

Beiträge zur Numerischen Mathematik 6

Beiträge zur Numerischen Mathematik 6

Herausgegeben von
Frieder Kuhnert und Jochen W. Schmidt



R. Oldenbourg Verlag München Wien 1977

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Beiträge zur Numerischen Mathematik / hrsg. von
Frieder Kuhnert u. Jochen W. Schmidt. — München,
Wien: Oldenbourg.**

NE: Kuhnert, Frieder [Hrsg.]

6. — 1. Aufl. — 1977.

ISBN 3-486-21461-6

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977

Printed in the German Democratic Republic

Lizenz-Nr. 206 · 435/99/77

Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg

ISBN: 3-486-21461-6

Inhalt

G. ALEFELD, Karlsruhe	
An exclusion theorem for the solutions of operator equations	7
N. APOSTOLATOS, Athen	
Eine allgemeine Betrachtung von numerischen Algorithmen	11
W. BURMEISTER, Dresden	
Semilokale Konvergenzsätze mit Anwendungen auf Mehrschritt-Iterationsverfahren . . .	27
G.-P. EHLE and H. SCHWETLICK, Dresden	
Rapidly convergent methods for minimizing a sum of squares	49
U. FLEMMING, Karl-Marx-Stadt	
Fehlerabschätzungen für Näherungseigenwerte und -eigenvektoren bei der Pseudostör- iteration	61
U. GROH, Karl-Marx-Stadt	
Untersuchungen zum Projektions-Iterationsverfahren von J. D. SOKOLOV	69
B. HEINRICH, Karl-Marx-Stadt	
Zur Anwendung des Differenzenverfahrens bei Aufgaben mit freiem Rand	81
U. LANGER, Karl-Marx-Stadt	
Untersuchungen zum Kummerschen Verfahren zur numerischen Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben	97
A. MEYER und U. FLEMMING, Karl-Marx-Stadt	
Die Berechnung einfacher Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen mittels Pseudostöriteration	111
W. MÖNCH, Freiberg, und H.-D. NIEPAGE, Berlin	
Iteration mit veränderlichen Schrankenoperatoren zur Lösungseinschließung bei nicht- linearen Gleichungen	121
W. PETERS, Rostock	
Eigenschaften einer nach dem Projektionsverfahren auf Schnitträume von Hyperebenen berechneten verallgemeinerten Matrixinversen	127

H. RATSCHKE, Düsseldorf
Mittelwertsätze für Intervallfunktionen 133

E. SCHINCKE, Halle—Wittenberg, und H. NEUBERT, Leipzig
Numerische Behandlung statischer Lagerhaltungsmodelle mit stochastischem Bedarf . . . 145

J. W. SCHMIDT, Dresden
Eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes zur Gewinnung von Fehlerschranken
für Näherungen von Polynomnullstellen 157

K. STREHMEL und J. KÖHLER, Halle—Wittenberg
Ein neues Prediktor-Verfahren mit Exponentialanpassung für Anfangswertaufgaben
gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung 165

W. VOIGT, Freiberg
Gleichmäßige Abschätzungen mittels Differenzenverfahren bei Randwertproblemen 3. Ord-
nung 179

P. WEIGAND, Karl-Marx-Stadt
Spline-Approximationen vom Defekt 2 und lineare Mehrschrittformeln zur numerischen
Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 189

An exclusion theorem for the solutions of operator equations

GÖTZ ALEFELD

Let F be a nonlinear mapping from a Banach space X into a Banach space Y . We prove a theorem which yields a ball containing no solution of the equation $F(x) = 0$. This ball is obtained after having performed one step of Newton's method.

1. Introduction

Let F be a nonlinear mapping of the Banach space X into the Banach space Y . There are many results which assure the existence of a solution of the (nonlinear) equation $F(x) = 0$. In many cases there are also error estimates for such a solution. Famous results in this direction follow from the contraction mapping principle. Another well known result is the Kantorovic theorem on Newton's method (RALL [3]). Thereby one step of Newton's method is performed and then under certain conditions we get a ball in which a solution of the equation $F(x) = 0$ exists and to which Newton's method will converge. Another interesting result in this direction was proved by W. BURMEISTER in [2]. Correspondingly in this note we give a ball which does not contain any solution of the equation $F(x) = 0$. This ball is also obtained after having performed one step of Newton's method. Of course every ball K of the Banach space X , not containing a solution of the equation $F(x) = 0$, also yields an inclusion set $X \setminus K$ for all solutions of $F(x) = 0$. The following theorem contains as a special case a result for real functions which was proved in [1], page 113.

2. Exclusion theorem

Theorem. Let X and Y be Banach spaces. Let

$$F : D \subset X \rightarrow Y$$

be Fréchet-differentiable in the open set $D_0 \subset D$. Suppose that the Fréchet-derivative

of F is Lipschitz-continuous with Lipschitz-constant $\gamma > 0$ in the ball

$$\tilde{K}_0 = \{x \mid \|x - x_0\| \leq \tilde{r}_0\} \subset D_0,$$

that $F'(x_0)$ is invertible, that

$$\|F'(x_0)^{-1}\| = \beta,$$

and that

$$0 < \|F'(x_0)^{-1} F(x_0)\| = \eta.$$

Then, if the inequalities

$$0 \leq r_0 < \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\beta\gamma\eta}}{\beta\gamma}, \quad r_0 \leq \tilde{r}_0$$

hold, $F(x) = 0$ has no solution in the ball

$$K_0 = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r_0\}.$$

The proof of this theorem will follow from a simple lemma.

