Weyl · Philosophie der Mathematik

Scientia Nova

Herausgegeben von
Rainer Hegselmann, Gebhard Kirchgässner,
Hans Lenk, Siegwart Lindenberg,
Julian Nida-Rümelin, Werner Raub,
Thomas Voss

Bisher erschienen u. a.:

Robert Axelrod, Die Evolution der Kooperation
Norman Braun, Rationalität und Drogenproblematik
James S. Coleman, Grundlagen der Sozialtheorie
Morton D. Davis, Spieltheorie für Nichtmathematiker
Erklären und Verstehen in der Wissenschaft
Bruno de Finetti, Wahrscheinlichkeitstheorie
Robert Frank, Strategie der Emotionen
Peter Kappelhoff, Soziale Tauschsysteme
Hans Lenk, Das Denken und sein Gehalt
Moral und Interesse
Nagel/Newman, Der Gödelsche Beweis
John v. Neumann, Die Rechenmaschine und das Gehirn
Julian Nida-Rümelin, Kritik des Konsequentialismus
Rational-Choice-Theorie in den Sozialwissenschaften
Erwin Schrödinger, Was ist ein Naturgesetz?
Rudolf Schüßler, Kooperation unter Egoisten
Geo Siegwart, Vorfragen zur Wahrheit
Volker Stocké, Framing und Rationalität
Hermann Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Von Hermann Weyl

8. Auflage

R. Oldenbourg Verlag München 2009

Die 8. Auflage von „Hermann Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“ ist ein unveränderter Nachdruck der 3., wesentlich erweiterten Auflage 1966 dieses erstmals 1928 im Rahmen des „Handbuchs der Philosophie“ erschienenen Werkes. Die 3. Auflage ist aus einer amerikanischen Ausgabe von 1949 entstanden, die im Hauptteil den Handbuchartikel ergänzt und verbessert in englischer Sprache enthielt und durch die folgenden neuen Anhänge erweitert war:

A Die Struktur der Mathematik
B Ars combinatoria
C Quantenphysik und Kausalität
D Die chemische Valenz und die Hierarchie der Strukturen
E Physik und Biologie
F Die Haupteigenschaften der physischen Welt; Gestalt und Entwicklung

Sie wurde gegenüber der englischen Ausgabe verbessert und die Literaturangaben auf den neuesten Stand gebracht. Die Überarbeitung und Übersetzung der amerikanischen Texte besorgte Dr. Gottlob Kirschmer.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d.nb.de abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Internet: oldenbourg.de

Umschlaggestaltung: Dieter Vollendorf
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier (chlorfrei gebleicht).
Gesamtherstellung: AZ Druck- und Datentechnik, Kempten

ISBN 978-3-486-58947-4

Aus dem Vorwort des Verfassers zur amerikanischen Ausgabe von 1949

Ein Naturwissenschaftler, der über Philosophie schreibt, sieht sich Gewissenskonflikten ausgesetzt, von denen er sich selten ganz und unbeschadet freimachen wird; der offene Horizont und die Tiefe der philosophischen Gedanken lassen sich nicht leicht mit der objektiven Klarheit und Bestimmtheit in Einklang bringen, für die er in der Schule der Naturwissenschaft ausgebildet worden ist.

Der Hauptteil dieses Buches ist mit meinem Artikel „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" im „Handbuch der Philosophie" (Verlag R. Oldenbourg 1928) identisch. Bei seiner Abfassung war ich an den Generalplan des *Handbuchs* gebunden, wie er von den Herausgebern umrissen wurde, die sowohl auf die systematischen als auch die historischen Aspekte der Philosophie gleiches Gewicht legten. Dann war ich, freilich weniger bewußt, einmal durch die deutsche Tradition in Literatur und Philosophie, in der ich aufgewachsen war, und zum anderen durch die begrenzten Problemkreise, die sich mir in meiner eigenen geistigen Entwicklung erschlossen hatten, gebunden.

Unter der Überschrift „Naturwissenschaft" beschäftigt sich mein Handbuchartikel fast ausschließlich mit Physik. Sie ist die einzige naturwissenschaftliche Disziplin, mit der ich durch meine eigene Arbeit vertraut bin. Die Gründe, die Biologie mit ein paar allgemeinen Bemerkungen abzutun, waren, daß der mir zur Verfügung stehende Raum mehr als überschritten war, und daß ich auf den Artikel „Metaphysik der Natur" des Biologen und Philosophen Hans Driesch verweisen konnte.

Rund zwanzig Jahre sind seitdem vergangen, eine lange und ereignisreiche Zeit in der Geschichte der Naturwissenschaften. Wenn nun (nicht auf meine eigene Initiative) der Plan einer englischen Übersetzung des Buches aufgetaucht ist, so gab ich meine Einwilligung dazu, obgleich ich mir der zufälligen Umstände seiner Entstehung und der Altersrunzeln in seinem Gesicht voll bewußt war; denn mir schien, als sei das Aufzeigen der gegenseitigen Durchdringung von naturwissenschaftlichem und philosophischem Gedankengut heute so zeitgemäß wie je. Freilich konnten die Ereignisse der beiden vergangenen Jahrzehnte nicht einfach übergangen werden. Aus mehr als einem Grund schied die Möglichkeit, das Buch in englisch neu zu schreiben, aus; denn wie konnte ich hoffen, diese Hingabe und den Geist jener Zeit in meinem Leben, als ich es zum ersten Male schrieb, noch einmal einzufangen — um nach unerläßlichen literarischen Vorarbeiten das Manuskript in ein paar Wochen hinzuhauen.

Trotz zahlreicher Änderungen im kleinen, wobei ich besonders die Abschnitte 13 bis 15 und den Schlußabschnitt 23 erwähne, ist der alte Text in seiner Substanz erhalten geblieben, so daß er der Auffassung eines philosophisch eingestellten Mathematikers zu einer Zeit entspricht, als die Relativitätstheorie ihren Abschluß erreicht hatte und die neue Quantenmechanik soeben im Entstehen begriffen war. Die Literaturhinweise sind demgegenüber auf den neuesten Stand gebracht und sechs Anhänge angefügt worden, für die die Entwicklung der Mathematik und der Physik, aber auch der Biologie in den dazwischenliegenden Jahren den Stoff geliefert haben. Diese Anordnung, die vom Standpunkt der ästhetischen Einheitlichkeit aus angreifbar ist, hat einen gewissen Reiz. Die Anhänge sind ihrer Art nach mehr systematisch-wissenschaftlich und weniger historisch-philosophisch als der Hauptteil. Mit den Jahren bin ich mit den metaphysischen Folgerungen der Naturwissenschaft zurückhaltender geworden: „As we grow older, the world becomes stranger, the pattern more complicated". Und doch würde die Naturwissenschaft ohne einen tragenden transzendentalen Glauben an Wahrheit und Wirklichkeit und ohne das ständige Wechselspiel zwischen Tatsachen und Konstruktionen einerseits und der Darstellung der Gedanken andererseits umkommen.

Eine der Hauptaufgaben dieses Buches sollte sein, als kritischer Führer durch die in den Literaturhinweisen zitierten Werke zu dienen.

Abschnitte historischen Inhalts oder mit Ergänzungen, die nicht unbedingt in den Hauptgang der Entwicklung des Buches gehören, werden in Kleindruck wiedergegeben.

Princeton, New Jersey
Dezember 1947 HERMANN WEYL

Vorwort des Herausgebers

Hermann Weyls „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" ist erstmals 1928 als Beitrag zu dem von Alfred Baeumler und Manfred Schröter herausgegebenen „Handbuch der Philosophie" veröffentlicht worden. Auch innerhalb dieses von hervorragenden Denkern verfaßten Sammelwerkes erregte die Arbeit Weyls besonderes Aufsehen und fand als grundlegendes Werk im In- und Ausland allgemeine Anerkennung.

Für die 1949 bei der Princeton University Press erschienene Ausgabe in englischer Sprache verfaßte Hermann Weyl nicht nur einen umfangreichen Anhang, sondern er verbesserte und ergänzte auch den ursprünglichen Text an vielen Stellen.

Bald nach dem Erscheinen der amerikanischen Ausgabe ist beim Verlag der Plan entstanden, eine deutsche Ausgabe des erweiterten Handbuchbeitrages zu unternehmen. Dem Plan zufolge wurden die Anhänge der amerikanischen Ausgabe übersetzt und von Hermann Weyl noch selbst durchgesehen. Verschiedene Umstände und vor allem der Tod des Autors im Jahre 1955 haben bewirkt, daß die Ausgabe nicht zustande kam.

Das unvermindert hohe Ansehen, dessen sich das Werk Weyls gerade bei den führenden Mathematikern erfreute, und das Interesse des Verlages an Werken der wissenschaftlichen Grundlagenforschung haben dazu geführt, daß die sehr mühevolle Kleinarbeit, die noch notwendig war, um eine den letzten Intentionen Hermann Weyls entsprechende neue Ausgabe zu ermöglichen, noch geleistet wurde. Infolge des Fortschrittes und der Erfolge in allen Zweigen der Mathematik und Naturwissenschaft während des letzten Jahrzehnts ist die Notwendigkeit der gegenseitigen Durchdringung historisch-philosophischer Gedanken einerseits und systematisch-wissenschaftlicher Tatsachen und Methoden andererseits dringlicher geworden denn je. In dieser Beziehung ist das Werk von Hermann Weyl an keiner Stelle überholt.

München, im Juli 1966 GOTTLOB KIRSCHMER

Inhaltsverzeichnis

Anhang

Literatur

über Ausgaben und Übersetzungen, die für Zitate verwendet worden sind, in Ergänzung zu Angaben im Text.

R. Descartes, Oeuvres, ed. Victor Cousin, Paris 1824. Die französische Fassung der „Meditationes de prima philosophia — Méditations (métaphysiques) touchant la première philosophie", und der „Principia philosophiae = Les principes de la philosophie" ist in Band I bzw. III enthalten.

Die monumentale Schweizer Ausgabe von *L. Eulers* „Opera omnia" ist noch lange nicht vollständig und enthält nicht die beiden hier zitierten Werke („Theoria motus" und „Anleitung zur Naturlehre").

G. Galilei, „Opere", Edizione nazionale, Florenz 1890—1909, Neudruck 1929 —. „Dialogo" = „Dialogo sopra i dui massimi sistemi del mondo" steht in Band VII; „Discorsi" = „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze" in Band VIII; „Il saggiatore" in Band VI.

