Beiträge zur Numerischen Mathematik 1

Beiträge zur Numerischen Mathematik 1

Herausgegeben von
Frieder Kuhnert und Jochen W. Schmidt

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1974

Lizenzausgabe für den R. Oldenbourg Verlag, München–Wien
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/194/74
Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei »Gottfried Wilhelm Leibniz«,
445 Gräfenhainichen/DDR · 3892
ISBN: 3-486-34401-3

Geleitwort

Die Anwendung mathematischer Erkenntnisse in anderen Wissenschaftszweigen, in der Technik und in weiten Bereichen der Volkswirtschaft ist in den meisten Fällen in irgendeiner Weise mit dem Begriff „Numerische Mathematik“ verbunden. Der numerische Algorithmus als zentraler Begriff der Numerischen Mathematik soll deshalb auch der inhaltlichen Gestaltung der Zeitschriftenreihe zugrunde liegen. Dabei sollen alle Aspekte des numerischen Algorithmus, wie etwa seine Herkunft, Begründung, Konvergenz, Realisierung, Testung und Anwendung, in gleichem Maße in der Zeitschriftenreihe erörtert werden können.

Die Herausgeber

Hinweise für Autoren

Zur Veröffentlichung vorgesehene Manuskripte (in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache) sind in einwandfrei leserlicher und druckfertiger Form (Schreibmaschinenoriginal mit einer Kopie, zweizeilig, Formeln gut leserlich) einzureichen an Prof. Dr. F. KUHNERT, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, DDR-9023 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 41, oder Prof. Dr. J. W. SCHMIDT, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden, DDR-8027 Dresden, Zellescher Weg 12–14.

Herausgeber und Verlag bitten, unbedingt die folgenden Auszeichnungsregeln zu beachten: Kursive (schräge) Buchstaben sind blau zu unterstreichen, halbfett kursive zweimal blau; griechische Buchstaben rot; Fraktur grün; Schreibschrift gelb; grotesk braun; kursiver Text blau; Sperrung gestrichelt; Kleindruck ist durch grünen Strich am linken Rand zu kennzeichnen.

Formelzähler sind an den rechten Rand zu stellen. Die Autoren werden gebeten, durch Benutzung geeigneter Abkürzungen komplizierte Formelausdrücke zu vermeiden. Abbildungen sind dem Manuskript gesondert beizufügen. Der Literaturnachweis ist in eckiger Klammer durchzunumerieren. Im Text ist auf die Literatur mit der Ziffer in eckiger Klammer zu verweisen. Je nachdem, ob Literaturhinweise aus Büchern, Zeitschriften oder Sammelwerken erfolgen, ist nach folgenden Mustern zu verfahren:

[1] FADDEJEW, D. K., und W. N. FADDEJEWA, Numerische Methoden der linearen Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen). FADDEJEW, D. K., und W. N. FADDEJEWA, Numerische Methoden der linearen Algebra, 3. Aufl., R. Oldenbourg Verlag, München–Wien 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] SCHMIDT, J. W., Defektabschätzungen bei Differenzenverfahren, ZAMM 46 (1966), 17–39.

[3] TEMPLE, G., Linearization and delinearization. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1958, Cambridge 1960, p. 233–247.

[4] Ульм, С., Принцип мажорант и метод хорд, Изв. АН ЭстССР, Физ.-матем., 13 (1964), 217–227.

Die Korrekturen sind spätestens 5 Tage nach Eingang an Prof. Dr. F. KUHNERT (Anschrift s. o.) zu senden. Durch nachträgliche Änderungen entstehende zusätzliche Korrekturkosten sind vom Autor zu tragen.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 50 Sonderdrucke sowie ein Exemplar des gesamten Heftes unentgeltlich. Bei zwei und mehr Autoren einer Arbeit erhält jeder Autor ein Belegexemplar des Heftes; die 50 Sonderdrucke sind nach eigenem Ermessen unter die Autoren zu verteilen.

Inhalt

Beiträge zur Numerischen Mathematik
1 (1974), 9–42

Untersuchungen zur Einschließung der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen[1])

Karl-Heinz Bachmann

1. Ein Einschließungsverfahren für Anfangswertaufgaben

1.1. *Einleitung*

Zur Fehlerabschätzung bei der genäherten Lösung von Differentialgleichungen sind Iterationsverfahren gut geeignet, da hierfür allgemeine Abschätzungssätze bekannt sind. Um derartige meist für die Lösung von Gleichungen in Banachräumen hergeleitete Sätze bei Diskretisierungsverfahren nutzen zu können, ist es erforderlich, aus punktweise verfügbaren Näherungen Näherungsfunktionen zu konstruieren. Verwendet man eine solche Funktion als Anfangselement einer Iteration, so lassen sich weitere Näherungen ermitteln und Aussagen über ihre Fehler machen. Ein von J. Schröder angegebener Einschließungssatz [2] liefert in Verallgemeinerung des Iterationsverfahrens Folgen von unteren und oberen Schranken. Dieser Einschließungssatz soll hier zur Lösung der Anfangswertaufgabe für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt werden.

1.2. *Bezeichnungen*

Es bezeichne I das reelle abgeschlossene Intervall $[t_0, T]$, R sei der Raum von n-tupeln stetig differenzierbarer Funktionen von $t \in I$. Die Komponenten eines Elementes $x \in R$ seien mit $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ bezeichnet. Über R sei eine Halbordnung definiert:

$$x \leqq y, \text{ falls } x^{(i)}(t) \leqq y^{(i)}(t) \quad \text{für alle } \ t \in I \ \text{ und } \ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

N sei ein n-dimensionaler reeller normierter Vektorraum, ein Vektor $v \in N$ habe die Komponenten $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$. Als Norm wird hier die Maximumnorm

[1]) Gekürzte Fassung der 1970 von der Technischen Universität Dresden angenommenen Habilitationsschrift des Verfassers. Den Referenten, Herrn Prof. Dr. N. J. Lehmann, Herrn Prof. Dr. G. Opitz und Herrn Prof. Dr. J. W. Schmidt sei auch an dieser Stelle für ihre Unterstützung durch wertvolle Hinweise gedankt.

$\|v\| = \max_i |v^{(i)}|$ verwendet. Es lassen sich jedoch auch mit anderen Vektornormen den hergeleiteten Abschätzungen entsprechende Resultate erzielen.

