.

2. Man hat hiernach allgemein als Bedingung für das Gleichgewicht einer Anzahl von Kräften P, Q, R etc., die nach den Linien $p, q, r, \dots$ gerichtet sind und an irgend einem System von Körpern oder an auf eine beliebige Art verteilten Punkten angreifen, eine Gleichung von der Form

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0.$$

Dies ist die allgemeine Formel der Statik für das Gleichgewicht irgend eines Systems von Kräften.

Wir wollen jedes Glied der Formel, wie z. B. Pdp , das Moment der betreffenden Kraft, in unserm Beispiel das der Kraft P , nennen, und das Wort Moment in der Bedeutung nehmen, welche Galilei ihm gegeben hat, nämlich als das Produkt aus der Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit. Die allgemeine Formel der Statik sagt dann aus, dass beim Gleichgewicht die Summe der Momente aller Kräfte Null sein muss.

Bei der Anwendung dieser Formel wird alle Schwierigkeit darin bestehen, die Werte der Differentiale dp, dq, dr etc. der Natur des gegebenen Systems gemäss zu bestimmen.

Wir wollen dazu das System in zwei verschiedenen, aber einander unendlich nahen Lagen betrachten, und die allgemeinsten Ausdrücke für die besagten Differentiale suchen, indem wir so viele unbestimmte Grössen in dieselben einführen, als willkürliche Elemente durch die Variation der Lage des Systems entstanden sind. Die so gewonnenen Ausdrücke für dp, dq, dr etc. wollen wir dann in die gegebene Gleichung substituieren. Nun muss diese Gleichung unabhängig von allen den unbestimmten Grössen gelten, wenn das Gleichgewicht des Systems allgemein und in jedem Sinne bestehen soll. Daher haben wir die bezüglichen Summen aller Glieder, die mit denselben unbestimmten Grössen behaftet sind, einzeln gleich Null zu setzen. Dadurch bekommen wir so viele besondere Gleichungen, als unbestimmte Grössen vorhanden sind; es ist aber nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass die gesamte Anzahl aller Gleichungen allezeit der Anzahl der unbekannten Grössen gleich ist, die bei der Lage des Systems in Frage stehen; wir erhalten also durch diese Methode so viele Gleichungen, als nötig sind, den Zustand des Gleichgewichts des Systems zu bestimmen.

Auf diese Art sind alle Schriftsteller verfahren, die bis auf unsere Zeit den Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten zur Auflösung statischer Aufgaben angewendet haben; aber diese Methode,

dieses Prinzip anzuwenden, erfordert geometrische Zeichnungen und Betrachtungen, welche die Auflösungen ebenso lang machen, als wenn man sie von den gewöhnlichen statischen Grundsätzen herleitete, und darin lag vielleicht der hauptsächlichste Grund, warum man nicht in allen Fällen Gebrauch von dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gemacht hat, da es doch scheint, als ob man es wegen der Einfachheit und Allgemeinheit dieses Prinzips gerade hätte thun müssen.

3. Aufgabe dieses Werkes soll es sein, die Mechanik auf rein analytische Operationen zurückzuführen; die Formel, die wir gefunden haben, macht es uns leicht, diese Aufgabe zu lösen. Es handelt sich nur darum, die Werte der nach den Richtungen der Kräfte P, Q, R etc. angenommenen Linien auf die allgemeinste Art analytisch auszudrücken; dann erhält man durch einfache Differentiation die Werte der virtuellen Geschwindigkeiten dp, dq, dr etc.

Dabei ist nur zu bemerken, dass man in der Differentialrechnung, wenn mehrere Grössen sich zugleich ändern, annimmt, dass sie alle zu gleicher Zeit um ihre Differentiale zunehmen, und wenn sich nach der Natur der Frage einige von ihnen vermindern müssen, während die andern sich vermehren, man alsdann den Differentialen derjenigen, die sich vermindern, das Vorzeichen minus giebt.

Die Differentiale dp, dq, dr etc., welche die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P, Q, R etc. darstellen, werden also positiv oder negativ genommen werden müssen, je nachdem diese Kräfte die Linien p, q, r etc. zu vergrössern oder zu verkleinern streben; aber da die allgemeine Formel des Gleichgewichts sich nicht ändert, wenn sich die Vorzeichen aller Terme ändern, so kann man beliebig die Differentiale der Linien, welche zugleich abnehmen oder die derjenigen, welche zugleich wachsen, als positiv annehmen, wenn man nur die Differentiale der Linien, welche sich im entgegengesetzten Sinne ändern, auch mit entgegengesetzten Zeichen versieht. Betrachten wir also die Kräfte als positiv, so werden ihre Momente Pdp, Qdq etc. positiv oder negativ sein, je nachdem ihre virtuellen Geschwindigkeiten dp, dq etc. positiv oder negativ sind; will man die Kräfte im entgegengesetzten Sinne wirken lassen, so wird man auch den Grössen, welche diese Kräfte darstellen, das Vorzeichen minus zu geben oder die Vorzeichen ihrer Momente zu verändern haben.

Es resultiert daraus die allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts, dass irgend ein System von Kräften im Gleichgewicht beharrt, wenn die Wirkungsrichtung bei jeder der Kräfte umgekehrt wird, vorausgesetzt, dass die Constitution des Systems keine Veränderung durch die Veränderung der Richtung der Kräfte erleidet.

4. Wie nun auch die Kräfte, welche auf ein gegebenes System von Körpern oder Punkten wirken, beschaffen sein mögen, so kann man sie stets so betrachten, als ob sie nach Punkten gerichtet wären, die in den Linien, die ihre Richtungen fixieren, liegen.