Lemma. *Let X and Y be Banach spaces. Let*

$$F: D \subset X \rightarrow Y$$

be Fréchet-differentiable in the open set $D_0 \subset D$. Suppose that the Fréchet-derivative of F is Lipschitz-continuous in the ball

$$\tilde{K}_0 = \{x \mid \|x - x_0\| \leq \tilde{r}_0\} \subset D_0$$

with Lipschitz-constant $\gamma \geq 0$, that $F'(x_0)$ is invertible and that

$$\|F'(x_0)^{-1}\| = \beta.$$

If the equation $F(x) = 0$ has a solution x^ in the ball*

$$K_0 = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r_0\}, \quad r_0 \leq \tilde{r}_0,$$

then

$$x^* \in K_1 = \{x \mid \|x - x_1\| \leq r_1\}$$

where

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1} F(x_0), \quad r_1 = \frac{1}{2} \beta\gamma r_0^2.$$

Proof. By Taylor's theorem (RALL [3], page 124) we have

$$\begin{aligned} F(x_0) - F(x^*) &= \int_0^1 F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) (x_0 - x^*) \, d\theta \\ &= F'(x_0) (x_0 - x^*) + \int_0^1 [F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - F'(x_0)] (x_0 - x^*) \, d\theta. \end{aligned}$$

From this it follows that

$$\begin{aligned} \|x^* - x_1\| &= \|x^* - (x_0 - F'(x_0)^{-1} F(x_0))\| \\ &= \left\| F'(x_0)^{-1} \int_0^1 [F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - F'(x_0)] (x_0 - x^*) d\theta \right\| \\ &\leq \beta\gamma \|x_0 - x^*\|^2 \int_0^1 (1 - \theta) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2} \beta\gamma r_0^2 \end{aligned}$$

holds, which is the assertion.

Proof of the theorem. If K_0 contains a solution x^* of $F(x) = 0$ then by the preceding lemma x^* is contained in K_1 and $K_0 \cap K_1 \neq \emptyset$. Therefore if $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, $F(x) = 0$ has no solution in K_0 . The equation $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ holds if and only if

$$\|x_0 - x_1\| > r_0 + r_1$$

holds. This is again the case if and only if

$$\frac{1}{2} \beta\gamma r_0^2 + r_0 - \eta < 0$$

holds. Because of $r_0 \geq 0$ this inequality is equivalent with

$$0 \leq r_0 < \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\beta\gamma\eta}}{\beta\gamma}$$

and the theorem is proved.

3. Remark

The following example shows that in general the upper bound for r_0 cannot be replaced by a greater one: Let $X = Y = \mathbf{R}$ be the real numbers with the usual modulus as a norm. Consider the real function

$$F(x) = \frac{1}{2} \tilde{\beta} \tilde{\gamma} x^2 + x - \tilde{\eta}$$

with positive constants $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{\eta}$. For $x_0 = 0$ we get from the theorem that for

$$0 \leq r_0 < \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$$

no solution of $F(x) = 0$ is contained in the interval

$$K_0 = \{x \mid |x - x_0| = |x| \leq r_0\}.$$

However, for

$$r_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$$

there is a solution of $F(x) = 0$ on the boundary of K_0 .

References

- [1] ALEFELD, G., und J. HERZBERGER, Einführung in die Intervallrechnung, Reihe Informatik, Band 12, Bibliographisches Institut, Mannheim 1974.
- [2] Burmeister, W., Eine Fehlerabschätzung für Nullstellen von Abbildungen, Beiträge Numer. Math. 1 (1974), 43–47.
- [3] RALL, L. B., Computational Solution of Operator Equations, John Wiley, New York 1969.

Manuskripteingang: 10. 9. 1975

VERFASSER:

Prof. Dr. GÖTZ ALEFELD, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe

Eine allgemeine Betrachtung von numerischen Algorithmen

NIKOLAOS APOSTOLATOS

1. Der Begriff des numerischen Algorithmus ist einer der wichtigsten Begriffe der Numerischen Mathematik. Setzen wir voraus, daß ein numerisches Problem vorliegt, das genau eine Lösung besitzt, dann verstehen wir unter einem numerischen Algorithmus zur Bestimmung dieser Lösung eine endliche Folge von Rechenschritten, die zu dieser Lösung führt. Die Durchführung eines Algorithmus auf einer Rechenanlage führt jedoch im allgemeinen nur zu einer Näherung dieser Lösung. Es erweist sich deshalb als notwendig, geeignete Voraussetzungen zu treffen, damit eine strenge Anwendung des numerischen Algorithmus auf einer Rechenanlage gewährleistet wird. Solche Voraussetzungen dienen hauptsächlich zum Erreichen der folgenden beiden Ziele. Einerseits soll der Algorithmus nach endlich vielen Schritten zu einer Näherungslösung führen, und andererseits soll er neben dieser Näherungslösung zusätzliche Informationen über die Güte dieser Lösung liefern.

