Managementwissen für Studium und Praxis

Herausgegeben von Professor Dr. Dietmar Dorn und Professor Dr. Rainer Fischbach

Lieferbare Titel:

Anderegg, Grundzüge der Geldtheorie und Geldpolitik
Arrenberg · Kiy · Knobloch · Lange, Vorkurs in Mathematik, 3. Auflage
Barth · Barth, Controlling, 2. Auflage
Behrens · Kirspel, Grundlagen der Volkswirtschaftslehre, 3. Auflage
Behrens · Hilligweg · Kirspel, Übungsbuch zur Volkswirtschaftslehre
Behrens, Makroökonomie – Wirtschaftspolitik, 2. Auflage
Bontrup, Volkswirtschaftslehre, 2. Auflage
Bontrup, Lohn und Gewinn, 2. Auflage
Bontrup · Pulte, Handbuch Ausbildung
Bradtke, Mathematische Grundlagen für Ökonomen, 2. Auflage
Bradtke, Übungen und Klausuren in Mathematik für Ökonomen
Bradtke, Statistische Grundlagen für Ökonomen, 2. Auflage
Bradtke, Grundlagen im Operations Research für Ökonomen
Busse, Betriebliche Finanzwirtschaft, 5. Auflage
Camphausen, Strategisches Management, 2. Auflage
Dinauer, Grundzüge des Finanzdienstleistungsmarkts, 2. Auflage
Dorn · Fischbach, Volkswirtschaftslehre II, 4. Auflage
Dorsch, Abenteuer Wirtschaft · 75 Fallstudien mit Lösungen
Drees-Behrens · Kirspel · Schmidt · Schwanke, Aufgaben und Fälle zur Finanzmathematik, Investition und Finanzierung, 2. Auflage
Drees-Behrens · Schmidt, Aufgaben und Fälle zur Kostenrechnung, 2. Auflage
Fischbach · Wollenberg, Volkswirtschaftslehre 1, 13. Auflage
Götze · Deutschmann · Link, Statistik
Gohout, Operations Research, 4. Auflage
Haas, Kosten, Investition, Finanzierung – Planung und Kontrolle, 3. Auflage
Haas, Access und Excel im Betrieb
Haas, Excel im Betrieb, Gesamtplan
Hans, Grundlagen der Kostenrechnung
Heine · Herr, Volkswirtschaftslehre, 3. Auflage
Hoppen, Vertriebsmanagement
Koch, Marktforschung, 5. Auflage
Koch, Betriebswirtschaftliches Kosten- und Leistungscontrolling in Krankenhaus und Pflege, 2. Auflage
Laser, Basiswissen Volkswirtschaftslehre
Martens, Statistische Datenanalyse mit SPSS für Windows, 2. Auflage
Mensch, Finanz-Controlling, 2. Auflage
Peto, Grundlagen der Makroökonomik, 13. Auflage
Piontek, Controlling, 3. Auflage
Piontek, Beschaffungscontrolling, 3. Aufl.
Plümer, Logistik und Produktion
Posluschny, Controlling für das Handwerk
Posluschny, Kostenrechnung für die Gastronomie, 2. Auflage
Rau, Planung, Statistik und Entscheidung – Betriebswirtschaftliche Instrumente für die Kommunalverwaltung
Rothlauf, Total Quality Management in Theorie und Praxis, 2. Auflage
Rudolph, Tourismus-Betriebswirtschaftslehre, 2. Auflage
Rüth, Kostenrechnung, Band I, 2. Auflage
Schambacher · Kiefer, Kundenzufriedenheit, 3. Auflage
Schuster, Kommunale Kosten- und Leistungsrechnung, 2. Auflage
Schuster, Doppelte Buchführung für Städte, Kreise und Gemeinden, 2. Auflage
Specht · Schweer · Ceyp, Markt- und ergebnisorientierte Unternehmensführung, 6. Auflage
Stahl, Internationaler Einsatz von Führungskräften
Stender-Monhemius, Marketing – Grundlagen mit Fallstudien
Stibbe, Kostenmanagement, 3. Auflage
Strunz · Dorsch, Management
Strunz · Dorsch, Internationale Märkte
Weeber, Internationale Wirtschaft
Wilde, Plan- und Prozesskostenrechnung
Wilhelm, Prozessorganisation, 2. Auflage
Wörner, Handels- und Steuerbilanz nach neuem Recht, 8. Auflage
Zwerenz, Statistik, 3. Auflage
Zwerenz, Statistik verstehen mit Excel – Buch mit Excel-Downloads, 2. Auflage

Operations Research

Einige ausgewählte Gebiete der linearen und nichtlinearen Optimierung

von

Prof. Dr. Dr. Wolfgang Gohout

4., wesentlich erweiterte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Nachdruck: 2013

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, wiso@oldenbourg.de
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Books on Demand GmbH, Norderstedt

ISBN 978-3-486-59034-0

Vorwort

Der Einsatz von Operations Research ist in Unternehmens– und Verwaltungsbereichen weit verbreitet. Obwohl die Wissenschaft des Operations Research im Vergleich zu anderen Wissenschaftsgebieten recht jung ist — man datiert sie auf die Mitte der Vierziger Jahre des 20. Jahrhunderts —, gibt es doch eine Fülle von Literatur und auch von Lehrbüchern dazu; darunter gibt es zweifellos auch sehr viele gute. Dennoch habe ich mich entschlossen, dem Angebot ein eigenes Büchlein hinzuzufügen. Es ist zum einen in inhaltlicher und didaktischer Hinsicht exakt auf meine Vorlesung *Operations Research 1* am Hochschulbereich Technik der FH Pforzheim abgestimmt und soll damit angehende Maschinenbau–, Elektrotechnik– und Wirtschaftsingenieure ansprechen. Es soll andererseits aber auch alle Interessenten und Autodidakten des Operations Research ansprechen, wobei hinzugefügt werden muß, daß hier nur die *Lineare Optimierung* und ihre Anwendungen thematisiert werden.

Die zu Beginn jedes Kapitels formulierten Lernziele sollten nach der Lektüre des jeweiligen Kapitels vom Leser überprüft werden. Auf den Anspruch der Allgemeingültigkeit der Darstellung sowie auf Beweise und Herleitungen wurde weitgehend verzichtet, um den Leser mittels Beispielen möglichst schnell zum Kern der Sache und zur Anwendbarkeit der Verfahren zu bringen. Nach zwei Kapiteln mit einführendem Charakter beschließen Übungsaufgaben die Kapitel. Ihre Lösungen sind am Ende des Buches zusammengefaßt. Ihr Vorhandensein sollte den Leser nicht dazu verleiten, sie zu früh zu studieren. Nur die intensive Auseinandersetzung mit einem Problem gewährleistet das nachhaltige Verständnis desselben und seiner Lösung. Das Kapitel über *Postoptimale Rechnungen* hat eher vertiefenden Charakter und kann optional übersprungen werden.

Für die kritische Durchsicht und für konstruktive Vorschläge danke ich meiner Fachkollegin, Frau Dr. Dorothea Reimer von der Justus–Liebig–Universität in Gießen. (Verbleibende Fehler gehen nun natürlich auf ihr Konto ... ☺)

Aber Spaß beiseite: Für Fehlerhinweise oder Verbesserungsvorschläge habe ich gerne ein offenes Ohr und eine empfangsbereite Mailbox (`gohout@fh-pforzheim.de`).

Ich wünsche allen Lesern bei der Lektüre viel Erfolg und — wenn möglich — ein wenig Spaß.

Wolfgang Gohout

Vorwort zur zweiten Auflage

Eine einführende Vorlesung in das Operations Research wird stets die lineare Optimierung behandeln. Für eine weiterführende Veranstaltung hat man aus einer Fülle von Themen die Qual der Wahl. Ich habe mich entschlossen, die verwandten Themen der Netzwerkanalyse und der Netzplantechnik sowie das Gebiet der Lagerhaltungsmodelle in diese zweite Auflage aufzunehmen. Die Analyse und optimale Gestaltung von Netzwerken dient neben dem Zweck der eigentlichen Aufgabenstellungen auch der Einführung in die Funktionsweise dieses graphentheoretischen Planungswerkzeugs, das ja auch die Grundlage der Netzplantechnik darstellt. Die Netzplantechnik ist zentraler Bestandteil des Projektmanagements. Ihre Bedeutung in der Praxis ist daher entsprechend dem Trend zu projektorientiertem Management gestiegen und nimmt kontinuierlich zu. Ein „Evergreen“ ist das Thema Lagerhaltung, deren Methoden und Modelle in den moderner klingenden Bereich der Logistik gehören. Wie bereits in der ersten Auflage wird auch weiterhin der Wert auf die Anwendung und schnelle Anwendbarkeit gelegt. Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen unterstützen dieses Ziel.

Neben der Umstellung auf die neue Rechtschreibung habe ich noch einige Fehler korrigiert. Für die entsprechnden Hinweise danke ich den aufmerksamen Leserinnen und Lesern. Ich bin auch weiterhin dankbar für solche Hinweise. Meine email–Adresse hat sich geringfügig geändert: `Wolfgang.Gohout@fh-pforzheim.de`

Wolfgang Gohout

Vorwort zur vierten Auflage

Nachdem die dritte Auflage gegenüber der zweiten Auflage inhaltlich nicht verändert worden war, habe ich der vierten Auflage ein weiteres Kapitel zur nichtlinearen Optimierung hinzugefügt. Einerseits ist dieses Thema für viele praktische Probleme äußerst relevant. Andererseits gibt es ganze Bücher zu diesem Thema. Hier soll nun der Versuch unternommen werden, für die häufig auftretenden Fälle der konvexen Optimierung und der quadratischen Optimierung die wichtigsten Ergebnisse und einige Lösungsverfahren darzustellen. Dabei spielen vor allem die so genannten restringierten Modelle eine große Rolle. Sie finden eine prominente Anwendung in der Portfolio–Optimierung nach dem Nobelpreisträger Harry M. Markowitz, mit der wir uns schließlich als umfangreiches Anwendungsbeispiel befassen. Meine Kollegin Katja Specht hat dieses Kapitel sorgfältig gelesen, wofür ich ihr herzlich danken möchte.

Neben dieser Erweiterung sind noch einige Fehler korrigiert worden. Für die Hinweise möchte ich mich wieder bei den Leserinnen und Lesern herzlich bedanken.

Wolfgang Gohout

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einordnung und Entwicklung des Operations Research

Lernziele

- Was bedeutet OR?
- Welche alternativen Begriffe kennen Sie?
- Was kann OR leisten?
- Wann und wie entstand das Gebiet des OR?
- Was ist ein Modell?
- Was bedeutet *modellgebundenes Arbeiten*?
- Welche Aspekte sind für OR charakteristisch?