David Humes „Treatise of Human Nature" und *John Lockes* „Enquiry concerning Human Understanding" werden durch ‚Kapitel und Vers' unabhängig von einer besonderen Ausgabe ausgewiesen.

Immanuel Kant, „Kritik der reinen Vernunft", 1. Aufl. 1781, 2. Aufl. 1787.

G. W. Leibniz, „Mathematische Schriften", ed. Gerhardt, Berlin 1849 seq.; „Philosophische Schriften", ed. Gerhardt, Berlin 1875 seq.

Die Briefe von *Leibniz* an *S. Clarke* bilden einen Teil der Kontroverse Leibniz—Clarke; sie stehen in *G. W. Leibniz*, „Philosophische Schriften", ed. Gerhardt, VII, S. 352—440.

Sir Isaac Newton, „Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World", ed. F. Cajori, Berkeley, Kalifornien 1934, Neudruck 1946. (Original in Latein: „Philosophiae naturalis principia mathematica", 1. Ausg. London 1687, 2. Ausg. 1713, 3. Ausg. 1726; die oben angegebene engl. Übersetzung beruht auf einer alten Übersetzung 1729 von Andrew Motte nach der dritten Ausgabe.)

Newtons „Opticks" ist englisch geschrieben worden. Die 4. Ausgabe (London 1730) ist mit einer Einleitung von E. T. Whittaker versehen nachgedruckt worden: London 1931.

ERSTER TEIL: MATHEMATIK

Einführung

Über einige wichtige philosophische Resultate und Gesichtspunkte, welche sich hauptsächlich aus der Arbeit der Mathematik und Naturwissenschaft selbst ergeben haben, soll in den beiden Teilen dieses Artikels berichtet werden. Auf die Verknüpfung mit den großen Philosophemen der Vergangenheit werde ich hinweisen, wo sie mir fühlbar geworden ist. Die belegenden Beispiele werde ich so einfach wie möglich wählen; prinzipiell muß aber daran festgehalten werden, daß die Beschäftigung mit der Philosophie der Wissenschaften die Kenntnis der Wissenschaften selber voraussetzt.

Der hier befolgte Gang in der Darstellung der Grundlagen der *Mathematik* wird von der Oberfläche in die Tiefe führen, das mehr Formale der inhaltlichen Problematik des Unendlichen vorausgehen lassen. Die sorgfältige formale Vorbereitung und die strenge Erfassung dieser natürlich von je her lebendigen und zum Ausdruck gelangten Problematik ist erst ein Werk der jüngsten Zeit. Von den Heroen der Philosophie besaß vor allen *Leibniz* den Blick für das Wesen des Mathematischen; Mathematik ist als organischer und bedeutsamer Bestandteil seinem philosophischen Systeme eingefügt.

I. Mathematische Logik. Axiomatik

Den Griechen verdanken wir die Erkenntnis, daß die Struktur des Raumes, die sich in den Beziehungen der räumlichen Gebilde und ihren gesetzmäßigen Abhängigkeiten voneinander kundtut, etwas vollkommen Rationales ist. Anders als etwa bei einem wirklichen Einzelding, wo wir immer von neuem aus der Anschauung schöpfen müssen, um immer neue, nur in deskriptiven Begriffen vagen Umfangs beschreibbare Merkmale an den Tag zu heben, läßt sich die Raumstruktur mit Hilfe weniger exakter Begriffe und in wenigen Aussagen, den Axiomen, erschöpfend kennzeichnen, derart, daß alle geometrischen Begriffe sich mit Hilfe jener Grundbegriffe definieren lassen, jede wahre geometrische Aussage sich als eine logische Folge der Axiome ergibt. Dadurch wurde die Geometrie zum Vorbild *deduktiver Wissenschaft*. Und infolge dieses ihres Charakters hat die Mathematik ein hervorragendes Interesse an den Methoden, mit Hilfe deren Begriffe auf Grund anderer *definiert*, und mit Hilfe deren Urteile aus andern Urteilen *gefolgert* werden. (Auch die Aristotelische Logik war im wesentlichen abstrahiert aus der Mathematik.) Ja, die endgültige Begründung der Mathematik selbst scheint nicht möglich, ohne daß darüber vollständige Rechenschaft abgelegt wird.

1. Relationen und ihre Verknüpfung. Struktur der Urteile

In der euklidischen Geometrie haben wir es zu tun mit drei Gegenstandskategorien, Punkt, Gerade, Ebene, die nicht definiert, sondern als anschaulich aufgewiesen angenommen werden, und den Grundbeziehungen „liegt auf“ (Punkt liegt auf Gerader, Gerade liegt in Ebene, Punkt liegt in Ebene), „zwischen“ (ein Punkt z liegt zwischen den Punkten x und y) und „kongruent“ (Kongruenz von Strecken und Winkeln). Analog haben wir im Gebiete der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als einzige Grundrelation, mit Hilfe deren alle andern zu definieren sind, diejenige, welche zwischen einer Zahl n und der auf sie folgenden n' besteht. Ein gutes Beispiel zur Relationslehre liefern ferner die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Menschen. Hier liegen zwei Grundkategorien vor: Person männlichen, Person weiblichen Geschlechts, als Grundrelationen treten auf Kindschaft (x ist Kind von y) und Ehe (x ist verheiratet mit y). Das Urteilsschema einer *Relation,* z. B. x folgt auf y, enthält eine oder mehrere Leerstellen $x, y, \ldots$, deren jede auf eine bestimmte Gegenstandskategorie bezogen ist. Aus dem Urteilsschema entsteht ein bestimmtes Urteil, z. B. 5 folgt auf 4, wenn jede Leerstelle durch einen bestimmten Gegenstand der zugehörigen Kategorie ausgefüllt wird. Die Sprache zeichnet den Bau eines derartigen Relationsurteils nicht richtig nach; es gibt da nicht Subjekt, Kopula und Prädikat, sondern eine Relation mit zwei gleichberechtigten Leerstellen, die durch Gegenstände ausgefüllt sind. Man könnte, um sich frei zu machen von den zufälligen grammatischen Formen der Sprache, die Urteilsschemata von Relationen repräsentieren durch Holzplatten mit einzelnen, den Leerstellen korrespondierenden Pflöcken, die Gegenstände durch kleine, mit einem Loch versehene Kugeln, welche auf diese Pflöcke gesteckt werden können. Das sind an sich ebenso brauchbare Symbole wie die Worte. — Zwei Sätze wie „5 folgt auf 4" und „4 geht 5 voran" geben einer und derselben Beziehung zwischen 4 und 5 Ausdruck; es ist unberechtigt, da von zwei zueinander inversen Beziehungen zu sprechen. Freilich haben die Leerstellen im Urteilsschema jede eine spezifische Stelle; und es ist eine besondere Eigentümlichkeit (Kommutativität), wenn die Relation $R(xy)$ [z. B.: x ist Bruder von y] gleichbedeutend (oder gleichen Geltungsumfanges) ist mit $R(yx)$. Die *Eigenschaften* werden wir ebenso mit zu den Relationen zu rechnen haben, wie wir die 1 mit unter die Anzahlen aufnehmen; ihr Urteilsschema besitzt nur eine Leerstelle.

Im § 47 seines fünften Schreibens an *Clarke* spricht *Leibniz* („Hauptschriften", herausg. v. *Cassirer,* Philos. Bibl. Bd. 107/108; I, S. 185) von einem „Verhältnis zwischen *L* und *M,* ohne dabei zu erwägen, welches Glied das vorhergehende oder folgende, das Subjekt oder Objekt ist". „Man kann nicht sagen, daß alle beide, *L* und *M* zusammengenommen, das Subjekt für ein solches Accidens bilden, denn wir hätten dann ein

Accidens in zwei Subjekten, das also gleichsam mit einem Fuß im einen, mit dem andern im anderen Subjekte stünde, was mit dem Begriffe des Accidens unvereinbar ist. Man muß demnach sagen, daß die Beziehung ... allerdings außerhalb der Subjekte ist, daß sie aber, da sie weder Substanz noch Accidens ist, etwas rein Ideelles sein muß, dessen Betrachtung jedoch darum nicht minder fruchtbar ist." Die (ausgesprochene oder stillschweigende) Voraussetzung, daß jede Relation auf Eigenschaften fundiert sein müsse, hat in der Philosophie viel Unheil angerichtet. So ist freilich das Urteil, daß eine Rose verschiedenfarbig von einer zweiten ist, darin gegründet, daß die eine rot, die andere gelb ist. Aber die Beziehung „der Punkt A liegt links von B" ist nicht auf einer qualitativ zu kennzeichnenden Lage von A für sich und B für sich fundiert. Das gleiche gilt für Verwandtschaftsbeziehungen. Die bekämpfte Meinung stammt offenbar aus dem Reiche der Empfindungsdaten, die freilich nur Beschaffenheit, nicht Relation geben können. Darum bezeichnet *Leibniz* an der angeführten Stelle die Relation als etwas rein Ideales. Der mehr als zweistelligen Beziehung geschieht in der logisch-philosophischen Literatur kaum jemals Erwähnung. — Die Einführung von Urteilsschemen mit Leerstellen ist ein wichtiger Fortschritt der mathematischen über die traditionelle Logik; sie werden in Analogie zu den mathematischen Funktionen, die eine Zahl liefern, wenn man ihre Argumente oder Leerstellen durch Zahlen ausfüllt, häufig auch „Urteilsfunktionen" genannt. — In den Axiomen der Arithmetik spielen *Operationen* neben den Relationen eine Rolle, z. B. die Operation des Addierens, welche aus zwei Zahlen a, b eine dritte $a + b$ erzeugt. Wir können diese Operation aber durch die Relation $a + b = c$ zwischen drei Zahlen a, b, c ersetzen; sie ist in bezug auf das Argument c „eindeutig", d. h. zu irgend zwei Zahlen a, b gibt es stets eine und nur eine Zahl c, welche zu ihnen in der Beziehung $a + b = c$ steht. Hierdurch ordnen wir die genetische Konstruktion dem ruhenden Sein der Relationen unter; später werden wir freilich gerade umgekehrt alle Relationen durch konstruktive Prozesse ersetzen.

