Mathematik für Wirtschafts-wissenschaftler

Problemorientierte Einführung

Von
Universitätsprofessor
Dr. Alexander Karmann

5., erweiterte Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-27414-7

Vorwort

Vorwort zur fünften Auflage

Die konzeptionelle Besonderheit dieses Lehrbuches hat sich im Studienbetrieb an verschiedenen Universitätsstandorten bewährt, wonach in jedem Kapitel die darin erläuterten formalen Methoden zunächst an ökonomischen Fragestellungen motiviert und am Ende beispielhaft angewendet werden. Das Buch dient zunächst als Vorlesungsbegleiter für eine einführende Lehrveranstaltung *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* im Grundstudium, die grundlegende Instrumente formaler Analyse in den Wirtschaftswissenschaften vorstellt. Dieser Teil umfaßt Matrizenrechnung, lineare Systeme und Optimierung ebenso wie Differential- und Integralrechnung sowie die Lagrange-Methode, also die Kapitel 1 bis 12.

Weiterführende mathematische Analyseinstrumente, die darüber hinaus für das Hauptstudium in den wirtschaftswissenschaftlichen Disziplinen von Bedeutung sind, betreffen insbesondere Modelle, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, Ansätze zur intertemporalen Steuerung oder die Entwicklung dynamischer Systeme. Diese sowie einige typische Anwendungen werden in den Kapiteln 13 bis 16 vorgestellt. Die entsprechenden Inhalte werden an der Technischen Universität Dresden in der Lehrveranstaltung *Mathematische Analyseinstrumente* am Ende des Grundstudiums behandelt, nach einer Wiederauffrischung des ersten Teils.

Die vorliegende Neuauflage enthält Aktualisierungen ökonomischer Anwendungsbeispiele sowie das neu aufgenommene Kapitel 14 über *Dynamische Optimierung: Hamilton.* Das dort angeführte Beispiel 14.2 habe ich dankenswerterweise von Prof. Dr. Klaus Wälde übernommen. Herrn Dipl.-Vw. Marco Weimann bin ich für hilfreiche Unterstützung bei der Erstellung der neuen Abschnitte zu großem Dank verpflichtet.

Für Vorschläge zur Verbesserung oder Erweiterung bin ich jederzeit dankbar und bitte um Zusendung an Alexander.Karmann@mailbox.tu-dresden.de.

Dresden, im Januar 2003 Alexander Karmann

Hinweis für den eiligen Leser: Der eilige Leser kann folgende – dem eifrigen Leser durchaus empfohlene – Teile überspringen, ohne den Anschluß an die übrigen Abschnitte zu verlieren: 1.1, 2.3, 5.6, 5.7, 6.1 – 6.5, 7.3, 8.2, 10.3, 11.3, 12.3, 12.4, 14.1 – 14.6, 15.1 – 15.5, 16.1 – 16.4.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage

Ziel der zweiten Auflage ist es, die typischen Inhalte der Lehrveranstaltung *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, wie sie etwa an der Technischen Universität Dresden und der Universität Hamburg gelehrt wird, wiederzugeben. Neben graphischen Veranschaulichungen sind als ergänzende Kapitel oder Abschnitte hinzugekommen: *Aussagenlogik*, *Komplexe Zahlen*, *Eigenwerte und Eigenvektoren*, *Lineare Optimierung* sowie *Reihen und Konvergenzkriterien.* Da das Buch nicht nur als Vorlesungsbegleiter und Formelsammlung, sondern auch als Einstiegshilfe in das Hauptstudium dienen soll, ist ein Kapitel *Dynamische Systeme* neu aufgenommen worden. Darüber hinaus sind in den Beispielen und Anwendungen einige moderne ökonomische Gebiete berücksichtigt, die aus den Vorlesungen des Autors, etwa zur Finanzmarkttheorie und der monetären Makroökonomie, stammen: zustandsbedingte Wertpapiere aus der *Finanzmarkttheorie*, das *Prinzipal-Agent-Modell* und *loglineare Modelle* der Neuen Makroökonomie.

Der Autor ist den Kollegen der Fakultät Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Dresden für einige Anregungen zur Neuauflage ebenso dankbar wie den Vertretern des Fachs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, mit denen das Curriculum auf die in den Wirtschaftswissenschaften benötigten mathematischen Methoden abgestimmt worden ist.
Das Kapitel 15 über *Dynamische Systeme* ist von Herrn Dipl.-Math. Thomas Kähler verfaßt worden, dem für die Mitarbeit an der vorliegenden Auflage herzlich gedankt sei.

Dresden - Hamburg, im März 1997 Alexander Karmann

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Mathematische Methoden gehören zum festen Bestandteil der wirtschaftswissenschaftlichen Grundausbildung. Dies reflektiert nicht zuletzt den Grad der mathematischen Formalisierung, der auf dem Gebiet der Wirtschaftswissenschaften heute wissenschaftliche wie praxisangewandte Arbeiten kennzeichnet.

Studierende der Wirtschaftswissenschaften der ersten Semester stehen oftmals den mathematischen Methoden zunächst skeptisch gegenüber, da sie noch nicht abschätzen können, wozu die formalen Instrumente benutzt und welche mathematischen Techniken im einzelnen benötigt werden. An dieser Motivationsschwelle setzt das vorliegende Buch an. Es ist aus der Vorlesung *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* entstanden, wie sie an der Universität Hamburg kompakt als einsemestrige Veranstaltung gehalten wird.

Besonderheiten der Buchkonzeption sind zum einen die einführenden wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen, die jedem Kapitel vorangestellt sind und die die nachfolgend behandelte Mathematik ökonomisch motivieren. Zum anderen werden die grundlegenden mathematischen Begriffe sowohl deutsch als auch englisch wiedergegeben, um Studenten die spätere Lektüre mathematisch-wirtschaftswissenschaftlicher Arbeiten zu erleichtern und Fehlübersetzungen zu ersparen. Jedes Kapitel enthält einen Abschnitt mit ökonomischen Beispielen, in dem auch die zu Beginn des Kapitels erörterten Problemstellungen aufgegriffen und ausführlich diskutiert werden. Die Beispiele entstammen teilweise klassisch-ökonomischen Fragen wie Haushalts-, Produktionsoptimierung, Input-Output-Rechnung, aber auch komparativ statischer Modellanalyse, Grenzsteuerbelastung und Anwendungen aus der neueren Finanzwirtschaft. Aufgaben aus bisher gestellten Klausuren sind teilweise in die ökonomischen Beispiele mitaufgenommen worden.