Mehrere Autoren haben sich auf verschiedene Weise mit solchen oder ähnlichen Problemen beschäftigt (vgl. etwa [3, 4, 5, 10, 11, 14, 17, 19, 20, 21, 27]).

Der numerische Algorithmus auf einer Rechenanlage läßt sich im allgemeinen nicht exakt durchführen, da wegen der Endlichkeit der Menge der Maschinenzahlen kein Isomorphismus zwischen der Definitionsmenge für die Lösung (im allgemeinen eine unendliche Menge) und der Menge der Maschinenzahlen existiert. Es scheint also notwendig zu sein, die Definitionsmenge so zu ändern, daß ein Isomorphismus zwischen dieser geänderten Menge und der Menge der Maschinenzahlen möglich ist. Dazu muß man allerdings auf der geänderten Menge eine entsprechende numerische Struktur definieren. Daraus ergibt sich die Konsequenz, zu untersuchen, wie sich eine solche Änderung auf die Lösung des Problems auswirkt. Es ist daher naheliegend, die unendliche Menge als eine geeignete Vereinigung von endlich vielen Untermengen zu betrachten. Eine solche Betrachtung führt zwangsläufig auf die Einführung einer entsprechenden Mengendarithmetik (vgl. [3, 4, 5, 11, 12, 14, 16, 17, 24]).

In der folgenden Arbeit werden zunächst solche Änderungen der ursprünglichen Menge sowie ihrer arithmetischen Struktur allgemein betrachtet. Mit Hilfe solcher Betrachtungen, wie auch mit Hilfe des hier eingeführten Begriffs der zulässigen Lösung eines Problems, wird ein Kriterium zum Vergleich von numerischen Algorithmen eingeführt. Im Anschluß daran wird der Begriff der monotonen Iterationsmethode definiert. Es zeigt sich dann, daß man unter Benutzung dieser Begriffe zu

jedem numerischen Algorithmus eine monotone Iterationsmethode angeben kann. Darüber hinaus hat man als eine direkte Folgerung ein Abbruchkriterium für Iterationsmethoden gewonnen, das eine optimale Durchführung des numerischen Algorithmus auf einer Rechenanlage gewährleisten kann. Es werden ferner im Zusammenhang mit diesem Vergleichskriterium Eigenschaften untersucht und einige Sätze bewiesen, die für die Praxis von Bedeutung sein können.

2. Zur Vorbereitung wollen wir hier kurz die zum Verständnis des folgenden benötigten Definitionen und Sätze zusammenstellen.

Definition 2.1. Eine Menge V mit zwei zweistelligen Operationen \wedge und \vee heißt ein *Verband* (V, \wedge, \vee) wenn die folgenden Axiome gelten ($a, b, c \in V$):

1. $a \wedge b = b \wedge a$ und $a \vee b = b \vee a$,
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ und $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ und $a \vee (a \wedge b) = a$.

Definition 2.2. Eine Menge H heißt in bezug auf eine zweistellige Relation \leq eine *Halbordnung* (H, \leq) , wenn die folgenden Axiome gelten ($a, b, c \in H$):

1. $a \leq a$,
2. $a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$,
3. $a \leq b, b \leq a \rightarrow a = b$.

Gilt für die Halbordnung H zusätzlich

4. $\forall a, b \in H \rightarrow a \leq b$ oder $b \leq a$,

dann heißt sie eine *Ordnung*.

Definition 2.3. Es sei (H, \leq) eine Halbordnung. Ein Element $a \in H$ heißt dann *minimal* bzw. *maximal*, wenn kein Element $x \in H$ existiert mit $x < a$ bzw. $a < x$.

Bemerkung. Unter $x < a$ verstehen wir $x \leq a$ und $x \neq a$.

Offenbar besitzt jede endliche Halbordnung zumindest je ein minimales und ein maximales Element.

Definition 2.4. Die Halbordnungen (H, \leq) , in denen zu jeder Teilmenge $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$, ein $\inf A$ und ein $\sup A$ existieren, heißen *vollständig*.

Solche Halbordnungen sind automatisch Verbände, so daß man meistens von vollständigen Verbänden spricht.

Satz 2.1. *Jeder endliche Verband ist vollständig (da das Infimum und das Supremum nur für endliche Mengen zu bilden sind).*

Definition 2.5. Es sei (H, \leq) eine Halbordnung, $T \subseteq H$, $T \neq \emptyset$, $a \in H$. Mit $U(a)$ bezeichnen wird die Menge aller $b \in H : b \leq a$. T heißt ein *unterer Raster* von H , wenn $\forall a \in H \exists x \in U(a) \cap T$: Kein $b \neq x$ existiert mit $b \in U(a) \cap T$ und $x \leq b$ (d. h., x ist ein maximales Element von $U(a) \cap T$).

Bemerkung. Analog definiert man den Begriff des *oberen Rasters*.

Satz 2.2. Falls (H, \leq) eine Ordnung ist und T ein unterer Raster von H , dann existiert für jedes $a \in H$ ein Element $x \in U(a) \cap T : x = \sup U(a) \cap T$.

Definition 2.6. Es sei (H, \leq) eine Halbordnung, und $a, b \in H$ mit $a \leq b$. Unter dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ verstehen wir die Menge aller $x \in H : a \leq x \leq b$.