Folgendes sind die Prinzipien der *Kombination von Beziehungen.*

1. In einem Relationsschema mit mehreren Leerstellen kann man einzelne dieser Leerstellen miteinander *„zur Deckung bringen"*, identifizieren. — Aus dem Schema $N(xy)$: x ist Neffe von y, entsteht so z. B. $N(xx)$: x ist Neffe von sich selber.

2. *Negation*. Zeichen: —. Aus $N(xy)$ entsteht $\overline{N}(xy)$: x ist nicht Neffe von y.
3. *und*. Zeichen: &. Aus $N(xy)$ und $V(xy)$: x ist Vater von y, entsteht z. B. die Relation mit drei Leerstellen: $V(xy)$ & $N(yz)$: x ist Vater von y und y Neffe von z. Es ist anzugeben, welche Leerstellen der beiden verknüpften Schemata einander decken. In der Symbolik wird dies durch die Wahl des gleichen Buchstabens für die Leerstellen zumAusdruck gebracht.
4. *oder*. Zeichen: $\vee$. $V(xy) \vee N(yx)$: x ist Vater von y oder y Neffe von x. Die Verknüpfung durch „oder" kann mittels der Negation und der Verknüpfung durch „und" ausgedrückt werden; und umgekehrt[1]).
5. *Ausfüllung* einer Leerstelle durch einen unmittelbar aufgewiesenen Gegenstand der zugehörigen Kategorie. V(ich, x) bedeutet: ich bin Vater von x; dies ist das Schema jener Eigenschaft mit der einen Leerstelle x, die ausschließlich meinen Kindern zukommt.
6. *alle*. Zeichen: Π_x. Z. B. bedeutet $\Pi_x R(xy)$: alle x (der betreffenden Kategorie) stehen zu y in der Beziehung $R(xy)$.
7. *es gibt*. Zeichen: Σ_x. $\Sigma_y R(xy)$ bedeutet: es gibt ein y, zu welchem x in der Beziehung $R(xy)$ steht. Σ_x und Π_x sind durch die Negation in gleicher Weise aufeinander reduzierbar wie $\vee$ und &. Durch ein vorgesetztes Zeichen Π_x, Σ_x mit dem Index x büßt die dahinter stehende Leerstelle x ihre Substitutionsfähigkeit ebenso ein wie durch die Ausfüllung nach 5. Im Dienste der letzten beiden Konstruktionsprinzipien wird den unmittelbar gegebenen Relationen unseres Sachgebietes immer auch die zweistellige Relation der logischen *Identität* $x = y$ hinzuzufügen sein.

---

[1]) *Leibniz* verwendet für „und", „oder" die Zeichen · und +. Wir weichen davon ab, um die Kollision mit dem arithmetischen plus und mal zu vermeiden. Ihre formale Analogie dazu tritt in dem von *J. H. Lambert* (Acta erudit. 1765, S. 441) aufgestellten distributiven Gesetz

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

zu Tage. Dem Leibnizschen Brauch schließt sich unsere Verwendung des Produkt- und Summenzeichens Π und Σ in 6. und 7. an.

Beispiele. 1. $(x\mathfrak{g})$ bedeute: der Punkt x liegt auf der Geraden $\mathfrak{g}$. In der ebenen Geometrie besteht die Parallelität zweier Geraden, $\mathfrak{g} \parallel \mathfrak{g}'$, nach Euklid darin, daß sie keinen Punkt (x) gemein haben:

$$\overline{\Sigma}_x \{(x\mathfrak{g}) \,\&\, (x\mathfrak{g}')\}$$

ist also die Definition der Beziehung $\mathfrak{g} \parallel \mathfrak{g}'$.

2. Die Aussage, daß durch zwei verschiedene Punkte (x, y) stets eine Gerade $(\mathfrak{g})$ geht, wäre so zu schreiben:

$$\Pi_y \Pi_x \big((x=y) \vee \Sigma_{\mathfrak{g}} \{(x\mathfrak{g}) \,\&\, (y\mathfrak{g})\}\big).$$

3. Im Gebiete der natürlichen Zahlen heißt p eine Primzahl, wenn es keine von 1 verschiedenen Zahlen x und y gibt, welche zu ihr in der Beziehung $x \cdot y = p$ stehen. Diese Eigenschaft von p, Primzahl zu sein, ist so zu erklären:

$$\Pi_y \Pi_x \big((x=1) \vee (y=1) \vee \overline{x \cdot y = p}\big).$$

Gehen wir von den unmittelbar gegebenen Grundrelationen eines Sachgebietes aus, so gewinnen wir durch beliebige kombinierte Anwendung dieser Prinzipien daraus neue „*abgeleitete*“ Relationen in unbegrenzter Fülle (zu denen natürlich die Grundrelationen auch mit dazu gerechnet werden). Insbesondere werden wir unter ihnen solche mit nur einer Leerstelle antreffen, „abgeleitete Eigenschaften“. Wie eine solche, $E(x)$, als „*differentia specifica*“ im Sinne der Aristotelischen Logik dazu dient, aus dem „*genus proximum*“ derjenigen Gegenstandskategorie, auf welche sich ihre Leerstelle x bezieht, einen neuen Gegenstandsbegriff zu bilden, wird durch das Beispiel 3. der Definition von „Primzahl“ hinreichend deutlich sein. Unter den abgeleiteten Urteilsschemen treten ferner auch solche auf, welche überhaupt keine Leerstelle mehr besitzen, Beispiel 2: das sind die „*einschlägigen Urteile*“ unseres Sachgebietes. Wenn wir von jedem dieser Urteile wüßten, ob es wahr ist oder nicht, so besäßen wir eine vollkommene Kenntnis über die Gegenstände der zugrunde gelegten Kategorien hinsichtlich der an ihnen unmittelbar aufgewiesenen Grundrelationen. Die logische Struktur eines solchen Urteils kann zureichend nur dadurch beschrieben werden, daß man angibt, in welcher Weise, Reihenfolge und Kombination unsere 7 Prinzipien an seinem Aufbau aus den Grundrelationen beteiligt sind. Von der alten Lehre, daß ein Satz immer aus Subjekt, Prädikat und Kopula bestehe, sind wir hier unendlich weit entfernt. Die dargelegte Syntax der Relationen gibt einen festen Ausgangspunkt für eine *logische Kritik der Sprache.*

Vgl. z. B. die Ausführungen von *Russell* (Einführung in die mathematische Philosophie, deutsch München 1923, Kap. 16) über den nicht deiktisch gebrauchten bestimmten Artikel (wie im Satz: die durch die beiden voneinander verschiedenen Punkte A, B hindurchgehende Gerade geht auch durch C hindurch). — *Generell* heißt ein Urteil, bei dessen Aufbau niemals das Prinzip 5. der Ausfüllung durch einen unmittelbar aufgewiesenen Gegenstand („dieser da") herangezogen wird. Der Gegensatz dazu ist *partikulär.* (Man könnte noch unterscheiden den rein partikulären Fall, wo nur 5., niemals Π_x oder Σ_x zur Ausfüllung verwendet wird, von dem „gemischt" generell-partikulären.) Ein Gegenstand a erweist sich als *Sonderwesen,* wenn er durch eine *einschlägige generelle* Eigenschaft vollständig gekennzeichnet ist; d. h. wenn unter Ausschaltung des Prinzips 5. eine Eigenschaft konstruiert wurde, welche dem Gegenstand a, aber keinem anderen der betreffenden Kategorie zukommt. Existenz ist aussagbar nur von etwas so durch eine Eigenschaft Beschriebenem, nicht von etwas Genanntem, Σ_x trägt notwendig eine Leerstelle als Index (zur Kritik des ontologischen Gottesbeweises verwertbare Bemerkung). Innerhalb des Zahlenreiches ist 1 ein Sonderwesen, weil 1 die einzige Zahl ist, welche auf keine andere folgt. *Alle Zahlen der Zahlenreihen sind Sonderwesen.* Hierauf beruht in erster Linie das Gefühl des Geheimnisvollen an der Zahl, die Zahlenmagie: daß in der Zahlenreihe der Geist aus sich eine unendliche Mannigfaltigkeit wohlcharakterisierter Sonderwesen erzeugt; nachfühlbar auch für uns z. B. in dem undurchsichtigen Gesetz der Verteilung der Primzahlen. Nicht minder beruht aber auf der freien Herstellbarkeit und dem individuellen Charakter der Zahlen ihre Verwendung zur exakten theoretischen Erfassung des Wirklichen. Für die Punkte im Raume trifft das genaue Gegenteil zu: Eine aus den geometrischen Grundrelationen ohne Aufweisung einzelner Punkte, Geraden oder Ebenen abgeleitete Eigenschaft, die einem Punkte zukommt, kommt auch jedem andern zu. In dieser begrifflichen spiegelt sich die anschauliche *Homogenität* des Raumes wieder. Eben hierauf zielt die das Wesen „ähnlicher" Figuren in der Geometrie prinzipiell erfassende *Leibniz*sche Erklärung: „Ähnlich ist das, was für sich beobachtet nicht voneinander unterschieden werden kann." (Mathemat. Schriften, ed. Gerhardt, V, S. 180.)

2. Die aufbauende mathematische Definition

Neben der im ersten Paragraphen besprochenen kombinatorischen Definition abgeleiteter Relationen verfügt die Mathematik über eine *schöpferische*, neue ideale Gegenstände erzeugende Definition. So erklärt man in der ebenen Geometrie auf Grund der in den geometrischen Axiomen auftretenden dreistelligen Punktrelation der Kongruenz $OA = OB$ den Begriff des *Kreises* folgendermaßen: Ein Punkt O und ein von ihm verschiedener Punkt A bestimmen einen Kreis, den „Kreis um O durch A". Daß ein Punkt P diesem Kreise angehöre, soll besagen, daß $OA = OP$ ist. — Es ist für den Mathematiker ganz gleichgültig, was Kreise sind; es ist allein wichtig zu wissen, auf welche Weise ein Kreis gegeben werden kann (nämlich durch O und A), und was es heißt, daß ein Punkt P dem so gegebenen Kreise angehöre. Nur in Aussagen der letzten Form und solchen, die auf Grund ihrer explizit definiert sind, tritt der Begriff des Kreises auf. Darum ist der Kreis um O durch A dann und nur dann mit dem Kreise um O' durch A' identisch, wenn alle Punkte, welche dem ersten Kreise angehören, auch dem zweiten angehören und umgekehrt. Die geometrischen Axiome lassen erkennen, daß dieses auf die unendliche Mannigfaltigkeit *aller* Punkte bezugnehmende Kriterium durch ein endliches ersetzt werden kann: O' muß mit O zusammenfallen und $OA' = OA$ sein.