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \in W \subset N. \tag{2}$$

W ist ein n-dimensionales Teilgebiet von N, f eine Abbildung von $N \times I$ in N. Die Funktion f genüge in einer Kugel $K \subset W$ der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} &\|f(w,t) - f(v,t)\| \leqq L\|w - v\|, \\ &w \in K,\ v \in K,\ K = \{y : \|y - y_0\| \leqq r_0,\ r_0 > 0\},\ L > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Jedes der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} &u' = f(u,t),\ u(t_0) = u_0 \in K', \\ &K' = \{y : \|y - y_0\| \leqq r_1 < r_0,\ r_1 > 0\} \end{aligned} \tag{4}$$

ist dann für genügend kleines $t - t_0$ eindeutig lösbar. Durch

$$T\,u = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)\, ds \tag{5}$$

wird ein Operator T definiert, der eine Teilmenge von R in R abbildet. Die Lösung eines Anfangswertproblems (4) kann für genügend kleines $t - t_0$ durch das Picardsche Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} &u_{j+1} = T\,u_j \quad (j = 1, 2, \ldots) \\ &u_1 \in R, \quad u_1(t_0) = u_0, \quad u_1(t) \in K \quad \text{für} \quad t \in I \end{aligned} \tag{6}$$

bestimmt werden.

1.3. *Fehlerschranken*

Aus der Iterationsvorschrift (6) lassen sich leicht Fehlerschranken ableiten. Es gilt

$$\begin{aligned} \|u_3(t) - u_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(u_2(s), s) - f(u_1(s), s)]\, ds \right\| \\ &\leqq \int_{t_0}^{t} \|f(u_2(s), s) - f(u_1(s), s)\|\, ds \\ &\leqq \int_{t_0}^{t} L\|u_2(s) - u_1(s)\|\, ds \leqq L\,\varepsilon(t - t_0), \end{aligned} \tag{7}$$

falls $\|u_2(s) - u_1(s)\| \leqq \varepsilon$ für $s \in [t_0, t] \subset I$.

Durch Induktionsschluß folgt

$$\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\| \leqq \int_{t_0}^{t} L\|u_j(s) - u_{j-1}(s)\| ds \leqq L^{j-1}\, \varepsilon \frac{(t-t_0)^{j-1}}{(j-1)!}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\|u_{j+m}(t) - u_j(t)\| &\leqq \sum_{r=1}^{m} \|u_{j+r}(t) - u_{j+r-1}(t)\| \\ &\leqq L^{j-1}\, \varepsilon \frac{(t-t_0)^{j-1}}{(j-1)!}\, e^{L(t-t_0)}.\end{aligned} \tag{9}$$

Diese Ungleichungen gelten, solange alle $u_j(t)$ in K liegen, also wegen der Stetigkeit der $u_j(t)$ für genügend kleines $t - t_0$. Für diese t konvergiert die Folge der $u_j(t)$ sowohl hinsichtlich der Norm als auch komponentenweise gleichmäßig gegen eine Funktion $U(t)$, die die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems (4) ist. Aus (9) folgt für $j = 2$ und $m \to \infty$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|U(t) - u_2(t)\| &\leqq \sum_{r=1}^{\infty} \|u_{2+r}(t) - u_{1+r}(t)\| \leqq \varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(L(t-t_0))^r}{r!} \\ &= \varepsilon (e^{L(t-t_0)} - 1).\end{aligned} \tag{10}$$

Ist statt der in (7) benutzten Abschätzung $\|u_2(s) - u_1(s)\| \leqq \varepsilon$ eine Abschätzung der Form

$$\|u_2(s) - u_1(s)\| \leqq \sigma(s - t_0) \quad \text{für} \quad s \in [t_0, t] \subset I \tag{11}$$

bekannt, so folgt

$$\|u_3(t) - u_2(t)\| \leqq \frac{1}{2} L\, \sigma (t - t_0)^2, \tag{12}$$

$$\|U(t) - u_2(t)\| \leqq \frac{\sigma}{L} (e^{L(t-t_0)} - L(t - t_0) - 1), \tag{13}$$

$$\|U(t) - u_1(t)\| \leqq \frac{\sigma}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1). \tag{14}$$

Diese Form entspricht der von Tollmien [3] angegebenen Abschätzung für das Anfangswertproblem bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Zweckmäßig benutzt man zur Rechnung den Defekt der Näherungslösung $u_1(t)$

$$d(t; u_1) = f(u_1(t), t) - u_1'(t). \tag{15}$$

Dann gilt

$$u_2(t) - u_1(t) = \int_{t_0}^{t} d(s; u_1)\, ds \tag{16}$$

und

$$\begin{aligned}\|u_2(t) - u_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} d(s; u_1)\, ds \right\| \leqq \int_{t_0}^{t} \|d(s; u_1)\|\, ds \\ &\leqq \max_{s \in [t_0, t]} \|d(s; u_1)\| \cdot (t - t_0).\end{aligned} \tag{17}$$

Je nach den über den Defekt $d(t;u_1)$ vorliegenden Informationen läßt sich eine der in den Abschätzungen verwendeten Konstanten ε oder σ berechnen.

Wird das betrachtete Anfangswertproblem schrittweise genähert gelöst, so ist der Anfangsvektor für einen Integrationsschritt höchstens beim ersten Schritt genau bekannt. Im allgemeinen ist der Anfangsvektor als Resultat des vorhergehenden genäherten Integrationsschrittes fehlerbehaftet. Die Norm der Differenz der Lösungen $Y(t)$ und $U(t)$ der benachbarten Anfangswertprobleme (2) und (4) kann für genügend kleines $t - t_0$ abgeschätzt werden durch

$$\|Y(t) - U(t)\| \leqq r_1\, e^{L(t-t_0)}. \tag{18}$$

Beweis. Die Iteration $y_{n+1} = T\, y_n$ führt ausgehend von

$$y_1(t) = U(t) + y_0 - u_0 \tag{19}$$

zu

$$\begin{aligned} \|y_2(t) - U(t)\| &\leqq \|y_0 - u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(y_1(s), s) - f(U(s), s)\| ds \\ &\leqq \|y_0 - u_0\| + \int_{t_0}^{t} L\|y_0 - u_0\| ds \\ &\leqq r_1 + L\, r_1(t - t_0) \end{aligned} \tag{20}$$

und

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - U(t)\| &\leqq \|y_0 - u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(y_n(s), s) - f(U(s), s)\|\, ds \\ &\leqq \|y_0 - u_0\| + L \int_{t_0}^{t} \|y_n(s) - U(s)\| ds \\ &\leqq r_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{L^k (t - t_0)^k}{k!} \leqq r_1 \cdot e^{L(t-t_0)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = Y(t)$ folgt daraus (18).