1.1 Begriff und Zielsetzung

Den Begriff *Operations Research* könnte man etwa mit *Operationsforschung* ins Deutsche übersetzen, was auch versucht worden ist. Allerdings hat sich dieser Übersetzungsversuch in Schrift und Sprache genauso wenig durchsetzen können wie *Unternehmensforschung*, *Entscheidungsforschung*, *Systemforschung*, *Planungsrechnung*, *Optimalplanung*, und andere Begriffe. So soll auch hier weiterhin der allgemein akzeptierte Anglizismus *Operations Research* beziehungsweise seine Abkürzung *OR* verwendet werden.

Die Bedeutung und Zielsetzung des Wissenschaftsgebietes OR wird in erster Näherung bereits aus den vielfältigen Übersetzungsversuchen deutlich. Es geht um die Analyse betrieblicher und wirtschaftlicher Prozesse und um die Anwendung mathematischer Methoden zur Entscheidungsvorbereitung. Maßgeblich ist hierbei die *genaue* Kenntnis des Entscheidungsproblems mit den realisierbaren Entscheidungsalternativen, ihren Auswirkungen oder Ergebnissen, den in der Wirtschaftspraxis stets vorhandenen Restriktionen und den Zielen, die verfolgt werden sollen. Die *Genauigkeit* der Kenntnis kann sich dabei auch in einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Ergebnisse manifestieren, weshalb für das Verständnis einiger Methoden des OR Kenntisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich sind. Man spricht dann von *Risikosituationen*. Die hier vorgestellten Methoden der *linearen Optimierung* werden weitgehend ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung auskommen. Bei diesen so genannten *Entscheidungen unter Sicherheit* geht man davon aus, dass die Auswirkungen jeder Entscheidung auf jedes Zielkriterium determiniert sind, also keinen zufälligen Schwankungen unterliegen.

1.2 Geschichtlicher Abriss

Die historische Entwicklung des OR soll hier nur ganz grob skizziert werden. Allzu viel gibt es dazu allerdings auch nicht zu sagen, da dieser Wissenschaftsbereich noch recht jung ist. Der Ursprung des OR wird im Allgemeinen auf das Ende des Zweiten Weltkrieges datiert. Bereits während dieses Weltkrieges haben vor allem die Briten und die Amerikaner in interdisziplinären Teams mit Mathematikern, Physikern, Ingenieuren und Wissenschaftlern aus verwandten Bereichen mathematische Methoden entwickelt, um beispielsweise die Zusammensetzung von Geleitzügen oder von Bombergeschwadern zu optimieren. Andere militärische Anwendungsgebiete betrafen die Optimierung des Radareinsatzes, der Fliegerabwehr und der U–Boot–Bekämpfung. Der Namensbestandteil „Operations“ oder „Operational“ geht auf diese militär–strategischen „Operationen“ zurück.[1] Zwar sind vereinzelte Ansätze, die man zum OR zählen könnte, schon älter,[2] dennoch wird die Geburtsstunde des Wissenschaftsbereiches OR so spät datiert, da mit dem Bekanntwerden der *geheimen* Verfahren nach Kriegsende eine gezielte Forschung und Publikation eingesetzt hat. Die in Kriegszeiten mit OR befassten Wissenschaftler wollten nun ihre Kenntnisse theoretisch stärker fundieren, an den Hochschulen für ihre Verbreitung sorgen und selbst in der wirtschaftlichen Praxis einbringen. Das zeitgleiche Aufkommen der Computer und der Elektronischen Datenverarbeitung waren dabei einerseits sehr hilfreich und erfuhren andererseits selbst einen Aufschwung durch den verstärkten Einsatz der rechenintensiven Methoden des OR.

Als äußeres Zeichen für die Geburt des OR ließ dann auch die Gründung nationaler und internationaler Gesellschaften nicht lange auf sich warten. Im Jahr 1952 wurde als erste nationale Vereinigung die *Operations Research Society of America (ORSA)* gegründet. Es folgten 1954 in England die *Operational Research Society (ORS)*, 1956 in Westdeutschland der *Arbeitskreis Operations Research (AKOR)* und 1959 die *International Federation of Operational Research Societies (IFORS)* als erste Dachgesellschaft. Weitere nationale und internationale Gesellschaften folgten. In

[1] vgl. Phillips, Ravindran, Solberg (1987) oder Trefethen (1954)

[2] Unter den Protagonisten finden sich berühmte Namen wie Turgot, v. Thünen, Cournot, Gossen, Walras, Pareto, Frisch und Taylor; vgl. z.B. Zimmermann (1999) und die dort angegebene Literatur.

Westdeutschland bekam der AKOR im Jahr 1961 Konkurrenz durch die *Deutsche Gesellschaft für Unternehmensforschung (DGU)*, die jedoch 1971 mit dem AKOR zur *Deutschen Gesellschaft für Operations Research (DGOR)* verschmolz. Seit 1998 firmiert diese Vereinigung unter dem Namen *Gesellschaft für Operations Research (GOR)*.

Als Forum veröffentlichter Forschung geben wissenschaftliche Gesellschaften Zeitschriften heraus, von denen es auch im Bereich des OR eine Vielzahl gibt. Für den deutschsprachigen Raum seien etwa die *Zeitschrift für Operations Research* und das *OR–Spektrum* genannt. Die IFORS gibt die Zeitschrift *International Transactions in Operational Research (ITOR)* sowie den Abstract–Service *International Abstracts in Operations Research (IAOR)* heraus, der einen Überblick über alle wissenschaftlichen Aufsätze aus dem Gebiet des OR bietet.

1.3 Charakteristika des OR

Drei Aspekte sind charakteristisch für das OR, nämlich die *Quantifizierung* eines Problems, das *Optimalitätsstreben* und die *Modellierung*. Die Quantifizierung des Entscheidungsproblems stellt eine notwendige Voraussetzung für die Anwendung mathematischer Methoden mit dem Ziel der Optimierung dar. Sie äußert sich in der genauen, zahlenmäßigen Formulierung von Zielsetzung und Problemformulierung. Eine *qualitative* Formulierung, wie etwa das Ziel einer „guten" Marktpräsenz, genügt nicht den Ansprüchen des OR. In engem Zusammenhang mit der Quantifizierung steht offenbar das Optimalitätsstreben, das die Existenz einer *Zielfunktion* voraussetzt, in der ein oder auch mehrere *Ziele* numerisch abgebildet werden. Die *Optimierungsvorschrift* kann in einer *Maximierung*, einer *Minimierung* oder auch in der möglichst großen *Annäherung an einen vorgegebenen Sollwert* bestehen. Die Maximierung wird typischerweise bei *Gewinnen, Umsätzen, Marktanteilen* usw. verfolgt, die Minimierung etwa bei *Kosten, Durchlaufzeiten, Verschnitt* und Ähnlichem. Das Anstreben eines Sollwertes spielt beispielsweise bei der Produktion von technischen Normteilen eine große Rolle.

Das dritte Charakteristikum des OR ist das *modellgebundene Arbeiten*. Der Begriff des *Modells* ist sehr oft definiert worden. Sucht man den Kern aller dieser Definitionen, so kann man Folgendes festhalten:

Ein Modell ist eine vereinfachte Abbildung der Realität unter Bewahrung der Struktur.

Mit *Realität* ist hierbei eine reale Problemstellung gemeint, wie man sie im Berufsleben — aber auch in der Freizeit — ständig antrifft. Natürlich bekommt man solche Problemstellungen im Allgemeinen nicht auf dem Silbertablett präsentiert. In der wirtschaftlichen Praxis gibt es Berufsbilder (Unternehmensberater, Systemanalytiker), die geradezu auf die *Suche* nach solchen Problemen gehen. Will man das reale Problem zum Zwecke der Lösung gedanklich durchdringen, so kommt es auf sehr viele reale Aspekte **nicht** an. Soll beispielsweise das *gewinnmaximale Produktionsprogramm* bestimmt werden — eine im Folgenden noch häufig anzutreffende Zielsetzung —, so kommt es auf die Kosten und Erlöse der Produkte sowie auf deren Ressourcenverbrauch und vorhandene Kapazitäten an, nicht aber auf Farbe, Größe oder Seriennummer der einzelnen Produkte. Auf die Nichtbeachtung dieser realen, aber irrelevanten Aspekte bezieht sich die Forderung der *Vereinfachung*. Andererseits darf die Vereinfachung offenbar nicht so weit gehen, dass relevante Aspekte — etwa Kosten — eliminiert werden. Die Berücksichtigung dieser relevanten Aspekte und deren Beziehungen untereinander ist mit *Bewahrung der Struktur* gemeint. Wenn also eine Mengeneinheit des Produktes A die doppelte Menge eines bestimmten Rohstoffes verbraucht im Vergleich mit einer Mengeneinheit des Produktes B, so muss dies in einem Modell zur Bestimmung des gewinnmaximalen Produktionsprogrammes seinen Niederschlag finden. Eine andere, eher mathematisch orientierte, aber doch ähnliche Definition lautet:

Ein Modell ist eine zweckorientierte,
relationseineindeutige Abbildung der Realität.

Diese Definition betont die Zweck– oder Zielorientierung eines Modells. Die Relationseineindeutigkeit entspricht der *Bewahrung der Struktur* in der ersten Definition. Die *Relationen* oder *Beziehungen* zwischen den realen Elementen und ihren Gegenstücken im Modell sollen sich demnach entsprechen, sofern sie für die Zielsetzung relevant sind. Wenn also Produkt A einen höheren Deckungsbeitrag als Produkt B erzielt, so muss sich dies in der Zielfunktion des Modells in einem numerisch größeren Deckungsbeitragskoeffizienten widerspiegeln. Auch umgekehrt kann man aus einem größeren Koeffizienten in der Zielfunktion auf einen höheren (realen) Deckungsbeitrag schließen. Die Relationseineindeutigkeit bezieht sich aber auch in dieser zweiten Definition nur auf *relevante* Beziehungen und **nicht auf alle** realen Beziehungen, so dass es sich bei einem Modell gemäß dieser zweiten Definition **nicht** um einen *Isomorphismus* im mathematischen Sinne handelt. Ein Isomorphismus würde nichts vereinfachen und wäre als Modell unbrauchbar.

