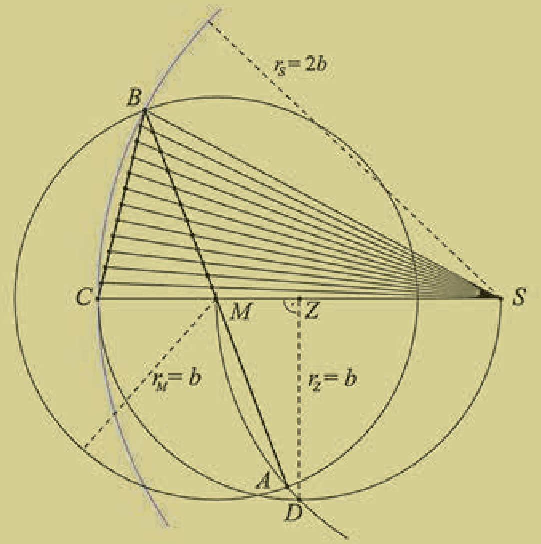
Walter Bühler

Rechnen mit musikalischen Intervallen, Skalen und Stimmungen

im historischen Kontext



PL ACADEMIC RESEARCH

Walter Bühler

Rechnen mit musikalischen Intervallen, Skalen und Stimmungen im historischen Kontext

Das interdisziplinär konzipierte Rechenkompendium bietet einen Überblick über die quantitativen Aspekte von musikalischen Intervallen, die im Laufe der Geschichte diskutiert worden sind. Für die mathematische Beschreibung des historischen Materials wird unter den möglichen Modellen bevorzugt das aristoxenische Treppenmodell verwendet, weil es größere Anschaulichkeit mit einem engeren Bezug zu musikalischen Sachverhalten verbindet. Die Betrachtung der diatonischen Struktur und der Notation im Liniensystem führt zunächst auf den Begriff der Stimmung. Der diatonische Algorithmus, der nach Ideen von Leibniz und Henfling mit Kettendifferenzen formuliert wird, garantiert schließlich ein systemübergreifendes Verfahren zur Gewinnung von Stimmungen in konsonanzbasierten Intervallsystemen.

Der Autor
Walter Bühler studierte Mathematik und Physik in Tübingen und unterrichtete zuletzt als Studiendirektor auch Informatik an Berliner Gymnasien. Neben und nach der Berufstätigkeit forschte er zur Alten Musik und den musiktheoretischen Positionen von Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit, vor allem zu Leibniz.

www.peterlang.com

Rechnen mit musikalischen Intervallen, Skalen und Stimmungen im historischen Kontext

Walter Bühler

Rechnen mit musikalischen Intervallen, Skalen und Stimmungen im historischen Kontext

PL ACADEMIC RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlagabbildung:
Konstruktionszeichnung des Verfassers
(Zeichung 13 im Anhang).

ISBN 978-3-631-65059-2 (Print)
E-ISBN 978-3-653-04174-3 (E-Book)
DOI 10.3726/ 978-3-653-04174-3

PL Academic Research ist ein Imprint der Peter Lang GmbH.

Peter Lang – Frankfurt am Main · Bern · Bruxelles · New York · Oxford · Warszawa · Wien

Dieses Buch erscheint in einer Herausgeberreihe bei PL Academic Research und wurde vor Erscheinen peer reviewed.

www.peterlang.com

Inhalt

Einleitung

Nicht weniger als die Pythagoreer verwenden auch die Aristoxener auf Zahlen beruhende Beweise.

Porphyrius [1].

Wer sich in der Geschichte der Musiktheorie mit musikalischen Intervallen, Skalen und Stimmungen beschäftigt, sieht sich mit einer erstaunlichen Vielfalt von Rechenverfahren und quantitativen Aussagen über musikalische Intervalle konfrontiert. Das hier vorgelegte Rechenkompendium stellt einen Versuch dar, dieses historische Material hinsichtlich seines rechnerischen Gehalts unter einheitlichen und teilweise neuartigen Gesichtspunkten und Begriffen zu ordnen. Ich beschränke mich dabei auf den Bereich der europäisch geprägten Musik, wie sie seit dem hohen Mittelalter im Liniensystem notiert wird.