Satz 2.3 (Zornsches Lemma). Es sei (H, \leq) eine Halbordnung. Falls für jede nichtleere Ordnung $O \subseteq H$ das $\sup O$ existiert, dann besitzt H mindestens ein maximales Element.

3. Die Begriffe Problem, Algorithmus und Lösung betrachten wir hier als intuitiv gegeben. Es sei nun ein Problem p gegeben. Wir setzen voraus, daß dieses Problem genau eine Lösung besitzt. Diese Lösung nennen wir *exakte Lösung* und bezeichnen sie mit l . Die Anwendung eines Algorithmus a zur Lösung des Problems p führt in der Praxis im allgemeinen nicht auf die exakte Lösung l , sondern auf eine Näherungslösung l_a . Diese Näherungslösung l_a wollen wir *zulässige Lösung* von p bezüglich des Algorithmus a nennen, und wir schreiben

$$a \cdot p = l_a. \tag{3.1}$$

Es sei jetzt A eine Menge von Algorithmen zur Lösung des Problems p . L' bezeichne die Menge der mittels der Algorithmen aus A gegebenen zulässigen Lösungen von p . Falls $l \notin L'$, dann setzen wir $L = L' \cup \{l\}$, andernfalls setzen wir einfach $L = L'$. Ferner setzen wir voraus, daß L in einem normierten Raum liegt. Unter diesen Voraussetzungen führen wir mittels der folgenden Definitionen in A eine Gleichheit und eine Ordnung ein.

Definition 3.1. Zwei Algorithmen $a, b \in A$ heißen *gleich*, in Zeichen $a = b$, wenn $\|l_a - l\| = \|l_b - l\|$ ist.

Bemerkung. Es ist klar, daß die auf diese Weise definierte Gleichheit keine Identität ist.

Definition 3.2. Für Elemente $a, b \in A$ führen wir eine *Ordnungsrelation* \leq folgendermaßen ein:

$$a \leq b, \text{ wenn } \|l_a - l\| \leq \|l_b - l\|.$$

Bemerkung. Unter \leq in der Norm-Ungleichung verstehen wir die bekannte Ordnungsrelation für reelle Zahlen.

Es gilt der

Satz 3.1. Die durch die Definition 3.2 eingeführte Relation \leq erklärt eine Ordnung auf der Menge A der Algorithmen.

Beweis. Wir beweisen die Ordnungsaxiome:

- zu 1. Aus $\|l_a - l\| \leq \|l_a - l\| \Rightarrow a \leq a$.
- zu 2. Aus $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow \|l_a - l\| \leq \|l_b - l\|$ und $\|l_b - l\| \leq \|l_c - l\|$
 $\Rightarrow \|l_a - l\| \leq \|l_c - l\|$
 $\Rightarrow a \leq c$.

zu 3. Aus $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow \|l_a - l\| \leq \|l_b - l\|$ und $\|l_b - l\| \leq \|l_a - l\|$
 $\Rightarrow \|l_a - l\| = \|l_b - l\|$
 $\Rightarrow a = b.$

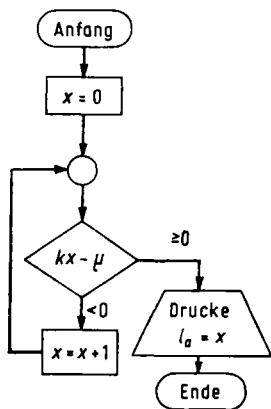
zu 4. Da $\forall a, b \in A$ die zulässigen Lösungen l_a und l_b eindeutig definiert sind, folgt unmittelbar, daß auch die nichtnegativen Zahlen $\|l_a - l\|$ und $\|l_b - l\|$ eindeutig definiert sind (vgl. dazu die Bemerkung nach dem Beispiel 3.1). Daraus folgt, daß $\|l_a - l\| \leq \|l_b - l\|$ oder $\|l_b - l\| \leq \|l_a - l\|$ gilt und folglich auch $a \leq b$ oder $b \leq a.$

Beispiel 3.1. Wir betrachten nun das folgende Problem: Es sei die Menge der Gleichungen

$$kx - \mu = 0$$

gegeben, wobei k, μ negative ganze Zahlen sind. Dieses Problem hat $\forall k, \mu$ mit $k \neq 0$ genau eine exakte Lösung $x := l = \frac{\mu}{k} \in Q^+.$

Algorithmus a



Algorithmus b

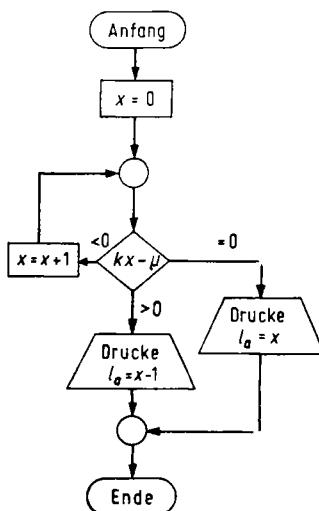


Abb. 1

Nun setzen wir voraus, daß zur Lösung dieses Problems die Menge $A = \{a, b\}$ der Algorithmen a und b zu unserer Verfügung steht. Dabei sind die Algorithmen a und b mit Hilfe der in Abb. 1 angegebenen Flußdiagramme definiert.