Wie kann nun ein Modell zur Lösung eines realen Problems beitragen? Das reale Problem wird durch die Modellbildung in ein *formales Problem* überführt. Dieser erste Schritt ist keineswegs trivial, da er das schon erwähnte *Erkennen* des realen Problems und seine genaue Analyse erfordert. Die Schwierigkeiten, die Schüler (und Studenten) mit mathematischen *Textaufgaben* haben, zeigen dies eindrucksvoll. In dem zweiten Schritt wird das formale Problem mit Hilfe formaler Methoden — hier mittels OR–Methoden — gelöst. Einem Teil dieser Methoden ist das vorliegende Buch gewidmet. Die gefundene *Modelllösung* muss schließlich noch auf die Realität übertragen werden, was dann zur *Reallösung* oder *Entscheidung* führt. Die folgende Abbildung macht diesen Prozess deutlich, bei dem es allerdings in der Praxis auch zwischen den einzelnen Schritten noch zu Rückkopplungen kommen kann.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Realität (reales Problem)}} & \rightarrow & \boxed{\text{Modell (formales Problem)}} \\ & & \downarrow \text{OR} \\ \boxed{\text{Reallösung (Entscheidung)}} & \leftarrow & \boxed{\text{Modelllösung}} \end{array}$$

Der Begriff des *Modells* ist nun aber so weit gefasst, dass er sehr verschiedenartige Ausprägungen umfasst. Es ist daher sinnvoll — und manchmal nötig —, die Fülle der Modelle zu *klassifizieren*. Zu diesem Zweck bieten sich wiederum verschiedene Aspekte an. Zum Beispiel können Modelle nach ihrer *äußeren Form* unterschieden werden in *verbale Modelle*, die ausschließlich aus Worten einer natürlichen Sprache gebaut sind und damit sehr schnell groß und unübersichtlich werden können, weiter in *ikonische Modelle*, bei denen die Worte durch Piktogramme, bildliche oder auch physische Darstellungen (Miniaturen) ersetzt werden und die dadurch schon übersichtlicher werden, und schließlich in *mathematische Modelle (Kalküle)*, die sich der kompakten Formalsprache der Mathematik bedienen und damit in komplexen Situationen am mächtigsten sind. Im OR werden wir es stets mit solchen mathematischen Modellen zu tun haben, beispielsweise in Gestalt von Gleichungs– oder Ungleichungssystemen.

Einen weiteren Klassifikationsaspekt stellt die *Vorgehensweise* dar. Hier unterscheidet man *analytische, iterative, heuristische* und *Simulationsmodelle*. *Analytische Modelle* kommen nach einem festgelegten *Algorithmus* in *endlicher Zeit* zu der Lösung des Problems und sind somit den übrigen Modellen überlegen. Jedoch gibt es Situationen, in denen ein solches analytisches Modell nicht zur Verfügung steht. Dann sollte man ein *iteratives Modell* heranziehen, das sich auch durch einen Algorithmus auszeichnet, mit dem man sich jedoch der Lösung des Problems im Allgemeinen „nur" annähern kann. Der Grad der Annäherung ist allerdings häufig frei wählbar und wird mit jedem *Iterationsschritt* — in der Regel — besser. Ist auch kein iteratives Modell verfügbar, so bleiben nur noch *heuristische Verfahren*, deren Vorgehen zwar plausibel ist, die jedoch weder das exakte, noch das approximative Auffinden der Lösung garantieren. Auch *Simulationsmodelle* kommen dann in Frage. Sie bilden das reale Problem im Allgemeinen mit Hilfe einer *Simulationssprache* im Computer nach und gestatten die kostengünstige und gefahrlose Beobachtung der (virtuellen) Resultate diverser Entscheidungen und Maßnahmen. Ob und in welchem Ausmaß die Simulation zu einer Lösung des Entscheidungsproblems führt, hängt maßgeblich von der Erfahrung und dem Geschick des Simulators ab.

Der letzte (hier erwähnte) Klassifikationsaspekt orientiert sich an dem *Einsatzzweck* der Modelle. Er unterscheidet *Beschreibungsmodelle*, *Erklärungsmodelle* und *Entscheidungsmodelle*. Der ausschließliche Zweck der *Beschreibungsmodelle* besteht in der Darstellung eines komplexen, realen Sachverhalts (z.B. Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, betriebliche Kennzahlensysteme). Der Zweck von *Erklärungsmodellen* geht insofern darüber hinaus, als auch Wirkungsmechanismen und Kausalzusammenhänge dargestellt werden sollen (z.B. Preis–Absatz–Funktionen, Produktionsfunktionen, Regressionsmodelle). Wenn man erklären kann, *warum* ein reales Phänomen — etwa eine Absatzsteigerung eines Produktes — beobachtet worden ist, dann liegt die Versuchung nahe, die Fragestellung umzukehren und zu fragen, *unter welchen Umständen* sich eine andere Ausprägung des Phänomens einstellen würde. Hat man den Preis eines Gutes als (einzigen oder maßgeblichen) Einflussfaktor für die Absatzmenge ausgemacht, so könnte man mit dem Modell der Preis–Absatz–Funktion auch den Absatz *prognostizieren*, der sich bei einem bestimmten Preis ergeben würde. Bei dieser inversen Nutzung von Erklärungsmodellen spricht man deshalb auch von *Prognosemodellen*. Dagegen erfüllen *Entscheidungsmodelle* einen wesentlichen zusätzlichen Zweck, indem sie die hineingesteckte Information unmittelbar und automatisch in eine *Entscheidung* transformieren.[3] Beispiele hierfür sind medizinische Expertensysteme, die aus Symptomen einen Therapievorschlag ableiten, oder auch die Methoden der statistischen Inferenz, die aus Stichprobendaten eine Parameterschätzung oder eine Hypothesenbeurteilung berechnen.

Die Klassifikation von Modellen gestattet eine schnelle Vorentscheidung darüber, welche Modelle für bestimmte Problemstellungen besser oder schlechter geeignet sind. Im OR haben wir es mit mathematischen Entscheidungsmodellen zu tun, die überwiegend analytisch oder iterativ arbeiten.

Im Folgenden werden *lineare* Optimierungsprobleme und ihre Lösungsmethoden behandelt. Bei dieser *linearen* Optimierung handelt es sich zwar um einen sehr speziellen Sonderfall der Optimierung *in toto*, aber um einen sehr häufig anzutreffenden. Selbst nichtlineare Probleme lassen sich machmal *linearisieren*, also durch einfache mathematische Transformationen (exakt oder approximativ) in lineare Probleme überführen. Der enorme Vorteil linearer Probleme ist deren einfache, algorithmische Lösbarkeit. Nach einer allgemeinen Vorstellung des Grundmodells der linearen Optimierung wird für sehr einfache Situationen ein graphisches Lösungsverfahren demonstriert, das die Intuition für das anschließende, abstraktere Simplex–Verfahren fördern soll. Nach einer Einführung des Simplex–Algorithmus *ohne Komplikationen* werden Sonderfälle und ihre Behandlung besprochen. Postoptimale Rechnungen schließen sich an, die Fragen nach der *Stabilität* der gefundenen Lösung beantworten.

Danach werden Transport– und Zuordnungsprobleme als äußerst spezielle Sonderfälle der linearen Probleme behandelt. Obwohl man sie prinzipiell mit dem Simplex–Algorithmus lösen könnte, ist doch ihr Spezialisierungsgrad so groß, dass es hier effizientere Methoden gibt. Für die Transportprobleme wird die *Distributionsmethode* mit diversen Einzelalgorithmen und für die Zuordnungsprobleme die *Ungarische Methode* vorgestellt und an Beispielen verdeutlicht.

Schließlich folgen noch Kapitel über Netzwerke, die Netzplantechnik und Modelle der Lagerhaltung. Hier verlassen wir — zumindest teilweise — das Gebiet der *linearen* Optimierung und stoßen auf *nichtlineare* Probleme. In den beiden letztgenannten Kapiteln werden darüber hinaus auch Kenntnisse der Stochastik benötigt.

[3] Natürlich ist diese Entscheidung in der Praxis im Allgemeinen nur als *Entscheidungsvorschlag* aufzufassen. Die eigentliche Entscheidung im Sinne eines *Entscheidungsprozesses* mit den Phasen der Planung, der Realisation und auch der Kontrolle der ergriffenen Maßnahmen obliegt nach wie vor dem *Entscheidungsträger*, dem OR–Modelle lediglich als Unterstützung in der *Entscheidungsvorbereitung* dienen; vgl. dazu etwa Bamberg/Coenenberg (2007).

Kapitel 2

Grundmodell der linearen Optimierung

Lernziele

- Wie lautet das Grundmodell der linearen Optimierung?
- Was bedeutet *Linearität*?
- Wie kann man eine Minimierungsaufgabe in eine Maximierungsaufgabe überführen?
- Welche Strukturen können mit dem Grundmodell der linearen Optimierung behandelt werden?
- Wo kann man die lineare Optimierung einsetzen?

2.1 Zielsetzung der linearen Optimierung

Die *lineare Optimierung* stellt das grundlegende und wohl auch wichtigste Teilgebiet des OR dar. Völlig synonym werden hierfür auch die Begriffe *lineare Planungsrechnung* und *lineare Programmierung* benutzt. Von diesen Begriffen stammt die gängige und auch hier oft gebrauchte Abkürzung *LP*. Ein *LP–Problem* ist also ein Problem der linearen Optimierung. Eine lineare Funktion, die so genannte *Zielfunktion*, soll optimiert, also im Allgemeinen *maximiert* oder *minimiert* werden. Dies geschieht durch geeignete Festlegung ihrer Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der so genannten *Strukturvariablen*, *Entscheidungsvariablen* oder *Aktionsvariablen*. Eine *lineare* Funktion der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat stets die Gestalt

$$Z(x_1, \ldots, x_n) := c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n,$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_n$ beliebige, aber bekannte reelle Zahlen sind. Das *absolute Glied* c_0 spielt hier keine Rolle, da es lediglich für eine Verschiebung in Ordinatenrichtung sorgt und somit keinen Einfluss auf die Maximalstelle oder Minimalstelle selbst ausübt, so dass die Zielfunktion Z im weiteren folgende Gestalt hat:

$$Z := Z(x_1, \ldots, x_n) := c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n.$$

Eine solche Funktion kann durch geeignete Wahl der Variablenwerte offenbar beliebig groß oder beliebig klein werden, so dass eine Maximierungs– oder Minimierungsforderung ohne weitere Einschränkungen keinen Sinn machen würde. Diese Einschränkungen, die so genannten *Restriktionen*, sind in der Praxis auch stets vorhanden[1] und haben bei LP–Modellen stets eine *lineare* Struktur bezüglich der Strukturvariablen. Es kann sich dabei um Gleichungen oder um Ungleichungen handeln, wie wir noch sehen werden. Die Anzahl m dieser linearen Restriktionen ist dabei grundsätzlich nicht nach oben beschränkt. In der Praxis können durchaus LP–Probleme mit vielen hundert Restriktionen (und vielen hundert Strukturvariablen) auftreten.