Mathematische Modellbildungen in der Musik beginnen heutzutage gewöhnlich mit physikalischen Betrachtungen zur Schallerzeugung und zur Schallausbreitung. Das Phänomen Tonhöhe, welches hinsichtlich der musikalischen Intervalle den zentralen Aspekt der musikalischen Kommunikation charakterisiert, wird mit der Frequenz einer Schallwelle identifiziert und kann so mit den vertrauten mathematischen Methoden behandelt werden, wie sie sich in der modernen Physik bewährt haben. Daher kann man bei einem solchen theoretischen Ansatz vom Frequenzmodell sprechen. Seit Helmholtz wird die Argumentation im Frequenzmodell enger mit einer physiologischen Analyse des Ohres und mit einer Reflexion hörpsychologischer Befunde verbunden. Ein Beispiel für dieses Vorgehen findet man in dem Buch von David J. Benson[2].

Der Begriff der Frequenz wird jedoch erst ab dem Ende des 16. Jahrhunderts in modernem Sinne als physikalische Größe quantitativ formuliert, und die Entwicklung von praxistauglichen Messverfahren für akustische Frequenzen hat sich über die folgenden Jahrhunderte hingezogen. In der pythagoreischen Tradition werden dagegen seit der Antike Saitenlängenverhältnisse verwendet, die erheblich leichter quantitativ bestimmt und mit dem Ohr kontrolliert werden können. Das physikalische Gesetz, welches den Zusammenhang zwischen

1 „Οὐχ ἧττων γὰρ τῶν Πυθαγορείων καὶ οἱ Ἀριστοξένειοι ταῖς διὰ τῶν ἀριθμῶν χρῶνται ἀποδείξεσιν." I. Düring (Hrsg.), *Porphyrius Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, Göteborg 1932, S. 4, Z. 3.

2 David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2008 (Dritte Auflage). Eine Fassung davon war im Jahre 2013 auch im Internet zu finden.

Saitenlängenverhältnissen und Frequenzverhältnissen regelt, wird zu Beginn des 17. Jahrhunderts von Mersenne aufgestellt. Das Saitenlängenmodell, welches über lange Jahrhunderte in der Musiktheorie im Vordergrund steht, kann daher heute als eine Vorform oder Variante des Frequenzmodells betrachtet werden, obwohl die Theoretiker der pythagoreischen Tradition in Wirklichkeit von einer andersartigen numerologisch-transzendenten Grundposition ausgegangen sind. Aus heutiger Sicht lassen sich jedenfalls Frequenz- und Saitenlängenmodell gemeinsam der Akustik und somit der Physik zuordnen.

Man kann sich jedoch dem Thema der musikalischen Intervalle und Skalen auch von einer anderen Seite her nähern. Sprache und Musik sind als die wichtigsten Formen der menschlichen Kommunikation eng miteinander verwandt. Das Nachdenken über Musik ist so alt wie das Nachdenken über die Sprache, und beide Kommunikationsformen beruhen auf einer stabilen, durch Lernen erworbenen kulturellen Praxis, deren Ursprung weit vor der Entstehung der Schrift und vor der Herausbildung der eigentlichen Musiktheorie und der Mathematik zu datieren ist. Daher kann es nicht völlig befriedigen, wenn die musikalische Elementarlehre, die zu dieser uralten Praxis gehört, im Gegensatz zur sprachliche Elementarlehre in zentralen Punkten auf ein Lehrsystem wie die moderne Physik zurückgreifen soll, das außerhalb der unmittelbaren musikalischen Erfahrung liegt und sich historisch viel später entwickelt hat. Außerdem sollte ja auch heute noch jedes Individuum den Umgang mit musikalischen Grundbegriffen und ihre Anwendung in der Praxis in der Regel früher erlernen als die zugehörigen physikalischen Gesetze.

Aus diesem Grunde habe ich mich zu dem Versuch entschlossen, die Fundamente für das vorliegende Kompendium nicht im Saitenlängen- oder Frequenzmodell, sondern im Treppenmodell zu legen. Diesen Ansatz habe ich bereits in meinem Buch über Naturwissenschaftler der frühen Neuzeit verfolgt[3], allerdings nicht in der gleichen Ausführlichkeit.