Wir wollen diese Punkte Mittelpunkte der Kräfte nennen, und wir setzen für die Linien p, q, r etc. die respektiven Entfernungen dieser Mittelpunkte von denjenigen Punkten des Systems, an denen die Kräfte P, Q, R etc. angreifen. In diesem Falle ist es klar, dass diese Kräfte die Linien p, q, r etc. zu verkleinern streben, und man muss folglich ihren Differentialen das Vorzeichen minus geben; ändert man aber alle Vorzeichen, so bleibt die Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0$$

bestehen. Nun können die Mittelpunkte der Kräfte sowohl ausserhalb des Systems als in dem System liegen und ein Theil desselben sein; hiernach zerfallen die Kräfte in äussere und innere.

Im ersten Falle ist es klar, dass die Differentiale dp, dq, dr etc. die ganzen Variationen der Linien p, q, r etc. ausdrücken, welche von der Veränderung der Lage des Systems herrühren, sie sind folglich die vollständigen Differentiale der Grössen p, q, r etc., wenn man alle Grössen, die sich auf die Lage des Systems beziehen, als Variable, und diejenigen, welche sich auf die Lage der verschiedenen Kraft-Mittelpunkte beziehen, als Constanten ansieht.

Im zweiten Falle werden einige der Körper des Systems selbst Mittelpunkte der Kräfte sein, welche auf andere Körper des Systems wirken, und wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung werden diese Körper zu gleicher Zeit Kraftcentren sein, welche auf die ersten wirken.

Betrachten wir daher zwei Körper, die auf einander mit einer gewissen Kraft P wirken, sei es nun, dass diese Kraft herrührt von der Anziehung oder Abstossung der Körper, oder von der Spannung einer zwischen ihnen befindlichen Feder, oder von irgend einer anderen Ursache, und ist p die Distanz zwischen diesen beiden Körpern, dp' die Variation dieser Distanz, insofern sie von der Veränderung des Ortes eines dieser Körper abhängt, so ist klar, dass man in Bezug auf diesen Körper Pdp' für das Moment der Kraft P hat; ebenso erhält man, wenn man durch dp'' die Variation derselben Distanz p , insofern sie von der Veränderung des Ortes des andern Körpers herrührt, bezeichnet, Pdp'' als Moment von P in Bezug auf den anderen Körper. Das ganze Moment, das zu dieser Kraft gehört, kann also durch $P(dp' + dp'')$ ausgedrückt werden. Man sieht aber leicht, dass $dp' + dp''$ das vollständige Differential von p ist, welches wir mit dp bezeichnen, weil die Distanz p nur durch die Veränderung der Orte der beiden Körper eine Variation erleiden kann; das fragliche Moment wird also einfach durch Pdp gegeben sein. Man kann diese Schlüsse ausdehnen auf so viele Körper, wie man will.

5. Hieraus folgt, dass, um die Summen der Momente aller Kräfte (seien es äussere oder innere) eines gegebenen Systems zu erhalten, man jede der Kräfte, die auf die verschiedenen Körper oder Punkte des Systems wirken, besonders zu betrachten hat, und dass man die Summe der Produkte dieser verschiedenen Kräfte, jede Kraft multipliciert mit dem Differential der respectiven Entfernung zwischen den beiden Endpunkten ihres Wirkungsbereichs, d. h. zwischen dem Punkt, auf den diese Kraft wirkt, und dem, von dem sie ausgeht, bilden muss. Hierbei hat man in diesen Differentialien als Variable alle Grössen anzusehen, die von der Stellung des Systems abhängen, und als constant alle diejenigen, die sich auf äussere Punkte oder Centren beziehen, also diese letzteren Punkte als fest zu betrachten, während die Lage des Systems eine Aenderung erleidet. Setzt man die Summe der so berechneten Momente gleich Null, so erhält man die allgemeine Formel der Statik.

6. Um dem analytischen Ausdruck dieser Formel die ganze Allgemeinheit und Einfachheit, deren sie fähig ist, zu geben, bezieht man die Lage aller Körper oder Punkte eines gegebenen Systems, wie die Lage der festen Centren, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen parallel zu drei im Raume festen Axen sind.

Wir wollen die Coordinaten der Punkte, an denen die Kräfte angreifen, im allgemeinen mit x, y, z bezeichnen, und sie in der Folge durch einen Strich oder durch mehrere Striche unterscheiden, entsprechend den verschiedenen Punkten des Systems.

Wir bezeichnen ferner mit a, b, c die Coordinaten für die Kraftcentren.

Es ist klar, dass die Entfernungen p, q, r etc. zwischen den Angriffspunkten und Kraftcentren allgemein durch die Grösse ausgedrückt werden

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

worin a, b, c Constanten sind, oder wenigstens als Constanten angesehen werden müssen, falls sie sich auf Punkte ausserhalb des Systems beziehen, falls also die Kräfte äussere sind, während x, y, z sich ändern; in dem Falle dagegen, wo die Kräfte innere sind und von einigen der Körper des Systems selbst ausgehen, gehen die Grössen a, b, c in x''' etc., y''' etc., z''' etc. über und sind variabel.

Hat man auf diese Weise die Ausdrücke für die endlichen Grössen p, q, r etc. in bekannten Functionen der Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems erhalten, so hat man nur nötig auf die gewöhnliche Art zu differenzieren, indem man diese Coordinaten als allein veränderlich ansieht.

Auf diese Weise erhält man die gesuchten Werte der Differentiale dp, dq, dr etc., welche in der allgemeinen Formel des Gleichgewichts vorkommen.