2.2 Schreibweisen des Grundmodells

Das *Grundmodell* der linearen Optimierung hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \quad & \text{max!} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 & \\ \vdots \quad & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m & \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. & \end{aligned}$$

Für die lineare Zielfunktion gilt *im Grundmodell* also stets die *Maximierungsforderung*, wobei die *Zielfunktionskoeffizienten* $c_1, \ldots, c_n$, die auch *Dualwerte* genannt werden, bekannte reelle Zahlen sind. Die m Restriktionen liegen *im Grundmodell* stets als *unechte Abschätzungen nach oben*, d.h. als Kleiner/Gleich–Beziehungen vor. Die lineare Kombination der Strukturvariablen mit den *bekannten* reellen Koeffizienten a_{ij} ist *im Grundmodell* also stets kleiner oder höchstens gleich einer weiteren *bekannten* reellen Zahl b_i, dem so genannten *Restriktionswert* oder *Primalwert* der i–ten Restriktion. Die a_{ij} heißen *technische Koeffizienten*. Weiterhin dürfen die Strukturvariablen *im Grundmodell* nicht negativ werden. Dies nennt man die *Nichtnegativitätsbedingungen* für die Strukturvariablen.

Da weder die Anzahl n der Strukturvariablen noch die Anzahl m der Restriktionen in dieser allgemeinen Schreibweise festliegen, kommt man um die *Auslassungspunkte* (teilweise) nur herum, wenn man sich der kompakteren Operatorenschreibweise

[1] Angeblich hat es vor langer Zeit einmal ein Land ohne Einschränkungen gegeben, aber dann hat eine Dame einem Herrn einen Apfel angeboten ... und dieser Apfel hat dann im Grunde doch wieder eine „Einschränkung“ dargestellt.

der Mathematik bedient. Das oben dargestellte LP–Grundmodell kann dann völlig äquivalent wie folgt geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad & \text{max!} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad & \text{für } i = 1, \dots, m \\
x_1, \dots, x_n \geq 0. &
\end{aligned}
$$

Der Summenoperator $\sum$ wird im Folgenden durchaus gebraucht und als bekannt vorausgesetzt. Seine Bedeutung kann unmittelbar durch den Vergleich mit dem äquivalenten, aber mit Auslassungspunkten versehenen Grundmodell eingesehen werden.

Eine noch kompaktere Schreibweise erhält man mit der Vektor–Matrix–Notation der linearen Algebra. Dazu bezeichne $\mathbf{x}$ den Spaltenvektor der Strukturvariablen, $\mathbf{c}$ den Spaltenvektor der Dualwerte, $\mathbf{b}$ den Spaltenvektor der Primalwerte und $\mathbf{A}$ die Matrix der technischen Koeffizienten:

$$
\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Dann kann das LP–Grundmodell auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad & \text{max!} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, &
\end{aligned}
$$

wobei $\mathbf{0}$ den Nullvektor bedeutet und alle Ungleichungen komponentenweise gelten. Die Zielfunktion Z ergibt sich als *Skalarprodukt* aus dem Vektor der Zielfunktionskoeffizienten und dem Vektor der Strukturvariablen. Diese äußerst kompakte Vektor–Matrix–Notation wird — trotz großer Vorteile bei umfangreichen Problemen — im Folgenden nur noch in dem Kapitel über postoptimale Rechnungen benutzt.

2.3 Erweiterungen des Grundmodells

Das Grundmodell mag dem aufmerksamen Leser recht speziell und restriktiv vorkommen, nicht wegen der auftretenden „Restriktionen“, sondern vielmehr wegen ihrer speziellen Form als *obere Abschätzungen* sowie auch wegen der *Maximierungs*forderung und der *Nichtnegativitätsbedingungen*. Was ist, wenn ich die Zielfunktion *minimieren* möchte, weil es sich beispielsweise um Kosten handelt? Was ist, wenn ich die eine oder andere Restriktion als *untere Abschätzung* oder als *Gleichung* vorliegen habe? Und was ist, wenn die eine oder andere Strukturvariable im Prinzip auch *negativ* werden könnte? Solche *Abweichungen vom Grundmodell* können durchaus durch mathematische Tricks auf die formale Gestalt des Grundmodells zurückgeführt werden, was im Folgenden jedoch nur kurz skizziert werden soll, da die entsprechenden *Sonderfälle* und ihre Behandlung im Rahmen des *Simplex–Algorithmus* später noch ausführlich thematisiert werden.

Soll *in praxi* eine Zielfunktion Z minimiert werden, obwohl man nur einen Algorithmus, z.B. in Gestalt eines Computerprogramms, zur Maximierung zur Verfügung hat, so kann dies folgendermaßen angegangen werden: Man maximiert mit seinem Algorithmus die zuvor mit (-1) multiplizierte Zielfunktion, also $(-Z)$, und hat schon das Minimum von Z gefunden. Die Werte $x_1^*, \ldots, x_n^*$ der Strukturvariablen, die $(-Z)$ maximieren, minimieren gleichzeitig die ursprüngliche Zielfunktion Z. Soll dagegen etwa ein bestimmter *Sollwert* Z_0 möglichst genau *erreicht* werden, so kann man dies auf die Minimierung von $|Z - Z_0|$ und damit auf die Maximierung von $-|Z - Z_0|$ zurückführen. Die im Grundmodell geforderte Maximierung stellt also für die Praxis der Optimierung keine wirkliche Einschränkung dar. Im Rahmen des Simplex–Algorithmus kann die Minimierung mit Hilfe des *dualen Problems* erfolgen, wie später noch gezeigt wird.

Die Berücksichtigung einer *unteren Abschätzung* kann mit demselben Trick erfolgen. Die Ungleichung

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

ist — nach einer Multiplikation mit (-1) — offenbar äquivalent zu der *oberen Abschätzung*

$$-a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i,$$

die den formalen Anforderungen des Grundmodells genügt. Für positive technische Koeffizienten und einen positiven Restriktionswert b_i folgt aus der unteren Abschätzung die Unzulässigkeit der so genannten *Ausgangslösung* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Dieser Sonderfall wird im Rahmen des Simplex–Algorithmus unter dem Stichwort *Suche einer zulässigen Ausgangslösung* behandelt.

Auch die Berücksichtigung einer *Gleichheitsrestriktion* führt auf diesen Sonderfall. Zuvor muss eine Gleichheitsrestriktion jedoch in *zwei* Ungleichheitsrestriktionen zerlegt werden. Die Forderung

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

ist völlig äquivalent zu der Forderung der *simultanen* Erfüllung der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\geq b_i. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung kann natürlich wieder durch Multiplikation mit (-1) in eine obere Abschätzung überführt werden:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n &\leq -b_i. \end{aligned}$$

Gilt für eine Strukturvariable x_j die Nichtnegativitätsbedingung *nicht*, kann sie also *prinzipiell* auch negative Werte annehmen, wie beispielsweise Temperaturen in °C oder Guthabenbeträge, deren negative Ausprägungen auch *Schulden* genannt werden, so kann man x_j durch eine Differenz nichtnegativer Variablen *substituieren*: $x_j = x_j' - x_j''$ mit $x_j', x_j'' \geq 0$. Führt man diese Substitution in der Zielfunktion und in allen Restriktionen durch, so erhält man ein äquivalentes Modell, das den Anforderungen des Grundmodells wieder entspricht.

Mit den genannten Tricks wird deutlich, dass es sich bei den Annahmen des Grundmodells nur scheinbar um willkürliche Einschränkungen der Anwendbarkeit handelt. In der Tat können *viele lineare Probleme* so auf die Gestalt des Grundmodells zurückgeführt werden.

2.4 Anwendungsgebiete

Die am häufigsten anzutreffende Anwendung der linearen Optimierung stellt die Planung des *optimalen Produktionsprogrammes* dar. Die Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_n$ haben darin die Bedeutung der *Mengen* der n Produkte, die ein Unternehmen in der nächsten Planungsperiode herstellen soll, um beispielsweise den Gewinn (aus diesem Produktionsprogramm) zu maximieren.[2] Häufig geht man — zumindest näherungsweise — davon aus, dass es sich um *beliebig teilbare Güter* handelt, dass also die Mengen $x_1, \ldots, x_n$ prinzipiell jeden nichtnegativen Wert annehmen können.[3] Wenn diese Voraussetzung nicht gegeben ist, wenn es sich bei den Produkten also um *Stückgüter*, etwa um Autos oder Flugzeuge, handelt, dann benötigt man ein Verfahren der *ganzzahligen Optimierung* oder *Integeroptimierung*, die hier nicht behandelt werden. In sehr einfach gelagerten Situationen, etwa bei nur zwei Produkten, kann man das Problem jedoch auch ohne solche Verfahren lösen, wie im nächsten Kapitel an einem Beispiel gezeigt wird.

Wenn es beabsichtigt ist, den Periodengewinn zu maximieren, dann sind die zu optimierenden Mengen $x_1, \ldots, x_n$ in der Zielfunktion mit ihren *Deckungsbeiträgen*, also der Differenz aus Erlös und variablen Kosten je Mengeneinheit, zu multiplizieren,

[2] Da Fixkosten definitionsgemäß unabhängig von dem gewählten Produktionsprogramm anfallen, führt das Produktionsprogramm mit der maximalen Deckungsbeitragssumme stets auch zum maximalen Gewinn, weshalb man also genauso gut die Deckungsbeitragssumme maximieren kann.

[3] Anderenfalls dürfte man im Grunde gar nicht von einem *linearen Problem* reden, da die *Linearität* einer Funktion insbesondere die *Lückenlosigkeit* des Definitionsbereiches voraussetzt.

um die zu maximierende *Deckungsbeitragssumme* Z zu erhalten. Verbunden mit dieser Zielsetzung sind typischerweise — aber nicht notwendigerweise ausschließlich — Restriktionen vom Kleiner/Gleich–Typ, die Produktionsbeschränkungen darstellen. Diese können sich auf alle Produktionsfaktoren beziehen. So können Roh–, Hilfs– oder Betriebsstoffe knapp sein, aber auch Maschinenkapazitäten, Personal oder einfach das Geld (Kapital), das man für jede Produktion braucht. Der technische Koeffizient a_{ij} der Produktmenge x_j in der i–ten Ungleichung steht dann für die Menge der i–ten Ressource, die zur Produktion einer Mengeneinheit des j–ten Gutes nötig ist. Der Restriktionswert b_i repräsentiert die vorhandenen Mengeneinheiten dieser Ressource.