Schon in der Antike hat Aristoxenos die These aufgestellt, dass die musikalischen Begriffe Tonhöhe, Intervall und Skala intuitiv in der gleichen Weise benutzt und interpretiert werden wie die entsprechenden protogeometrischen räumlichen Begriffe, die alle um den Abstand, die Abstandsschätzung und die Abstandsmessung kreisen. Nach Aristoxenos muss jeder, der sich mit der Melodiebildung beschäftigen will, zu allererst die Bewegung der Stimme analysieren, und zwar die Bewegung dem Orte nach. Wenn man diesen protogeometrischen Ursprung der musikalischen Begriffsbildung akzeptieren kann, und wenn man sich zugleich den eigenen intuitiven Umgang mit musikalischen Intervallen be-

3 Walter Bühler, *Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit. Eine elementarmathematische Analyse*, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M. 2013.

wusst macht, dann kann man auf der Basis der heutigen Elementarmathematik Begriffe und Methoden entwickeln, welche auf der einen Seite das quantitative Denken und Rechnen bei musikalischen Skalen einfach und übersichtlich beschreiben können, aber auf der anderen Seite die historische Entwicklung und die musikpädagogische Konkretisierung nicht aus den Augen verlieren. Das derart neu rekonstruierte Treppenmodell sollte der Natur der musikalischen Kommunikation und ihrer historischen und kulturellen Vielfalt besser gerecht werden als Modellbildungen, die von einem naturwissenschaftlichen Ansatz ausgehen. Saitenlängen- und Frequenzmodell werden daher erst nach dem Treppenmodell behandelt und auf dessen Hintergrund dargestellt.

Mit diesem Kompendium wird demnach ein Vorschlag zur Diskussion gestellt, welcher bei den musiktheoretischen Grundlagen auf einen reduktionistischen Ansatz verzichtet und eine Mathematisierung ohne den üblichen Umweg über die Naturwissenschaften ermöglicht. Wie andere Vorstellungen, die mit der musikalischen Klangwahrnehmung verbunden sind, gehören die mit der Tonhöhe verknüpften Vorstellungen ja nicht zur physischen Realität im engeren Sinne, sondern zum kulturellen Kontext. Im Treppenmodell werden Phänomene quantitativ untersucht und in mathematischer Gestalt formalisiert, die zur Vorstellungswelt des musizierenden und des hörenden Subjekts gehören. Ordnet man das Frequenz- und Saitenlängenmodell der Akustik und damit der modernen Physik zu, dann kann man das Treppenmodell der musikalischen Elementarlehre im heutigen Wissenschaftskatalog am ehesten der Hörpsychologie zuordnen.

Die Beschränkung auf das Liniensystem und seine Geschichte äußert sich in der Konzentration auf die einheitliche diatonische Struktur und auf die in ihr gebildeten diatonischen Intervallklassen, wie sie im Liniensystem mit den heute üblichen Vorzeichen notiert werden können. Die diatonischen Intervallklassen bilden in der europäisch geprägten Musik über all die unterschiedlichen Stimmungen und Systeme hinweg die allgemein anerkannte Basis der musikalischen Terminologie, und zwar sowohl in der Praxis wie in der Theorie.

Mit den dreizehn diatonischen Intervallklassen innerhalb der Oktave ist der Begriff der Stimmung verbunden, welcher hier im engen Bezug zu den Tasteninstrumenten definiert wird. Hierbei wird eine einfache mathematische Formalisierung als unstrukturierte Menge aus dreizehn reellen Zahlen vorgenommen. Außer der Zahl 0 für die Prime und einer Zahl A für die Oktave muss eine Stimmung noch elf weitere Zahlen enthalten, welche zu den elf diatonischen Intervallklassen zwischen Prime und Oktave gehören. Mit dieser elementaren Definition können nicht nur die zahlreichen regulären und biregulären Stimmungen, sondern auch die vielen irregulären Stimmungen berücksichtigt werden, die vom 16. bis zum 19. Jahrhundert diskutiert werden. Es zeigt sich außerdem, dass die Notation im Liniensystem für eine solche Stimmung unabhängig von ihren konkreten numerischen Werten sinnvoll gedeutet werden kann.

Einen rechnerisch in sich bezüglich der Addition abgeschlossenen Zahlbereich, der mindestens eine Stimmung enthält, bezeichne ich hingegen als ein Intervallsystem. Ein solches System enthält immer drei Zahlen A, B und E aus der Stimmung, welche der Oktave (A), der Quinte (B) und der großen Terz (E) zugeordnet sind. Anders als in einer Stimmung kann es in einem Intervallsystem jedoch viele verschiedene Intervalle geben, von denen nicht feststeht, ob und wie sie den diatonischen Intervallklassen zugeordnet werden können.

