Mathematik für Ökonomen

Von
Dr. Bernd Leiner
Professor für Statistik
an der
Universität Heidelberg

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: Grafik + Druck, München
Bindung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe Binderei GmbH

ISBN 3-486-27304-3

Inhaltsverzeichnis

Seite

Vorwort

In dieser Darstellung möchte der Autor die für das Grundstudium in den Wirtschaftswissenschaften relevanten Teile der Mathematik aus seiner Sicht als Anwender vermitteln. Adressaten sind Studierende an Berufsakademien in wirtschaftswissenschaftlichen Fachrichtungen ebenso wie Studierende der Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten. Die insbesondere mit Studierenden der Wirtschaftsinformatik gewonnene Lehrerfahrung ermutigt zu einer Präsentation, die auch unter Wahrung des erforderlichen Niveaus das Gewicht mehr auf die Anwendung als auf die abgehobene theoretisierende Verarbeitung des Ausbildungsstoffes legt. Grundlegende mathematische Exkurse aus statistischen Veranstaltungen des Hauptstudiums an der Universität Heidelberg sind eingearbeitet, wie überhaupt die heutige Statistik ohne mathematische Grundlagen nicht vorstellbar ist.

Dieses Buch kann somit als Abrundung und Ergänzung der Monographien des Autors verstanden werden, die im R. Oldenbourg Verlag erschienen sind und nicht nur unter seinen Zuhörern Verbreitung gefunden haben.

Die Mathematik selbst kann man beschreiben als eine Wissenschaft, die sich mit den Zahlen und den mit diesen gebildeten Strukturen auseinandersetzt, wobei Logik und Mengenlehre sowie Abbildungen zum Einsatz kommen.

Die Mathematik bedient sich hierbei oft der Abstraktion, d.h. reale Probleme und ihre Hintergründe können zu methodischen Zusammenhängen verselbständigt werden.

Üblicherweise wird die Mathematik unterteilt in die *reine Mathematik* und die *angewandte Mathematik*. Zur reinen Mathematik zählen die Bereiche der Algebra, Analysis, Numerik, Geometrie sowie Topologie. Zur angewandten Mathematik zählen im wesentlichen die Wissenschaften Physik, Chemie, Astronomie, Statistik und die Wirtschaftswissenschaften.

1. Kapitel: Matrizenrechnung

1.1. Einführung

Heiner Rathgeb hat nach seinem Diplom eine Stelle als Produktmanager in einem Maschinenbaukonzern angetreten. Hier ist er mit dem Vertrieb von 5 Produkten betraut. Diese Produkte sind in einer internen Produktklassifikation mit Zahlen versehen, die ihre numerische Identifikation erlauben. Wir übertragen der Einfachheit halber diese Zahlen auf die natürlichen Zahlen von 1 bis 5. Die verkauften Mengen dieser 5 Produkte wollen wir mit x_i bezeichnen mit dem Index $i = 1, 2, ..., 5$. In dem betrachteten Monat ergibt sich für Herrn Rathgeb folgendes Bild

$$\begin{aligned} x_1 &= 100 \\ x_2 &= 75 \\ x_3 &= 126 \\ x_4 &= 24 \\ x_5 &= 83\ . \end{aligned}$$

Vom 1. Produkt sind also 100 Stück verkauft worden und vom 5. Produkt 83 Stück. Der Index i der natürlichen Zahl der verkauften Menge x_i zeigt also, um welches Produkt es sich handelt.

Wir ordnen nun diese Angaben in einem <u>Zeilenvektor</u> x an:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5\,]$$

Mit den Verkaufsangaben läßt sich der Zeilenvektor x füllen mit

$$x = [100 \quad 75 \quad 126 \quad 24 \quad 83].$$

Die Zahl an 4. Position im Zeilenvektor x der Verkaufsmengen verrät Herrn Rathgeb also, daß in diesem Monat von Produkt 4 genau 24 Einheiten verkauft wurden.

Allgemein ist der Zeilenvektor x definiert als

$$x = [x_1 \quad x_2 \;\dots\; x_n\,] \tag{1.1}$$

wobei n als die Länge (Anzahl der Elemente) des Zeilenvektors bezeichnet wird.

Die bisherigen Angaben lassen sich auch spaltenmäßig anordnen. Allgemein ist ein Spaltenvektor x′ definiert als

$$(1.2) \qquad x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Die Form der Anordnungen in Zeilen- oder Spaltenvektoren wird später für die Berechnungen von Bedeutung sein, die Information ist prinzipiell identisch.

Herr Rathgeb hat mittlerweile gerade die Informationen über die Verkaufszahlen seiner 5 Produkte für den nächsten Monat erhalten, d.h. sein Zeilenvektor enthält nun die neuen Zahlen. Sie seien

$$x = [110 \quad 88 \quad 113 \quad 35 \quad 94] .$$

Unser Produktmanager möchte nun die Zahlen so darstellen, daß er die Verteilung der Verkaufszahlen der 5 Produkte in den beiden Monaten auf einen Blick erkennen kann.

Hierzu verwendet er die Matrix X mit

$$X = \begin{bmatrix} 100 & 75 & 126 & 24 & 83 \\ 110 & 88 & 113 & 35 & 94 \end{bmatrix} .$$

Die Matrix X besteht aus zwei Zeilen und 5 Spalten. In der 1. Zeile stehen die Verkaufszahlen des 1. Monats und in der 2. Zeile stehen die Verkaufszahlen für den 2. Monat. In der 1. Spalte erkennt man die Verkaufszahlen des 1. Produkts, in der 5. Spalte die des 5. Produkts. An Position 2, 3 (d.h. 2. Zeile, 3. Spalte) steht also die Zahl 113, die erkennen läßt, daß im 2. Monat vom 3. Produkt 113 Einheiten verkauft wurden, also 13 weniger als im Vormonat. Dem Leser wird empfohlen, sich mit dieser Sichtweise schon früh vertraut zu machen und zu seiner Übung die Werte anderer Positionen zu bestimmen.