Seltener hat man bei Produktionsprogrammen als Zielsetzung die *Minimierung der Produktionskosten*. Die Koeffizienten der Zielfunktion stehen dann für die variablen Kosten je Mengeneinheit der Produkte. Da diese Kosten nicht negativ werden können, wohl aber null, nämlich dann, wenn man nichts produziert, treten bei dieser Zielsetzung typischerweise Restriktionen auf, die das „Nullprogramm“ $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ausschließen. Dies können etwa Lieferverpflichtungen oder Mindestmarktanteile sein. Solche Restriktionen sind vom Größer/Gleich–Typ. Wie bereits erwähnt, entspricht diese Problemstellung jedoch nicht dem *Grundmodell* der linearen Optimierung.

Bei Problemen der *Investitionsplanung* ist der Gewinn unter Variation der zu beschaffenden Investitionsgütermengen sowie unter der Beachtung von Budgetrestriktionen zu maximieren. In der *Finanzierungsplanung* sind dagegen im Allgemeinen die Beschaffungskosten des Kapitals zu minimieren, das jedoch zur Realisation einer betrieblichen Aufgabenstellung in gewissen Mindestmengen beschafft werden muss. In der *Lagerhaltung* können sich LP–Probleme der Kostenminimierung bei vorausgesetzter Lieferfähigkeit ergeben. In vielen betrieblichen Bereichen und Funktionen kann man auf LP–Probleme treffen. Müller–Merbach[4] nennt ein Beispiel aus der Kosten– und Leistungsrechnung bei mehrstufiger Kuppelproduktion, Runzheimer[5] führt ein Beispiel aus dem Bereich der Werbung an.

Aber auch in anderen *Methodenbereichen* trifft man gelegentlich auf Teilprobleme, die mit Hilfe von LP–Modellen gelöst werden können, beispielsweise in der *Spieltheorie* oder in der *Netzplantechnik*. Die lineare Optimierung gehört aufgrund dieser enormen Anwendungsbreite sowie wegen ihrer mathematischen Einfachheit zu den *fundamentalen* Gebieten des OR.

---

[4] vgl. Müller–Merbach (1986)
[5] vgl. Runzheimer et al. (2005)

Kapitel 3

Graphische Lösung eines LP–Problems

Lernziele

- Welche LP–Probleme können graphisch gelöst werden?
- Wie werden die Restriktionen graphisch dargestellt?
- Was ist der *zulässige Bereich*?
- Wie wird die Lösung graphisch gefunden?
- Wie wird die Lösung dann exakt bestimmt?
- Wie *stabil* ist die Lösung?

3.1 Graphische Repräsentation

Die graphische Lösung eines LP–Problems ist im Grunde nur für zwei Strukturvariablen x_1, x_2 möglich, da jeder Strukturvariablen eine Achse — und damit eine Dimension — zugeordnet werden muss. Rein theoretisch könnten wir dank unserer dreidimensionalen Anschauung auch drei Strukturvariablen graphisch behandeln. Bei der erforderlichen Projektion eines dreidimensionalen Gebietes auf eine zweidimensionale Papierfläche gibt es jedoch erhebliche Probleme, so dass wir uns auf zwei Strukturvariablen beschränken.

Jede Strukturvariable (z.B. Produktionsmenge) x_1, x_2 wird auf einer Achse eines *kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystems* abgetragen. Damit entspricht jeder *Punkt* in der Ebene einer potenziellen Lösung des LP–Problems, also beispielsweise einem potenziellen *Produktionsprogramm* einer Zweiproduktunternehmung. Jede lineare Ungleichung teilt die Ebene dann in eine Halbebene von „Lösungen“, die die Restriktion verletzen und damit eigentlich gar keine *Lösung* darstellen, und eine Halbebene von Lösungen, die die Restriktion erfüllen. Die Grenze zwischen den

Halbebenen ist wegen der geforderten Linearität eine Gerade, die definitionsgemäß zu der *zulässigen* Halbebene gehört.

Die Menge derjenigen Punkte, die gleichzeitig alle Restriktionen erfüllen, stellt dann ein — oftmals beschränktes — so genanntes *konvexes Polyeder* dar, also einen stückweise linear begrenzten Bereich B der (x_1, x_2)–Ebene, der mit jeweils zwei beliebigen Punkten (x_1^*, x_2^*) und (x_1^{**}, x_2^{**}) dieses Bereichs auch alle Punkte auf deren *Verbindungsstrecke* enthält, d.h. für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$(x_1^*, x_2^*), (x_1^{**}, x_2^{**}) \in B \;\Rightarrow\; (\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_1^{**}, \lambda x_2^* + (1-\lambda)x_2^{**}) \in B.$$

Diesen stückweise linear begrenzten, konvexen Bereich nennt man den *zulässigen Bereich* des LP–Problems.

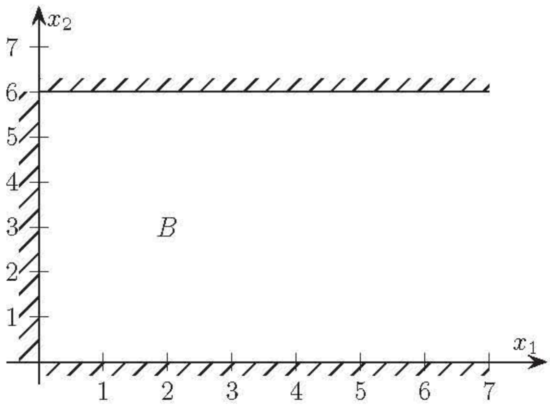
Beispiel 3.1: *Waschpulver*

Ein Betrieb stellt zwei Sorten Waschpulver in den Menge x_1 und x_2 her. Die *Dimension der Mengeneinheit* — z.B. Kilogramm, Tonne, Kubikmeter — spielt dabei prinzipiell keine Rolle, kann der Anwender also beliebig festlegen. Für den *Zeitbezug* — z.B. Tagesproduktion, Wochenproduktion — gilt dasselbe. Man denke hier beispielsweise an die Tagesproduktion in Tonnen [t/Tag]. Die Produktion unterliege hier der Einfachheit halber nur drei Restriktionen, die sich aus der *Maschinenbelegung* und den *Maschinenkapazitäten* ergeben. Waschpulver 1 benötigt je Tonne eine Bearbeitungszeit von einer Stunde auf Maschine B und drei Stunden auf Maschine C. Je Tonne des Waschpulvers 2 sind eine Stunde auf Maschine A, eine Stunde auf Maschine B und zwei Stunden auf Maschine C zu veranschlagen. Die Maschine A steht täglich aber nur sechs Stunden zur Verfügung, die Maschine B sieben Stunden und die Maschine C 18 Stunden. Für den *Zeitbezug der Ressourcenbelastung und der Ressourcenkapazität* gilt wiederum die Optionalität wie schon für die übrigen physikalischen Dimensionen. Natürlich ließen sich die Restriktionen auch in Minuten ausdrücken. Neben diesen „Maschinenrestriktionen“ gelten für Produktionsmengen in natürlicher Weise auch *Nichtnegativitätsbedingungen*.

Um das System der Restriktionen als Ungleichungssystem zu schreiben, ist es nötig, die *produktorientierte* Darstellung im Text in eine *ressourcen*– beziehungsweise hier *maschinenorientierte* Darstellung zu transformieren. Was bedeuten die genannten Ressourcenerfordernisse für die Maschine A? Die Produktionsmenge x_1 des Waschpulvers 1 ist für die Belegungsplanung dieser Maschine unerheblich, da dieses Pulver nicht auf Maschine A gefertigt wird. Aber je Tonne von Waschpulver 2 geht eine Stunde der Kapazität dieser Maschine verloren. Für die technischen Koeffizienten dieser ersten Restriktion heißt dies also: $a_{11} = 0$ [h/t], $a_{12} = 1$ [h/t]. Die Maschine A steht aber täglich nur sechs Stunden zur Verfügung, so dass die erste Restriktion — unter Angabe der physikalischen Dimensionen — lautet:

$$0\ [\mathrm{h/t}] \cdot x_1\ [\mathrm{t}] + 1\ [\mathrm{h/t}] \cdot x_2\ [\mathrm{t}] \le 6\ [\mathrm{h}].$$

Für die graphische Darstellung dieser Situation können wir zunächst festhalten, dass wegen der Nichtnegativitätsbedingungen für Produktionsmengen ausschließlich Punkte des ersten Quadranten in der (x_1, x_2)–Ebene als Produktionsprogramme in Frage kommen. Wir können uns also bei der graphischen Darstellung in diesem Falle auf diesen Quadranten beschränken. Die Restriktion für die Maschine A lautet also $x_2 \leq 6$ und besagt, dass — unabhängig von der ersten Koordinate — alle Punkte (x_1, x_2) unzulässig sind, deren zweite Koordinate größer als sechs ist. Der Bereich B der potenziellen Produktionsprogramme, die dieser ersten Restriktion genügen, hat also die folgende Gestalt, wobei die nicht zu B gehörenden Bereiche durch die Andeutung einer *Schraffur* als *verboten* kenntlich gemacht sind. Der Bereich B ist nach rechts (noch) nicht beschränkt.



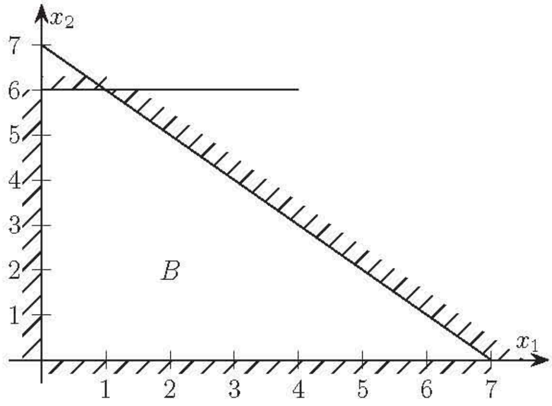
Für Maschine B gilt, dass jedes der beiden Waschpulver jeweils eine Stunde Bearbeitungszeit je Tonne benötigt. Da die Maschine nur sieben Stunden verfügbar ist, lautet die zweite Restriktion (ohne Dimensionen):

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 7.$$

Die Begrenzungsgerade $x_1 + x_2 = 7$ dieser Restriktion kann durch die *Bestimmung zweier Punkte* und durch *lineare Verbindung* (und Fortsetzung) in die (x_1, x_2)–Ebene eingezeichnet werden. Die einfachste Art, zwei Punkte einer Geraden zu bestimmen, besteht darin, jeweils eine Variable null zu setzen und nach der anderen *aufzulösen*:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 0 + x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 7,$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 0 = 7 \Rightarrow x_1 = 7.$$

Für $x_1 = 0$ erhält man definitionsgemäß den x_2–*Achsenabschnitt* oder *Ordinatendurchgang* der Geraden, hier also den Punkt $(0, 7)$. Für $x_2 = 0$ erhält man den x_1–*Achsenabschnitt* oder *Abszissendurchgang* der Geraden, hier $(7, 0)$. Der Bereich B, der jetzt zusätzlich auch dieser zweiten Restriktion genügt, schließt zusätzlich alle Punkte aus, die rechts/oberhalb dieser Grenzgeraden liegen, und ist damit (nach allen Seiten) beschränkt.