Da das Buch als Einführung und Vorlesungsbegleiter gedacht ist, ist es knapp und ohne Beweisführung gehalten; ein Verzeichnis mit weiterführender Literatur ist für den interessierten Leser am Ende aufgeführt. Das Buch kann aber auch als Studienbegleiter dienen, da es einige über die Grundvorlesung hinausreichende Sachgebiete umfaßt, die zum Standardrepertoire wirtschaftswissenschaftlicher Modellierung gehören, etwa Hesse-Matrix, Kuhn-Tucker-Bedingungen (hinreichende Optimalitätsbedingungen), Implizites Funktionentheorem (komparative Statik), Einhüllenden-Satz, Differenzen-, Differentialgleichungen (Wachstumsmodelle). Die zentralen Ergebnisse der einzelnen Kapitel werden in Form durchnummerierter Sätze und Rechenregeln übersichtlich festgehalten.

Für nützliche Hinweise zur Stoffauswahl danken wir dem Professorium des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg. Den Lehrbeauftragten des Fachs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, den Herren Professor Eberhard Groth, Aulis Harmoinen, Jochen Huesmann, Gunter Kleist, Rainer Kuske, Professor Hans Petersen und Dr. Lothar Wilde sind wir für die kritische Durchsicht des Buches und ihre weiterführenden Anregungen zu Dank verpflichtet.

Hamburg, im März 1994 — Alexander Karmann
Thomas Kähler

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Aussagenlogik

1.1 Grundzüge der Aussagenlogik

Mit der Aussagenlogik werden Regeln für die Verknüpfung von Aussagen bereitgestellt, um durch Umformung neue Aussagen exakt nachvollziehbar ableiten zu können. Unter dem hier behandelten Begriff *Aussage* wird ein Satz verstanden, der die Eigenschaft hat, entweder *wahr* (w) oder *falsch* (f) zu sein, und daher im weiteren als logisch eindeutige Aussage bezeichnet wird. Durch w und f wird der *Wahrheitswert* einer Aussage angegeben. Aussagen werden im weiteren mit den Buchstaben p, q, r, s... bezeichnet.

Beispiele.

p: "5 ist eine Primzahl." (w)
q: "Berlin ist eine Millionenstadt in Deutschland." (w)
s: "Es gibt eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft $\frac{x}{2} = 7$." (w)
t: "Für alle natürlichen Zahlen x ist $\frac{x}{2}$ wieder eine natürliche Zahl." (f)

Zur Einführung des Begriffs *natürliche Zahl* siehe Abschnitt 1.3.

Dagegen ist der Ausspruch eines Kreters "Alle Kreter lügen" keine Aussage im oben genannten Sinn, da seine Wahrheit unmittelbar die Falschheit des Satzes zur Folge hätte. Ebenso sind Sätze wie "langfristig ist der Gewinn der Firma X positiv" oder "Die Konjunktur boomt" für sich genommen keine logisch eindeutigen Aussagen, solange die verwendeten Begriffe (*langfristig*, *Konjunktur*, *Boom*) nicht präzisiert sind und damit über ihren Wahrheitswert nicht eindeutig unterschieden werden kann. Hingegen sind Sätze wie p: "Bei normalem Verlauf der Preis-Absatz-Funktion (vgl. Abschnitt 2.4) steigt die Nachfrage mit sinkendem Güterpreis" oder q: "Bei fallendem EUR-Dollar-Wechselkurs erhält man weniger Dollar für den Euro" aufgrund ihres definitorischen Charakters (*normaler Verlauf*, *EUR-Dollar-Wechselkurs*) entscheidbare Aussage, die also entweder wahr (Aussage p) oder falsch (Aussage q) sind.

Definitionen.

Negation:	$\neg p$	(lies: nicht p) ist wahr, wenn p falsch ist.
Konjunktion:	$p \wedge q$	(lies: p und q) ist wahr, wenn p wahr ist und q wahr ist.
Disjunktion:	$p \vee q$	(lies: p oder q) ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen p und q wahr ist.
Implikation:	$p \rightarrow q$	(lies: aus p folgt q) ist wahr, wenn aus der Aussage p die Aussage q folgt; anders ausgedrückt: $p \rightarrow q$ ist falsch, wenn p wahr und q falsch ist.
Äquivalenz:	$p \leftrightarrow q$	(lies: p äquivalent q) ist definiert als $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Bemerkungen.

- Anstelle des Begriffes *Implikation* wird auch der Begriff **Folgerung** verwendet.
- Statt des Symbols "$\rightarrow$" (bzw. "$\leftrightarrow$") wird auch das Symbol "$\Rightarrow$" (bzw. "$\Leftrightarrow$") verwendet.
- Die Disjunktion $p \vee q$ entspricht nicht dem umgangssprachlichen "entweder - oder", da sich beide Aussagen nicht ausschließen. Das ausschließende "entweder - oder" wird durch den Ausdruck $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ dargestellt, wie nachfolgend ersichtlich wird.

Der Wahrheitswert zusammengesetzter Aussagen läßt sich durch obige aussagenlogische Regeln ermitteln und in Form von *Wahrheitstafeln* übersichtlich zusammenstellen. Beispielsweise gilt:

Wahrheitstafeln										
p	q	$\neg$p	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\rightarrow$ q	p $\leftrightarrow$ q	(p $\vee$ q) $\wedge\neg$(p $\wedge$ q)	p $\wedge$ $\neg$p	p $\vee$ $\neg$p
w	w	f	w	w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	f	f	w	w	f	f	w

Bemerkung. Bei der Implikation p $\rightarrow$ q wird p auch *hinreichende Bedingung*, q auch *notwendige Bedingung* genannt. Denn aus der Gültigkeit der Implikation folgt unmittelbar: q ist wahr, wenn p wahr ist; ist q falsch, muß auch p falsch sein. Eine ausführliche Erläuterung wird am Ende dieses Abschnitts gegeben.