Wir nehmen als Norm in L den absoluten Betrag. Ferner setzen wir $\frac{\mu}{k} = v + \varrho,$ wobei $v \in Z$ und $\varrho \in Q$ mit $v \geq 0$ und $0 \leq \varrho < 1$ gilt. Dann erhalten wir folgende Ergebnisse:

a) Für $\varrho = \frac{1}{2} \Rightarrow l = v + \frac{1}{2}, l_a = v + 1, l_b = v \Rightarrow a = b.$

b) Für $\varrho > \frac{1}{2} \Rightarrow \|l_a - l\| = 1 - \varrho, \|l_b - l\| = \varrho \Rightarrow a < b$.

c) Für $0 < \varrho < \frac{1}{2} \Rightarrow b < a$.

d) Für $\varrho = 0 \Rightarrow l_a = l_b = l$.

Bemerkung. Aus dem obigen Beispiel geht hervor, daß im Fall einer Klasse p von ähnlichen Problemen anstelle des Satzes 3.1 gilt: „Die Relation \leq erklärt eine Halbordnung auf der Menge A der Algorithmen“.

Dabei muß man jeweils unter l bzw. l_a die entsprechende exakte bzw. zulässige Lösung eines konkreten Problems aus der Klasse p verstehen.

Definition 3.3. Es sei $A_1 \subseteq A, A_1 \neq \emptyset$. Ein Element $a^* \in A_1$ heißt ein *optimales Element* von A_1 , wenn gilt $a^* \leq a_1, \forall a_1 \in A_1$.

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die Folgerungen

Folgerung 3.1. Falls ein Element $a_l \notin A$ existiert, so daß $a_l \cdot p = l$ gilt, dann ist a_l offenbar ein optimales Element von A .

Folgerung 3.2. Falls A_1 endlich ist, dann besitzt sie ein optimales Element.

Es seien nun p eine Klasse von ähnlichen Problemen und A eine nichtleere Menge von Algorithmen zur Lösung dieser Klasse von Problemen gegeben. Gemäß der Bemerkung nach dem Beispiel 3.1. ist A eine Halbordnung. Unter der Voraussetzung, daß jede nichtleere Ordnung von Elementen der Menge A endlich ist, besitzt jede Ordnung O aus A ein Infimum. Darüber hinaus und wegen des Zornschen Lemmas besitzt die Menge A mindestens ein minimales Element. Falls zusätzlich A eine Ordnung ist (z. B. wenn p ein einziges Problem ist), dann ist dieses minimale Element ein optimales Element von A .

In der Praxis gilt im allgemeinen $a_l \notin A$, d. h., der Algorithmus a_l steht nicht zu unserer Verfügung. So begnügen wir uns mit einem fast minimalen Element von A . Da allerdings die Suche nach einem solchen Element von A auf keinen Fall ein einfacher Prozeß ist, beschränken wir uns in der Praxis auf solche Untermengen A_1 von A , für welche einerseits die Bestimmung eines minimalen Elements von A_1 keine so große rechnerische Schwierigkeit mit sich bringt und wo andererseits dieses minimale Element zu einer guten Näherung der Lösung l führt.

4. Der in Abschnitt 2 eingeführte Begriff der Ordnungsrelation in A setzt offensichtlich voraus, daß das Element l bzw. a_l bekannt ist, was allerdings in der Praxis fast ausgeschlossen ist. Darüber hinaus besitzt die oben eingeführte Ordnungsrelation nur rein theoretisches Interesse. In der Praxis interessiert man sich vielmehr für den Vergleich von Algorithmen, welche zur Lösung eines Problems zur Verfügung stehen, wobei aber die entsprechende exakte Lösung nicht bekannt ist.

Um für die Praxis eine geeignete Ordnungsrelation in der Menge A von Algorithmen einzuführen, betrachten wir daher eine solche Menge A , so daß die Anwendung eines

Elements $a \in A$ auf das Problem p zu einer „Lösung“ führt, die nicht Element des Lösungsraumes ist, sondern vielmehr Element einer Topologie dieses Raumes. Dazu geben wir hier zunächst die Definition eines topologischen Raums.

Definition 4.1. Der Raum X heißt ein *topologischer Raum*, wenn es in X ein System \bar{T} von Teilmengen gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- a) $\emptyset, X \in \bar{T}$,
- b) die Vereinigung endlich vieler Mengen aus \bar{T} gehört zu \bar{T} ,
- c) der Durchschnitt beliebig vieler Mengen aus \bar{T} gehört zu \bar{T} .

Die im System \bar{T} zusammengefaßten Teilmengen von X heißen *abgeschlossen*: Jede bezüglich X komplementäre Menge einer abgeschlossenen Menge heißt *offene Menge*. Daraus folgt, daß die Mengen X und \emptyset auch offen sind. Das System T aller offenen Mengen von X heißt bekanntlich eine *Topologie* von X .

Es sei das Problem p gegeben. Dabei setzen wir voraus, daß seine exakte Lösung l Element eines vorgegebenen topologischen Raumes L ist. Mit T bezeichnen wir die Topologie von L und mit \bar{T} das System der abgeschlossenen Teilmengen von L . Nun geben wir eine neue Definition der zulässigen Lösung.