Für die heutige mathematische Modellierung historisch bedeutsamer Intervallsysteme bieten sich solche additive Untergruppen in der Menge der reellen Zahlen an, die von zwei oder drei Elementen erzeugt werden. Wird das System nur von der Oktave A und der Quinte B erzeugt, dann ist es regulär, wird es dagegen von der Oktave A, der Quinte B und Großterz E erzeugt, dann wird es als bireguläres Intervallsystem bezeichnet. Ein Intervallsystem wird nach diesem Ansatz immer von seinen Basiskonsonanzen erzeugt, und jedes Intervall des Systems lässt sich als ganzzahlige Linearkombination dieser Basiskonsonanzen darstellen. Zu den regulären Systemen gehören das aus der Antike stammende System des Pythagoras und das heutige gleichmäßige Zwölfersystem, welches seine Wurzeln ebenfalls in der Antike hat. Der Begriff des biregulären Systems verallgemeinert hingegen das kompliziertere natürliche System mit seinen reinen Intervallen, welches durch Zarlino im 16. Jahrhundert kodifiziert worden ist.

Ersetzt man die Basiskonsonanzen A, B und E innerhalb gewisser Grenzen durch konkrete reelle Zahlen, so erhält man ein konkretes Intervallsystem. Verzichtet man aber bewusst auf eine solche Konkretisierung, so kann man Untersuchungen durchführen, die in verschiedenen Intervallsystemen gelten und insofern Allgemeingültigkeit beanspruchen können. Intervalle werden deshalb in diesem Rechenkompendium primär durch algebraische Terme in den Variablen A, B und E dargestellt, und weniger durch konkrete Zahlen. Durch diese Algebraisierung geraten abstrakte Intervalle in den Mittelpunkt der Betrachtung.

Wie beim grundlegenden Prinzip der Algebraisierung im Treppenmodell folge ich auch bei der formalen Identifikation der Stimmung innerhalb eines Intervallsystems einer Idee von Leibniz, aber auch einigen Gedanken von Conrad Henfling. Mit den *équations harmoniques* überprüft Leibniz die vielen unterschiedlichen Temperaturvorschläge seiner Zeit auf musikalische Sinnhaftigkeit. Einzelheiten hierzu sind in meinem Buch über Naturwissenschaftler der frühen Neuzeit zu finden. Im Ergebnis handelt es sich um eine endliche, systemübergreifende Liste von abstrakten Strukturintervallen innerhalb der Oktave, die jeweils eindeutig einer diatonischen Intervallklasse zugeordnet sind und sich in der historischen Betrachtung als bedeutsam für den Aufbau von musikalischen Intervallsystemen erwiesen haben. Selbstverständlich gehören die Basiskonsonanzen zu diesen Strukturintervallen. Zusammen mit ihren Komplementärintervallen müssen die Strukturintervalle alle diatonischen Intervallklassen abdecken. Dabei kommt es durchaus vor, dass mehrere unterschiedliche Strukturintervalle zu derselben Intervallklasse gehören. Das einheitliche und standardisierte Verfahren, mit dem die übrigen Strukturintervalle aus den Basiskonsonanzen des Systems gebildet werden können, bezeichne ich als diatonischen Algorithmus. Seine Anwendung wird besonders einfach, wenn man gekoppelte Kettendifferenzen verwendet. Im diatonischen Algorithmus werden meiner Überzeugung nach sämtliche elementaren Beziehungen zwischen den musikalischen Intervallen bzw. Intervallklassen festgehalten, auf denen die sinnvolle musikalische Argumentation auf der Grundlage des Liniensystems beruht.

In den folgenden Ausführungen werden daher im Kern nur solche Sachverhalte algebraisch formuliert, die für jeden Musiker intuitiv einsichtig und unstrittig sein sollten, und zwar unabhängig davon, welches konkrete historische System er für richtig hält. Weil jedoch die algebraische Darstellung im musiktheoretischen Bereich unüblich ist, aber auch weil der musikalische Sachverhalt vordergründig sogar als vollkommen trivial erscheinen kann, habe ich mich zu einem vorsichtigen und langsamen Vorgehen bei der theoretischen Begriffsbildung entschlossen. Ich hoffe, dass auf dieser Basis in der Zukunft wesentlich kompaktere und didaktisch vereinfachte Darstellungen entwickelt werden können, wie sie für eine allgemeinverständliche Elementarlehre notwendig sind.