Beim *Beweis* mathematischer Sätze werden Aussagenketten gebildet, bis schließlich die zu beweisende Aussage als wahr abgeleitet ist. Im Fall des *direkten* Beweises werden dabei aus den Voraussetzungen – unter der Benutzung von Definitionen und bereits bewiesenen mathematischen Zusammenhängen – solange durch Ketten von Implikationen neue Aussagen gebildet, bis zum Schluß die Behauptung folgt. Im Fall des *indirekten* Beweises wird angenommen, daß die zu zeigende Aussage p falsch ist. Durch Bildung logischer Ketten werden wiederum solange Implikationen abgeleitet, bis die negierte Aussage, also $\neg$p, als wahr folgt. Aufgrund der Äquivalenz von p $\rightarrow$ $\neg$p und p $\wedge$ $\neg$p wird der indirekte Beweis auch *Widerspruchsbeweis* oder Beweis durch *Kontradiktion* genannt.

Anhand folgender Beispiele sollen einige in der mathematischen Logik häufig benutzte Begriffe erläutert werden.

Beispiele.

$\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{p}$	*Kontradiktion*
$\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p}$	*Tautologie*
$\neg\neg \mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{p}$	*doppelte Negation*
$((\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{q} \rightarrow \mathrm{r})) \rightarrow (\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{r})$	*Transitivität*

Unter einer *Aussageform* wird ein Satz mit einer Variablen x (vgl. Abschnitt 2.1) verstanden, die durch Einsetzen der Variablen in eine formal eindeutige Aussage übergeht. Schreibweise:

$\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{q}(x)$, ...

Um auszudrücken, daß die Gültigkeit von $\mathrm{p}(x)$ für mindestens eine spezielle Wahl von x oder etwa für alle Wahlen von x gesichert ist, werden nachfolgend definierte Symbole verwendet:

Definitionen.

Existenzquantor: $\exists_x\ \mathrm{p}(x)$ (lies: es gibt ein x, für das $\mathrm{p}(x)$ gilt) gilt, wenn für eine spezielle Wahl von x die Aussage $\mathrm{p}(x)$ wahr ist.

Allquantor: $\forall_x\ \mathrm{p}(x)$ (lies: für alle x gilt $\mathrm{p}(x)$) gilt, wenn für jedes x die Aussage $\mathrm{p}(x)$ wahr ist.

Beispiele.

Aussageformen.

$\mathrm{p}(x,y)$: "x ist Teiler von y".
$\mathrm{q}(x,y)$: "$x^2 + y^2 \ \geq\ z^2$".

Aussagen.

p: "$\forall_x\ \forall_y\ y = 2x \ \rightarrow\ x$ ist Teiler von y".

Die folgende Aussage q: "Es existiert ein Marktgleichgewichts-Preis p^* zu gegebener Angebotsfunktion $x^A(p) = 2p$ und gegebener Nachfragefunktion

$x^N(p) = 12 - p$" (vgl. Abschnitt 2.4) wird formal geschrieben (der Buchstabe p bezeichnet hier eine Variable und nicht eine Aussage):

q: "$\exists_{p^*}\ 2p^* = 12 - p^*$".

Die Aussage q ist wahr, da die Gleichung für $p^* = 4$ erfüllt ist.

Bemerkung. Eine Aussage, etwa q: "$\forall_x$ p(x)", läßt sich dadurch widerlegen, daß die Existenz eines speziellen x gezeigt wird, für das die Aussage p(x) falsch ist (*Beweis durch Gegenbeispiel*); denn, wie leicht zu sehen, gilt die Äquivalenz der Aussagen

"$\exists_x\ \neg \mathrm{p}(x)\ \leftrightarrow\ \neg(\forall_x\ \mathrm{p}(x))$".

Jedoch läßt sich aus der Gültigkeit der Aussage p(x) für ein spezielles x nicht auf deren Allgemeingültigkeit zurückschließen, was formalisiert wie folgt ausgedrückt werden kann

"$\neg(\exists_x\ \mathrm{p}(x)\ \rightarrow\ \forall_x\ \mathrm{p}(x))$".

In mathematischen Sätzen geht es um die Eigenschaften von mathematischen Objekten x, die in Aussageformen p(x) formuliert sind. Die interessierende Eigenschaft p(x) wird in Implikationsbeziehungen mit einer anderen Eigenschaft q(x) gesetzt. Folgende Beziehungen werden unterschieden:

- q(x) ist **hinreichende** Bedingung für die Gültigkeit der Eigenschaft p(x):
  "$\forall_x\ (\mathrm{q}(x)\ \rightarrow\ \mathrm{p}(x))$",
  in Worten: Wenn q(x) für x gilt, dann gilt auch p(x) für x.

- q(x) ist **notwendige** Bedingung für die Gültigkeit der Eigenschaft p(x):
  "$\forall_x\ (\mathrm{p}(x)\ \rightarrow\ \mathrm{q}(x))$",
  in Worten: p(x) gilt für x nur dann, wenn q(x) für x gilt.

- q(x) ist **notwendige** und **hinreichende** Bedingung für die Gültigkeit von p(x):
  "$\forall_x\ (\mathrm{q}(x)\ \leftrightarrow\ \mathrm{p}(x))$",
  in Worten: p(x) gilt für x genau dann, wenn q(x) für x gilt.

Beispiele.

- $q(x)$ ist eine *hinreichende* Bedingung für $p(x)$, aber keine notwendige:
  $q(x)$: "$x = -3$", $p(x)$: "$x^2 = 9$".
- $q(x)$ ist eine *notwendige* Bedingung für $p(x)$, aber keine hinreichende:
  $q(x)$: "x ist gerade", $p(x)$: "$\frac{x}{2} = 7$".
- $q(x)$ ist eine *hinreichende* und *notwendige* Bedingung für $p(x)$:
  $q(x)$: "$(x = 3) \vee (x = -3)$", $p(x)$: "$x^2 = 9$".

  $p(x)$ ist dann auch eine *hinreichende* und *notwendige* Bedingung für $q(x)$.

1.2 Mengen und Operationen

Der Begriff der *Menge* (set) ist zwar grundlegend für die Mathematik, jedoch die Frage, wie der Begriff eingeführt werden kann, wurde bis heute noch nicht präzise beantwortet. Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung X von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten, welche die *Elemente* (elements) (in einigen Fällen auch *Punkte* (points)) von X genannt werden, zu einem Ganzen (Cantor (1845 -1918), Begründer der Mengenlehre). In diesem Kapitel werden einige Beispiele von Mengen genannt, welche für die Betrachtungen der folgenden Kapitel ausreichen.