Weitere Beispiele. 1. Niemand kann erklären, was eine *Funktion* ist. Aber: „Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmäßige Weise jeder reellen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist (wie z. B. durch die Formel $b = 2a + 1$). Man sagt dann, b sei der *Wert* der Funktion f für den Argumentwert a." Infolgedessen gelten zwei (auf verschiedene Weise definierte) Funktionen als gleich, wenn für alle möglichen Argumentwerte a die zugehörigen beiden Funktionswerte stets zusammenfallen.

2. In der euklidischen Geometrie sind die *„unendlich fernen Punkte"*, in denen sich angeblich parallele Gerade schneiden, solche durch die schöpferische mathematische Definition zu den wirklichen Punkten hinzugefügte ideale Elemente. Allgemeiner kann man auf diese Weise von

den geometrischen Gebilden eines begrenzten allein zugänglichen Raumstücks R aus die unzugänglichen als ideale Punkte einführen (einschließlich der unendlich fernen) und so das begrenzte Raumstück zum vollständigen Raum der projektiven Geometrie ideal erweitern. Es gilt hier, durch geometrische Konstruktionen in R zu erkennen, wann mehrere wirkliche, d. i. R durchsetzende Gerade von dem *gleichen* idealen Punkte ausstrahlen. Man definiert diesen Punkt am einfachsten als Scheitel einer (aus wirklichen Geraden gebildeten) dreiseitigen Ecke. So kommt man zu der Erklärung: „Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die aber zu je zweien in einer Ebene liegen, bestimmen einen ‚idealen Punkt' $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$. Daß die Gerade $\mathfrak{g}$ durch diesen Punkt hindurchgehe, soll besagen, daß $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{a}$ in einer Ebene liegt, ebenso $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{b}$, ebenso $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{c}$." Daraus ergibt sich wieder, wann zwei derartige ideale Punkte als identisch zu betrachten sind. Jedem wirklichen Punkt p entspricht ein und nur ein idealer Punkt π von der Beschaffenheit, daß jede durch p gehende Gerade im Sinne unserer Definition durch π hindurchgeht. So kann man einen Teil der idealen Punkte mit den wirklichen Punkten identifizieren. (Vgl. *Pasch*, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, S. 40.) Nach dem gleichen Schema vollzieht die Mathematik stets die Erweiterung eines zunächst vorliegenden Operationsbereiches durch ideale Elemente; es geschieht das, um die Gültigkeit einfacher Gesetze zu erzwingen. So hat die Hinzufügung der unendlich fernen Punkte zur Folge, daß nicht bloß zwei verschiedene Punkte stets durch eine Gerade verbunden werden können, sondern auch zwei verschiedene Gerade, die derselben Ebene angehören, sich stets in einem Punkte schneiden. Die Einführung des *Imaginären* in die Geometrie zur Erzwingung einfacher allgemein gültiger Schnittpunktsätze im Gebiet der algebraischen Kurven und Flächen, die Einführung der *idealen Zahlen* in die Zahlentheorie durch *Kummer* zur Wiederherstellung der beim Übergang von den rationalen zu den algebraischen Zahlen zunächst verloren gehenden Teilbarkeitsgesetze sind wohl die glänzendsten Beispiele für die Fruchtbarkeit dieser *Methode der idealen Elemente.*

Ein Sonderfall davon ist das Verfahren der *Definition durch Abstraktion.* Eine zweistellige Beziehung $a \sim b$ in einem Objektbereich heißt eine *Äquivalenz* (eine *Beziehung vom Charakter der Gleichheit*), wenn allgemein folgendes gilt:

1. $a \sim a$;
2. ist $a \sim b$, so auch $b \sim a$ (Kommutativität);
3. ist $a \sim b$, $b \sim c$, so auch $a \sim c$ (Transitivität).

Durch die Übereinkunft, zwei Dinge a, b dann und nur dann als voneinander verschieden zu betrachten, wenn sie nicht der Äquivalenzbeziehung $a \sim b$ genügen, entsteht aus dem ursprünglichen „*durch Abstraktion*" ein neuer Objektbereich.

Beispiele und Erläuterungen. 1. Die Ähnlichkeit geometrischer Figuren ist eine Äquivalenz. Man schreibt jeder Figur eine bestimmte „*Gestalt*" zu, und zwei Figuren haben dann und nur dann dieselbe Gestalt, wenn sie zueinander ähnlich sind. In mehr philosophischer Ausdrucksweise pflegt man zu sagen: der Begriff der Gestalt entsteht aus dem der Figur, indem man von Lage und Größe abstrahiert. Erkenntnispraktisch bedeutet die Aufstellung eines solchen abstrahierten Begriffes, daß ausschließlich *invariante Eigenschaften und Beziehungen* zwischen den ursprünglichen Objekten in Betracht gezogen werden sollen. $R(xy)$ ist gegenüber der Äquivalenz $\sim$ invariant, wenn mit $R(ab)$ allemal auch $R(a'b')$ besteht, falls $a' \sim a$, $b' \sim b$ ist. 2. Zwei Mengen A und B von Gegenständen (etwa die Personen und Stühle in einem Saal) nennen wir gleichzahlig, $A \sim B$, wenn es möglich ist, die Elemente von A mit den Elementen von B beiderseits eindeutig zu paaren (wenn es möglich ist, auf jeden Stuhl eine Person zu setzen, so daß kein Stuhl frei bleibt, aber auch jede Person einen Platz bekommt). Die Gleichzahligkeit ist offenbar eine Äquivalenz. „Jede Menge bestimmt eine *Anzahl*; zwei Mengen dann und nur dann dieselbe Anzahl, wenn sie gleichzahlig sind." (Diese Erklärung findet sich schon bei *Hume*, Treatise on Human Nature, Teil III, Abschn. 1)[1]). In nachlässigerer Form pflegt man das so auszudrücken, daß die Anzahl aus der Menge entsteht, wenn man von der Natur ihrer Elemente abstrahiert und lediglich ihre Unterschiedenheit festhält. Der zuweilen gemachte Einwurf, daß alle Elemente, wenn man sie zu bloßen Einsen degradiert, in eines zusammenfielen, wird durch die obige präzise Formulierung abgeschnitten.

An diesem Beispiel der Anzahl möge gezeigt werden, inwiefern die

[1]) Es lohnt sich, die Stelle zu zitieren: „When two numbers are so combined, as that the one has always an unit answering to every unit of the other, we pronounce them equal; and it is for want of such a standard of equality in extension, that geometry can scarce be esteemed a perfect and infallible science."

Definition durch Abstraktion ein Sonderfall der schöpferischen Definition ist. Ihr ordnet sie sich in folgender Gestalt unter: „Jede Menge A bestimmt eine Anzahl (A). Daß die beliebige Menge M aus (A) Elementen bestehe, soll besagen, daß M mit A gleichzahlig ist.“ Danach stimmt die Anzahl (A) mit der Anzahl (B) überein, wenn jede Menge M, welche $\sim A$ ist, auch $\sim B$ ist, und umgekehrt. Nach den an die Äquivalenz gestellten Forderungen 2) und 3) ist dies aber dann und nur dann der Fall, wenn $A \sim B$ ist. Endlich garantiert die Forderung 1) dafür, daß insbesondere die Menge A selber aus (A) Elementen besteht. — 3. Zwei ganze Zahlen heißen nach *Gauß* kongruent modulo 5, wenn ihre Differenz durch 5 teilbar ist. Die Kongruenz ist eine Beziehung vom Charakter der Gleichheit; durch die zugehörige Abstraktion entstehen aus den ganzen Zahlen die *Kongruenzzahlen* mod. 5. Da die Operationen der Addition und Multiplikation invariant sind gegenüber der Kongruenz, so erhält man auf diese Weise einen endlichen Bereich aus nur 5 Elementen, innerhalb dessen sich ebenso Algebra treiben läßt wie im unendlichen Bereich der gewöhnlichen rationalen Zahlen. Z. B. ist hier $2 + 4 = 1$, $3 \cdot 4 = 2$ (mod. 5). Nicht nur Subtraktion, sondern auch Division läßt sich ausführen, weil 5 eine Primzahl ist. Dieses Beispiel ist für die Zahlentheorie von fundamentaler Bedeutung. — 4. Auch die wichtigsten physikalischen Begriffe entstehen nach dem Schema der mathematischen Abstraktion. Wir kommen darauf im naturwissenschaftlichen Teil gelegentlich des Messens zurück.

Das Prinzip der Definition durch Abstraktion finde ich bei *Leibniz* angedeutet in dem fünften der Briefe an *Clarke*. Er sagt da (Auswahl v. *Cassirer*, I, S. 185): „Im übrigen habe ich es hier ungefähr so gemacht wie *Euklid*: der, da er den Begriff des geometrischen Verhältnisses im absoluten Sinne nicht recht definieren konnte, bestimmte, was unter gleichen Verhältnissen zu verstehen ist.“ Und kurz vorher (a. a. O., S. 183): „Der Geist aber ist mit dieser Übereinstimmung nicht zufrieden; er sucht eine Identität, ein Ding, das wahrhaft dasselbe wäre, und er stellt es sich wie außerhalb der Subjekte vor.“ In der Mathematik ist das Prinzip erst im 19. Jahrhundert, und zwar in der vielgestaltigsten Form, zu entscheidender Wirksamkeit gekommen. In seiner Allgemeinheit bewußt formuliert findet es sich bei *Pasch* (1882) an einer schon oben zitierten Stelle, noch klarer bei *Frege*, Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, §§ 63—68. Vgl. ferner *Helmholtz*, Zählen und Messen (1887), Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 3, S. 377.