Auf Maschine C benötigt eine Tonne des Waschpulvers 1 drei Stunden und eine Tonne von Produkt 2 zwei Stunden bei einer Gesamtkapazität von 18 Stunden:

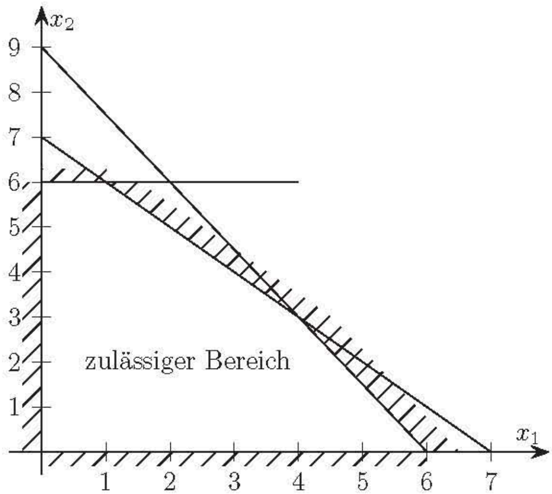
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18.$$

Das Zeichnen der Grenzgeraden dieser Restriktion kann am einfachsten wieder durch die Bestimmung der Achsendurchgänge erfolgen:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = 9,$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 2 \cdot 0 = 18 \Rightarrow x_1 = 6.$$

Alle Punkte rechts/oberhalb dieser Geraden verletzen die Kapazitätsrestriktion von Maschine C. Der *zulässige Bereich* des gesamten LP–Problems ist also das nebenstehende unregelmäßige Fünfeck — einschließlich seines Randes.



3.2 Semigraphische Lösung

Jeder Punkt des zulässigen Bereichs stellt mit seinen beiden Koordinaten eine potenzielle Lösung des LP–Problems dar. Doch welche Lösung ist optimal? Um dies beantworten zu können, muss man die Zielfunktion und ihre Optimierungsrichtung betrachten. Die Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

stellt selbst trotz bekannter Koeffizienten c_1, c_2 erst dann eine konkrete Gerade dar, wenn man den Funktionswert Z als reelle Zahl spezifiziert. So kann man beispielsweise die Zielfunktion mit dem Wert $Z = 0 = c_1x_1+c_2x_2$ als *Ursprungsgerade* in die (x_1, x_2)–Ebene einzeichnen. Sie umfasst alle Punkte (x_1, x_2), die zu demselben Zielfunktionswert null führen. Für jeden beliebigen, aber festen Wert von Z ergibt sich so eine Gerade von Punkten, die alle jeweils zu demselben Funktionswert gehören. Man nennt diese Geraden daher *Isozielwertgeraden*. Sie haben für gegebene Koeffizienten c_1, c_2 *alle dieselbe Steigung* und unterscheiden sich nur im Absolutglied. Dies erkennt man besonders gut, wenn man für bekanntes Z nach der Ordinate auflöst:

$$x_2 = -(c_1/c_2) \cdot x_1 + Z/c_2, \qquad c_2 \neq 0.$$

Wenn die Zielfunktion nun — unter Einhaltung der Restriktionen — *maximiert* werden soll, so ist unter der unendlichen Schar paralleler Isozielwertgeraden diejenige zu wählen, die für $c_2 > 0$ möglichst weit „oben" (und für $c_2 < 0$ möglichst weit „unten") in der (x_1, x_2)–Ebene liegt, aber noch mindestens einen Punkt im zulässigen Bereich besitzt. Dieser Punkt repräsentiert die (optimale) *Lösung des LP–Problems*. Ist umgekehrt die Zielfunktion zu *minimieren*, so verschiebt man eine beliebige Zielfunktionswertgerade für $c_2 > 0$ *parallel nach unten* (und für $c_2 < 0$ parallel nach oben), bis sie den zulässigen Bereich zu verlassen droht. Der letzte *Berührungspunkt* des zulässigen Bereichs stellt dann wiederum die *Optimallösung* dar.

Im Allgemeinen ist die Optimallösung eindeutig. Sie liegt dann stets in einer der endlich vielen Ecken des zulässigen Bereichs. Selbst dann, wenn die Steigung der Zielfunktion *rein zufällig* mit der Steigung der *extremalen* Restriktionsgrenzgeraden übereinstimmt und es somit nicht einen eindeutigen optimalen Punkt des zulässigen Bereichs gibt, sondern unendlich viele, ja selbst dann könnte man bei ausschließlicher Betrachtung der *Eckpunkte* des zulässigen Bereichs zum Optimum der Zielfunktion gelangen.

Das Optimum eines LP–Problems findet man also stets in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs. Dies nennt man das *Eckentheorem*. Es behält im Übrigen auch für mehr als zwei Strukturvariablen seine Gültigkeit, wobei dann allerdings eine *Ecke* eine etwas andere Bedeutung hat als in der Ebene. Eine *Ecke* des zulässigen Bereichs ist hier als Schnittpunkt zweier Restriktionsgrenzgeraden zu verstehen. Höchstens *rein zufällig* könnten in einer Ecke drei oder mehr Restriktionsgrenzgeraden zusammentreffen. Man bezeichnet dies als *primale Entartung* (oder *Degeneration*) *erster Art*. Sie ist für die graphische Lösung nicht weiter von Bedeutung.

Während man nun die optimale Ecke durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden im Allgemeinen *rein optisch* erkennen kann, ist die optische Bestimmung ihrer Koordinaten — und damit der Lösung selbst — mit Ablesefehlern verbunden. Es ist daher eindeutig vorzuziehen, den Schnittpunkt der Restriktionsgrenzgeraden als Lösung eines einfachen linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen zu *berechnen*. Dieses Vorgehen soll *semigraphische* Lösung genannt werden.

Beispiel 3.1 (Fortsetzung): *Waschpulver*

In unserem Waschpulver–Beispiel soll nun die Deckungsbeitragssumme maximiert werden. Dazu sei angenommen, dass eine Tonne des Waschpulvers 1 einen Deckungsbeitrag von vier Geldeinheiten erwirtschaftet und eine Tonne von Waschpulver 2 einen Deckungsbeitrag von drei Geldeinheiten. Die konkrete Spezifikation einer *Geldeinheit (GE)* erfolgt individuell und optional (z.B. Euro, US$, Tsd.–Euro) und ist prinzipiell irrelevant. Das vollständige (mathematische) LP–Modell hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} Z = 4x_1 + 3x_2 & \qquad \text{max!} \\ x_2 \le 6 & \qquad \text{(Maschine A)} \\ x_1 + x_2 \le 7 & \qquad \text{(Maschine B)} \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 & \qquad \text{(Maschine C)} \\ x_1, x_2 \ge 0. & \end{aligned}$$

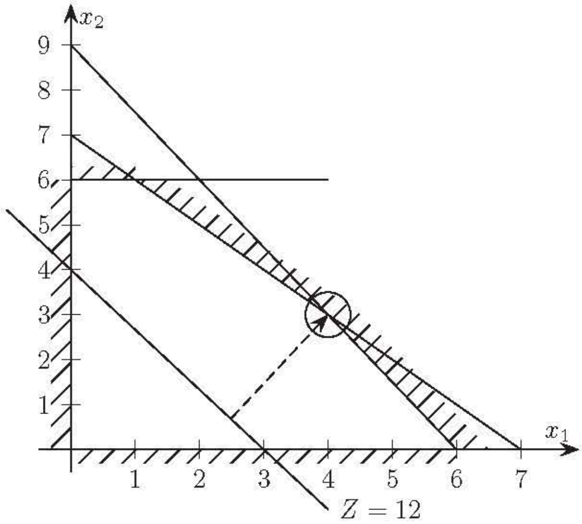
In den zuvor konstruierten zulässigen Bereich wird nun ein beliebiges Exemplar einer *Isogewinngeraden*[1] eingezeichnet, etwa $Z = 12 = 4x_1 + 3x_2$. Dies kann wieder durch die Bestimmung ihrer Achsendurchgänge geschehen:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4,$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Da der Gewinn stets zu *maximieren* ist, wird diese Isolinie nun *parallel* so lange nach oben beziehungsweise nach rechts/oben verschoben, bis sie gerade noch den zulässigen Bereich berührt. Dies ist in dem eingekreisten Eckpunkt der Fall. Dieser Eckpunkt stellt also das gewinnmaximale Produktionsprogramm dar.

[1] Zur Vereinfachung der Sprachregelung werden im Folgenden die Begriffe *Deckungsbeitragssumme* und *Gewinn* synonym verwendet, da dies — wie bereits erläutert — die Optimierungsaspekte nicht beeinträchtigt.



Aber wie lauten die Koordinaten dieses Eckpunktes? Gewiss kann man versuchen, die Koordinaten durch Loten auf die Achsen abzulesen. Dies würde aber äußerst genaues Zeichnen, Loten und Ablesen erfordern. Allemal genauer und kaum aufwändiger ist die *Berechnung* dieses Schnittpunktes, der zu den Restriktionsgrenzgeraden der Maschinen B und C gehört. Es ist also lediglich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 18 \end{aligned}$$

zu lösen. Dies kann auf beliebige Weise erfolgen. Beispielsweise ergibt sich aus der ersten Gleichung: $x_2 = 7 - x_1$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt, liefert $x_1 = 4$, und daher $x_2 = 3$. Es sind also, um den Gewinn zu maximieren, vier Tonnen des Waschpulvers 1 und drei Tonnen des Waschpulvers 2 zu produzieren. Diese *problembezogene Interpretation* gehört selbstverständlich zu einer *vollständigen Lösung* einer problembezogenen, verbalen Aufgabenstellung! Ebenso gehört dazu die Angabe des maximalen Gewinns, den man durch *Einsetzen in die Zielfunktion* berechnen kann

$$Z_{\max} = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 25 \text{ [GE]}.$$

Der maximale Gewinn beträgt 25 Geldeinheiten. Weiterhin könnte man noch die Ressourcenlage im Gewinnmaximum beschreiben. Die optimale Ecke liegt auf den Restriktionsgrenzgeraden der Maschinen B und C. Damit ist durch dieses Produktionsprogramm deren Kapazität ausgeschöpft, wie man auch leicht durch *Einsetzen in die Restriktionen* verifizieren kann:

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 7 \qquad &&\text{(Maschine B)} \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 &= 18 \qquad &&\text{(Maschine C).} \end{aligned}$$

Dagegen hat Maschine A bei diesem Produktionsprogramm eine verbleibende freie Kapazität von $6-x_2=6-3=3$ [h] täglich, die jedoch — im Rahmen dieses Zweiproduktbetriebes — nicht weiter gewinnsteigernd verwendet werden kann. Möglicherweise kann diese Leerlaufkapazität „vermietet“ oder für andere Produkte verwendet werden. Diese Überlegungen liegen jedoch *außerhalb* unserer Problemstellung und interessieren hier daher nicht weiter.