Schreibweisen.
Das Element x ist aus der Menge X, liegt in X oder ist Element der Menge X:

$$x \in X \quad \text{oder} \quad X \ni x.$$

Das Element x ist nicht aus der Menge X:

$$x \notin X \quad \text{oder} \quad X \not\ni x.$$

Mengen können auf folgende Weisen definiert werden:
durch explizite Nennung ihrer Elemente

$$X := \{\text{Berlin, Hamburg, Köln, München}\}$$

oder durch Angabe einer Eigenschaft bzw. Aussageform, welche die Elemente der Menge charakterisiert

$$X := \{x \mid x \text{ ist eine Millionenstadt in Deutschland}\}$$

oder

$$X := \{x \mid x \leq 1\}.$$

Definition. Enthält eine Menge keine Elemente, so handelt es sich um die **leere Menge** (empty set):

$\emptyset := \{\ \}$ oder $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$.

Definition. X heißt **Teilmenge** (subset) von Y oder Y **enthält** (includes) X, wenn jedes Element von X auch in der Menge Y enthalten ist (vgl. Abbildung 1.1). Schreibweise:

$X \subseteq Y$ oder $Y \supseteq X$.

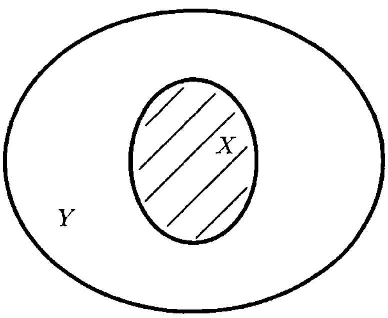

Abb. 1.1. Teilmenge X von Y.

Bemerkung. Wenn X nicht Teilmenge von Y ist, also ein Element in X existiert, welches nicht zu Y gehört, wird folgende Schreibweise benutzt:

$X \not\subseteq Y$ oder $Y \not\supseteq X$.

Definition. Zwei Mengen X und Y sind einander **gleich** (equal), in Zeichen $X = Y$, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ gilt. Sie sind **ungleich** (unequal), in Zeichen $X \neq Y$, wenn $X \not\subseteq Y$ oder $Y \not\subseteq X$ gilt.

Definition. X heißt **echte Teilmenge** (proper subset) von Y, wenn $X \subseteq Y$, jedoch nicht $X = Y$ gilt. Schreibweise:

$X \subset Y$ oder $Y \supset X$.

In anderen Lehrbüchern werden auch folgende Schreibweisen verwendet:

$X \subset Y$ statt $X \subseteq Y$ und $X \overset{\subset}{\neq} Y$ statt $X \subset Y$.

Bemerkung. Sei $X := \{x \mid \mathrm{p}(x)\}$ und $Y := \{x \mid \mathrm{q}(x)\}$. Dann gilt: $X \subseteq Y$ genau dann, wenn $\mathrm{p}(x) \to \mathrm{q}(x)$. Analoge Formulierungen lassen sich für die anderen genannten Mengenrelationen aufstellen. Ferner gilt: $\emptyset = \{x \mid \mathrm{p}(x) \wedge \neg\mathrm{p}(x)\}$.

Im folgenden werden einige gängige Mengenoperationen eingeführt.

Definitionen.

Durchschnitt (intersection):

$$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\}.$$

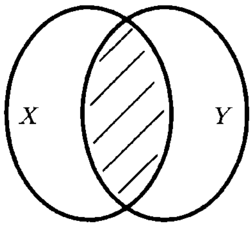

Abb. 1.2. Durchschnitt der Mengen X und Y.

Wenn $X \cap Y = \emptyset$, so sind die Mengen X und Y **disjunkt** oder **elementfremd** (disjoint or nonintersecting).

Vereinigung (union):

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\}.$$

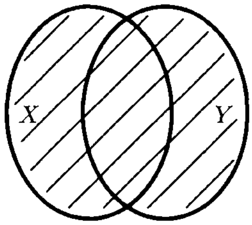

Abb. 1.3. Vereinigung der Mengen X und Y.

Differenz (relative complement):

$$X \backslash Y \ := \ X - Y \ := \ \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin Y\}.$$

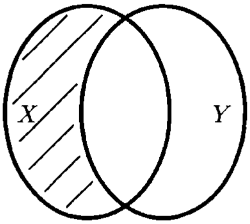

Abb. 1.4. Die Differenz X ohne Y.

Komplement (complement):

$$\complement Y \ := \ \overline{Y} \ := \ \{x \mid x \notin Y\}.$$

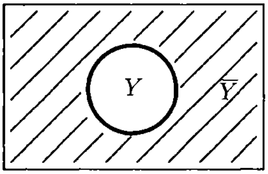

Abb. 1.5. Komplement der Menge Y.

Potenzmenge (power set):

$$\mathcal{P}(X) \ := \ \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

$\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X.

Hat X n Elemente, so hat $\mathcal{P}(X)$ 2^n Elemente. Beispielsweise gilt: $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Kartesisches Produkt (Cartesian product):

$$X \times Y \ := \ \{(x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Das kartesische Produkt besteht aus der Menge der **geordneten Paare** (x,y). Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Elemente an, da im Allgemeinen $(x,y) \neq (y,x)$ gilt.

Bemerkung. Sei wieder $X := \{x \mid \mathrm{p}(x)\}$ und $Y := \{x \mid \mathrm{q}(x)\}$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{x \mid \mathrm{p}(x) \wedge \mathrm{q}(x)\} \\ X \cup Y &= \{x \mid \mathrm{p}(x) \vee \mathrm{q}(x)\} \\ X \backslash Y &= \{x \mid \mathrm{p}(x) \wedge \neg\mathrm{q}(x)\} \\ \complement Y &= \{x \mid \neg\mathrm{q}(x)\} \\ X \times Y &= \{(x,y) \mid \mathrm{p}(x) \wedge \mathrm{q}(y)\}. \end{aligned}$$

Definitionen. Ist I eine Menge, genannt **Indexmenge**, und ist für jedes $i \in I$ eine Menge X_i gegeben, so heißt

$\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ **Vereinigung** der Mengen X_i

und definiert die Menge aller Elemente x, die in mindestens einer der Mengen X_i enthalten sind,

$\bigcap\limits_{i \in I} X_i$ **Durchschnitt** der Mengen X_i

und definiert die Menge aller Elemente x, die in jeder der Mengen X_i enthalten sind, und

$\mathop{\times}\limits_{i \in I} X_i$ **Produkt** der Mengen X_i

und definiert die Menge aller n-**Tupel** $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit den **Komponenten** $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, $\ldots$.

Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich, so wird auch geschrieben:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup \ldots \cup X_n$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \ldots \cap X_n$$

$$\mathop{\times}_{i \in I} X_i = \mathop{\times}_{i \in I}^{n} X_i = X_1 \times \ldots \times X_n$$

speziell: $$X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-\text{mal}}$$

1.3 Mengen in reellen Räumen

Üblicherweise werden folgende einfache Mengen betrachtet:

$$\begin{array}{lcll}
\mathbb{N} & := & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} & = \text{Menge der natürlichen Zahlen} \\
\mathbb{N}_0 & := & \{0, 1, 2, 3, \ldots\} & = \mathbb{N} \cup \{0\} \\
\mathbb{Z} & := & \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} & = \text{Menge der ganzen Zahlen} \\
\mathbb{Q} & := & \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} & = \text{Menge der rationalen Zahlen} \\
\mathbb{R} & := & \multicolumn{2}{l}{\text{Menge der reellen Zahlen oder Zahlengerade}}
\end{array}$$

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Es werden folgende Bezeichnungen für *Intervalle* auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eingeführt:

abgeschlossene Intervalle:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

offene Intervalle:

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

halboffene Intervalle:

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Neben diesen **eigentlichen Intervallen** werden auch betrachtet:

uneigentliche Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a,+\infty[\;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\
]a,+\infty[\;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\
]-\infty,a] \;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
]-\infty,a[\;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}
\end{aligned}$$

Bemerkung. Intervalle werden oft in Form von Ungleichungen beschrieben (zur Verwendung des Absolutbetrages vgl. Abschnitt 2.2), etwa:

$$\begin{aligned}
[10,+\infty[\;&=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\} \\
]-1,7[\;&=\; \{x \in \mathbb{R} \mid \; |x-3| < 4\}
\end{aligned}$$

Weitere Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ \;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \;=\; [0,+\infty[\\
&=\; \text{Menge der nichtnegativen reellen Zahlen} \\
\mathbb{R}^* \;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \;=\; \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
\mathbb{R}^*_+ \;&:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \;=\;]0,+\infty[\\
\mathbb{R}^n \;&:=\; \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} \;=\; \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R};\ldots;x_n \in \mathbb{R}\} \\
&=\; n\text{-}\textbf{dimensionaler reeller Raum} \text{ (real } n\text{-space)} \\
\mathbb{R}^n_+ \;&:=\; \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+}_{n-\text{mal}} \;=\; \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}_+;\ldots;x_n \in \mathbb{R}_+\} \\
\mathbb{R}^{*n} \;&:=\; \underbrace{\mathbb{R}^* \times \ldots \times \mathbb{R}^*}_{n-\text{mal}} \;=\; \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}^*;\ldots;x_n \in \mathbb{R}^*\} \\
&=\; \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \text{ wobei gilt: } 0 := \underbrace{(0,\ldots,0)}_{n-\text{mal}}.
\end{aligned}$$

Einige Spezialfälle: Seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q^n(a,b) &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\} \\ &= \textbf{Quader} \text{ im } \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } a \text{ und } b \end{aligned}$$

Für $a \neq 0$ wird definiert

$$\begin{aligned} H^n(a,c) &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 +, \dots, + a_nx_n \leq c\} \\ &= \textbf{Halbraum} \text{ im } \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } a \text{ und } c \\ E^n(a,c) &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 +, \dots, + a_nx_n = c\} \\ &= \textbf{Hyperebene} \text{ im } \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } a \text{ und } c \end{aligned}$$

Speziell für $n = 2$ und $n = 1$ werden auch folgende anschauliche Begriffe benutzt:

$$\begin{aligned} H^2(a,c) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 \leq c\} \\ &= \textbf{Halbebene} \text{ im } \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } a \text{ und } c \\ E^2(a,c) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = c\} \\ &= \textbf{Gerade} \text{ im } \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } a \text{ und } c \\ H^1(a,c) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a\,x \leq c\} = \left]-\infty, \tfrac{c}{a}\right] \\ &= \text{uneigentliches Intervall} \\ E^1(a,c) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a\,x = c\} = \{\tfrac{c}{a}\} \\ &= \text{relle Zahl.} \end{aligned}$$

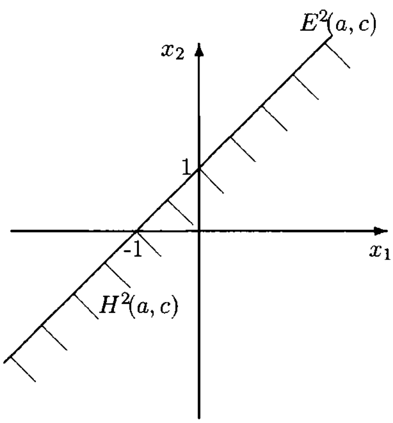

Abb. 1.6. Halbebene im $\mathbb{R}^2$ bzgl. $a = (a_1, a_2) = (-1, 1)$ und $c = 1$.

Wird in Abbildung 1.6 die zugrundeliegende Gleichung der Geraden $E^2(a,c)$ in $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{c}{a_2}$ umgeformt, so gibt $-\frac{a_1}{a_2} = -\frac{-1}{1} = 1$ die Steigung der Geraden und $\frac{c}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$ den x_2-Achsenschnitt der Geraden an.

Bemerkungen.

- $\mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geq 1)$ ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, aber keine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$.
- $\mathbb{R}_+$ ist ein Halbraum im $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n_+$ $(n \geq 2)$ ist jedoch kein Halbraum im $\mathbb{R}^n$.
- Eine Hyperebene $E^n(a,c)$ stellt die Begrenzung des Halbraumes $H^n(a,c)$ dar.
- Eine Hyperebene $E^n(a,c)$ unterteilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume $H^n(a,c)$ und $H^n(-a,-c) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1+,\ldots,+a_nx_n \geq c\}$, wobei zu beachten ist, daß $-a = (-a_1,\ldots,-a_n)$ ist und beim Multiplizieren der Ungleichung mit -1 aus "$\geq$" "$\leq$" wird.