Die Norm der Differenz zwischen einer berechneten Näherungslösung $\tilde{U}(t)$ des Anfangswertproblems (4) und der Lösung $Y(t)$ des Anfangswertproblems (2) kann abgeschätzt werden durch

$$\|\tilde{U}(t) - Y(t)\| \leqq \|\tilde{U}(t) - U(t)\| + \|U(t) - Y(t)\|. \tag{22}$$

Der an der Stelle t_r berechnete Näherungsvektor $\tilde{U}(t_r)$ sei abkürzend mit $\tilde{u}_r$ bezeichnet, eine Abschätzung $\|\tilde{u}_r - Y(t_r)\| \leqq \delta_r$ sei bekannt. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = f(u, t), \qquad u(t_r) = \tilde{u}_r \tag{23}$$

sei mit $U_r(t)$ bezeichnet. An der Stelle $t_{r+1} = t_r + h$ $(h > 0)$ gilt dann die Abschätzung

$$\|\tilde{u}_{r+1} - Y(t_{r+1})\| \leqq \delta_r\, e^{Lh} + \|\tilde{u}_{r+1} - U_r(t_{r+1})\| = \delta_{r+1}, \tag{24}$$

wobei $\tilde{u}_{r+1}$ durch genäherte Lösung des Anfangswertproblems (23) an der Stelle t_{r+1} berechnet wird. Geschieht diese Berechnung mittels eines oder zweier Schritte des Iterationsverfahrens, so kann $\|\tilde{u}_{r+1} - U_r(t_{r+1})\|$ durch eine der Formeln (10), (13) oder (14) abgeschätzt werden. (24) stellt somit eine rekurrente Fehlerabschätzung für das Anfangswertproblem (2) dar. Die darin enthaltene Exponentialfunktion mit dem positiven Exponenten $L\,h$ bewirkt, daß diese Fehlerabschätzung für praktische Zwecke bei einer größeren Zahl von Integrationsschritten durch ihr starkes Wachstum unbrauchbar ist, sofern nicht die exakte Lösung ein ähnliches Wachstumsverhalten zeigt.

1.4. *Einschließungssatz*

Mittels eines von J. SCHRÖDER stammenden Einschließungssatzes [2], der im wesentlichen auf einer Zerlegung des Iterationsoperators in monotone Anteile beruht, jedoch allgemeiner formuliert wurde, lassen sich Fehlerschranken verbessern. Der Einschließungssatz lautet in einer speziellen Fassung:

Es sei P ein reeller halbgeordneter linearer Raum, $\langle v, w\rangle$ bezeichne die Menge aller $u \in P$ mit $v \leqq u \leqq w$; S sei ein Operator, der $\langle v, w\rangle$ in P abbildet. Es existiere eine für $u_1 \in \langle v, w\rangle$ und $u_2 \in \langle v, w\rangle$ definierte Funktion $H(u_1, u_2)$ mit den Eigenschaften

(A) $\quad H(u, u) = S\,u,$

(B) $\quad H(u_1, v_1) \leqq H(u_2, v_2) \quad$ *für* $\quad u_1 \leqq u_2 \quad$ *und* $\quad v_2 \leqq v_1.$

Es seien weiter zwei Elemente $x \in \langle v, w\rangle$ und $z \in \langle v, w\rangle$ bekannt, für die

(V 1) $\quad x \leqq z, \quad x \leqq H(x, z), \quad H(z, x) \leqq z$

gilt. Falls ein Fixpunktsatz eine eindeutige Lösung y der Gleichung $u = S\,u$ garantiert, wird diese Lösung durch

(C) $\quad H(x, z) \leqq y \leqq H(z, x)$

eingeschlossen.

Ist bereits bekannt, daß

(V 2) $\quad x \leqq y \leqq z$

gilt, so kann auf die Voraussetzung (V 1) verzichtet werden. Aus den Eigenschaften (A) und (B) folgt dann

$$\left.\begin{aligned} &H(x, z) \leqq H(x, y) \leqq H(y, y) = y, \\ &y = H(y, y) \leqq H(z, y) \leqq H(z, x). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Es kann vorkommen, daß $H(x, z)$ in diesem Fall eine schlechtere untere Schranke für y ist als x, z. B. wird für $x = y$

$$H(x, z) = H(y, z) \leqq H(y, y) = y = x. \tag{26}$$

Entsprechend gilt für $z = y$ die Ungleichung

$$z = y = H(y, y) \leqq H(y, x) = H(z, x). \tag{27}$$

Unter der Voraussetzung (V 2) sind also $H(x, z)$ und $H(z, x)$ nicht immer verbesserte Schranken für y. Um die praktisch schwierige Überprüfung von (V 1) zu vermeiden, wird im folgenden nur vorausgesetzt, daß (V 2) erfüllt ist.

1.5. *Anwendung des Einschließungssatzes*

Zur Anwendung des Einschließungssatzes zur Lösung des Anfangswertproblems (2) ist eine Funktion H zu konstruieren, die die Eigenschaften (A) und (B) aus 1.4. hat. Zusätzlich gelte noch die Voraussetzung:

(V 3) $f(v, t)$ hat für $v \in K$, $t \in I$ stetige partielle Ableitung erster Ordnung und nicht wechselnden Vorzeichens nach den Komponenten von v.

Als Abkürzung wird

$$s_{ik} = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^{(i)}(v, t)}{\partial v^{(k)}}\right) \quad \text{für} \quad v \in K, \quad t \in I, \quad k = 1, \ldots, n \tag{28}$$

verwendet. Die Funktion $H(x, z)$ wird definiert durch

$$H(x, z) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(x(s), z(s), s)\, ds, \tag{29}$$

wobei

$$g^{(i)}(x(s), z(s)\, s) = f^{(i)}(r_i(s), s)$$
$$\text{mit} \quad r_i^{(k)}(s) = \begin{cases} x^{(k)}(s) & \text{für} \quad s_{ik} \geqq 0, \\ z^{(k)}(s) & \text{für} \quad s_{ik} < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Für $x = z = u$ wird $H(u, u) = T\,u$, also hat H die Eigenschaft (A) für den Operator T. Die Eigenschaft (B) läßt sich ebenfalls leicht nachweisen:

$$H(u_2, v_2) - H(u_1, v_1)$$
$$= u_2(t_0) - u_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} [g(u_2(s), v_2(s), s) - g(u_1(s), v_1(s), s)]\, ds, \tag{31}$$

$$g^{(i)}(u_2(s), v_2(s), s) - g^{(i)}(u_1(s), v_1(s), s)$$
$$= f^{(i)}(r_{2i}(s), s) - f^{(i)}(r_{1i}(s), s) = \sum_{k=1}^{n} (r_{2i}^{(k)}(s) - r_{1i}^{(k)}(s)) \left.\frac{\partial f^{(i)}}{\partial v^{(k)}}\right|_M. \tag{32}$$

In (32) sind die Werte der auftretenden partiellen Ableitungen an einer Mittelstelle zwischen $r_{2i}(s)$ und $r_{1i}(s)$ zu nehmen. Die $r_{2i}(s)$ und $r_{1i}(s)$ stimmen komponentenweise mit $u_2(s)$ bzw. $v_2(s)$ und $u_1(s)$ bzw. $v_1(s)$ entsprechend den Werten der s_{ik} überein. Aus $u_1 \leqq u_2$ und $v_2 \leqq v_1$ folgt

$$\left.\begin{array}{llll} r_{2i}^{(k)}(s) - r_{1i}^{(k)}(s) = u_2^{(k)}(s) - u_1^{(k)}(s) \geqq 0 & \text{für} & s_{ik} \geqq 0, \\ r_{2i}^{(k)}(s) - r_{1i}^{(k)}(s) = v_2^{(k)}(s) - v_1^{(k)}(s) \leqq 0 & \text{für} & s_{ik} < 0. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Die einzelnen Summanden in (32) sind daher nicht negativ. Somit folgt wegen $u_2(t_0) \geqq u_1(t_0)$ die Eigenschaft (B) direkt aus (31). Da die Gleichung $u = Tu$ einen eindeutig bestimmten Fixpunkt hat, ist der Einschließungssatz anwendbar. Als Ausgangsfunktionen können nach 1.3. gewonnene Schranken x und z benutzt werden.