3.3 Weitere Beispiele

Das folgende Beispiel stellt zunächst keine wesentlich andere Situation dar, wird dann aber in zweifacher Hinsicht modifiziert.

Beispiel 3.2: *Unkrautvernichtungsmittel*

Ein Betrieb stellt die Unkrautvernichtungsmittel „Ex und Hopp“ im Umfang von x_1 Tonnen und „Biotod“ im Umfang von x_2 Tonnen her. Die Deckungsbeiträge je Tonne betragen 150 € beziehungsweise 400 €. Zur Herstellung benötigen die Produkte die in der Tabelle notierten Zeiten je Tonne in den drei Fertigungsbereichen FB1, FB2 und FB3. Diese Fertigungsbereiche stehen je Monat aber nur in dem angegebenen Umfang [h/Monat] zur Verfügung.

	Ex und Hopp	Biotod	Kapazität
FB1	3	6	270
FB2	3	3	200
FB3	1.5	7	294

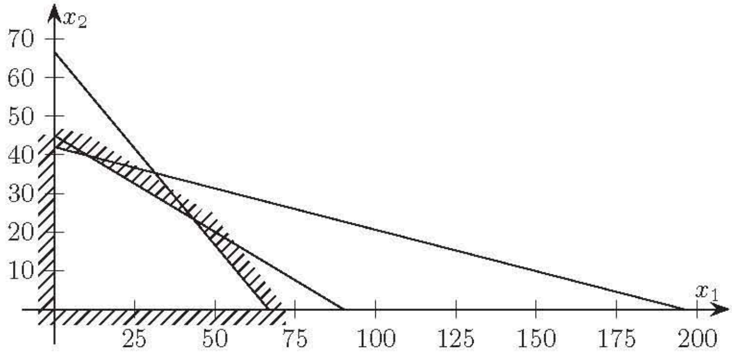
Der Gewinn ist zu maximieren. Zunächst sollte man stets aus der verbalen Aufgabenstellung das *mathematische LP–Modell*, bestehend aus *Zielfunktion* (mit Optimierungsrichtung), *Restriktionen* und gegebenenfalls *Nichtnegativitätsbedingungen*, aufstellen:

$$
\begin{aligned}
Z(x_1,x_2) &= 150x_1 + 400x_2 \quad \text{max!} \\
3x_1 + 6x_2 &\le 270 \qquad \text{(Fertigungsbereich 1)} \\
3x_1 + 3x_2 &\le 200 \qquad \text{(Fertigungsbereich 2)} \\
1.5x_1 + 7x_2 &\le 294 \qquad \text{(Fertigungsbereich 3)} \\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Als nächstes wird der zulässige Bereich gezeichnet. Sofort kann man auch hier wieder die Beschränkung auf den ersten Quadranten erkennen. Für die weitere *Skalierung* der beiden Halbachsen sind jedoch gewisse *Vorüberlegungen* bezüglich der ungefähren Größe des zulässigen Bereichs sinnvoll. Dazu berechnet man beispielsweise *zuerst* die Achsendurchgänge der Restriktionsgrenzgeraden:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 = 270: &\quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 45, &\quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 90 \\
3x_1 + 3x_2 = 200: &\quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 66.\overline{6}, &\quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 66.\overline{6} \\
1.5x_1 + 7x_2 = 294: &\quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 42, &\quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 196.
\end{aligned}
$$

Will man den zulässigen Bereich auf der Grundlage dieser Werte skizzieren, dann muss die x_1–Achse offenbar mindestens bis zum Wert 196 und die x_2–Achse mindestens bis zum Wert $66.\overline{6}$ skaliert werden. Da man Achsenbeschriftungen natürlich mit möglichst *glatten* Werten vornimmt, muss man aufrunden und beispielsweise die x_1–Achse bis 200 und die x_2–Achse bis 70 zeichnen. Der zulässige Bereich hat dann die folgende Gestalt.



Mit etwas Übung sieht man jedoch schon den Werten der Achsendurchgänge an, dass es sich bei $x_1 = 196$ um einen „Ausreißer" handelt, dessen Berücksichtigung bei der Skalierung der Achsen dazu führt, dass der eigentlich interessierende zulässige Bereich unnötig klein dargestellt wird, was die dem graphischen Verfahren inhärenten Ungenauigkeiten nicht gerade verringert. An den beiden anderen Abszissendurchgängen erkennt man schon, dass eine x_1–Achsenskalierung bis 100 völlig ausreichend ist. Wie zeichnet man dann aber die Restriktionsgrenzgerade des Fertigungsbereichs 3 ein? Man berechnet als zweiten Punkt auf der Geraden eben nicht den Abszissendurchgang, sondern den Punkt mit der Koordinate $x_1 = 100$:

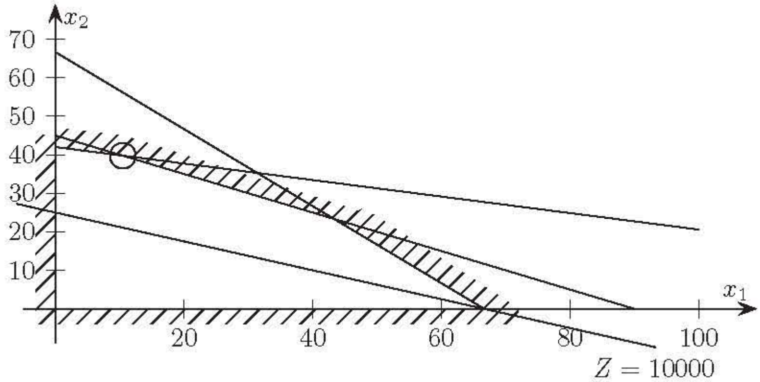
$$1.5 \cdot 100 + 7 \cdot x_2 = 294 \Rightarrow x_2 \approx 20.57.$$

Dies stellt möglicherweise etwas höhere Anforderungen an das Markieren dieses Punktes $(100, 20.57)$, die aber durch besseres Arbeiten an dem *gezoomten* zulässigen Bereich entlohnt werden.[2]

Eine beliebige Isogewinnlinie, etwa $Z = 10000 = 150x_1 + 400x_2$, wird eingezeichnet und parallel möglichst weit nach oben verschoben. Die optimale Ecke ist in der folgenden Abbildung eingekreist. Sie ergibt sich als Schnittpunkt der Restriktionsgrenzgeraden, die zu den Fertigungsbereichen 1 und 3 gehören, und berechnet sich daher wie folgt:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x_1 + 6x_2 = 270 & \Rightarrow x_2 = 45 - 0.5x_1 \\ 1.5x_1 + 7 \cdot (45 - 0.5x_1) = 294 & \Rightarrow x_1 = 10.5 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 39.75.$$

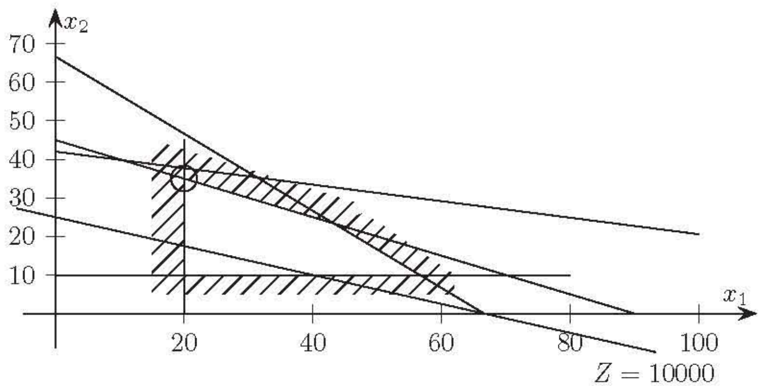
[2] Weiterführende Überlegungen, die auf eine Primzahlzerlegung des Restriktionswertes und auf Teilbarkeitsuntersuchungen hinauslaufen, scheinen den Aufwand nicht zu lohnen.



Es sollten also 10.5 [t] „Ex und Hopp“ und 39.75 [t] „Biotod“ hergestellt werden. Der maximale Gewinn würde dann 17475 [GE] betragen. Die Fertigungsbereiche 1 und 3 wären damit ausgelastet, der Fertigungsbereich 2 hätte noch eine Leerlaufkapazität von $200 - 3 \cdot 10.5 - 3 \cdot 39.75 = 49.25$ [h] pro Monat.

Eine erste Variante des Problems soll nun darin bestehen, dass — beispielsweise durch Lieferverträge — von „Ex und Hopp“ mindestens 20 [t] und von „Biotod“ mindestens 10 [t] produziert werden müssen. Alle anderen Restriktionen bleiben erhalten. Die zuvor gefundene Lösung befindet sich wegen $x_1 = 10.5 < 20$ offenbar nicht mehr im zulässigen Bereich, der nun durch die beiden *zusätzlichen* Restriktionen $x_1 \geq 20$ und $x_2 \geq 10$ kleiner geworden ist. Man beachte, dass durch diese beiden Restriktionen auch die Nichtnegativitätsbedingungen obsolet beziehungsweise redundant, also überflüssig geworden sind. Ansonsten bleibt das Vorgehen dasselbe. Die beliebig eingezeichnete Zielfunktion wird im Rahmen des zulässigen Bereichs maximal nach oben verschoben. Die optimale Ecke ergibt sich als Schnittpunkt der Restriktion für Fertigungsbereich 1 und der Mindestmengenrestriktion für „Ex und Hopp“:

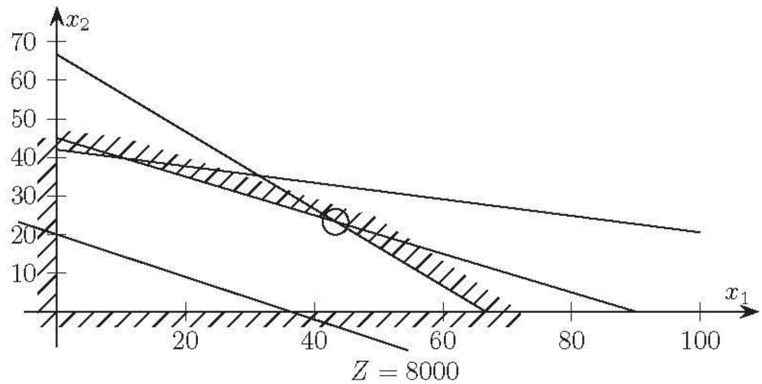
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 20 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 270 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = 35.$$



Es sind also 20 [t] „Ex und Hopp“ und 35 [t] „Biotod“ zu produzieren. Der — gegenüber der weniger restringierten Situation verringerte — Gewinn beträgt dann 17000 [GE].