Im $\mathbb{R}^n$ kann der *Abstand* oder die *Distanz* zwischen zwei Punkten x und y des Raumes gemessen werden und wird mit $d(x,y) \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Besitzt $d(x,y)$ die Eigenschaften: a) $d(x,y) = 0$ für $x = y$, b) $d(x,y) = d(y,x)$ und c) $d(x,y) \geq d(y,z) \geq d(x,z)$, so wird $d(x,y)$ *Metrik* genannt. Da Metriken auch für den $\mathbb{R}^n$ definiert werden können, ist dieser ein *metrischer Raum*. Der nachfolgend definierte Normbegriff ist ein Spezialfall für eine Metrik.
Ein *ökonomisches Beispiel* für eine Norm wird implizit mit dem Begriff einer Wechselkurs-Bandbreite einer nationalen Währung (z.B. DM vor der Einführung des Euro) gegenüber einer Referenzwährung (z.B. ECU) gegeben, wie der Leser sich leicht verdeutlichen kann.

Definition. Eine **Norm** (norm) auf $\mathbb{R}^n$, in Zeichen $\| x \|$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = \underbrace{(0,\ldots,0)}_{n-\text{mal}}$.
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung).

Für den $\mathbb{R}^n$ sind verschiedene Normen gebräuchlich, wobei nachfolgend zwei Beispiele betrachtet werden. Im weiteren werden wir jedoch stets die *euklidische Norm* verwenden. Eine Norm stellt eine spezielle **reellwertige Funktion** dar (vgl. Abschnitt 2.2).

Beispiele. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$\| x \|_2 := \sqrt{x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$$

die **euklidische Norm** auf dem $\mathbb{R}^n$ und

$$\| x \|_\infty := \max(|x_1|, \ \ldots \ , |x_n|)$$

die **Maximum-Norm** oder **Tschebyscheff-Norm** auf dem $\mathbb{R}^n$, wobei $\max(|x_1|, \ \ldots \ , |x_n|)$ immer den betragsmäßig größten Wert der Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ annimmt.

Bemerkung. Insbesondere ist mit einer Norm $\| \cdot \|$ auch der Abstand $\| x - y \|$ zwischen Punktpaaren $x, y \in \mathbb{R}^n$ festgelegt. Beispielsweise gilt:

$$\| x - y \|_2 := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definitionen. Seien $a \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $\epsilon > 0$. Die Menge

$$B(a, \epsilon) \ := \ \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x - a \| < \epsilon\}$$

heißt **offene Kugel** (open ball) mit Mittelpunkt a und Radius ϵ oder **ϵ-Umgebung** von a.
Gilt $B(a, \epsilon) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, so heißt U **Umgebung** (neighborhood) des Punktes a.

Definition. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt** (bounded), falls ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ und ein Radius $r \in \mathbb{R}_+^*$ existieren, so daß gilt: $X \subseteq B(a, r)$.

Bemerkung. Jedes abgeschlossene, offene, halboffene (eigentliche) Intervall und jeder Quader sind *beschränkt* und damit auch jede Teilmenge dieser Mengen. Alle übrigen oben genannten Mengen sind *nicht beschränkt.*

Definitionen. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen** (open), falls zu jedem Punkt $x \in U$ eine ϵ-Umgebung existiert mit $B(a, \epsilon) \subset X$.
X heißt **abgeschlossen** (closed), wenn die Menge $\mathbb{R}^n \backslash X$ offen ist.

Bemerkung. Das halboffene Intervall $]a,b]$ ist *nicht offen*, weil für alle $\epsilon > 0$ gilt: $B(b,\epsilon) \not\subset]a,b]$, und es ist *nicht abgeschlossen*, weil für alle $\epsilon > 0$ gilt: $B(a,\epsilon) \not\subset \mathbb{R}\backslash]a,b] =]-\infty,a] \cup]b,+\infty[$.

Eine vereinfachte Definition kompakter Mengen, welche auf den *Satz von Heine-Borel* zurückgeht und nur im $\mathbb{R}^n$ gilt, ist folgende:

Definition. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** (compact), wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung. Jedes abgeschlossene Intervall und jeder Quader Q ist kompakt. Desweiteren ist auch jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq Q$ kompakt.

Definitionen. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex** (convex), wenn für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ und alle λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}&\lambda(x_1, \ldots, x_n) + (1-\lambda)(y_1, \ldots, y_n)\\ &\quad = \Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n\Big) \in X.\end{aligned}$$

Die Menge $Y := \Big\{\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n\Big) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\Big\}$ ist die **Strecke** zwischen den Punkten x und y. Jeder Punkt $z \in Y$ ist eine **Konvexkombination** von x und y (vgl. Abbildung 1.7). Ist $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq 1$, dann heißt die Konvexkombination z **echt**.
Kann ein Punkt $a \in X$ nicht als echte Konvexkombination der Punkte $x \neq y$ dargestellt werden, dann heißt der Punkt a **Ecke** der konvexen Menge X.

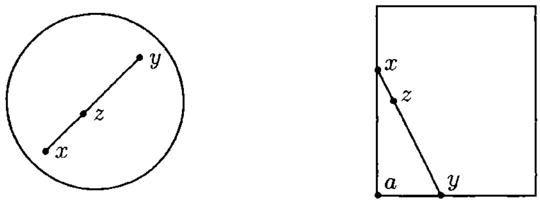

Abb. 1.7. Konvexe Mengen und Konvexkombinationen.

Bemerkung. Offene Kugeln $B(a,\epsilon)$ im $\mathbb{R}^n$ sind stets konvex, jedoch brauchen Umgebungen U eines Punktes nicht unbedingt konvex zu sein. Die Mengen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, Quader, Halbräume, Hyperebenen, Halbebenen, Geraden und Intervalle sind stets konvex. Der $\mathbb{R}^{*n}$ ist nicht konvex.

Anschaulich gesprochen bedeutet die Konvexität einer Menge X, daß die Konvexkombinationen von Punkten der Menge X wieder Elemente von X sind. Eine spezielle konvexe Menge ist das abschließend betrachtete *Polyeder.* In Kapitel 6 wird bei der Lösung linearer Optimierungsaufgaben der sogenannte *Simplex-Algorithmus* benutzt, das auf einem Vergleich von Ecken eines Polyeders, aber nicht notwendigerweise eines *Simplex,* beruht. Der Name ist historisch bedingt, und die entsprechende Definition wird hier der Vollständigkeit halber angegeben.