1.6. *Wachstum der Fehlerschranken*

Maßgebend für die Güte der neuen Schranken $x_1 = H(x, z)$ und $z_1 = H(z, x)$ ist das Wachstum der Differenz $z_1(t) - x_1(t)$ mit t. Zur Untersuchung der Differenz $z_1(t) - x_1(t)$ werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\left.\begin{array}{l} \delta^{(k)} = \min\limits_{s \in [t_0, t]} \left(z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s)\right), \\ \Delta^{(k)} = \max\limits_{s \in [t_0, t]} \left(z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s)\right). \end{array}\right\} \tag{34}$$

Weiter sei die partielle Ableitung $\frac{\partial f^{(i)}}{\partial v^{(k)}}(v, s)$ abkürzend mit $f_{ik}(v, s)$ bezeichnet.

Die i-te Komponente $x_1^{(i)}(t)$ von $x_1(t)$ läßt sich darstellen als

$$\begin{aligned} x_1^{(i)}(t) &= x^{(i)}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g^{(i)}(x(s), z(s), s)\, ds \\ &= x^{(i)}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f^{(i)}(r_i(s), s)\, ds \\ &= x^{(i)}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big[f^{(i)}(x(s), s) + \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(m_i(s), s) \cdot \delta_i^{(k)}(s)\Big]\, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{mit} \quad \delta_i^{(k)}(s) = r_i^{(k)}(s) - x^{(k)}(s), \\ &m_i(s) = x(s) + \vartheta\,(r_i(s) - x(s)), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Für $s_{ik} \geqq 0$ stimmen $r_i(s)$ und $x(s)$ überein, daher bleiben von der in (35) vorkommenden Summe nur die Glieder mit negativem Vorzeichen von f_{ik} übrig. Die Summe über diese Glieder sei mit $\sum\limits_{k}' f_{ik}\, \delta_i^{(k)}$ bezeichnet. Da dann $r_i^{(k)}(s) = z^{(k)}(s)$ gilt, entsteht

$$\begin{aligned} x_1^{(i)}(t) &= x^{(i)}(t_0) \\ &\quad + \int\limits_{t_0}^{t} \Big[f^{(i)}(x(s), s) + \sum_{k}' f_{ik}(m_i, s)\,\left(z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s)\right)\Big]\, ds. \end{aligned} \tag{36}$$

Da die $z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s)$ nicht negativ sind, sind die einzelnen Summenglieder negativ oder Null, es folgt mit der Abkürzung φ_{ik} für $\min\limits_{s\in[t_0,t]} |f_{ik}(m_i, s)|$ die Abschätzung

$$x_1^{(i)}(t) \leqq x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^{(i)}(x(s), s)\, ds - \sum_k{}' \delta^{(k)} \cdot \varphi_{ik}(t - t_0) \\ = x_2^{(i)}(t). \tag{37}$$

Analog läßt sich die Ungleichung

$$z_1^{(i)}(t) \geqq z^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^{(i)}(z(s), s)\, ds + \sum_k{}' \delta^{(k)} \cdot \varphi_{ik}(t - t_0) = z_2^{(i)}(t) \tag{38}$$

herleiten. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} z_1^{(i)}(t) - x_1^{(i)}(t) &\geqq z_2^{(i)}(t) - x_2^{(i)}(t) \\ &= z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f^{(i)}(z(s), s) - f^{(i)}(x(s), s)]\, ds \\ &\quad + 2\,\psi_i(t - t_0) \\ \text{mit} \quad \psi_i &= \sum_k{}' \delta^{(k)} \cdot \varphi_{ik}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} z_2^{(i)}(t) - x_2^{(i)}(t) &= z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(m_i^*(s), s)\,(z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s))\, d\,s + 2\,\psi_i(t - t_0) \\ \text{mit } m_i^*(s) &= x(s) + \vartheta^*(z(s) - x(s)),\quad 0 \leqq \vartheta^* \leqq 1. \end{aligned} \tag{40}$$

Die rechte Seite von (40) wird verkleinert, wenn aus der vorkommenden Summe die nichtnegativen Glieder weggelassen werden:

$$\begin{aligned} z_2^{(i)}(t) - x_2^{(i)}(t) &\geqq z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0) \\ &\quad - \sum_k{}' \Phi_{ik}\,\Delta^{(k)}(t - t_0) + 2\,\psi_i(t - t_0) \\ \text{mit} \quad \Phi_{ik} &= \max_{s\in[t_0,t]} |f_{ik}(m_i^*(s), s)|. \end{aligned} \tag{41}$$

Zusammenfassend gilt also mit $\Psi_i = \sum\limits_k{}' \Phi_{ik}\,\Delta^{(k)}$

$$z_1^{(i)}(t) - x_1^{(i)}(t) \geqq z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0) + (2\,\psi_i - \Psi_i)(t - t_0). \tag{42}$$

Im allgemeinen werden ψ_i und Ψ_i nur wenig verschieden sein, der Ausdruck $2\,\psi_i - \Psi_i$ wird also nicht negativ sein, die Differenz $z_1^{(i)}(t) - x_1^{(i)}(t)$ ist dann monoton wachsend. Wenn außerdem $z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0)$ verschwindet, wird es sogar eine positive Konstante $\varkappa_i$ geben, mit der

$$2\,\psi_i - \Psi_i \geqq \varkappa_i\,(z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0))$$

gilt,

Führt man noch die Bezeichnungen

$$\delta_0^{(i)} = z^{(i)}(t_0) - x^{(i)}(t_0), \quad \delta_1^{(i)} = z_1^{(i)}(t_1) - x_1^{(i)}(t_1)$$

und $h = t_1 - t_0$ ein, so ergibt sich

$$\delta_1^{(i)} \geqq \delta_0^{(i)}(1 + \varkappa_i h). \tag{43}$$

Wenn $\varkappa_i$ positiv ist, wächst hiernach die Differenz $z_1^{(i)}(t) - x_1^{(i)}(t)$ bei schrittweise ausgeführter Integration exponentiell mit t. Bei nicht exponentiell wachsenden Lösungen erhält man also auch durch Anwendung des Einschließungssatzes in der beschriebenen Form für größere t praktisch unbrauchbare Schranken.

