Julia Flach

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen
e-fellows.net (Hrsg.)
Band 2344

Dimensionsreduktion, Gamma-Konvergenz und Konvergenz numerischer Verfahren für elastische, fadenförmige und undehnbare Körper

Masterarbeit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Impressum:

ISBN: 9783668465589

Dieses Buch bei GRIN:

https://www.grin.com/document/367999

Julia Flach

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen

e-fellows.net (Hrsg.)

Band 2344

Dimensionsreduktion, Gamma-Konvergenz und Konvergenz numerischer Verfahren für elastische, fadenförmige und undehnbare Körper

GRIN Verlag

Dimensionsreduktion, Γ-Konvergenz und Konvergenz numerischer Verfahren für elastische, fadenförmige und undehnbare Körper

Masterarbeit

vorgelegt von

Julia Flach

Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik und Physik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Freiburg, im Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Lange, fadenförmige, elastische Körper oder Stäbe treten in verschiedenen natürlichen Gegebenheiten auf. Sehr bekannte Beispiele stellen das menschliche Haar oder ein DNA-Strang dar. Im Großformat können Bäume oder Gräser ebenfalls mit Stäben verglichen werden; sie widerstreben der Gravitationskraft, ihre Biegesteifigkeit erhält ihre aufrechte Haltung. Auch in vielen technischen Anwendungen treten Stäbe, etwa in Form von Kabeln, Seilen oder textilen Fasern auf.

Die genannten Beispiele verdeutlichen die elementare Rolle von Faden- und Balkenmodellen. Die Untersuchung der Bewegung solcher stark deformierbarer Kontinua ist ein altbekanntes Teilgebiet der angewandten Mechanik und wurde bereits von den Mathematikern Jakob I. Bernoulli (1655-1705) und Leonard Euler (1707-1783) untersucht. Unterschiedliche Annahmen an das Kontinuum lassen die Herleitung verschiedener Modelle zu. So liefert uns die Vernachlässigung von Biege- und Torsionssteifigkeit das sogenannte Fadenmodell; unter der zusätzlichen Annahme einer unveränderlichen Länge der Längsachse des Körpers erhalten wir ein undehnbares Modell. Die Unterscheidung der Bezeichnung des Körpers als Balken, Stab oder Faden stammt von den jeweiligen Steifigkeitseigenschaften.

Die partielle Differentialgleichung, welche die Bewegung eines undehnbaren, fadenförmigen Körpers beschreibt, kann dann durch

$$\partial_t^2 z + z^{(4)} = (\lambda z')'$$

mit der Nebenbedingung $|z'|^2 = 1$ formuliert werden. Dabei beschreibt die Funktion $z\colon [0,L] \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ die Bewegung der Kurve im Raum in Abhängigkeit von der Zeit t und der Ortskoordinate s; die Funktion $\lambda\colon [0,L] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ stellt den skalaren Lagrange-Multiplikator zur Nebenbedingung dar. In der vorliegenden Arbeit wollen wir diese partielle Differentialgleichung untersuchen, verschiedene iterative Verfahren, welche die Bewegung der Kurve approximieren, analysieren und deren Konvergenzverhalten beschreiben. Besondere Bedeutung wird auf die Betrachtung der Bogenlängenparametrisierung gelegt. Da die numerische Approximation diese nur bedingt erhält, sind wir an dem Grad der Verletzung der Nebenbedingung interessiert.

Am Beginn der Arbeit steht eine rigorose Herleitung der obigen Bewegungsgleichungen. Elastische, fadenförmige, undehnbare Körper zeichnen sich dadurch aus, dass zwei Abmessungen (Querschnittsabmessungen) klein gegenüber der Dritten (Abmessung der Längsrichtung) sind, was es uns ermöglicht, die Masse- und Materialeigenschaften des Körpers nur einer Koordinate − der sogenannten Bogenkoordinate − zuzuweisen. Als mechanisches Modell solcher Körper kann daher ein reduziertes, eindimensionales Kontinuum betrachtet werden. Unter Verwendung fundamentaler physikalischer Eigenschaften und der Erhaltungssätze können wir die zugehörigen Bewegungsgleichungen herleiten und die zusätzliche Bedingung der Längenerhaltung formulieren.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit der Herleitung und Analyse eines semidiskreten Zeitschrittverfahrens der zuvor entwickelten bedingten Bewegungsgleichungen. Wir erhalten dadurch ein Gleichungssystem, welches sich äquivalent zu einem bedingten Minimierungsproblem umformulieren lässt. Wir zeigen die wichtigsten Eigenschaften des Problems auf, um schließlich die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in jedem Zeitschritt zu beweisen. Die Konstruktion und Einführung eines diskreten Lagrange-Multiplikators ermöglicht den Nachweis der Existenz einer diskreten Lösung. Wir gehen auf die Frage ein, inwiefern die Bogenlängenerhaltung durch die Zeitdiskretisierung erhalten bleibt und von welcher Fehlerordnung die Verletzung der Nebenbedingung ist. Besonderes Interesse liegt in den Stabilitätsaussagen der approximierten Lösung und des diskreten Lagrange-Multiplikators. Diese sind Grundlage für die Konvergenz der diskreten Lösung, welche am Schluss des Kapitels skizziert wird. Im Wesentlichen folgen wir dabei der Struktur von [MW06].