Mathematisch läßt sich eine Matrix X definieren als eine rechteckige Anordnung von Zahlen.

Während man für Vektoren Kleinbuchstaben verwendet, bezeichnet man Matrizen mit Großbuchstaben. Heiner Rathgeb erkennt, daß er für jede Tabelle eine Matrix konstruieren kann.

Unser Produktmanager kann also die Verkaufszahlen von n Produkten in m Monaten allgemein darstellen mit der Matrix

$$(1.3) \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \dots & x_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Mit der <u>Ordnung</u> der Matrix X bezeichnet man die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten. Die hier vorgestellte Matrix X ist von der Ordnung $m \times n$ (sprich: m Kreuz n), denn sie verfügt über m Zeilen und n Spalten. Aus dem Doppelindex des letzten Elements in der Südostecke der Matrix erkennt man somit deren Ordnung. Bei der Angabe der Ordnung einer Matrix ist darauf zu achten, daß die Anzahl der Zeilen vor der Anzahl der Spalten genannt wird. Die zuerst von Herrn Rathgeb gebildete Matrix war somit von der Ordnung 2×5 und nicht etwa 5×2.

Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, welche spezielle Formen von Matrizen sich bilden lassen.

1.2. Spezielle Matrizen

1.2.1. Die quadratische Matrix

Eine Matrix heißt <u>quadratisch</u>, wenn ihre Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten übereinstimmt.

Die Matrix

$$(1.4) \qquad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots & y_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

ist eine quadratische Matrix der Ordnung n × n, was man zur Ordnung n verkürzt. Die Diagonale, bestehend aus den Elementen y_{11}, y_{22} ..., y_{nn} , bezeichnet man als Hauptdiagonale der Matrix Y. Sie enthält also die Elemente, deren Zeilenindex mit dem Spaltenindex übereinstimmt.

1.2.2. Die symmetrische Matrix

Eine quadratische Matrix Y heißt symmetrisch, wenn eine Vertauschung der Doppelindizes denselben Wert ergibt, d.h.

$$y_{ij} = y_{ji} \text{ für } i, j, = 1, ..., n.$$

Beispiel:

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ein praktisches Beispiel liefert etwa eine Entfernungstabelle. Die Entfernungen in km der Städte Saarbrücken (SB), Heidelberg (HD) und Stuttgart (S) lassen sich angeben mit

nach / von	SB	HD	S
SB	0	160	260
HD	160	0	100
S	260	100	0

Da die Entfernung von A nach B mit der von B nach A übereinstimmt, ist dies ein Beispiel für eine natürliche Symmetrie.

1.2.3. Die Dreiecksmatrix

Eine quadratische Matrix Y heißt Dreiecksmatrix, wenn entweder alle Werte oberhalb der Hauptdiagonalen (oberes Dreieck) oder unterhalb der Hauptdiagonalen (unteres Dreieck) gleich Null sind, d.h. wenn

$$y_{ij} = 0 \quad \forall\, j > i \text{ (oberes Dreieck)}$$

bzw.

$$y_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j \text{ (unteres Dreieck)}$$

(das Symbol ∀ bedeutet „für alle"). Beispiele hierzu:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Dreiecksmatrizen können zur rekursiven Lösung von Gleichungssystemen eingesetzt werden.

1.2.4. Die Diagonalmatrix

Eine Diagonalmatrix Y ist eine quadratische Matrix, für die nur die Werte auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind, d.h.

$$y_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j.$$

Beispiel:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

1.2.5. Die Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix läßt sich definieren als eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonalelemente gleich 1 sind, während alle anderen Elemente gleich Null sind.

Es ist üblich, für Einheitsmatrizen das Symbol I (von: identity matrix) zu verwenden und als Index die Ordnung anzugeben.

Beispiele:

(1.5) $$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1.6) $$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

1.2.6. Die Nullmatrix

Eine Nullmatrix ist eine Matrix, die nur aus Nullen besteht. Somit läßt sich aus jeder beliebigen Matrix eine Nullmatrix bilden, indem man alle ihre Elemente auf Null setzt. Es ist üblich, die Ordnung zu indizieren.

Beispiel:

(1.7) $$\mathbf{0}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2.7. Der Zeilenvektor

Ein Zeilenvektor mit n Elementen ist eine Matrix von der Ordnung $1 \times n$.

1.2.8. Der Spaltenvektor

Ein Spaltenvektor mit n Elementen ist eine Matrix von der Ordnung $n \times 1$.

1.2.9. Der Skalar

Eine einzelne reelle Zahl bildet einen Skalar. Ein Skalar ist eine Matrix, die nur aus einem Element besteht. Der Skalar hat die Ordnung 1×1 oder kurz 1.

1.2.10. Die Skalarmatrix

Eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonalelemente identisch sind und deren anderen Elemente alle gleich Null sind, heißt Skalarmatrix.

Beispiel:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Somit ist eine Einheitsmatrix eine Skalarmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle gleich Eins sind.

Im nächsten Abschnitt sollen einige Grundbegriffe der Matrizenrechnung erläutert werden.