1.7. *Randlösungen*

Das ungünstige Wachstumsverhalten der erhaltenen Schranken beruht darauf, daß die Lösungen aller Anfangswertprobleme mit Anfangsvektoren aus einem Intervall

$$J = \{v : x_0 \leqq v \leqq z_0\} \subset N \tag{44}$$

gemeinsam abgeschätzt werden und daß die als Argumente auftretenden $r_i(s)$ an der Stelle $s = t_0$ im allgemeinen nicht mit $x(t_0)$ bzw. $z(t_0)$ übereinstimmen. Dadurch tritt in (36) das negative Glied

$$\sum_k{}' f_{ik}(m_i, s) \cdot (z^{(k)}(s) - x^{(k)}(s))$$

auf, welches bewirkt, daß $x_1^{(i)}(t)$ unter Umständen wesentlich zu klein wird. Ebenso kann $z_1^{(i)}(t)$ wesentlich zu groß werden. Unterteilt man das Intervall J in Teilintervalle kleineren Durchmessers und schätzt die Lösungen in diesen Teilintervallen einzeln ab, so ergeben sich günstigere Verhältnisse, da die Differenzen zwischen oberen und unteren Schranken der einzelnen Teilintervalle kleiner sind. Durch Maximum- bzw. Minimumbildung über alle Teilintervalle erhält man eine neue obere bzw. untere Schranke für die Lösungen aus dem gesamten Intervall. Dabei sind unter der Voraussetzung über die Vorzeichen der ersten partiellen Ableitungen (V 3) nur die am Rande liegenden Teilintervalle wesentlich, es zeigt sich sogar, daß nur Schranken für Lösungen durch Randpunkte oder Randmengen gebraucht werden.

Im folgenden soll die Abhängigkeit der Lösung $U(t; u_0)$ des Anfangswertproblems (4) vom Anfangsvektor u_0 untersucht werden. Betrachtet wird die i-te Lösungskomponente $U^{(i)}(t; u_0)$. Zunächst variiere nur die i-te Komponente des Anfangsvektors in einem Intervall

$$J_i(v_0) = \{v : v^{(k)} = v_0^{(k)} \text{ für } k \neq i,\ x_0^{(i)} \leqq v^{(i)} \leqq z_0^{(i)}\}, \quad v_0 \in J. \tag{45}$$

Die Differenz der i-ten Komponenten zweier Lösungen mit Anfangsvektoren $v_1 \in J_i(v_0)$ und $v_2 \in J_i(v_0)$ ist

$$\begin{aligned} &U^{(i)}(t; v_1) - U^{(i)}(t; v_2) \\ &= v_1^{(i)} - v_2^{(i)} + \int_{t_0}^{t} [f^{(i)}(U(s; v_1), s) - f^{(i)}(U(s; v_2), s)]\, ds \\ &= v_1^{(i)} - v_2^{(i)} + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} (U^{(k)}(s; v_1) - U^{(k)}(s; v_2)) f_{ik}(\mu_i(s), s)\, ds, \end{aligned} \tag{46}$$

wobei $\mu_i(s)$ eine mittlere Funktion zwischen $U(s; v_1)$ und $U(s; v_2)$ ist. Da die Maximumnorm benutzt wird, gilt $\sum |f_{ik}(\mu_i(s), s)| \leqq L$, und es folgt aus (3), (18) und (46) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &U^{(i)}(t; v_1) - U^{(i)}(t; v_2) \\ &\geqq v_1^{(i)} - v_2^{(i)} - L \cdot \max_{s \in [t_0, t]} \|U(s; v_1) - U(s; v_2)\| \cdot (t - t_0) \\ &\geqq v_1^{(i)} - v_2^{(i)} - L \|v_1 - v_2\| e^{L(t-t_0)} (t - t_0). \end{aligned} \tag{47}$$

Da sich die Anfangsvektoren v_1 und v_2 nur in der i-ten Komponente unterscheiden, gilt

$$\|v_1 - v_2\| = |v_1^{(i)} - v_2^{(i)}|\,. \tag{48}$$

Wird nun $v_1^{(i)} > v_2^{(i)}$ vorausgesetzt, so läßt sich (47) in der Form

$$U^{(i)}(t; v_1) - U^{(i)}(t; v_2) \geqq (v_1^{(i)} - v_2^{(i)}) \left(1 - L(t - t_0)\, e^{L(t-t_0)}\right) \tag{49}$$

schreiben. Solange

$$L(t - t_0)\, e^{L(t-t_0)} \leqq 1 \tag{50}$$

gilt, ist demnach $U^{(i)}(t; v_1)$ nicht kleiner als $U^{(i)}(t; v_2)$. Bezeichnet man die beiden Randpunkte des Intervalls $J_i(v_0)$ mit $\underline{v}_0(\underline{v}_0^{(i)} = x_0^{(i)})$und $\bar{v}_0(\bar{v}_0^{(i)} = z_0^{(i)})$, so gilt unter der Voraussetzung (50) die Einschließung

$$U^{(i)}(t; \underline{v}_0) \leqq U^{(i)}(t; v) \leqq U^{(i)}(t; \bar{v}_0), \quad v \in J_i(v_0), \quad v_0 \in J. \tag{51}$$

Variiert v_0 in J, so variiert $\bar{v}_0$ auf dem Rand $\overline{\partial J_i}$ und $\underline{v}_0$ auf dem Rand $\underline{\partial J_i}$. Diese Randmengen sind definiert durch

$$\left.\begin{aligned} \overline{\partial J_i} &= \{v : x_0^{(k)} \leqq v^{(k)} \leqq z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \neq i, \quad v^{(i)} = z_0^{(i)}\}, \\ \underline{\partial J_i} &= \{v : x_0^{(k)} \leqq v^{(k)} \leqq z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \neq i, \quad v^{(i)} = x_0^{(i)}\}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Eine obere Schranke für alle $U^{(i)}(t; v)$ mit $v \in \overline{\partial J_i}$ ist also gleichzeitig obere Schranke für alle $U^{(i)}(t; v)$ mit $v \in J$. Entsprechendes gilt für eine untere Schranke für alle $U^{(i)}(t; v)$ mit $v \in \underline{\partial J_i}$.