Neben die hier besprochene mathematische Form der Abstraktion wird man geneigt sein, eine originäre Abstraktion zu stellen. Ich kann an einer Blume das abstrakte Moment der Farbe als solches herausheben; dies ist hier das Primäre, das ev. sich darauf gründende Urteil, daß zwei Blumen die gleiche Farbe rot haben, das Sekundäre. Während bei der mathematischen Abstraktion die Gleichheit das Primäre ist, das Moment aber, in bezug auf welches Gleichheit stattfindet, erst aus der Gleichheitsbeziehung gewonnen wird. Aber ich kann auch die Zahlen derselben Kongruenzklasse mod. 5 dadurch charakterisieren, daß sie alle bei der Teilung durch 5 denselben Rest lassen, die Ähnlichkeit zweier Dreiecke dadurch, daß sich an beiden dieselben Maßzahlen der Winkel und der Seitenverhältnisse ergeben. Das allgemeine Konstruktionsverfahren des Restes bzw. dieser Maßzahlen tritt an Stelle des Moments „Farbe", die Identität seines Resultates an zwei Objekten an Stelle des identischen „rot" an zwei Sinnendingen. Die originäre ordnet sich also der mathematischen Abstraktion unter. Das Gemeinsame aller *kongruenten* Dreiecke, das Gemeinsame aller am gleichen Orte sich befindenden Körper aber bin ich nicht imstande durch ein objektives Merkmal zu bezeichnen (dies letzte Beispiel hat *Leibniz* a. a. O. im Auge), sondern nur durch den Hinweis: *diesem* Dreieck kongruent, an *diesem* Orte befindlich. Unsere Frage hängt hier mit dem Relativitätsproblem zusammen (§ 13), dem Gegensatz zwischen begrifflicher Definition und anschaulicher Aufweisung. Im einen und im andern Fall bleibt aber die Umwandlung des gemeinsamen Merkmals in ein ideales Objekt, z. B. der Eigenschaft rot in eine gegenständliche „rote Farbe", an welcher die roten Dinge „teilhaben", ein wesentlicher Schritt (Platos *μέθεξις*).

Jeder in einer vorliegenden Gegenstandskategorie sinnvollen Eigenschaft $E(x)$ ordnen wir eine *Menge* zu, „die Menge der Dinge x, welche die Eigenschaft E besitzen". So sprechen wir von der Menge aller geraden Zahlen, von der Menge der Primzahlen, von der Menge aller auf einer gegebenen Geraden liegenden Punkte. Die Vorstellung, daß eine solche Menge durch Kolligieren aus ihren einzelnen Elementen zusammengebracht wäre, ist durchaus fernzuhalten. Daß wir die Menge kennen, soll nichts anderes besagen, als daß uns eine für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft gegeben ist. Nur bei endlichen Mengen besteht neben der *generellen* die Möglichkeit einer *individuellen* Beschreibung, durch Aufzeigung jedes einzelnen ihrer Elemente. [Übrigens läßt sich formal diese der gesetzmäßigen Beschreibung unterordnen: die aus drei vorliegenden Gegenständen a, b, c gebildete Menge entspricht der Eigenschaft, a oder b oder c zu sein: $(x = a) \vee (x = b) \vee$

$(x = c)$.] Zwei Eigenschaften E und E' korrespondiert aber unter Umständen *dieselbe* Menge; nämlich dann, wenn jeder Gegenstand (unserer Kategorie), dem die Eigenschaft E zukommt, auch die Eigenschaft E' hat und umgekehrt. Für die Identität zweier Mengen ist also, im Gegensatz zu den Eigenschaften, nicht entscheidend, wie sie (mit Hilfe der in § 1 aufgezählten Prinzipien aus den Grundrelationen) definiert sind, sondern allein der aus dem Sinne nicht abzulesende, auf ein Reich *existierender* Gegenstände sich beziehende sachhaltige Umstand, ob jedes Element der einen Menge auch Element der andern ist und umgekehrt. Faßt man den Mengenbegriff in dieser Weise, so sieht man, daß die schöpferische Definition nichts anderes ist als der Übergang von der Eigenschaft zur Menge, daß also die mathematische Überbauung durch neue Klassen idealer Objekte sich allgemein als *Mengenbildung* kennzeichnen läßt. Es hat jetzt nichts Anstößiges mehr, den Kreis um O durch A als die Menge aller Punkte P zu bezeichnen, deren Entfernung von O gleich OA ist, die Farbe eines Gegenstandes als die Menge aller mit ihm gleichfarbigen Dinge, die Anzahl 5 als die Menge aller derjenigen Inbegriffe, welche mit dem vorgewiesenen Inbegriff der Finger meiner rechten Hand gleichzahlig sind. Es ist freilich eine Illusion — der sich *Dedekind*, *Frege* und *Russell* eine Zeitlang hingaben, weil sie sich offenbar die „Menge“ doch als ein Kollektivum vorstellten —, wenn man meint, damit die idealen Objekte konkret gefaßt zu haben. Es ist eher umgekehrt so, daß durch das Prinzip der schöpferischen Definition der Sinn des allgemeinen Mengenbegriffs aufgeklärt und vor falschen Deutungen geschützt wird. Die zur Erschaffung neuer Abstrakta Φ benutzten Eigenschaften hängen im allgemeinen von einem oder mehreren Argumenten $u, v, \ldots$ ab, die in gewissen Objektbereichen frei variieren können: Φ ist eine *Funktion* von $u, v, \ldots$. So wird bei der Definition des Kreises die dreistellige Punktrelation $OP = OA$ als eine von O und A abhängige Relation (Eigenschaft) mit der einen Leerstelle P aufgefaßt; der „Kreis um O durch A“ ist eine Funktion von O und A. Wichtig sind solche Fälle, wo das transfinite, an die Allheit eines Reiches existierender Gegenstände appellierende Kriterium für die Übereinstimmung zweier Werte des Abstraktums, $\Phi(u, v, \ldots)$ und $\Phi(u', v', \ldots)$, auf Grund allgemein gültiger Tatsachen in ein finites, am Sinn der definierenden Relation abzulesendes umgewandelt werden kann, wie das beim Kreise der Fall war und bei den Definitionen durch Abstraktion. — Statt durch Eigenschaften können die idealen Elemente auch durch *Relationen* definiert sein. Wollen wir auch hier die mengentheoretische Ausdrucksweise beibehalten, so müssen wir jeder zweistelligen Relation R z. B. eine *„zweistellige Menge"* (R) entsprechen lassen; derart daß (R) mit (R') identisch ist, wenn bei beliebigen Elementen a, b von den beiden Aussagen $R(a, b)$, $R'(a, b)$ niemals die eine wahr, die andere falsch ist. Die endgültige Fassung des Prinzips der schöpferischen Definition ist danach die folgende: *Eine Relation* $R(xy../uv..)$, *unter deren Leerstellen einige* $xy\ldots$ *von den andern* $uv\ldots$ *abgesondert sind, bestimmt ein von* $uv\ldots$ *abhängiges Abstraktum* $\Phi(uv\ldots)$; *es ist dann und nur dann* $\Phi(uv\ldots) = \Phi(u'v'\ldots)$, *wenn Gegenstände* $x, y, \ldots$ *der betreffenden Kategorien, welche zu* $u, v, \ldots$ *in der Relation* R *stehen, immer auch zu* $u', v', \ldots$ *in dieser Relation stehen, und umgekehrt.*

3. Das logische Schließen

Nachdem das Definieren besprochen ist, kommen wir zum *Beweisen.* Macht man einen geometrischen Satz zu einem hypothetischen Urteil, dessen Vordersatz aus den sämtlichen geometrischen Axiomen besteht, und ersetzt im Geiste die abkürzenden Ausdrücke durch das, was sie laut Definition bedeuten, so entsteht ein *„formal gültiges", „analytisches" Urteil,* dessen Wahrheit an den Sinn der darin eingehenden Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene, liegt auf, zwischen, kongruent, in keiner Weise gebunden ist. In der Logik des Schließens handelt es sich darum, diejenigen Urteilsstrukturen zu kennzeichnen, welche die formale Gültigkeit des Urteils bedingen. *Barbara, Baralipton* usw. helfen dazu nicht viel. *Leibniz* sah in der Lehre von den *„argumens en forme" une espèce de Mathématique universelle, dont l'importance n'est pas assez connue* (Nouveaux Essais, L. IV, ch. XVII, § 4).

Denjenigen Teil der Logik, welcher ausschließlich mit den logischen Verknüpfungen „nicht", „und", „oder" operiert, wollen wir als *finite Logik* der *transfiniten* gegenüberstellen, die sich darüber hinaus der Aussageoperationen „es gibt“ und „alle“ bedient. Der Grund für diese Einteilung ist der folgende. Liegen vor mir mehrere Stücke Kreide, so ist die Aussage „Alle diese Stücke sind weiß“ nur eine Abkürzung für die Aussage: Dies Stück ist weiß & dies Stück ist weiß & ... (indem ich eines nach dem andern vorzeige); ebenso ist „es gibt unter ihnen ein rotes“ ein abkürzender Ausdruck für: Dieses ist rot $\vee$ dieses ist rot $\vee$ .... Aber nur bei endlichen Mengen, deren Elemente aufgewiesen sind, ist eine derartige Interpretation möglich. Für unendliche Mengen liegt im Sinne des „alle“ und „es gibt“ ein tiefes Problem verborgen, welches das Zentrum der Mathematik, das eigentliche Geheimnis des Unendlichen berührt; es wird sich uns im nachfolgenden Kapitel entfalten. Die Dinge stehen hier analog wie bei dem Übergange von den endlichen zu den unendlichen Summen; der letzteren Sinn ist an besondere Konvergenzbedingungen gebunden, und man kann mit ihnen nicht in jeder Hinsicht so operieren wie mit den endlichen.

Im Aussagekalkül ist es zweckmäßig, neben den Zeichen für „nicht“, „und“, „oder“ noch das Symbol $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$, lies: aus $\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{b}$, einzuführen. Es meint nichts anderes als $\bar{\mathfrak{a}} \vee \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ gilt nicht oder $\mathfrak{b}$ gilt) und bezeichnet keinen darüber hinausgehenden tieferen Zusammenhang zwischen den Aussagen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Es würden übrigens zwei der vier Zeichen —, &, $\vee$, $\rightarrow$ genügen; für den Aussagekalkül wählt man zweckmäßig $\rightarrow$ und —. Ja, man findet sogar mit einem Zeichen $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ sein Auslangen, das die Unverträglichkeit der Aussagen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bedeutet ($\bar{\mathfrak{a}} \vee \bar{\mathfrak{b}}$). An Stelle von

$$\bar{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$$

kann man nämlich schreiben

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}/(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}), \qquad (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}), \qquad (\mathfrak{a}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}).$$

Doch wollen wir hier um der Übersichtlichkeit willen alle vier Zeichen nebeneinander benutzen.