Definition 4.2. Jedes Element $t \in \bar{T}$ mit der Eigenschaft $l \in t$ heißt eine *zulässige Lösung* des Problems p .

Es sei jetzt A eine Menge von Algorithmen zur Lösung des Problems p , so daß:

$$a \in A \Rightarrow a \cdot p = t,$$

dabei ist t eine zulässige Lösung von p . Wir können also das Problem p als eine Abbildung betrachten, nämlich:

$$p: A \rightarrow \bar{T}. \quad (4.1)$$

Nehmen wir nun an, daß eine solche Abbildung vorhanden ist, dann geben wir folgende Definition.

Definition 4.3. Ein Algorithmus $a \in A$ heißt *optimal* bezüglich des Problems p , wenn gilt:

$$ap = t, \quad \text{wobei } t = \{l\}.$$

Definition 4.4. Zwei Algorithmen $a, b \in A$ heißen *gleich*, in Zeichen $a = b$, wenn gilt $t_a = t_b$. Dabei ist $t_a = a \cdot p$ und $t_b = b \cdot p$.

Bemerkung. Die auf diese Weise definierte Gleichheit ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

Definition 4.5. Für Elemente $a, b \in A$ führen wir in A eine *Ordnungsrelation* \leq folgendermaßen ein: $a \leq b$, wenn $t_a \subseteq t_b$.

Wie man leicht nachprüfen kann, erfüllt diese Relation die Axiome einer Halbordnung. Ferner führen wir in A die zweistelligen Operationen Vereinigung (\cup) und Durchschnitt (\cap) ein.

Definition 4.6. Es seien a, b beliebige Elemente von A .

a) Unter der *Vereinigung* $a \cup b$ verstehen wir einen Algorithmus $c \in A$, so daß $t_c = t_a \cup t_b$ ist.

b) Unter dem *Durchschnitt* $a \cap b$ verstehen wir einen Algorithmus $c \in A$, so daß $t_c = t_a \cap t_b$ ist.

Bemerkung. Dabei ist anzunehmen, daß mit $a, b \in A$ die Menge A auch die Elemente $a \cup b$ und $a \cap b$ enthält.

Da alle zulässigen Lösungen nach Definition mindestens ein Element enthalten (nämlich die exakte Lösung l), folgt unmittelbar, daß $a, b \in A \Rightarrow a \cup b, a \cap b \neq \emptyset$. Aus den Definitionen 4.5 und 4.6 ergeben sich leicht die folgenden Beziehungen:

$$a, b \in A \Rightarrow a \cap b \leq a, b \leq a \cup b. \tag{4.2}$$

Im Anschluß an die Definitionen 4.4 bis 4.6 geben wir nun folgende

Definition 4.7. Es seien $\mathbf{a} = (a_i), \mathbf{b} = (b_i), \mathbf{c} = (c_i), i = 1, 2, \dots$ Folgen von Algorithmen aus A . Wir führen die Begriffe Gleichheit ($=$), Halbordnung (\leq), Vereinigung (\cup) und Durchschnitt (\cap) für solche Folgen ein:

- a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots,$
- b) $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i \leq b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots,$
- c) $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow a_i \cup b_i = c_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots,$
- d) $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow a_i \cap b_i = c_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots$

Bemerkung. Falls $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, aber $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ist, dann schreiben wir einfach $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

Es seien nun ein Problem p und eine Iterationsmethode ε zur Lösung dieses Problems gegeben. Dabei verstehen wir unter einer Iterationsmethode zur Lösung des Problems p eine Folge $\mathbf{a} = (a_i), i = 1, 2, \dots$, von Algorithmen aus A , so daß $a_i p = t_i$, wobei t_i zulässige Lösungen von p sind.

Eine Iterationsmethode $\varepsilon = \mathbf{a} = (a_i)$ heißt *konstant*, wenn gilt $a_i = a_{i+1}, \forall i = 1, 2, \dots$. Falls $a_i = a_{i+1}, \forall i = k, k + 1, \dots, k > 1$, gilt, dann heißt die entsprechende Iterationsmethode *fast konstant*.

Die Iterationsmethode $\varepsilon_1 = \mathbf{a}_1 = (a_i^1)$ heißt *nicht schlechter* als die Iterationsmethode $\varepsilon_2 = \mathbf{a}_2 = (a_i^2)$, in Zeichen $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, wenn gilt $\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a}_2$. Betrachten wir nun jeden Algorithmus a aus A als eine konstante Folge von Algorithmen, nämlich als die Folge $\mathbf{a} = (a)$, so kann man sagen, daß jeder Algorithmus als eine Iterationsmethode zu verstehen ist.

Eine Folge $\mathbf{a} = (a_i)$ von Algorithmen aus A heißt *isoton* oder *steigend* bzw. *antiton* oder *fallend*, in Zeichen $\mathbf{a} \uparrow$ bzw. $\mathbf{a} \downarrow$, genau dann, wenn $\forall i = 1, 2, \dots \Rightarrow a_i \leq a_{i+1}$ bzw. $a_{i+1} \leq a_i$. Ferner heißt sie *streng isoton* oder *streng steigend* bzw. *streng antiton* oder *streng fallend*, in Zeichen $\mathbf{a} \uparrow$ bzw. $\mathbf{a} \downarrow$, wenn sogar $\forall i = 1, 2, \dots \Rightarrow a_i < a_{i+1}$ bzw. $a_{i+1} < a_i$. Für (streng) isoton und antiton verwenden wir einfach die Bezeichnung (streng) *monoton*. Analog definiert man die Begriffe *fast (streng) monotone*.