Als ehemaliger Mathematiklehrer bin ich dem Glauben verpflichtet, dass diejenigen algebraischen Kenntnisse und Techniken, die für das Rechnen im Treppenmodell notwendig sind, heute zur Allgemeinbildung gehören. Deshalb beschränke ich mich in der Regel auf ein mittleres Schulniveau und betreibe nur an wenigen Stellen etwas anspruchsvollere Mathematik. Ich verbinde damit die Hoffnung, dass jeder Leser meine mathematischen Argumentationen prinzipiell in gleicher Weise nachvollziehen kann wie die musikalischen und historischen Gedankengänge. An der Anschauung ausgerichtete verbale Begründungen sollen in Verbindung mit zahlreichen Abbildungen formale mathematische Beweisführungen überflüssig machen. Spezielle Fragen im Bereich der geometrischen Progressionen behandle ich im Anhang, weil hierbei weitergehende Kenntnisse in der Analysis und in der linearen Algebra vorausgesetzt werden.

Die einzelnen Schritte der Modellbildung müssen auf ihrem historischen und musikalischen Hintergrund verständlich gemacht werden. Gelegentlich müssen physikalische Fakten reflektiert werden, die für die anderen Modelle von Bedeutung sind. Ein musikalisches Rechenkompendium muss schließlich bei aller gebotenen Kürze auch diejenigen mathematischen Verfahren plausibel und übersichtlich darstellen, welche traditionell im Saitenlängen- und Frequenzmodell verwendet werden.

Daher hat dieses Kompendium schließlich die Form von 68 Thesen oder Paragraphen angenommen, die in zwölf Kapiteln nach Themenbereichen gegliedert sind. Das umfangreiche Inhaltsverzeichnis und das Stichwortverzeichnis sollen dazu dienen, den sachlichen Zusammenhang sichtbar werden lassen. Der historische und musiktheoretische Gehalt der Thesen gibt naturgemäß meine eigene Sichtweise wieder. Nur eine sehr viel umfangreichere Arbeit, die sich detailliert mit der gemeinsamen Geschichte von Musiktheorie und Mathematik beschäftigen müsste, könnte für jede These eine ins Einzelne gehende Begründung bieten. Einige Ansätze dafür sind in meinem Buch über Naturwissenschaftler der frühen Neuzeit zu finden.

Mark Lindley und Ronald Turner-Smith haben 1993 eine umfangreiche mathematische Modellierung vorgeschlagen[4]. Ihre Intentionen stehen mit den hier vorgetragenen Grundsätzen im Einklang, und sie bieten zusätzlich eine Fülle von wertvollem musikalischem und historischem Material. Die mathematische Modellierung erfolgt darin allerdings in der formalen Sprache der abstrakten Algebra und Gruppentheorie, wie sie an Universitäten gelehrt wird. Sie unterscheidet sich deshalb deutlich von meiner am Schulniveau und am konkreten Rechnen ausgerichteten Darstellung, die sich nicht nur an Mathematiker richtet. Ich selbst bin außerdem gar nicht in der Lage, meine Thesen, die ja immer auch historische und andere nichtmathematische Sachverhalte im Blick behalten wollen, streng logisch aus einem einheitlichen, kompakten Axiomensystem abzuleiten. Bei aller Unterschiedlichkeit im Grad der Abstraktion und in der Terminologie besteht jedoch eine weitgehende sachliche Übereinstimmung, auf die ich im Anhang A.2 etwas näher eingehe.

Wie es einem solchen fächerübergreifenden Thema ja auch entspricht, wechseln sich in meinen Thesen Argumentationen unterschiedlichster Art in bunter Reihenfolge ab. Dennoch wage ich zu hoffen, dass am Ende der Leser die wichtigsten elementaren Rechenverfahren für Intervallsysteme und Stimmungen in ihrem mathematischen, musikalischen und historischen Zusammenhang nachvollziehen kann. Über Kritik, Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler, die mit Sicherheit vorhanden sind, würde ich mich sehr freuen.