In einer finit-logischen Formel sind die Buchstaben („Aussagevariablen“), für welche beliebige Aussagen (Urteile ohne Leerstellen) eingesetzt werden dürfen, verknüpft durch jene vier Zeichen $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$. Beispiel:

$$b \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}).$$

Es gibt eine *allgemeine Vorschrift*, nach der man einer solchen Formel ihre formale Gültigkeit ansehen kann. Man erteile nämlich den vorkommenden Buchstaben einen der Werte „wahr“ *W* oder „falsch“ *F* in allen möglichen Kombinationen und bestimme jedesmal den Wert der gesamten Formel nach der folgenden Anweisung für die Wertbestimmung der Verknüpfungen:

$\mathfrak{a}$	$\bar{\mathfrak{a}}$
W	F
F	W

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}$ & $\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	F

(Die Anzahl der durchzuprobierenden Kombinationen beträgt z. B., wenn in die Formel 5 verschiedene Aussagevariable eingehen, 2^5.) Ergibt sich als Wert der Formel in jedem Falle *W*, so ist sie formal gültig. Diese Vorschrift, von der man sagen kann, daß sie auf dem *Satze des Widerspruchs* und dem *tertium non datur* basiert sei, will ich kurz *„die finite Vorschrift“* nennen.

Beispiel: $\mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})$.

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$	$\mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	W	W
F	F	W	W

Auf dieser Stufe kann man es einer Behauptung also direkt ansehen, man kann es durch ein kombinatorisches Verfahren nach festem Schema entscheiden, ob sie eine logische Folge gewisser anderer Sätze ist, wenn Voraussetzung und Behauptung aus Urteilen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ (gleichgültigen Sinnes) durch die vier Operationen —, →, &, ∨ zusammengebaut sind.

Dies wird völlig anders, sobald „es gibt" und „alle" hinzutreten (mit ihnen halten auch die Leerstellen ihren Einzug in die Formeln). Σ_x und Π_x zwingen zur *Konstruktion:* wir stellen einige formal gültige Grundformeln als *logische Axiome* auf und geben eine *Regel* an, durch welche aus formal gültigen Urteilen neue formal gültige Urteile hervorgehen. Die Regel ist keine andere als die, nach welcher Logik auf alle theoretischen Wissenschaften angewendet wird, *der Syllogismus:* Hast du ein Urteil $\mathfrak{A}$ und ein Urteil $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, in welchem links von → das erste Urteil $\mathfrak{A}$ auftritt, so stelle das Urteil $\mathfrak{B}$ hin. Alle Urteilsstrukturen, welche durch wiederholte Anwendung dieser Regel, ausgehend von den logischen Axiomen, gewonnen werden, haben analytischen Charakter, ohne daß es möglich wäre, unabhängig von der konstruktiven Erzeugung der einzelnen Strukturen ihre unendliche Mannigfaltigkeit deskriptiv zu kennzeichnen. *Daher die Notwendigkeit des Beweises Schritt für Schritt.* So kann man mit einem von *J. Fries* in etwas anderem Sinne geprägten Wort sprechen von einer „ursprünglichen Dunkelheit der Vernunft". Wir *haben* die Wahrheit nicht, sondern sie will durch Handeln gewonnen sein.

Galilei (Dialogo, Opere complete, Firenze 1842/56, Bd. I, S. 116) spricht einen verbreiteten Gedanken aus, wenn er hierin den Unterschied der menschlichen von der göttlichen Erkenntnis sieht: „Wir gehen mittels schrittweiser Erörterung weiter von Schluß zu Schluß, während Er durch bloße Anschauung begreift. So beginnen wir z. B., um die Kenntnis einiger Eigenschaften des Kreises zu gewinnen, deren er unendlich viele besitzt, bei einer der einfachsten, stellen sie als seine Definition hin und gehen von ihr aus durch Schlüsse zu einer zweiten über, von dieser zu einer dritten, sodann zu einer vierten usw. Der göttliche Intellekt hingegen begreift durch bloße Erfassung seines Wesens ohne zeitliches Erwägen die unendliche Fülle seiner Eigenschaften" (*intensive*, der objektiven Gewißheit nach, aber stehe in jeder gewonnenen mathematischen Einsicht der menschliche Intellekt dem göttlichen nicht nach).

Über „es gibt" und „alle", Σ_x und Π_x, können wir zunächst die beiden folgenden Axiome aufstellen, in denen für $\mathfrak{a}(x)$ ein beliebiges Urteilsschema mit der einen Leerstelle x gesetzt werden darf und für c ein aufgewiesener Gegenstand der zugehörigen Kategorie:

$$I.\quad \Pi_x \mathfrak{a}(x) \rightarrow \mathfrak{a}(c); \qquad II.\quad \mathfrak{a}(c) \rightarrow \Sigma_x \mathfrak{a}(x).$$

Sie gestatten uns nur, *aus* der Allheitsaussage etwas zu folgern, aber sie schildern noch nicht, wie man von andern Urteilen her jemals *auf* eine Allheitsaussage schließen kann. Für das „es gibt" verhält es sich umgekehrt.

Das klassische Schulbeispiel eines Schlusses — (α) alle Menschen sind sterblich, (β) Cajus ist ein Mensch; also (γ) Cajus ist sterblich — vollzieht sich bei uns in mehreren Stufen. M und S mögen die Eigenschaften bedeuten, Mensch und sterblich zu sein, der Buchstabe c den Cajus. Er liefert

$$(\alpha)\quad \Pi_x\big(M(x) \rightarrow S(x)\big)$$

in Verbindung mit I:

$$\Pi_x\big(M(x) \rightarrow S(x)\big) \rightarrow \big(M(c) \rightarrow S(c)\big)$$

durch die Schlußregel die Aussage:

$$M(c) \rightarrow S(c).$$

Aus (β): $M(c)$ und dem vorigen Urteil abermals durch die Schlußregel:

$$(\gamma)\quad S(c).$$

So wie in (α), kann sich das $\rightarrow$ mit dem „alle" zu einem *allgemeinen hypothetischen Satz* verbinden, an sich enthält es die Idee der Allheit nicht. Die Geltung eines allgemeinen Folgesatzes von der Form

$$\Pi_x\big(\mathfrak{a}(x) \rightarrow \mathfrak{b}(x)\big)$$

kann natürlich verschiedene Fundamente haben. Wenn sie allein in den logischen Axiomen liegen, drückt das Zeichen $\rightarrow$ eine rein logische Folge aus; doch mag das Fundament auch in einem sachhaltigen Wesensgesetz, einem naturgesetzlich bestehenden Wirkungszusammenhang oder einer empirischen Regelmäßigkeit liegen. Diese Bemerkung halte ich zur Klärung der Frage für ausreichend, was das Verhältnis von Ursache und Wirkung mit dem von Grund und Folge zu tun hat. Doch bleibt das Zeichen $\rightarrow$ alledem gegenüber neutral.

Die finiten logischen Axiome findet man aufgezählt bei *Ackermann*, Mathem. Annalen 93 (1924), S. 4; ferner in Grundlagen der Mathematik, I, von *D. Hilbert* und *P. Bernays*, Berlin 1934, S. 66. Sie sind natürlich so gebaut, daß sich ihre formale Gültigkeit aus der „finiten Vorschrift" ablesen läßt. Man kann aber auch umgekehrt zeigen — doch erfordert dies schon einen eigentlichen mathematischen, nicht ganz auf der Oberfläche liegenden Beweis —, daß alle nur die Zeichen $\overline{}$, $\rightarrow$, &, $\vee$ enthaltenden logischen Formeln, welche nach der „finiten Vorschrift" formal gültig sind, aus diesen wenigen Axiomen durch Substitution und wiederholte Anwendung der Syllogismenregel gewonnen werden können; daher ist die Aufzählung vollständig. Die transfinite Axiomgruppe aber, von der wir bis jetzt nur die beiden Axiome I. und II. kennen, bleibt ergänzungsbedürftig.

Mit Hilfe der Schlußregel kann man aus den logischen Axiomen neue abgeleitete Beweisregeln gewinnen. Jedes formal gültige Urteil von der Bauart $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus den Aussagevariablen, den unbestimmten Urteilen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... durch die logischen Zeichen zusammengebaut sind) führt nämlich mit Hilfe des Syllogismus zu der Regel: Hast du ein Urteil von der Gestalt $\mathfrak{A}$, so kannst du daraufhin das entsprechende Urteil von der Gestalt $\mathfrak{B}$ hinstellen. Umgekehrt hat auch die Syllogismusregel ihren Repräsentanten unter den logischen Formeln:

$$\mathfrak{a} \rightarrow \big((\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{b}\big).$$

Dennoch kommt man, da Konstruieren Handeln heißt, mit Formeln allein nicht aus, man braucht durchaus eine praktisch auszuübende Schlußregel. Das ist wohl der richtige Kern der Ansicht vom *normativen Charakter der Logik.*

Kants Unterscheidung von *analytischen* und *synthetischen Urteilen* (Kritik der reinen Vernunft, Einleitung) ist so unklar gefaßt, daß ein Vergleich mit dem scharfen Begriff der formalen Gültigkeit in der mathematischen Logik — der letzten Endes durch die logischen Axiome statuiert wird — nicht gut möglich ist. Hingegen deckt sich mit ihm die *Husserl*sche Definition (Logische Untersuchungen, Bd. II, 2. Aufl., S. 254): „Analytische Gesetze sind unbedingt allgemeine Sätze, welche keine anderen Begriffe als formale enthalten. Den analytischen Gesetzen stehen gegenüber ihre Besonderungen, welche durch Einführung sachhaltiger Begriffe und ev. individuelle Existenz setzender Gedanken erwachsen. Wie überhaupt Besonderungen von Gesetzen Notwendigkeiten ergeben, so Besonderungen analytischer Gesetze analytische Notwendigkeiten."

LITERATUR

G. W. Leibniz, Philosophische Schriften, VII, S. 43—247, 292—301. Mathematische Schriften, VII, S. 49—76, 203—216.

L. Couturat, La logique de Leibniz. Paris 1901. Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Paris 1903.

G. Boole, The Mathematical Analysis of Logic. London und Cambridge 1847. An Investigation of the Laws of Thought. London 1854. Neudruck in: Collected Logical Works, Chicago und London 1916.

E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3 Bände, Leipzig 1890—1895.