Im folgenden variiere der Anfangsvektor auf der Randmenge $\overline{\partial J_i}$. Für zwei derartige Anfangsvektoren gilt

$$u_{01}^{(i)} - u_{02}^{(i)} = 0, \quad u_{01} \in \overline{\partial J_i}, \quad u_{02} \in \overline{\partial J_i}. \tag{53}$$

Die Differenz der zugehörigen i-ten Lösungskomponenten ist

$$U^{(i)}(t; u_{01}) - U^{(i)}(t; u_{02}) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\mu_i(s), s)\,(U^{(k)}(s; u_{01}) - U^{(k)}(s; u_{02}))\,ds. \tag{54}$$

Die vorkommenden Differenzen der k-ten Lösungskomponenten lassen sich entsprechend umformen:

$$U^{(k)}(s; u_{01}) - U^{(k)}(s; u_{02}) = u_{01}^{(k)} - u_{02}^{(k)} + \sigma^{(k)}(s), \tag{55}$$

$$\sigma^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{kj}(\mu_k(\tau), \tau)\,(U^{(j)}(\tau; u_{01}) - U^{(j)}(\tau; u_{02}))\,d\tau. \tag{56}$$

Für $\sigma^{(k)}(s)$ ergibt sich mit der in (47) benutzten Methode die Abschätzung

$$|\sigma^{(k)}(s)| \leqq L(t - t_0)\, e^{L(t-t_0)} \|u_{01} - u_{02}\|. \tag{57}$$

Hiernach kann (54) in der Form

$$U^{(i)}(t; u_{01}) - U^{(i)}(t; u_{02}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{ik}(\mu_i(s), s)\,(u_{01}^{(k)} - u_{02}^{(k)})\,ds + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{ik}(\mu_i(s), s)\,\sigma^{(k)}(s)\,ds \tag{58}$$

geschrieben werden.

Es werde nun angenommen, daß sich u_{01} und u_{02} nur in der k_1-ten Komponente unterscheiden ($k_1 \neq i$):

$$u_{01}^{(k)} = u_{02}^{(k)} \quad \text{für} \quad k \neq k_1. \tag{59}$$

Dann gilt

$$\|u_{01} - u_{02}\| = |u_{01}^{(k_1)} - u_{02}^{(k_1)}|. \tag{60}$$

$$U^{(i)}(t; u_{01}) - U^{(i)}(t; u_{02}) = (u_{01}^{(k_1)} - u_{02}^{(k_1)}) \int_{t_0}^{t} f_{ik_1}(\mu_i(s), s)\,ds + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{ik}(\mu_i(s), s)\,\sigma^{(k)}(s)\,ds, \tag{61}$$

$$|\sigma^{(k)}(s)| \leqq L(t - t_0)\, e^{L(t-t_0)} |u_{01}^{(k_1)} - u_{02}^{(k_1)}|, \tag{62}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{ik}(\mu_i(s), s)\,\sigma^{(k)}(s)\,ds\right| \leqq \frac{1}{2} L^2 (t - t_0)^2 e^{L(t-t_0)}\, |u_{01}^{(k_1)} - u_{02}^{(k_1)}|. \tag{63}$$

Weiter werde

$$s_{ik_1} = \operatorname{sign}(f_{ik_1}) \neq 0 \tag{64}$$

vorausgesetzt. In Abhängigkeit von s_{ik_1} wird ein Vektor u_{011} gewählt:

$$\left.\begin{aligned} u_{011}^{(k)} &= u_{02}^{(k)} \quad \text{für} \quad k \neq k_1 \\ u_{011}^{(k_1)} &= \begin{cases} x_0^{(k_1)} & \text{für} \quad s_{ik_1} < 0, \\ z_0^{(k_1)} & \text{für} \quad s_{ik_1} > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Wegen

$$x_0^{(k_1)} \leqq u_{02}^{(k_1)} \leqq z_0^{(k_1)} \tag{66}$$

ist das erste Glied der rechten Seite von (61) nicht negativ, wenn u_{01} durch u_{011} ersetzt wird. Führt man noch die Bezeichnung

$$m_{ik_1} = \min_{s \in [t_0, t]} |f_{ik_1}(\mu_i(s), s)| \tag{67}$$

ein, so erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} &U^{(i)}(t; u_{011}) - U^{(i)}(t; u_{02}) \\ &\geqq |u_{011}^{(k_1)} - u_{02}^{(k_1)}| (t - t_0) \left(m_{ik_1} - \frac{1}{2} L^2 (t - t_0) e^{L(t-t_0)} \right). \end{aligned} \tag{68}$$

Die rechte Seite ist positiv, solange

$$\frac{1}{2} L^2 (t - t_0) e^{L(t-t_0)} < m_{ik_1} \tag{69}$$

gilt. In diesem Fall ist $U^{(i)}(t; u_{011})$ eine obere Schranke für $U^{(i)}(t; u_{02})$. Da u_{011} von dem beliebig aus $\overline{\partial J_i}$ wählbaren u_{02} abhängt, wird die Menge $\overline{\partial J_i}(k_1)$ aller Vektoren u_{011} betrachtet:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\partial J_i}(k_1) = \{v \colon v^{(i)} = z_0^{(i)},\ v^{(k_1)} = u_{011}^{(k_1)}\}, \\ &x_0^{(k)} \leqq v^{(k)} \leqq z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \neq i, \quad k \neq k_1. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Nach den bisherigen Betrachtungen ist eine obere Schranke für alle $U^{(i)}(t; v)$ mit $v \in \overline{\partial J_i}(k_1)$ gleichzeitig obere Schranke für alle $U^{(i)}(t; u_0)$ mit $u_0 \in J$, solange (50) und (69) erfüllt sind.

In Fortsetzung des angewandten Verfahrens läßt sich zu jedem $u_{02} \in \overline{\partial J_i}$ eine abbrechende Folge $u_{011}, u_{012}, \ldots, u_{01\varrho}$ konstruieren, für die

$$U^{(i)}(t; u_{01\varrho}) \geqq \cdots \geqq U^{(i)}(t; u_{012}) \geqq U^{(i)}(t; u_{011}) \geqq U^{(i)}(t; u_{02}) \tag{71}$$

gilt. Dazu seien $k_1, \ldots, k_\varrho$ alle Komponenten, für die $s_{ik_r} \neq 0$ und $k_r \neq i$ gilt. Die Vektoren u_{01r} sind definiert durch

$$\left.\begin{aligned} &u_{01r}^{(k)} = u_{01,r-1}^{(k)} \ \text{für}\ k \neq k_r,\ r = 2, \ldots, \varrho, \\ &u_{01r}^{(k_r)} = \begin{cases} x_0^{(k_r)} & \text{für} \quad s_{ik_r} < 0, \\ z_0^{(k_r)} & \text{für} \quad s_{ik_r} > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Wie oben läßt sich zeigen, daß $U^{(i)}(t; u_{01r}) \geqq U^{(i)}(t; u_{01,r-1})$ gilt, wenn

$$\frac{1}{2} L^2 (t - t_0) e^{L(t-t_0)} < m_{ik_r} \tag{73}$$

ist, wobei m_{ik_r} das Minimum des Absolutbetrages von f_{ik_r} in einem genügend großen Bereich bezeichnet.