Bemerkung. Dieselben Bezeichnungen verwenden wir auch für die entsprechenden Iterationsmethoden.

Es gilt der

Satz 4.1. *Es sei das Problem p und eine nicht antitone Iterationsmethode ε zur Lösung dieses Problems gegeben. Dann existiert eine antitone Iterationsmethode $\hat{\varepsilon}$, so daß $\hat{\varepsilon} < \varepsilon$.*

Beweis. Es sei $\mathbf{a} = (a_i)$ die ε entsprechende Folge von Algorithmen. Wir betrachten jetzt die Iterationsmethode $\hat{\varepsilon}$, deren entsprechende Folge von Algorithmen folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= a_1 \\ \hat{a}_i &= a_i \cap \hat{a}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\hat{\mathbf{a}} \downarrow$ und $\hat{\mathbf{a}} \leq \mathbf{a}$ ist. Da aber \mathbf{a} eine nicht antitone Folge ist, folgt unmittelbar, daß $\hat{\mathbf{a}} < \mathbf{a}$ und folglich $\hat{\varepsilon} < \varepsilon$. Aus diesem Satz folgt unmittelbar

Korollar 4.1. *Für jede Iterationsmethode ε zur Lösung des Problems p existiert eine antitone Iterationsmethode $\hat{\varepsilon}$, so daß $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$ ist.*

Ist eine Iterationsmethode $\varepsilon = \mathbf{a} = (a_i)$ zur Lösung des Problems p gegeben, so haben wir

$$a_i p = t_i, \quad t_i \in \bar{T}, \quad l \in t_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Aus der Definition der Topologie T folgt unmittelbar, daß der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} t_i$ existiert und gleich einer zulässigen Lösung t ist.

Falls ein Algorithmus $a \in A$ existiert, so daß $ap = t$ ist, dann heißt dieser Algorithmus *infimum* oder *untere Grenze* der Folge \mathbf{a} bzw. der Iterationsmethode ε , in Zeichen $a = \inf \mathbf{a}$. Unter der Voraussetzung, daß $\inf \mathbf{a}$ existiert, gilt

$$\inf \mathbf{a} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ist die Folge \mathbf{a} antiton und existiert $\inf \mathbf{a}$, dann nennen wir dieses *Limes* der Folge \mathbf{a} und bezeichnen es mit $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$. Im Fall der Existenz des $\inf \mathbf{a}$ bzw. des $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ wird die zulässige Lösung $t = a \cdot p$ die *optimale* zulässige Lösung des Problems p bezüglich der Iterationsmethode ε genannt.

Wegen des Korollars 4.1 kann man sich bei den Anwendungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf antitone Folgen von Algorithmen bzw. auf antitone Iterationsmethoden beschränken. Demzufolge ist es von Interesse, die Existenz des $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ zu untersuchen. Hierbei entsteht die Frage, wann gilt $ap = \{l\}$ unter der Bedingung der Existenz des $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$?

Im allgemeinen kann man diese Frage für ein gegebenes Problem p folgendermaßen formulieren: Wie kann man eine Iterationsmethode $\varepsilon = \mathbf{a} = (a_i)$ wählen, damit gilt: 1) $\exists \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$, 2) $a \cdot p = \{l\}$? Diese Frage wird allerdings nur in speziellen Fällen behandelt. Offenbar gelten die Sätze:

Satz 4.2. *Jede antitone fast konstante Folge $\mathbf{a} = (a_i)$ von Algorithmen aus A besitzt einen Limes.*

Satz 4.3. Falls A eine endliche Menge ist, dann ist jede antitone Folge $\mathbf{a} = (a_i)$ aus A eine fast konstante Folge.

Bekanntlich gilt in der Algebra der

Satz 4.4. Jede Äquivalenzrelation \ddot{u} auf einer Menge M definiert gemäß der Abbildung

$$z_{\ddot{u}}: M \rightarrow \mathfrak{P}(M) \text{ mit } z_{\ddot{u}}(x) = \{y \in M \wedge y\ddot{u}x\} \tag{4.3}$$

eine Zerlegung $z_{\ddot{u}}$ von M mit den disjunktiven Teilmengen $z_{\ddot{u}}(x)$, $x \in M$.

Wenden wir diesen Satz auf die Menge A der Algorithmen zur Lösung des Problems p an, so erhalten wir die folgenden Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $=$, nämlich

$$z_{=} (a) = \{b \in A \wedge b = a\}.$$

Bekanntlich heißt die Abbildung (4.3) die Projektion von M auf die Quotientenmenge M/\ddot{u} . So gilt speziell für die Menge A das

Korollar 4.2. Für die Äquivalenzrelation $=$ auf A existiert eine Funktion

$$z_{=} : A \rightarrow A/=,$$

die die Menge A auf die Quotientenmenge $A/=$ abbildet.

Offenbar sind die Äquivalenzklassen von $=$ die Elemente von $A/=$.