A. N. Whitehead und *B. Russell*, Principia Mathematica. 3 Bände, Cambridge 1910—1913; 2. Aufl. 1925—1927.

B. Russell, The Principles of Mathematics. Cambridge 1903; 2. Aufl. New York 1938. Introduction to Mathematical Philosophy. 2. Aufl. London 1920.

L. Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, New York und London 1922 und Frankfurt/M. 1960.

C. I. Lewis und *C. H. Langford*, Symbolic Logic. New York 1932.

A. Tarski, Introduction to Logic. New York 1941.

H. Freudenthal, Einführung in die Sprache der Logik. München 1965.

4. Die axiomatische Methode

Die axiomatische Methode besteht einfach darin, die Grundbegriffe und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln. Ist dies möglich, so nennt *Husserl* das betreffende Sachgebiet *definit*. So steht es mit der Lehre vom Raum. — Natürlich kann ich aus den geometrischen Axiomen nicht das Attraktionsgesetz herleiten. Darum mußte oben genau erklärt werden, was als *einschlägiges* Urteil eines Sachgebietes zu gelten hat. Ebenso wenig kann ich aus den geometrischen Axiomen entscheiden, ob Zürich von Hamburg weiter entfernt ist als Paris; diese Frage handelt wohl von einer geometrischen Beziehung, aber zwischen individuell aufgewiesenen Raumstellen. Was deduktiv aus den Axiomen soll gefolgert werden können, sind also, genau gesagt, die *einschlägigen generellen wahren* Urteile.

„Hierauf beruht mithin diese ganze Kunst zu überzeugen. Sie ist in zwei Grundsätzen enthalten: alle Bezeichnungen, die man verwendet, zu definieren; und alles zu beweisen, indem man im Geist die definierten Ausdrücke durch die Definitionen ersetzt": so *Pascal* in einem Vortrag über den *esprit géométrique* (entnommen aus: *K. Bornhausen, Pascal*, Basel 1920). Nur ist dies leichter gesagt als getan. *Euklids* „Elemente" bringen noch keine vollständige Lösung des Problems, die Geometrie zu axiomatisieren. Er beginnt mit *ὅροι*, Definitionen; sie sind aber nur zum Teil Definitionen in unserem Sinne, die wichtigsten vielmehr Deskriptionen, Hinweise auf das nur in der Anschauung zu Gebende. Etwas anderes ist ja in Wahrheit für die geometrischen Grundbegriffe wie „Punkt", „zwischen" usw. nicht möglich; für den deduktiven Aufbau der Geometrie sind aber offenbar derartige Deskriptionen ohne Belang. Es folgen unter dem Namen *αἰτήματα* einige geometrische Axiome, vor allem das Parallelenaxiom: Gegeben eine Ebene E, in ihr eine Gerade $\mathfrak{g}$ und ein nicht auf der Geraden liegender Punkt p; alle in der Ebene E gelegenen, durch den Punkt p hindurchgehenden Geraden, mit Ausnahme einer einzigen, schneiden $\mathfrak{g}$. Endlich ein paar allgemeine Größenaxiome: *κοιναὶ ἔννοιαι*. In die geometrische Entwicklung spielen sie dadurch hinein, daß später stillschweigend von gewissen geometrischen Beziehungen wie der Kongruenz, der Flächengleichheit, angenommen wird, daß sie ihnen genügen. Hinter ihnen verbirgt sich also eine ungeklärte Fülle eigentlich geometrischer Axiome. In den späteren Büchern der „Elemente" wird nach Bedarf die Liste der Axiome ergänzt. Infolge der anschaulichen Selbstverständlichkeit der geometrischen Grundsätze und der Unnatürlichkeit einer rein logisch-deduktiven Haltung hat es große Mühe gekostet, die geometrischen Axiome vollständig herauszuschälen. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist hier die schon um 1830 von *Bolyai* und *Lobatschewsky* aufgestellte „*nichteuklidische Geometrie*" die treibende Kraft. Die verstecktesten, die Axiome der Anordnung, deckt *Pasch* auf um 1880. Am Ende des Jahrhunderts ist das Ziel vollständig erreicht und findet einen klassischen Ausdruck in *Hilberts* „Grundlagen der Geometrie". *Hilbert* ordnet die Axiome in fünf Gruppen: Axiome der Verknüpfung („liegt auf"), der Anordnung („zwischen"), der Kongruenz, der Parallelität und der Stetigkeit.

Das axiomatische Verfahren der Alten, das außer *Euklid* auch *Archimedes* mit bewundernswerter Freiheit handhabt, wurde vorbildlich für die Begründung der modernen Mechanik. Es beherrscht *Galileis* Lehre von der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung (Discorsi e dimostrazioni, 3. und 4. Tag), noch ausgesprochener

Huyghens' Aufstellung der Pendelgesetze im Horologium oscillatorium. Völlig durchgeführt ist das Programm der Axiomatik in außermathematischen Wissensgebieten in neuerer Zeit an der Statik der starren Körper, der Raum-Zeit-Lehre der speziellen Relativitätstheorie und andern Teilen der Physik.

Das Axiomensystem ist durch das behandelte Sachgebiet keineswegs eindeutig bestimmt, sondern in der Wahl der Grundbegriffe und Grundtatsachen besteht immer eine gewisse Willkür. Die Frage, ob sich hier ein wesenhaft Originäres einem wesenhaft Abgeleiteten gegenüberstellen läßt, liegt außerhalb der Kompetenz des Mathematikers[1]). Die ursprünglich gewählte Definition eines geometrischen Beziehungsbegriffes kann mit gleichem Recht durch irgendein nach den Tatsachen der Geometrie für das Bestehen der Beziehung notwendiges und hinreichendes Kriterium ersetzt werden.

Ein Axiomensystem muß unter allen Umständen *widerspruchslos* sein; d. h. es muß Gewißheit bestehen, daß durch logisches Schließen aus den Axiomen niemals eine Aussage $\mathfrak{a}$ und durch einen andern Beweis die entgegengesetzte Aussage $\mathfrak{a}$ gewonnen werden kann. Geben die Axiome die Wahrheit über ein Sachgebiet wieder, so kann freilich an ihrer Widerspruchslosigkeit kein Zweifel sein. Aber die Tatsachen stehen nicht immer so eindeutig Rede und Antwort, wie wir es wohl wünschen möchten; eine wissenschaftliche Theorie kann nicht getreue Wiedergabe des Gegebenen sein, so wie es mir gegeben ist, sondern ist fast immer kühne Konstruktion. Darum ist die Prüfung auf Widerspruchslosigkeit eine wichtige Kontrolle; sie ist in die Hände des Mathematikers gelegt. — Nicht unerläßlich, aber erwünscht ist die *Unabhängigkeit* der einzelnen Axiome eines Axiomensystems. Es soll keine überflüssigen Bestandteile enthalten, keine Sätze, die auf Grund der andern Axiome bereits beweisbar sind. Die Frage der Unabhängigkeit hängt mit der Widerspruchslosigkeit aufs engste zusammen; denn daß der Satz $\mathfrak{a}$ von gewissen vorliegenden Axiomen unabhängig ist, kommt darauf hinaus, daß der Satz $\bar{\mathfrak{a}}$ mit ihnen nicht in Widerspruch steht.

Die Abhängigkeit eines Satzes $\mathfrak{a}$ von andern Aussagen $\mathfrak{A}$ (einem Axiomensystem) ist festgestellt, sobald der Beweis von $\mathfrak{a}$ auf Grund

[1]) Zuweilen ist dies sicherlich der Fall. Unter den Verwandtschaftsrelationen sind Kindschaft und Ehe die *wesenhaft* ursprünglichen.

jener andern Aussagen in concreto vorliegt. Zur Feststellung der Unabhängigkeit aber gilt es die Einsicht zu gewinnen, daß durch keine noch so weit getriebene Kombination der Schlüsse jemals der Satz $\mathfrak{a}$ zustande kommt. Man verfügt über drei Methoden, dies Ziel zu erreichen; jede derselben kommt nach dem oben Gesagten auch für den Nachweis der Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems in Betracht.

1. Die erste beruht auf dem Grundsatz: wenn in $\mathfrak{a}$ ein neuer Urbegriff auftritt, der nicht auf Grund der in $\mathfrak{A}$ vorkommenden definiert ist, kann $\mathfrak{a}$ nicht aus $\mathfrak{A}$ erschlossen werden. Beispiel: Ein Schiff ist 80 m lang und 20 m breit; wie alt ist sein Kapitän? — Nur in den trivialsten Fällen kommt man mit diesem einfachen Gedanken zum Ziel.

2. Die *Konstruktion eines Modells:* es werden Objekte und Relationen aufgewiesen, welche bei geeigneter Namengebung die sämtlichen Aussagen $\mathfrak{A}$ erfüllen, für welche aber $\mathfrak{a}$ nicht gilt. Diese Methode hat bisher den größten Erfolg gehabt.

Das berühmteste Beispiel liefert das *Parallelenaxiom.* Es wurde von je her, schon im Altertum, nicht in demselben Maße als evident empfunden wie die übrigen geometrischen Axiome. Um es sicherzustellen, bemühte man sich jahrhundertelang, es auf Grund der andern zu beweisen. Der Zweifel an seiner tatsächlichen Geltung und dessen Überwindung war hier also das treibende Motiv. Daß die Bemühungen immer wieder fehlschlugen, konnte als induktives Argument für die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms angesprochen werden, wie das Mißlingen aller Bemühungen um die Konstruktion des *perpetuum mobile* ein induktives Argument für die Gültigkeit des Energiesatzes ist. Auch die Erbauer der nichteuklidischen Geometrie haben nichts anderes getan als die Folgerungen aus der zum Parallelenaxiom entgegengesetzten Annahme gezogen, daß in einer Ebene durch einen Punkt zu einer den Punkt nicht enthaltenden Geraden ein ganzes Büschel nicht-schneidender Geraden existiert, und dabei konstatiert, daß sich unter freier Benutzung der übrigen Axiome der euklidischen Geometrie kein Widerspruch ergibt, *soweit sie die Sache verfolgt hatten.* Aber Sicherheit für alle Zukunft besaßen sie nicht. Erst *Klein* gab ein euklidisches Modell für die nicht-euklidische Geometrie an: die

Objekte der euklidischen Geometrie selber erfüllen bei einer von der üblichen abweichenden Namengebung die nicht-euklidischen Axiome. $\mathfrak{K}$ sei eine Kugel im euklidischen Raum. Das Lexikon, das die Übersetzung in die nicht-euklidische Sprache bewerkstelligt, besteht aus wenigen (von uns durch Anführungsstriche gekennzeichneten) Vokabeln: Unter „*Punkt*" wird jeder Punkt im Innern von $\mathfrak{K}$ verstanden. Daß mehrere solche „Punkte" auf einer „*Geraden*" liegen oder in einer „*Ebene*", daß ein „Punkt" „*zwischen*" zwei andern liegt, soll den gewöhnlichen Sinn behalten. „*Bewegung*" heiße jede Kollineation, welche die Kugel in sich überführt, „*kongruent*" solche Figuren, welche durch „Bewegung" auseinander hervorgehen. Für denjenigen, der an die Wahrheit und damit an die Widerspruchslosigkeit der euklidischen Geometrie glaubt, ist dadurch die Widerspruchslosigkeit, also die Denkbarkeit der nichteuklidischen bewiesen.