In Anlehnung an das vorhergehende Kapitel führen wir in Kapitel 3 ein volldiskretes iteratives Schema für die Approximation der Kurve ein. Wir untersuchen die Stabilität des Verfahrens und können eine diskrete Energieungleichung herleiten. Auch hier sind wir an der Verletzung der Nebenbedingung, welche aufgrund der Diskretisierung entsteht, interessiert. Es stellt sich die Frage, inwiefern die Diskretisierungsparameter τ bezüglich der Zeit und h bezüglich des Ortes in die Fehlerabschätzung mit eingehen. Augenmerk des dritten Kapitels liegt auf der Konvergenzaussage, welche ausführlich diskutiert wird. Hierbei zeigen wir, dass die diskrete Lösung des numerischen Schemas gegen die stetige Lösung des Problems konvergiert. Anhand numerischer Experimente und Simulationen unterstützen wir unsere theoretischen Ergebnisse und schließen damit das Kapitel ab.

Um in Kapitel 4 eine analytische Konvergenzaussage geben zu können, führen wir den Begriff der sogenannten Γ-Konvergenz ein und benennen die wichtigsten topologischen Eigenschaften. Das Konzept der Γ-Konvergenz hat sich für Grenzwertprozesse wie der Dimensionsreduktion als besonders geeignet erwiesen. Wir untersuchen stationäre Energiefunktionale, welche auf einem dreidimensionalen Gebiet definiert sind und aufgrund solch einer Dimensionsreduktion im Sinne der Γ-Konvergenz gegen ein eindimensionales Energiefunktional konvergieren. Die beschriebenen Funktionale entsprechen der Deformationsenergie eines elastischen, fadenförmigen, undehnbaren Kontinuums. Hierbei richten wir uns hauptsächlich nach der Vorgehensweise von [MM03]. Neben der Γ-Konvergenz der Funktionale untersuchen wir auch die Konvergenz der stationären Punkte der Funktionale. Als Konsequenz der Dimensionsreduktion konvergiert die Folge der stationären Punkte gegen den stationären Punkt des Grenzfunktionals. Im Beweis benutzen wir grundlegende Methoden der Variationsrechnung. Schwierigkeiten bei dieser Aussage liegen hauptsächlich in der Struktur der geometrischen Nichtlinearität sowie in der erforderlichen starken Kompaktheit.

Zuletzt wollen wir Eigenschaften unseres volldiskreten numerischen Verfahrens mit den Beobachtungen eines alltäglichen Prozesses vergleichen. Dazu dient die Zersplitterung einer trockenen Spaghetti, indem diese stark gekrümmt wird. Wir beschreiben zunächst recht anschaulich die experimentellen Beobachtungen und erklären das Phänomen der *kaskadierenden Fraktur*. In Anlehnung an [AN05] geben wir eine kurze mathematische Begründung des Phänomens. Schließlich testen wir unser Verfahren zur Approximation der Bewegung einer Kurve auf die beobachteten Eigenschaften. Dazu geben wir die gleichen Anfangs- und Randbedingungen wie bei der eingeklemmten, gekrümmten Pasta vor und simulieren die Bewegung resultierend aus dem Loslassen eines Endes der Kurve. Eine Diskussion der Ergebnisse beendet das fünfte Kapitel.

Im Anhang sind Notationen und Kurzschreibweisen, Hilfsaussagen sowie die wichtigsten analytischen und numerischen Grundlagen aufgeführt. Hier gehen wir vor allem auf die Definition der Bochner- und Bochner-Sobolevräume sowie die Finite-Elemente-Methode ein. Wir schließen die Arbeit mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einer Danksagung ab.