Definitionen. Seien $x^0, \ldots, x^r \in \mathbb{R}^n$, dann wird die folgende Menge **konvexes Polyeder** oder einfach **Polyeder** (vielflächiger Körper) genannt:

$$M := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lambda_0 x^0 + \ldots + \lambda_r x^r \\ \text{mit } \lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 1 \;\text{ und } \lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_r \geq 0\}.$$

Sind zudem die $r+1$ Punkte $x^0, \ldots, x^r$ affin unabhängig (siehe nachfolgende Definition), dann heißt das Polyeder M **r-Simplex** oder einfach **Simplex.**

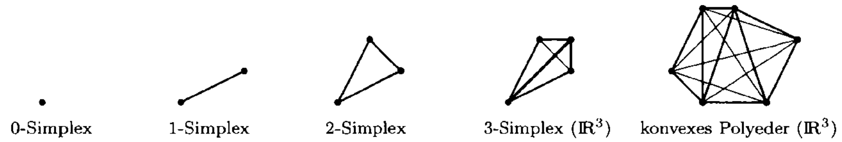

Abb. 1.8. Polyeder bzw. r-Simplexe.

Definitionen. Seien die Punkte $x^0, \ldots, x^r \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ heißt **affin abhängig** von $x^0, \ldots, x^r$, wenn gilt:

$$z = \lambda_0 x^0 + \ldots + \lambda_r x^r \quad \text{mit } \lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 1.$$

Sind die Punkte $x^0, \ldots, x^r \in \mathbb{R}^n$ **paarweise verschieden**, d.h. $x^{k_1} \neq x^{k_2}$ für alle $k_1 \neq k_2$ mit $k_1, k_0 \in \{0, \ldots, r\}$, dann heißen diese Punkte **affin unabhängig**, wenn aus

$$\lambda_0 x^0 + \ldots + \lambda_r x^r = 0$$

folgt

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Bemerkungen.

- Für $r = 1$ bedeutet dies, daß zwei Punkte $x^0, x^1 \in R^n$ mit $x^0 \neq x^1$ affin unabhängig sind und jede Konvexkombination z dieser Punkte von x^0 und x^1 affin abhängt.

  Im Fall $n = 1$ ist sogar jeder Punkt aus $\mathbb{R}$ affin abhängig von x^0 und x^1.

  Im Fall $n \geq 2$ sind alle Punkte auf der von x^0 und x^1 aufgespannten Geraden E^2 affin abhängig von x^0 und x^1, jedoch die Punkte x^0, x^1 und x^2 mit $x^2 \in R^n \backslash E^2$ sind affin unabhängig.

- Im R^n kann es maximal nur $n + 1$ affin unabhängige Punkte geben.

- Der Zusammenhang zwischen der affinen Unabhängigkeit von Punkten und der linearen Unabhängigkeit von Vektoren wird in Abschnitt 4.3 dargestellt.

- Für $r = 0, 1, 2, 3$ hat ein r-Simplex spezielle Bezeichnungen:

  0-Simplex: Punkt im $\mathbb{R}^n$,

  1-Simplex: Strecke im $\mathbb{R}^n$ (die Konvexkombinationen von zwei Punkten),

  2-Simplex: Dreieck im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$,

  3-Simplex: Tetraeder im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$.

- Die Punkte $x^0, \ldots, x^r \in \mathbb{R}^n$ sind genau die Ecken des Polyeders bzw. Simplex.

2 Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher

Funktionen, auch Abbildungen genannt, haben eine grundlegende Bedeutung in der Mathematik und werden in den Wirtschaftswissenschaften vielfach angewendet.

Eine ökonomische Anwendung. Die in der Ökonomie übliche Vorstellung, daß Güter Nutzen stiften, wird im nachfolgenden Rahmen diskutiert. Dem betrachteten Konsumenten stehen n Güter in den Quantitäten $x_1, \dots, x_n$ für den Konsum zur Verfügung, weshalb die Menge $\mathbb{R}_+^n$ auch *Konsumgüterraum* genannt wird und seine Elemente $x = (x_1, \dots, x_n)$ auch *Güterbündel.* Der Zusammenhang zwischen Konsum von Güterbündeln und dem damit verbundenen Grad der Bedürfnisbefriedigung wird durch den Begriff der *Nutzenfunktion* des Konsumenten präzisiert. Dabei ordnet die Nutzenfunktion jedem Güterbündel einen nichtnegativen Nutzenwert zu, formal $U : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto U(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.

Fragen, die in diesem Zusammenhang von Interesse sind, lauten etwa:

- Welche Güterbündel stiften dasselben Nutzenniveau wie ein vorgegebener Referenzwarenkorb (*Indifferenzkurven*, vgl. Abschnitt 2.4) ?
- In welchen Verhältnissen können zwei Güter wechselseitig substituiert werden, ohne den Gesamtnutzen zu verändern (*Implizites Funktionentheorem*, vgl. Abschnitt 11.3 und Beispiel 11.2 in Abschnitt 11.4) ?
- Wie verändert sich der Grad der Bedürfnisbefriedigung, wenn bei Konstanz des Konsums aller anderen Güterarten der Konsum eines Gutes steigt und über alle Grenzen wächst (*Grenzwert*, *Sättigungsniveau*, vgl. Abschnitt 7.2 und Beispiel 7.4 in Abschnitt 7.4) ?
- Welche Güterkombination stiftet bei Ausgabenbeschränkung einen maximalen Nutzen (*Lagrange-Methode*, vgl. Abschnitt 12.2 und die Beispiele 12.2 und 12.3 in Abschnitt 12.5) ?

2.1 Grundbegriffe

Definition. X und Y seien zwei Mengen. Eine **Funktion** oder **Abbildung** (function, mapping, map) f von X nach Y ist eine Zuordnungsvorschrift, die *jedem* Element $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Schreibweise.

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Dabei heißt x das **Argument** (argument), die **Variable** oder **Veränderliche** (variable) und $f(x)$ der (Funktions-)**Wert** (value) der Stelle x. Die Menge X heißt **Definitionsbereich** (oder **Urbildbereich**) (source or domain) von f und die Menge Y heißt **Wertebereich** (target) von f. Der **Graph** (graph) von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Bemerkung. In der ökonomischen Literatur werden das Argument x auch **unabhängige** oder **exogene** Variable und der Wert y auch **abhängige** oder **endogene** Variable genannt.

Weitere Bezeichnungen und Symbole erleichtern den Umgang mit dem Begriff *Funktion*.

Definitionen.

