





# Formelsammlung Mathematik

Von

Professor Dr. Karl Bosch

Institut für angewandte Mathematik und Statistik  
der Universität Stuttgart-Hohenheim

R. Oldenbourg Verlag München Wien

## **Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme**

Bosch, Karl:  
Formelsammlung Mathematik / von Karl Bosch. – München ; Wien :  
Oldenbourg, 2002  
ISBN 3-486-27254-3

© 2002 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH  
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München  
Telefon: (089) 45051-0  
[www.oldenbourg-verlag.de](http://www.oldenbourg-verlag.de)

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier  
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-27254-3

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> . . . . .	IX
<b>Mathematische Symbole und Bezeichnungen</b> . . . . .	X
<b>1. Grundlagen der Geometrie</b> . . . . .	1
Planimetrie (ebene Geometrie) . . . . .	1
Stereometrie (Volumen und Oberfläche) . . . . .	4
<b>2. Mathematische Grundlagen</b> . . . . .	5
Aussagenlogik . . . . .	5
Mengen . . . . .	5
Abbildungen und Funktionen . . . . .	7
Induktionsbeweis . . . . .	8
Rechnen mit reellen Zahlen . . . . .	8
Komplexe Zahlen . . . . .	15
Kombinatorik . . . . .	17
<b>3. Zahlenfolgen und Reihen</b> . . . . .	18
Folgen (Zahlenfolgen) . . . . .	18
Unendliche Reihen . . . . .	21
<b>4. Grundlagen der Finanzmathematik</b> . . . . .	24
Grundbegriffe und Bezeichnungen . . . . .	24
Zinseszinsrechnung bei einmaliger Zahlung . . . . .	24
Zinseszinsrechnung bei regelmäßigen Zahlungen . . . . .	25
Rentenzahlungen aus einem Kapital $K$ . . . . .	30
Tilgungsrechnung . . . . .	31
Abschreibungen . . . . .	33
<b>5. Differenzialrechnung bei Funktionen einer Variablen</b> . . . . .	35
Grundbegriffe . . . . .	35
Grenzwerte von Funktionen . . . . .	36
Stetigkeit . . . . .	37
Differenziation (Ableitungen) . . . . .	39
Relative Änderungsrate und Elastizität . . . . .	43
Kurvendiskussion . . . . .	45
Taylorentwicklung . . . . .	48
Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken . . . . .	49
Potenzfunktionen . . . . .	50
Polynome (ganzrationale Funktionen) . . . . .	52
Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	53
Funktionenfolgen . . . . .	55
Funktionenreihen . . . . .	56
Potenzreihen . . . . .	57

Exponentialfunktionen . . . . .	59
Logarithmusfunktionen . . . . .	60
Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) . . . . .	62
Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen) . . . . .	65
Hyperbelfunktionen (hyperbolische Funktionen) . . . . .	67
Areafunktionen (inverse Hyperbelfunktionen) . . . . .	68
Numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .	70
Ableitungen elementarer Funktionen . . . . .	71
<b>6. Integralrechnung bei Funktionen einer Variablen . . . . .</b>	<b>72</b>
Stammfunktion . . . . .	72
Unbestimmtes Integral . . . . .	72
Bestimmtes Integral . . . . .	73
Integration durch Partialbruchzerlegung . . . . .	75
Uneigentliche Integrale . . . . .	76
Anwendungen der Integralrechnung in der Ökonomie . . . . .	77
Numerische (näherungsweise) Integration . . . . .	79
Tabelle von Grundintegralen . . . . .	81
Tabelle weiterer Integrale . . . . .	82
<b>7. Differenzial- und Differenzengleichungen . . . . .</b>	<b>83</b>
Gewöhnliche Differenzialgleichungen . . . . .	83
Systeme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen . . . . .	87
Differenzengleichungen . . . . .	91
<b>8. Differenzialrechnung bei Funktionen zweier Variabler . . . . .</b>	<b>93</b>
Grundbegriffe . . . . .	93
Grenzwerte und Stetigkeit einer Funktion . . . . .	94
Differenziation . . . . .	95
Taylor-Entwicklung . . . . .	99
Lineare Approximation und Hesse-Matrix . . . . .	100
Extremwerte und Sattelpunkte ohne Nebenbedingung . . . . .	101
Extremwerte unter einer Nebenbedingung . . . . .	102
<b>9. Integralrechnung bei Funktionen zweier Variabler . . . . .</b>	<b>104</b>
Parameterabhängige Integrale . . . . .	104
Inhalte ebener Flächen . . . . .	104
Volumina von Körpern . . . . .	105
Inhalt eines räumlichen Flächenstücks . . . . .	106
Variablentransformationen bei Doppelintegralen . . . . .	106
Relative Extremwerte und Sattelpunkte unter Nebenbedingungen . . . . .	115
<b>10. Differenzialrechnung bei Funktionen von n Variablen . . . . .</b>	<b>109</b>
Grundbegriffe . . . . .	109
Differenziation . . . . .	110