Führt man eine Indexmenge

$$K_i = \{k \colon s_{ik} = 0,\ k \neq i\} \tag{74}$$

ein, so läßt sich die Menge $\overline{\partial J_i^*}$ als Menge aller $u_{01\varrho}$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}\overline{\partial J_i^*} = \{v\colon & v^{(i)} = z_0^{(i)},\\ & v^{(k)} = x_0^{(k)} \quad \text{für} \quad s_{ik} < 0 \quad \text{und} \quad k \notin K_i,\\ & v^{(k)} = z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad s_{ik} > 0 \quad \text{und} \quad k \notin K_i,\\ & x_0^{(k)} \leqq v^{(k)} \leqq z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \in K_i\}.\end{aligned} \tag{75}$$

Wenn K_i leer ist, zieht sich $\overline{\partial J_i^*}$ auf einen Eckpunkt des Intervalls J zusammen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zu jedem $u_0 \in J$ ein $u_0^* \in \overline{\partial J_i^*}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$\left.\begin{aligned} & u_0^{*(i)} = z_0^{(i)},\ u_0^{*(k)} = u_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \in K_i,\\ & u_0^{*(k)} = \begin{cases} x_0^{(k)} & \text{für} \quad s_{ik} < 0, \quad k \notin K_i,\\ z_0^{(k)} & \text{für} \quad s_{ik} > 0, \quad k \notin K_i,\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

$U^{(i)}(t; u_0^*) \geqq U^{(i)}(t; u_0)$, falls (50) und (73) für $r = 1, \ldots, \varrho$ erfüllt sind.

Eine obere Schranke $z^{(i)}(t)$ für alle $U^{(i)}(t; u_0^*)$ mit $u_0^* \in \overline{\partial J_i^*}$ ist demnach gleichzeitig obere Schranke für alle $U^{(i)}(t, u_0)$ mit $u_0 \in J$.

Entsprechend läßt sich eine Menge $\underline{\partial J_i^*}$ konstruieren, die zu jedem $u_0 \in J$ einen Anfangsvektor u_0^{**} enthält, mit dem

$$U^{(i)}(t; u_0^{**}) \leqq U^{(i)}(t; u_0) \tag{77}$$

für genügend kleines $t - t_0$ gilt. Diese Menge wird definiert durch

$$\begin{aligned}\underline{\partial J_i^*} = \{v\colon & v^{(i)} = x_0^{(i)},\\ & v^{(k)} = z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad s_{ik} < 0 \quad \text{und} \quad k \notin K_i,\\ & v^{(k)} = x_0^{(k)} \quad \text{für} \quad s_{ik} > 0 \quad \text{und} \quad k \notin K_i,\\ & x_0^{(k)} \leqq v^{(k)} \leqq z_0^{(k)} \quad \text{für} \quad k \notin K_i\}.\end{aligned} \tag{78}$$

Eine untere Schranke $x^{(i)}(t)$ für die i-te Komponente aller Lösungen von (4) mit einem Anfangsvektor aus $\underline{\partial J_i^*}$ ist gleichzeitig untere Schranke für die i-te Komponente aller Lösungen mit einem Anfangsvektor aus J.

1.8. *Einschließung von Randlösungen*

Das Einschließungsverfahren kann entsprechend den Resultaten von 1.7. in folgender Weise abgewandelt werden: Für jede Komponente i werden die Randmengen $\overline{\partial J_i^*}$ und $\underline{\partial J_i^*}$ des Ausgangsintervalls J bestimmt. Danach werden obere und untere Schranken für alle Lösungen mit Anfangsvektoren aus $\overline{\partial J_i^*}$ und $\underline{\partial J_i^*}$ gebildet. Aus ihnen wird mittels der in 1.5. beschriebenen Methode eine neue obere bzw. untere Schranke für die i-te Lösungskomponente berechnet. Da $f^{(i)}$ nur von den Komponenten abhängt, für die die partiellen Ableitungen f_{ik_r} nicht identisch verschwinden, werden die Ausgangsschranken nur für diese Komponenten gebraucht. Jede dieser Lösungskomponenten hat aber auf der Randmenge $\overline{\partial J_i^*}$ bzw. $\underline{\partial J_i^*}$ einen konstanten Anfangswert. Es gilt daher analog zu (58) für $k \notin K_i$

$$
\begin{aligned}
U^{(k)}(t; v_1) - U^{(k)}(t; v_2) &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{kj}\,(\mu_k(s), s)\,(v_1^{(j)} - v_2^{(j)})\, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_{kj}\,(\mu_k(s), s)\,\sigma^{(j)}(s)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit } v_1 \in \overline{\partial J_i^*},\ v_2 \in \overline{\partial J_i^*} \quad \text{bzw.} \quad v_1 \in \underline{\partial J_i^*},\ v_2 \in \underline{\partial J_i^*}. \tag{79}
$$

Da $v_1^{(j)}$ und $v_2^{(j)}$ für $j \notin K_i$ übereinstimmen, bleiben von der ersten Summe in (79) nur die Glieder mit $j \in K_i$ übrig. Werden obere Schranken für die $|f_{kj}\,(\mu_k(s), s)|$ in $s \in [t, t]$ mit M_{kj} bezeichnet, so folgt aus (79) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&|U^{(k)}(t; v_1) - U^{(k)}(t; v_2)| \\
&\leqq \sum_{j \in K_i} M_{kj}\,|v_1^{(j)} - v_2^{(j)}|\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,\|v_1 - v_2\|\,L^2 (t - t_0)^2\, e^{L(t-t_0)} \\
&\leqq \|v_1 - v_2\|\,L(t - t_0)\left(\frac{\sum\limits_{j \in K_i} M_{kj}}{L} + \frac{L}{2}\,(t - t_0)\, e^{L(t-t_0)}\right).
\end{aligned} \tag{80}
$$

Dabei werden die $\sigma^{(j)}(s)$ analog zu (57) abgeschätzt.

Falls $\overline{\partial J_i^*}$ bzw. $\underline{\partial J_i^*}$ nicht nur aus einem Punkt besteht, kann (80) benutzt werden, um aus einer bekannten oberen bzw. unteren Schranke für $U^{(k)}(t; v_0)$ mit $v_0 \in \overline{\partial J_i^*}$ bzw. $v \in \underline{\partial J_i^*}$ eine obere bzw. untere Schranke für alle $U^{(k)}(t; v)$ mit $v \in \overline{\partial J_i^*}$ bzw. $v \in \underline{\partial J_i^*}$ zu gewinnen. Diese Schranken werden — wie beschrieben — als Ausgangsschranken zur weiteren Einschließung verwendet.