Die *Widerspruchslosigkeit der euklidischen Geometrie* aber kann, unabhängig von dem Glauben an ihre Wahrheit und ihren nur in der Raumanschauung aufzuweisenden Grundbegriffen, durch ein *arithmetisches Modell* erhärtet werden. Die analytische Geometrie, die am zweckmäßigsten auf den Vektorbegriff gegründet wird (§ 12), hat nämlich gezeigt, daß die euklidische Geometrie nur ein anderer Ausdruck ist für die Tatsachen der *linearen Algebra*, die Theorie der linearen Gleichungen. Die über die „affinen" hinausgehenden „metrischen" Begriffe werden dabei festgelegt mittels einer positiv-definiten quadratischen Form, der metrischen Fundamentalform. Übrigens muß man die Anzahl der Variablen (oder „Unbekannten") auf 3 normieren, um zu der Geometrie des *dreidimensionalen* Anschauungsraumes geführt zu werden. Zahlenlehre und Geometrie sind durch diese zwischen ihnen bestehende Korrespondenz so eng miteinander verwachsen, daß wir uns heute auch in der reinen Analysis beständig geometrischer Termini bedienen. Jeder Widerspruch in der Geometrie müßte sich zugleich als ein Widerspruch in der Arithmetik zu erkennen geben. Hierin erblicken wir eine Reduktion, weil die Zahlen in ganz anderem Maße freies Erzeugnis des Geistes und darum auch für den Geist durchsichtig sind als die Objekte und Beziehungen des Raumes.

Die Beispiele machen deutlich, daß die Modellmethode nicht darauf angewiesen ist, über die zur Konstruktion des Modells benutzten Objekte und Relationen die Wahrheit zu wissen, sondern sie führt die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems $\mathfrak{A}$ (z. B. des geometrischen) auf die eines andern $\mathfrak{B}$ (z. B. des arithmetischen) zurück. Dies ist dann geleistet, wenn die Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{A}$ so mit Hilfe der Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{B}$ definiert sind, daß die Axiome $\mathfrak{A}$ eine logische Folge der Axiome $\mathfrak{B}$ sind. Um den inhaltlichen Sinn der Grundbegriffe in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$ braucht man sich dabei gar nicht zu kümmern; die Belegung der aus $\mathfrak{B}$ abgeleiteten Begriffe mit denjenigen Namen, welche die Grundbegriffe in $\mathfrak{A}$ tragen, ist rein willkürlich.

Durch scharfsinnige Konstruktion geeigneter arithmetischer Modelle hat *Hilbert* das logische Verhältnis der einzelnen Teile des geometrischen Axiomensystems zueinander weitgehend aufgeklärt.

Wenn wir es nur mit einer endlichen Anzahl von Objekten zu tun haben, die explizit nacheinander ausgewiesen und mit Symbolen belegt werden, so können wir die Widerspruchslosigkeit dadurch beweisen, daß wir für jeden einzelnen Schritt mittels den Symbolen feststellen, ob die Grundrelationen gelten oder nicht. Als Beispiel geben wir ein *kombinatorisches Modell*, das die Widerspruchslosigkeit der Inzidenzaxiome der ebenen projektiven Geometrie (mit der einzigen Relation „Punkt liegt auf Gerader")festlegt. Das Modell besteht aus sieben Symbolen für Punkte, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ferner sieben Symbolen für Gerade, I, II, III, IV, V, VI, VII; die Inzidenz wird durch die folgende Tafel definiert, in der * etwa im Schnitt der Zeile 3 und Spalte VI bedeutet, daß Punkt 3 auf Gerader VI liegt:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1		*	*	*			
2	*		*		*		
3	*	*				*	
4	*			*			*
5		*			*		*
6			*			*	*
7				*	*	*	

Aus dieser Tafel werden zum Beispiel die Axiome bestätigt, daß durch zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte genau eine Gerade geht (das heißt, zwei Zeilen enthalten genau ein Paar * in der gleichen Spalte), ferner daß sich zwei beliebige, voneinander verschiedene Gerade in genau einem Punkte schneiden!

Der Fall eines endlichen Systems nacheinander ausgewiesener Objekte ist vergleichsweise trivial. In allen andern Fällen vermag die Modellmethode lediglich die Widerspruchslosigkeit eines Systems auf die eines andern zu reduzieren. Schließlich muß einmal der Beweis für ein Axiomensystem *absolut* geführt werden. Für den größeren Teil der Mathematik und für die gesamte Physik behandelt ein solches Grundsystem den Begriff der *reellen Zahl.*

3. Für das Ziel eines absoluten Beweises der Widerspruchslosigkeit steht uns nur die *direkte Methode* zur Verfügung, welche aus den Regeln des deduktiven Schließens heraus zeigen soll, daß man niemals zu zwei entgegengesetzten Aussagen kommen kann. Voraussetzung für ihre Durchführung ist, daß diese logischen Spielregeln *vollständig* aufgezählt sind (vgl. § 3), so daß man sie auf die Sätze, blind gegenüber deren Sinn, wie die Regeln des Schachspiels auf die Brettsteine, anwenden kann. Erst in den allerletzten Jahren hat *Hilbert* das Problem in Angriff genommen, auf solchem Wege die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome sicherzustellen. (Würde eine neue evidentermaßen zwingende Weise des logischen Schließens entdeckt und damit das System der Spielregeln erweitert, so müßte man bei einem nach der direkten Methode erbrachten Beweis der Widerspruchsfreiheit darauf gefaßt sein, daß er durch die neue Entdeckung hinfällig wird. Die Modellmethode ist von den „Spielregeln" nicht abhängig.)

Ein Analogon aus dem Gebiete des Schachspiels ist etwa das folgende: man soll einsehen, daß in einer den Regeln gemäß gespielten Schachpartie, wie sie im einzelnen auch verlaufen möge, niemals eine Stellung vorkommen wird, in welcher 10 Damen der gleichen Farbe auftreten. Hier gelingt die „direkte Methode", indem man aus den Zugregeln abliest, daß ein Zug die Summe der Anzahl der Damen und der Bauern einer Farbe nicht vergrößern kann; da sie am Anfange $= 9$ ist, bleibt sie dauernd $\leqq 9$. — Die Methode 1. ist ein trivialer Sonderfall der direkten. Aber um ihrer Einfachheit willen verdiente sie wohl besondere Erwähnung.

Neben der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit wird man von den Axiomen, die zur Grundlage einer Wissenschaft dienen sollen, die *Vollständigkeit* fordern. Was soll das heißen? Daß sich für jede generelle einschlägige Aussage $\mathfrak{a}$ die Frage „gilt $\mathfrak{a}$ oder $\bar{\mathfrak{a}}$?“ durch logische Schlüsse auf Grund der Axiome müsse entscheiden lassen? Dann garantierte die Widerspruchsfreiheit, daß man niemals zu *beiden* Aussagen $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ gelangt, die Vollständigkeit, daß man stets zu *einer* von beiden gelangen kann. Die Vollständigkeit in diesem Sinne würde nur durch die Angabe einer das Beweisverfahren fest regelnden Methode verbürgt werden, die nachweislich für jedes einschlägige Problem zur Entscheidung führt. Die Mathematik wäre damit trivialisiert. Aber ein solcher „Stein der Weisen“ ist bisher nicht gefunden worden und wird niemals gefunden werden. Die Mathematik besteht nicht darin, aus vorgegebenen Voraussetzungen die logischen Folgerungen allseitig zu entwickeln; sondern die Anschauung, das Leben des wissenschaftlichen Geistes stellt die Probleme, und diese lassen sich nicht wie Rechenaufgaben nach festem Schema lösen. Der deduktive Weg, der zu ihrer Lösung führt, ist nicht vorgezeichnet, er ist zu entdecken; die mannigfaltige Verknüpfungen mit einem Schlage überblickende Anschauung, Analogie und Erfahrung müssen uns dabei helfen. Es gibt, wie schon auf S. 31 erwähnt wurde, kein deskriptiv zu fassendes Merkmal für die aus gegebenen Prämissen beweisbaren Sätze; wir bleiben angewiesen auf die Konstruktion. Praktisch unmöglich ist es, so vorzugehen wie *Swifts* Gelehrter, den Gulliver im Lande Balnibarbi besucht: daß man nämlich in systematischer Ordnung, etwa nach der Anzahl der benötigten Schlußschritte, alle Folgerungen entwickelt und die „uninteressanten“ ausscheidet; wie denn auch die großen Werke der Weltliteratur nicht dadurch zustande gekommen sind, daß man aus den 25 Buchstaben alle möglichen „Kombinationen mit Wiederholung“ bis höchstens zur Anzahl 10^{10} gebildet, die sinnvollsten und schönsten davon ausgesucht und aufbewahrt hätte.

Nimmt man mit dem Raume (wie mit einer ihn erfüllenden Plastelinmasse) irgendeine stetige Deformation vor und versteht jetzt unter Geraden, Ebenen und kongruenten Figuren solche Linien, Flächen und Figuren, welche durch die Deformation aus wirklichen Geraden, wirklichen Ebenen, tatsächlich kongruenten Figuren hervorgegangen sind, so gelten offenbar auch für die neu eingeführten Begriffe die sämtlichen Tatsachen der Geometrie. Es ist also unmöglich, das System derjenigen Linien, welche durch irgendeine Raumdeformation aus den Geraden entstehen, vom System der Geraden begrifflich zu unterscheiden.