---

Extremwerte und Sattelpunkte ohne Nebenbedingungen . . . . .	114
Extremwerte und Sattelpunkte unter Nebenbedingungen . . . . .	115
<b>11. Vektoren</b> . . . . .	117
Grundbegriffe . . . . .	117
Geraden im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	119
Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	120
Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	120
<b>12. Matrizen</b> . . . . .	121
Grundbegriffe . . . . .	121
Funktionen einer Matrix . . . . .	123
<b>13. Determinanten</b> . . . . .	124
Zweireihige Determinanten . . . . .	124
Dreireihige Determinanten . . . . .	124
n-reihige Determinanten . . . . .	124
<b>14. Lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .	127
Grundbegriffe . . . . .	127
Gaußscher Algorithmus . . . . .	128
Lösungen bei regulären Matrizen . . . . .	130
Berechnung der inversen Matrix . . . . .	130
<b>15. Eigenwerte von Matrizen - quadratische Formen</b> . . . . .	131
Grundbegriffe . . . . .	131
Eigenwerte und Eigenvektoren bei symmetrischen Matrizen . . . . .	132
Hauptachsentransformation bei symmetrischen Matrizen . . . . .	133
Quadratische Formen . . . . .	133
<b>16 Lineare Optimierung (Programmierung)</b> . . . . .	135
Lineare Optimierung bei zwei Variablen . . . . .	135
Lineare Optimierung bei n Variablen ( $n \geq 3$ ) . . . . .	137
Allgemeine Problemstellung . . . . .	137
Standardform der linearen Optimierung . . . . .	138
Kanonische Form der linearen Optimierung . . . . .	139
Simplexverfahren . . . . .	140
Ausgangseckpunkt aus einer kanonischen Form . . . . .	144
Ausgangseckpunkt für eine beliebige Standardform . . . . .	145
Duale lineare Optimierung . . . . .	146
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	147
<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	149





## Vorwort

In der vorliegenden Formelsammlung sollen die wichtigsten Begriffe, Formeln und mathematische Methoden zusammengestellt werden, die in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften benötigt werden. Der Autor ist bemüht, die einzelnen Formeln und Verfahren sehr ausführlich darzustellen. Durch viele Hinweise und manche Beispiele sollen die Anwendungsmöglichkeiten deutlich gemacht werden. Die ausführliche Darstellung soll dazu dienen, dass spezielle Formeln und Verfahren auch dann benutzt werden können, wenn der jeweilige Stoff in der Grundvorlesung nur ganz knapp oder überhaupt nicht behandelt wurde. Ein Beispiel dafür ist die lineare Programmierung mit dem Simplexverfahren. Ausführlich werden mathematische Begriffe und Beispiele aus der Ökonomie behandelt. Ein Beispiel dafür ist das Kapitel Finanzmathematik. Dadurch wird diese Formelsammlung zu einem ausführlichen Nachschlagewerk für alle Studierenden der Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten und Fachhochschulen und alle Personen, die in ihrem Berufsleben mit Begriffen der Betriebs- und Wirtschaftswissenschaften konfrontiert werden.