---

4 Mark Lindley, Ronald Turner-Smith, *Mathematical Models of Musical Scales – A New Approach*, Bonn 1993.

I. Intervalle und Skalen im Anschauungsraum

§ 1 Schätzen, Messen und Rechnen im Anschauungsraum

1.1 Bevor die Wissenschaft Mathematik entsteht, praktiziert der Mensch beim Umgang mit Strecken und ihren Längen elementare rechnerische und geometrische Verfahren. In der intuitiven Anschauung besitzen zwei Punkte im Raum immer einen Abstand, der mit Hilfe einer Einheit durch eine Maßzahl erfasst oder mindestens abgeschätzt werden kann.

1.2 Schon sehr früh wird im Laufe der Geschichte die intuitive Abschätzung von Abständen durch das bewusste und kontrollierte Messen ergänzt oder abgelöst. Aber auch der heutige physikalische Messvorgang bleibt grundsätzlich mit einer bestimmten Messungenauigkeit (*uncertainty*) verbunden, auch wenn diese sehr klein gehalten werden kann. Zahlenangaben für reale räumliche Intervalle und Skalen sind daher in der Vergangenheit und in der Gegenwart strenggenommen immer mit einer Unschärfe behaftet. Wenn man aus theoretischen Überlegungen heraus einer Strecke – wie etwa der Diagonalen im Quadrat – eine irrationale Maßzahl zuordnen muss, so kann diese Zahl durch Messungen niemals mit völliger Genauigkeit bestimmt werden.

1.3 Aus heutiger Sicht werden Leitern oder statische Skalen des eindimensionalen Anschauungsraumes einer Beschreibung durch Zahlen zugänglich, indem man sie auf einen reellen Zahlenstrahl abbildet. Jeder Stufe der Leiter oder Skala entspricht ein Punkt auf dem Zahlenstrahl, und jedem Intervall zwischen zwei Stufen entspricht die geometrische Strecke zwischen zwei Punkten. Die Intervallgröße wird durch den Abstand der beiden Punkte erfasst. Daher können heute sowohl Intervallgrößen als auch Stufen einer Skala vereinfacht durch reelle Zahlen angegeben werden, wenn zuvor ein Nullpunkt und eine Einheit festgelegt wird.

§ 2 Darstellung von Skalen durch reelle Zahlen

2.1 Jede Menge von endlich vielen positiven reellen Zahlen auf dem reellen Zahlenstrahl kann nach § 1.3 formal als die Angabe einer Leiter oder einer statischen Skala S betrachtet werden. Die der aufsteigenden Größe nach geordneten und durch Semikolon getrennten Zahlen, welche die Position der Stufen auf dem Zahlenstrahl festlegen, werden in eckige Klammern eingeschlossen. Die Intervalle zwischen zwei benachbarten Stufen einer Skala werden als Schrittintervalle bezeichnet.

2.2 Meist kommt es aber nicht auf den Ort an, wo eine Leiter und ihre Stufen sich gerade befinden, sondern nur auf ihre Struktur. Diese wird formal durch die Differenzenfolge ΔS der statischen Skala S erfasst. ΔS kann auch als dynamische Skala bezeichnet werden, weil sie die Sprungintervalle enthält, die von einer Stufe zur nächsten führen. Für $S=[10;12;13;15]$ ergibt sich formal $\Delta S=(2;1;2)$. Wenn jedoch die Schrittintervalle durch Symbole angegeben sind, dann wird seit der Antike die dynamische Skala einfach parataktisch geschrieben. So schreibt man statt $\Delta S=(T;T;s)$ fast immer einfach und plausibel nur *TTs*. In beiden Schreibweisen muss aber die Reihenfolge der Glieder beachtet werden.

2.3 Eine zweistufige (statische) Skala $I=[a;b]$ mit $a \le b$ wird als statisches Intervall bezeichnet. Die dynamische Skala $\Delta S=(d)$ besteht in diesem Fall nur aus der Zahl *d*, nämlich der positiven Differenz $d=b-a$, welche zugleich die Länge des statischen Intervalls $I=[a;b]$ angibt. Statt $\Delta S=(d)$ schreibt man in diesem Falle nur *d* und spricht vom dynamischen Intervall, welches durch die Zahl *d* erfasst wird.