Bild (image) von $M \subseteq X$ unter f:

$$f(M) := \{y \in Y \mid \text{ es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\} \subseteq Y.$$

Urbild (inverse image) von $N \subseteq Y$ unter f:

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\} \subseteq X.$$

Das Urbild von $\{y_0\}$ unter f,

$$f^{-1}(\{y_0\}) := \{x \in X \mid f(x) = y_0\} \subseteq X,$$

wird in den Anwendungen als **Isoquante** von f mit dem Wert y_0 bezeichnet.

Beschränkung von f auf $M \subset X$:

$$f|_M : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Sie unterscheidet sich von f nur durch den Definitionsbereich.

Wichtige Eigenschaften von Funktionen haben spezielle Namen:

Definitionen. f heißt

injektiv (injective) (oder **eineindeutig** (one to one)), wenn für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ *höchstens* ein Element hat, d.h. wenn aus $x, x' \in X$ und $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt, also zwei verschiedenen Argumenten auch zwei verschiedene Werte zugeordnet werden,

surjektiv (onto), wenn für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ *mindestens* ein Element hat, d.h. es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ gibt, und

bijektiv (one to one correspondence or a bijection), wenn f surjektiv und injektiv ist, d.h. für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ aus *genau einem* Element besteht, welches mit $f^{-1}(y)$ bezeichnet wird.

Während $f^{-1}(\{y\})$ das Urbild der einelementigen Menge $\{y\}$ unter einer beliebigen Abbildung f beschreibt und wieder eine Menge ist, nämlich die leere Menge, eine einelementige Menge oder eine mehrelementige Menge, wird die Schreibweise $f^{-1}(y)$ nur für bijektive Abbildungen f verwendet. Ist f bijektiv, so wird dadurch sichergestellt, daß mit $f^{-1}(y)$ genau ein Element bezeichnet wird und f^{-1} wieder eine Funktion ist.

Definition. Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so wird die **Umkehrfunktion** (inverse function) wie folgt definiert:

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y). \end{array}$$

Bemerkung. Mit $x \in X$, $y \in Y$ gilt für bijektive Abbildungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(x)) = x. \end{aligned}$$

Mit f ist auch f^{-1} bijektiv.

Definition. Für Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f : \ X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Komposition** (oder **Hintereinanderschaltung**, **Verkettung**) (composition) von f und g.

Bemerkung. Es gilt für $h : Z \longrightarrow W$ und $x \in X$ das Assoziativgesetz (associative law):

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \ = \ ((h \circ g) \circ f)(x). \end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht das Kommutativgesetz (commutative law):

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x).$$

2.2 Reellwertige Funktionen

Sei speziell $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$. Wird $m = 1$ gesetzt, dann wird von einer **reellwertigen Funktion** einer Veränderlichen gesprochen, falls $n = 1$ ist, bzw. von mehreren Veränderlichen, falls $n > 1$ ist.
Beispielsweise stellt die Vorschrift $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ eine reellwertige Funktion mit zwei Veränderlichen dar.

Definitionen. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

monoton wachsend (monotonically increasing) (bzw. **fallend** (decreasing)), wenn für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ und $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$, für die $x_i \leq z_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, folgt:

$$f(x) \leq f(z) \quad \Big(\text{bzw. } f(x) \geq f(z)\Big);$$

streng monoton wachsend (strictly monotonically increasing) (bzw. **fallend** (decreasing)), wenn für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ und $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X$, für die $x_i \leq z_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $x_j \neq z_j$ für mindestens ein $1 \leq j \leq n$ gilt, folgt:

$$f(x) \; < \; f(z) \quad \Big(\text{bzw. } f(x) \; > \; f(z)\Big);$$

beschränkt (bounded), wenn N und $M \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$N \;\leq\; f(x) \;\leq\; M \qquad \text{für alle } x \in X,$$

wobei N **untere Schranke** (lower bound) und M **obere Schranke** (upper bound) von f genannt wird;

konvex (convex), wenn X konvex ist und für alle $x, z \in X$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \;\leq\; \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z);$$

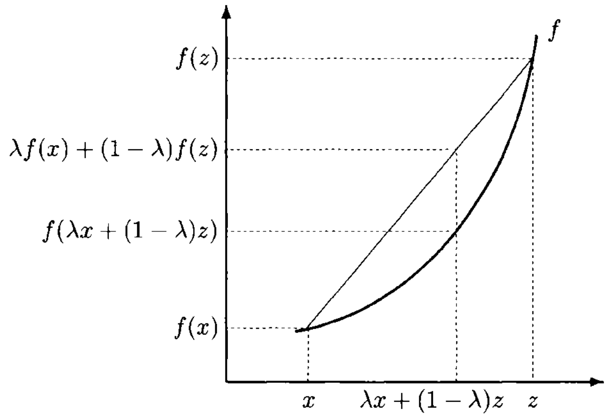

Abb. 2.1. konvexe Funktion.

quasikonvex, wenn X konvex ist und für alle $x, z \in X$ mit $f(x) \leq f(z)$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \ \leq \ f(z);$$

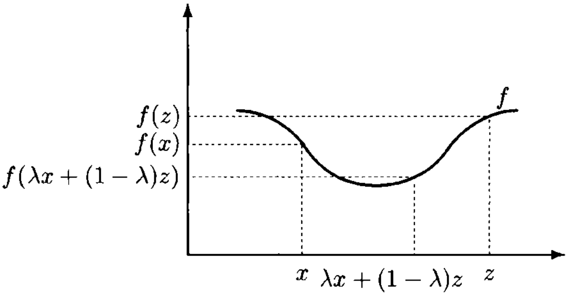

Abb. 2.2. quasikonvexe Funktion.

konkav (concave) (bzw. **quasikonkav**), wenn $-f$ konvex (bzw. quasikonvex) ist;

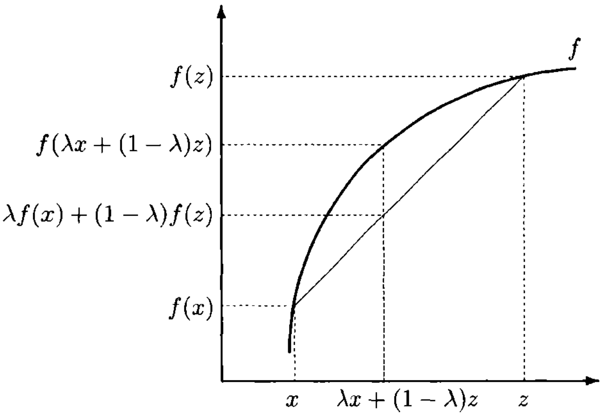

Abb. 2.3. konkave Funktion.