Der Aufbau ist so gewählt, dass die Formelsammlung auch von Studierenden anderer Fachrichtungen benutzt werden kann.

Seit vielen Jahren hält der Autor an der Universität Hohenheim die zweisemestrige Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. Aus dieser Lehrtätigkeit ist diese Formelsammlung entstanden.

Für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskripts möchte ich mich bei Frau Dr. S. Kröner, Frau Dipl. Math. R. Ritz, Herrn Dipl. Math. A. Janßen und Herrn Dipl. Math. A. Meister recht herzlich bedanken.

Allen Personen, welche diese Formelsammlung benutzen, wünsche ich viel Erfolg. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar.

Stuttgart-Hohenheim

Karl Bosch

## Mathematische Symbole und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_-$	Menge der nichtpositiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der n-tupel reeller Zahlen (n-dim. Vektoren)
$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$
$\wedge$	logisches und
$\vee$	logisches oder (nichtausschließend)
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent B (aus A folgt B und aus B folgt A)
$\neg$	nicht
$<$	kleiner
$>$	größer
$\leq$	kleiner gleich
$\geq$	größer gleich
$\pm$	plus minus
$\mp$	minus plus
$ x $	Betrag von x: $ x  = x$ für $x \geq 0$ ; $ x  = -x$ für $x < 0$
$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ n-Fakultät
$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall)
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a; \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(a; \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (Summe der n Zahlen)
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (Produkt der n Zahlen)
$x \in M$	x ist Element von M
$x \notin M$	x ist nicht Element von M
$A \cup B$	A vereinigt mit B (Vereinigung, Vereinigungsmenge)
$A \cap B (= A \cdot B)$	A Durchschnitt B (Durchschnitt, Schnittmenge)
$\bar{A}$	Komplement von A
$A \setminus B$	Differenz von A und B
$\det(A) =  A $	Determinante der Matrix A

# 1. Grundlagen der Geometrie

## Planimetrie (ebene Geometrie)

### Rechtwinkliges Dreieck

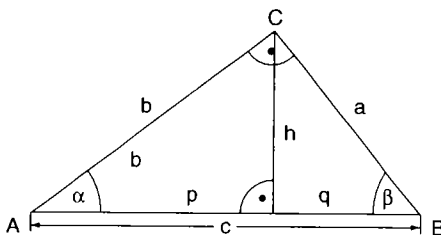
$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \gamma = 90^\circ$$

a, b Katheten

c Hypothenuse

Höhe  $h = \frac{a \cdot b}{c}$

p, q Hypothenusenabschnitte



Sinus:  $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Kosinus:  $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{p}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Tangens:  $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{h}{p} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Kotangens:  $\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{p}{h} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

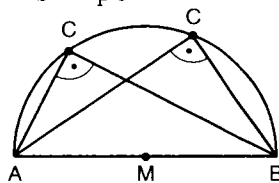
Satz des Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$       Höhengsatz  $h^2 = pq$

Kathetensatz (Satz von Euklid)  $a^2 = qc$ ;       $b^2 = pc$

Flächeninhalt  $F = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$

Thaleskreis

Jeder Peripheriewinkel über dem  
Kreisdurchmesser beträgt  $90^\circ$



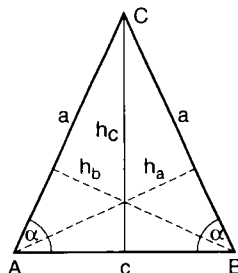
### Gleichschenkliges Dreieck

$$\alpha = \beta \quad \gamma = 180^\circ - 2\alpha$$

Höhen  $h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$

$$h_a = h_b = c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{4a^2}}$$

Flächeninhalt  $F = \frac{c h_c}{2} = \frac{c \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}}{4}$