1.9. *Wachstum der Einschließungsintervalle*

Die erhaltenen Schranken sind im allgemeinen nur stückweise gültig. Hinreichend dafür ist die Erfüllung der Bedingungen (50) und (73). Um eine Einschließung der Lösung über längere Intervalle der unabhängigen Veränderlichen t zu erhalten, wird man schrittweise eine Folge von Einschließungsintervallen $J_0, J_1, \ldots, J_s, \ldots$ zur Einschließung der Lösung an den Stellen $t_0, t_1, \ldots, t_s, \ldots$ konstruieren ($t_{s+1} > t_s$). Das Wachstum dieser Folge von Intervallen hängt von den Stabilitätseigenschaften der Lösungen des betrachteten

Anfangswertproblems ab. Es kann jedoch auch bei stabilem Lösungsverhalten vorkommen, daß die Intervallfolge unbeschränkt wächst. Diese Erscheinung sei hier nur an einem Beispiel erläutert.

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$y' = A\,y, \quad y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist

$$y(t) = e^{At}\,y_0 = \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} e^{-2t}\right] \begin{pmatrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Als Anfangsintervall an der Stelle $t_0 = 0$ werde das Intervall

$$J = J_0 = \{\,|y_0^{(1)}| \leqq a,\ |y_0^{(2)}| \leqq b\} \tag{83}$$

gewählt. Die Randmenge $\overline{\partial J_1^*}$ enthält nur den Punkt

$$y_{\mathrm{I}}(0) = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Die Lösung $y_{\mathrm{I}}(t)$ durch diesen Anfangspunkt hat die erste Komponente

$$y_{\mathrm{I}}^{(1)} = (3\,a + 2\,b)\,e^{-t} - (2\,a + 2\,b)\,e^{-2t}. \tag{85}$$

Entsprechend enthält die Randmenge $\underline{\partial J_1^*}$ nur den Punkt

$$y_{\mathrm{II}}^{(0)} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Die Lösung $y_{II}(t)$ durch diesen Anfangspunkt hat die erste Komponente

$$y_{\mathrm{II}}^{(1)}(t) = -\,y_{\mathrm{I}}^{(1)}(t). \tag{87}$$

Die zweiten Komponenten der Lösungen $y_{III}(t)$ und $y_{IV}(t)$ durch die Anfangspunkte

$$y_{\mathrm{III}}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y_{\mathrm{IV}}(0) = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \tag{88}$$

sind Schranken für $y^{(2)}(t)$. Diese Komponenten sind

$$\left.\begin{aligned} y_{\mathrm{III}}^{(2)}(t) &= (3\,a - 2\,b)\,e^{-t} + (3\,b - 3\,a)\,e^{-2t}, \\ y_{\mathrm{IV}}^{(2)}(t) &= -\,y_{\mathrm{III}}^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Für genügend kleines t gilt also die Einschließung

$$\left.\begin{aligned} y_{\mathrm{II}}^{(1)}(t) \leqq y^{(1)}(t) \leqq y_{\mathrm{I}}^{(1)}(t) \\ y_{\mathrm{IV}}^{(2)}(t) \leqq y^{(2)}(t) \leqq y_{\mathrm{III}}^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Zur Bestimmung des Gültigkeitsbereiches werden die Differenzen

$$\left.\begin{aligned} y_{\mathrm{I}}^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) &= (a - y_0^{(1)})\,(3e^{-t} - 2e^{-2t}) + (b + y_0^{(2)})\,(2\,e^{-t} - 2\,e^{-2t}), \\ y_{\mathrm{III}}^{(2)}(t) - y^{(2)}(t) &= (a - y_0^{(1)})\,(3\,e^{-t} - 3\,e^{-2t}) + (b - y_0^{(2)})\,(3\,e^{-2t} - 2e^{-t}) \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

für $|y_0^{(1)}| \leqq a$ und $|y_0^{(2)}| \leqq b$ betrachtet. Alle Glieder der rechten Seite sind nicht negativ, solange

$$3\,e^{-2t} - 2\,e^{-t} \geqq 0 \tag{92}$$

gilt. Für

$$0 \leqq t \leqq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \tag{93}$$

sind also $y_{\mathrm{I}}^{(1)}(t)$ und $y_{\mathrm{III}}^{(2)}(t)$ obere Schranken für $y^{(1)}(t)$ und $y^{(2)}(t)$. Für die unteren Schranken ergibt sich der gleiche Gültigkeitsbereich.

An einer Stelle $t_1 = h$ mit $h < \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ erhält man das Einschließungsintervall

$$J_1 = \{|y^{(1)}| \leqq a_1,\ |y^{(2)}| \leqq b_1\}, \tag{94}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (3\,e^{-h} - 2\,e^{-2h})\,a + (2\,e^{-h} - 2\,e^{-2h})\,b = \alpha\,a + \beta\,b, \\ b_1 &= (3\,e^{-h} - 3\,e^{-2h})\,a + (-\,2\,e^{-h} + 3\,e^{-2h})\,b = \gamma\,a + \delta\,b. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Dieses Intervall ist das kleinstmögliche Einschließungsintervall an der Stelle t_1.

Durch Fortsetzung des gleichen Einschließungsverfahrens mit der Schrittweite h entsteht eine Folge $J_0, J_1, \ldots, J_s, \ldots$ von Einschließungsintervallen, wobei

$$J_s = \{|y^{(1)}| \leqq a_s,\ |y^{(2)}| \leqq b_s\} \tag{96}$$

ist. Die a_s und b_s ergeben sich aus

$$a_s = \alpha\,a_{s-1} + \beta\,b_{s-1}, \quad b_s = \gamma\,a_{s-1} + \delta\,b_{s-1}. \tag{97}$$

Dieses Differenzengleichungssystem hat die allgemeine Lösung

$$a_s = 2\,A_1\,\lambda_1^s + A_2\,\lambda_2^s, \quad b_s = A_1\,\lambda_1^s - 3\,A_2\,\lambda_2^s, \tag{98}$$

wobei λ_1 und λ_2 Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda(e^{-h} + e^{-2h}) - 12\,e^{-2h} + 25\,e^{-3h} - 12\,e^{-4h} = 0 \tag{99}$$

sind, und zwar

$$\lambda_1 = 4\,e^{-h} - 3\,e^{-2h}, \quad \lambda_2 = -\,3\,e^{-h} + 4\,e^{-2h}. \tag{100}$$

Für $0 < h < 1$ gilt $\lambda_1 > 1$, daher wachsen a_s und b_s unbeschränkt, d. h., die Folge der Einschließungsintervalle ist instabil, obwohl die Gesamtheit der Lösungen (82) des Differentialgleichungssystems (81) stabil ist.

Der Grund für das abweichende Wachstum der Einschließungsintervalle und der durch Lösung des Differentialgleichungssystems (81) mit Anfangsvektoren aus J_0 entstehenden Bildgebiete von J_0 liegt darin, daß diese Bildgebiete keine achsenparallelen Rechtecke, sondern Parallelogramme sind, deren Eckpunkte auch nicht mit denen der sie einschließenden achsenparallelen Rechtecke übereinstimmen. Ein solches Parallelogramm ist definiert