2.4 Die Struktur einer statischen Skala *S* ändert sich nicht, wenn sie als Ganzes in Richtung des Zahlenstrahls verschoben wird. Wenn man zu jeder Stufe einer statischen Skala eine feste reelle Zahl addiert oder davon subtrahiert, dann ändert sich ihre dynamische Skala ΔS nicht.

2.5 Wenn $\Delta S=(d_1;d_2;\ldots;d_n)$ eine dynamische Skala ist, dann kann zu jeder reellen Zahl *x* die statische Skala $S_x=[x;x+d_1;\ldots;x+d_1+d_2+\ldots+d_n]$ gebildet werden, welche ΔS als dynamische Skala besitzt. Daher kann eine bestimmte dynamische Skala ΔS durch unendlich viele unterschiedliche statische Skalen S_x dargestellt werden. In der Menge aller statischen Skalen erhält man dadurch eine Äquivalenzrelation. So sind zum Beispiel die beiden statischen Skalen $A=[10;12;13]$ und $B=[3;5;6]$ äquivalent, weil sie die gemeinsame dynamische Skala $\Delta S=(2;1)$ besitzen. Ihre Äquivalenz kann formal korrekt durch $A \cong B$ zum Ausdruck gebracht werden.

2.6 In der Literatur gibt man sich der Kürze halber mit den Begriffen Skala und Intervall zufrieden, ohne die Differenzierung nach statisch oder dynamisch einzuhalten. Wenn man von einer Skala *A* spricht, meint man in der Regel die dynamische Skala, die aber auch als statische Skala in unterschiedlicher Weise geschrieben werden kann. Wenn man zum Beispiel $A=[10;12;13]\cong[3;5;6]\cong[-3;-1;0]$ schreibt, dann ist mit dem Symbol *A* streng genommen die dynamische Skala $(2;1)$ gemeint. Oft ist man sogar zu bequem, auf den Unterschied zwischen Äquivalenz und Gleichheit zu achten, und man schreibt nur $A=[10;12;13]=[3;5;6]=[-3;-1;0]$. Das entspricht in etwa der Verwendung des Gleichheitszeichens beim rechnerischen Umgang mit rationalen Zahlen. So kann ja gemäß der Gleichungskette $q=1{,}2=\frac{42}{35}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ die Zahl q formal sehr unterschiedlich geschrieben werden.

2.7 Die in der Musik auftretenden Skalen können im Unterschied zu den genormten Treppen der heutigen Zeit auch unterschiedlich große Schrittintervalle besitzen. Daher darf sich auch die Untersuchung im Anschauungsraum nicht auf Skalen mit einheitlich großen Schrittintervallen beschränken.

§ 3 Reelle Zahlen und Kettenbrüche

3.1 Da die Punkte auf dem Zahlenstrahl ein Kontinuum bilden, kann man sich nicht auf den Bereich der rationalen Zahlen beschränken, sondern muss sich im Kontext von Intervallen und Skalen auch mit irrationalen Zahlen oder insgesamt mit der Menge der reellen Zahlen beschäftigen. Reelle Zahlen werden seit Simon Stevin am Ende des 16. Jahrhunderts in numerischen Zusammenhängen fast immer näherungsweise als Dezimalzahlen geschrieben, wie sie ein moderner Taschenrechner liefert. Dabei kann eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen für jede irrationale und auch für manche rationale Zahl lediglich eine Näherung angeben. Wenn sich die wahre Zahl nicht durch einen endlichen Dezimalbruch exakt erfassen lässt, dann ist sie der Grenzwert einer unendlichen Folge von Dezimalbrüchen, die sich ihr immer besser annähern.

$$\begin{array}{r|l} \frac{5}{7} & \sqrt{2} \\ \hline 0{,}7 & 1{,}4 \\ 0{,}71 & 1{,}41 \\ 0{,}714 & 1{,}414 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

3.2 Zur numerischen Erfassung positiver reeller Zahlen kann man außer der allgemein üblichen Dezimaldarstellung auch Näherungsbrüche mit beliebigen Nennern verwenden, welche durch die weniger bekannte Kettenbruchentwicklung entstehen. Dieses Verfahren, welches im 17. und 18. Jahrhundert explizit ausgearbeitet worden ist, erzeugt für jede reelle Zahl eine Folge p_n/q_n von sehr guten Näherungsbrüchen, die bei rationalen Zahlen endlich viele und bei irrationalen Zahlen unendlich viele Glieder besitzt.