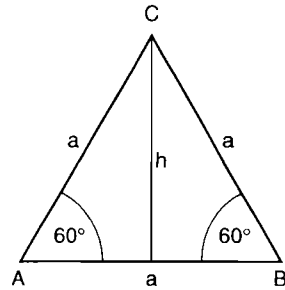
**Gleichseitiges Dreieck**

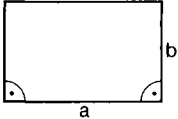
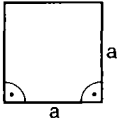
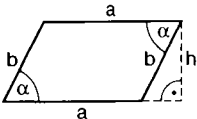
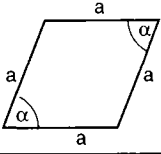
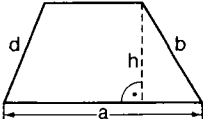
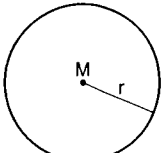
$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

Seitenlänge  $a$

$$\text{Höhe } h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

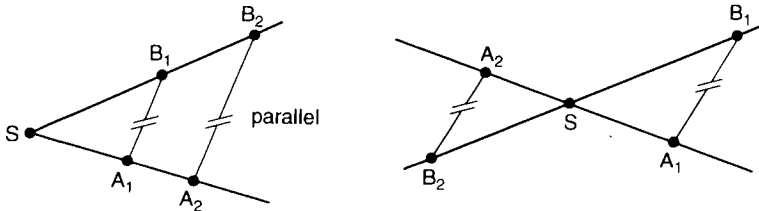
$$\text{Flächeninhalt } F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

**Vierecke und Kreis**

Figur		Flächeninhalt	Umfang
<b>Rechteck</b>		$a b$	$2 a + 2 b$
<b>Quadrat</b>		$a^2$	$4 a$
<b>Parallelogramm</b>		$a h = a b \sin \alpha$	$2 a + 2 b$
<b>Rhombus (Raute)</b> (gleichseitiges Parallelogramm)		$a^2 \sin \alpha$	$4 a$
<b>Trapez</b> (Viereck mit zwei parallelen Seiten)		$\frac{a+c}{2} \cdot h$	$a + b + c + d$
<b>Kreis</b>		$\pi r^2$	$2 \pi r$

**Strahlensätze**

Die beiden Schenkel eines Winkels werden durch zwei parallele Transversalen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  geschnitten.



1. Die zwischen den Transversalen liegenden Abschnitte auf einem Schenkel verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel. Für die Längen der Strecken gilt

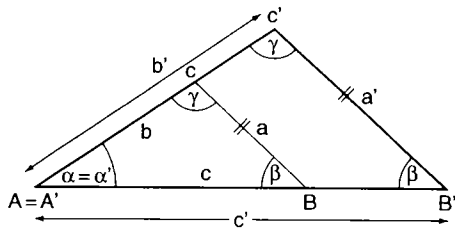
$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2} .$$

2. Die Längen der Transversalen verhalten sich wie die vom Scheitelpunkt S aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen:

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

**Ähnliche Dreiecke**

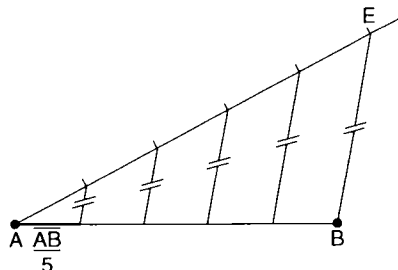
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn jeweils zwei Winkel übereinstimmen. Durch eventuelle Spiegelung kann immer erreicht werden, dass die ähnlichen Dreiecke gleich orientiert sind. Nach dem Strahlensatz verhalten sich in ähnlichen Dreiecken entsprechende Seiten gleich:



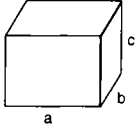
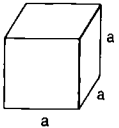
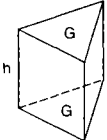
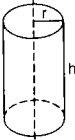
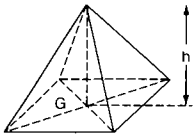
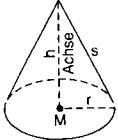
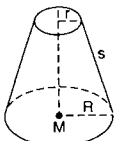
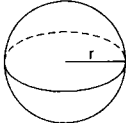
$$a' : a = b' : b = c' : c = k \text{ (} k = \text{Ähnlichkeitsfaktor)}$$

**Streckenteilung**

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann eine Strecke in  $n$  gleiche Teile geteilt werden. Dazu werden von einem Endpunkt aus auf einer Hilfsgeraden  $n$  gleiche Strecken abgetragen. Durch die Punkte werden Parallelen zur Strecke  $BE$  gezogen.