Vergessen wir nun wieder die Lieferverträge — man könnte sie auch beibehalten — und berücksichtigen wir stattdessen eine veränderte Erlös– oder Kostenlage: Der Deckungsbeitrag für eine Tonne „Ex und Hopp“ sei nun auf 220 [GE] gestiegen. Die übrigen Daten seien die alten geblieben. Da sich die Restriktionen *gegenüber dem Ausgangsbeispiel* nicht geändert haben, ist offenbar auch der zulässige Bereich derselbe geblieben. Was hat sich dann in der Graphik geändert? Durch das veränderte Verhältnis der Zielfunktionskoeffizienten hat sich die *Steigung* der Zielfunktion geändert. Die Isogewinnfunktion für $Z = 8000$ ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet. Ihre maximale Parallelverschiebung nach rechts/oben führt nun zu einer anderen optimalen Ecke, die den Fertigungsbereichen 1 und 2 zugeordnet ist:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 200 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 270 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 43.\overline{3},\ x_2 = 23.\overline{3}.$$



Diese Fertigungsmengen würden übrigens auch den Lieferverträgen genügen, wenn wir diese beibehalten hätten. Die freie Kapazität des Fertigungsbereichs 3 beträgt $65.\overline{6}$ [h]. Die verbesserte Deckungsbeitragslage für „Ex und Hopp“ führt damit zu einem höheren Gewinn von

$$Z_{\max} = 220 \cdot 43.\overline{3} + 400 \cdot 23.\overline{3} = 18866.\overline{6}\ [\text{GE}].$$

Dieser Einfluss der Deckungsbeitragsänderung auf die optimale Ecke legt die Frage nahe, *um wie viel* der Deckungsbeitrag von ursprünglich 150 [GE] steigen darf, *bevor* das ursprünglich optimale Produktionsprogramm *suboptimal* wird, sich also die optimale Ecke ändert. Dies ist eine Fragestellung der *Sensitivitätsanalyse*, die später im Rahmen der so genannten *postoptimalen Rechnung* noch ausführlich behandelt wird. Die ursprünglich optimale Ecke entsprach dem Schnittpunkt der Restriktionsgrenzen der Fertigungsbereiche 1 und 3. Eine Erhöhung des Deckungsbeitrags für

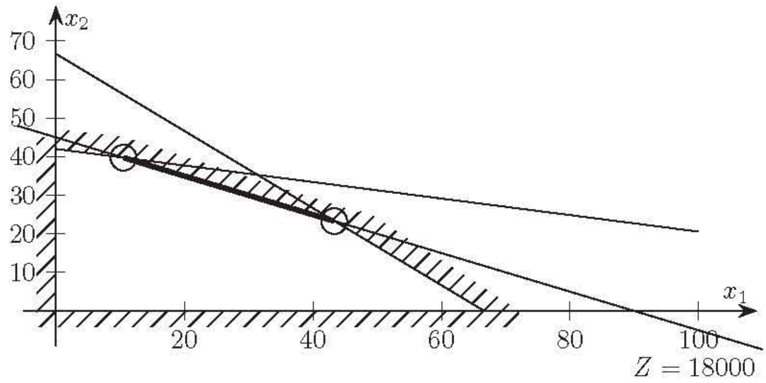
„Ex und Hopp“ bewirkt eine Zunahme des Gefälles der Zielfunktion. Das ursprünglich optimale Produktionsprogramm bleibt also so lange optimal, bis die Steigung $-c_1/c_2$ der Zielfunktion *unter* den Wert der Steigung der Restriktionsgrenze von Fertigungsbereich 1 fällt. Diese Steigung erhält man durch Auflösung der Restriktionsungleichung nach x_2:

$$x_2 \leq 45 - 0.5x_1.$$

Die ursprüngliche Ecke bleibt also optimal, solange gilt:

$$-c_1/400 \geq -0.5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 \leq 200.$$

Wenn der Deckungsbeitrag c_1 zufällig genau 200 [GE] beträgt, hat die Zielfunktion dieselbe Steigung wie die Restriktionsgrenze des Fertigungsbereichs 1. Damit würden alle (unendlich viele) Produktionsprogramme zwischen den eingekreisten Ecken — und einschließlich dieser Ecken — zu demselben maximalen Gewinn von 18000 [GE] führen. Für jeden *inneren Punkt* dieser Strecke wäre lediglich der Fertigungsbereich 1 voll ausgelastet, während die beiden anderen Fertigungsbereiche noch über eine freie Restkapazität (engl: *slack*) verfügen würden.



Ähnliche *Sensitivitätsüberlegungen* kann man bezüglich der *Restriktionswerte* anstellen, deren Veränderung die zugehörige Restriktionsgrenze parallel verschieben würde, und bezüglich der *technischen Koeffizienten*, deren Verhältnis die Steigung der entsprechenden Restriktionsgrenzgeraden bestimmt.

Das nächste Beispiel soll einerseits zeigen, wie man *Minimierungsaufgaben* graphisch löst, und enthält andererseits den Fall fehlender Nichtnegativitätsbedingungen.

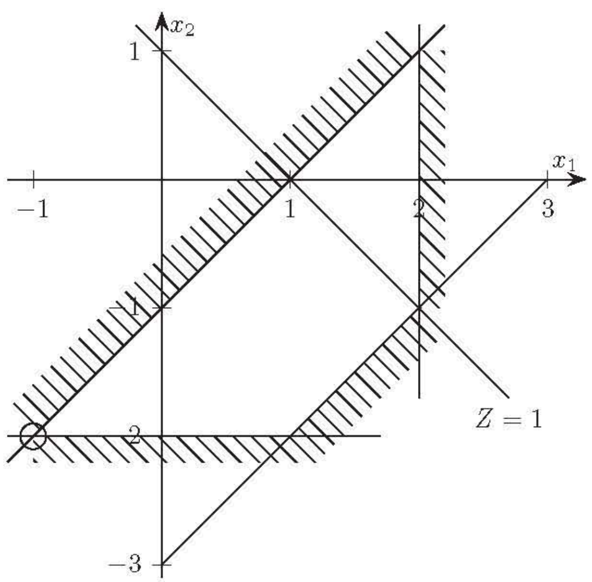
Beispiel 3.3: *Zylinder und Kolben*

Es werden Zylinder und Kolben für Motoren gefertigt, wobei x_1 [mm] die Abweichung des Zylinderinnendurchmessers von einem (nicht näher spezifizierten) Sollwert bedeutet. Ebenso ist x_2 [mm] die Abweichung des Kolbendurchmessers von seinem

Sollwert. Für solche *Abweichungen* gelten keine natürlichen Nichtnegativitätsbedingungen. Die Abweichungen sollen jedoch dem Betrage nach 2 [mm] nicht überschreiten: $-2 \le x_1, x_2 \le 2$. Außerdem soll die Abweichung des Zylinderinnendurchmessers diejenige des Kolbendurchmessers sicherheitshalber um nicht weniger als 1 [mm] überschreiten: $x_1 - x_2 \ge 1$. Und schließlich darf diese Differenz aus technischen Gründen höchstens 3 [mm] betragen: $x_1 - x_2 \le 3$. Aus Materialkostengründen soll die Summe der Abweichungen minimiert werden. Das LP–Modell lautet dann:

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \quad \text{min!} \\ x_1 &\ge -2 \\ x_1 &\le 2 \\ x_2 &\ge -2 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 - x_2 &\ge 1 \\ x_1 - x_2 &\le 3. \end{aligned}$$

Die Bedingungen $x_1 \ge -2$ und $x_2 \le 2$ sind dann redundant, wie man dem zulässigen Bereich entnimmt. Die Zielfunktion ist für den Wert $Z = 1$ eingezeichnet. Da sie zu *minimieren* ist, sind offenbar x_1 und/oder x_2 möglichst klein zu wählen. Die Zielfunktionsgerade ist also innerhalb des zulässigen Bereichs parallel möglichst weit nach links/unten zu verschieben. Die optimale Ecke ist eingekreist und hat die Koordinaten $(-1, -2)$, wie man leicht nachrechnet. Die Abweichungssumme Z beträgt dann im Minimum -3 [mm].



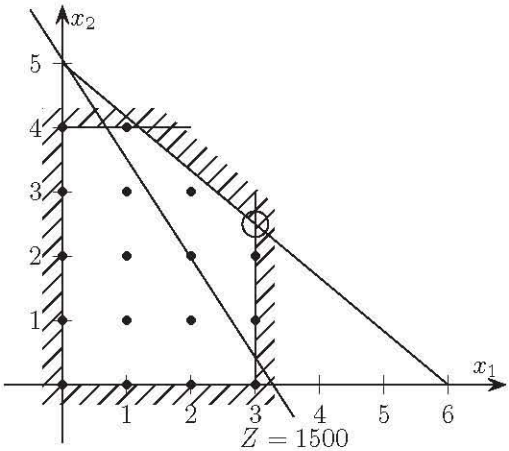
Das folgende Beispiel demonstriert das graphische Vorgehen bei Stückgütern. Es soll an dieser Stelle lediglich ein Gefühl für die *Problematik der Ganzzahligkeit* vermitteln.

Beispiel 3.4: *Schreinerei*

In einer Schreinerei sollen zwei Sorten von Betten gebaut werden. Ein Buchenbett bringt einen Deckungsbeitrag von 500 €, ein Eichenbett 300 €. Aus Rohstoffgründen können täglich höchstens drei Buchenbetten und höchstens vier Eichenbetten produziert werden. Außerdem stehen täglich 30 Mannstunden zur Verfügung, von denen ein Buchenbett fünf und ein Eichenbett sechs erfordert. Das gewinnmaximale LP–Problem lautet:

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) = 500x_1 + 300x_2 &\quad \max! \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Die Isogewinnlinie für $Z = 1500$ ist in den zulässigen Bereich eingezeichnet. Dieser besteht hier jedoch nur aus den Punkten auf dem Ganzzahligkeitsraster, die keiner Restriktion widersprechen und daher in dem schraffiert begrenzten Bereich oder auf seinem Rand liegen. Gäbe es die Ganzzahligkeitsbedingung nicht, könnte man die Isogewinnlinie bis in die eingekreiste Ecke schieben.



Das zugehörige „Produktionsprogramm“ ergäbe sich folgendermaßen:

$$x_1 = 3 \quad \wedge \quad 5x_1 + 6x_2 = 30 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2.5.$$