Wegen des Auswahlaxioms (vgl. [13]) existiert eine Funktion $\hat{z}: A/= \rightarrow A$, deren Argumente die Elemente von $A/=$ sind (und folglich Untermengen von A sind), und deren Werte für jedes Element A_1 aus $A/=$ ein Element von A_1 ist.

Offenbar gilt: $a \in A \Rightarrow \hat{z}(z_{=}(a)) = a$. Dabei ist die Relation $=$ im Sinne der Äquivalenzrelation in A zu verstehen. Darüber hinaus können wir unter Verwendung der Äquivalenzrelation $=$ in A schreiben: $\hat{z} = z_{=}^{-1}$.

Da gleiche Algorithmen aus A dieselbe zulässige Lösung des Problems p liefern, können wir uns in der Praxis auf die Menge $\hat{z}(A/=)$, d. h. auf den Wertevorrat von \hat{z} beschränken. Dabei bedeutet $\hat{z}(A/=)$ im Grunde die Menge der verschiedenen Algorithmen aus A . Es gilt der

Satz 4.5. Falls L endlich ist, dann ist auch $\hat{z}(A/=)$ endlich.

Da bei jedem Rechenmittel die zur Verfügung stehenden Informationen immer endlich viele sind, ist man gezwungen, sich in der Praxis auf endliche Mengen L zu beschränken. Darüber hinaus ergibt sich, daß man wegen der Sätze 4.2, 4.3 und des Korollars 4.1 im allgemeinen mit solchen Mengen A von Algorithmen zu tun hat, bei denen zu jeder Folge $\mathbf{a} = (a_i)$ von Algorithmen aus A der $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ existiert.

5. Es seien M_1 und M_2 zwei beliebige Mengen, deren Elemente nichtleere Mengen sind. Wir betrachten die Abbildung

$$f: M_1 \in A \rightarrow f(A) \in M_2. \tag{5.1}$$

Diese Abbildung erfüllt die *Teilmengeneigenschaft* (TE), wenn gilt:

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_1 \quad \text{mit} \quad A \subseteq B \rightarrow f(A) \subseteq f(B).$$

Sie erfüllt die *Obermengeneigenschaft* (OE), wenn gilt:

- a) $\mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{M}_1$,
- b) $\forall A \in \mathbf{M}_1 \Rightarrow A \subseteq f(A)$.

Ferner erfüllt sie die *optimale Obermengeneigenschaft* (OOE), wenn gilt:

- a) Die (OE),
- b) $\forall A \in \mathbf{M}_1$ existiert kein Element $B \in \mathbf{M}_2 : A \subseteq B \subset f(A)$.

Es gilt der

Satz 5.1. Für die Abbildung f gilt die Aussage (OOE) \Rightarrow (TE).

Beweis. Es seien $A, B \in \mathbf{M}_1$ mit $A \subseteq B$. Wegen der (OE) folgt:

$$\begin{aligned} A \subseteq f(A) \quad \text{und} \quad B \subseteq f(B), \\ \Rightarrow A \cap B = A \subseteq f(A) \cap f(B) \subseteq f(A), \end{aligned}$$

und wegen der (OOE) $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = f(A) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$, d. h. die (TE).

Bemerkung. Für die Abbildung f gilt nicht die Aussage (OE) + (TE) \Rightarrow (OOE).

Wenn die Abbildung f die (TE) und (OE) bzw. die (OOE) erfüllt, heißt sie eine *Intervallbildung* bzw. eine *optimale Intervallbildung*.

Es sei jetzt M eine nichtleere halbgeordnete Menge und $\mathbf{I}(M)$ bezeichne die Menge der abgeschlossenen Intervalle von M . Ferner nehmen wir eine nichtleere Teilmenge $\mathbf{I}^*(M)$ von $\mathbf{I}(M)$ mit der Eigenschaft $A, B \in \mathbf{I}^*(M) \Rightarrow A \cap B \in \mathbf{I}^*(M)$, und es bezeichne M^* die Menge der Endpunkte der Intervalle von $\mathbf{I}^*(M)$. Dann gilt der

Satz 5.2. Falls die Abbildung

$$f: \mathfrak{P}(M) \rightarrow \mathbf{I}^*(M)$$

eine optimale Intervallbildung ist, dann ist die Menge M^* ein Raster von M (unterer und oberer).

Beweis. Wir beweisen den Satz im Fall des unteren Rasters. Analog verläuft der Beweis im Fall des oberen Rasters.

Im Anschluß an die Definition 1.5 bezeichnen wir für jedes $a \in M$ mit $U(a)$ die Menge aller $b \in M : b \leq a$. Zunächst zeigen wir, daß $M^* \cap U(a) \neq \emptyset$ gilt. Nach Definition sind beide Mengen M^* und $U(a)$ nichtleer. Für $a \in M$ gilt aber $[a, a] \in \mathfrak{P}(M)$ und folglich

$$f([a, a]) = : [b_1, b_2] \in \mathbf{I}^*(M). \tag{5.2}$$

Wegen der (OE) gilt dann $b_1 \leq a \leq b_2$. Daraus folgt $b_1 \in U(a)$. Aus $[b_1, b_2] \in \mathbf{I}^*(M)$ folgt auch, daß $b_1 \in M^*$. Folglich gilt $M^* \cap U(a) \neq \emptyset$. Gemäß der Definition des