## Stereometrie (Volumen und Oberfläche)

Figur		Volumen	Oberfläche O Mantelfläche M
Quader		$abc$	$O = 2(ab + bc + ca)$
Würfel		$a^3$	$O = 6a^2$
Prisma		$Gh$ ( $G = \text{Grundfläche}$ $h = \text{Höhe}$ )	$M = Uh$ ( $U = \text{Umfang}$ der Grundfläche) $O = Uh + 2G$
Zylinder		$\pi r^2 h$	$O = 2\pi r^2 + M$ $M = 2\pi r h$
Pyramide		$\frac{1}{3} Gh$ ( $G$ Grundfläche $h$ Höhe)	
Kreiskegel		$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$O = M + \pi r^2$ $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
Kegelstumpf		$\frac{\pi h}{3} [R^2 + r(R + r)]$	$O = M + \pi (R^2 + r^2)$ $M = \pi s (R + r)$
Kugel		$\frac{4}{3} \pi r^3$	$O = 4\pi r^2$

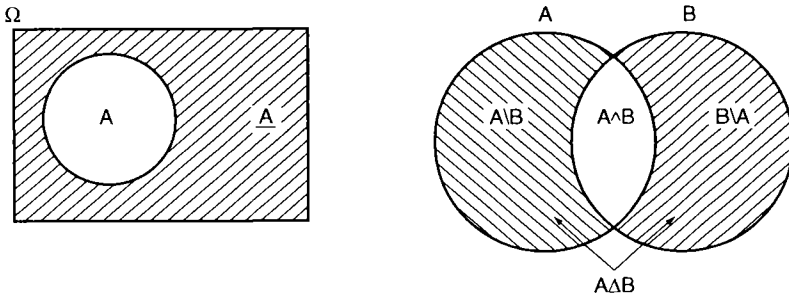
## 2. Mathematische Grundlagen

### Aussagenlogik

	lies	ist wahr, wenn	Bezeichnung
$A \wedge B$	<b>A und B</b>	A und B, also beide wahr sind	Konjunktion
$A \vee B$	<b>A oder B</b>	A oder B wahr ist (oder beide)	Disjunktion
$\neg A$	<b>nicht A</b>	A nicht wahr ist	Negation
$A \Rightarrow B$	<b>aus A folgt B</b>	mit A auch B wahr ist	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	<b>A äquivalent B</b>	beide wahr oder beide falsch sind	Äquivalenz

### Mengen

Menge $M$	Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte (Elemente) zu einem Ganzen
Element $a$	Objekt einer Menge $a \in M \Leftrightarrow a$ ist Element (Objekt) der Menge $M$ $a \notin M \Leftrightarrow a$ ist nicht Element der Menge $M$
<b>Grundmenge</b> $\Omega$	enthält alle im Moment betrachteten Elemente
<b>leere Menge</b> $\emptyset$	enthält kein Element
Darstellung	$M = \{a, b, c, \dots\}$ (aufzählende Darstellung) $M = \{x \in \Omega \mid x \text{ besitzt eine vorgegebene Eigenschaft}\}$ (beschreibende Darstellung)
$A \subset B$	$A$ ist <b>Teilmenge</b> von $B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A = B$	<b>Gleichheit</b> $\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$	<b>Komplement</b> von $A$
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $= AB$ ( $\cap$ weglassen)	<b>Durchschnitt</b> enthält alle Elemente, die sowohl in $A$ als auch in $B$ enthalten sind
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	<b>Vereinigung</b> enthält alle Elemente, die in $A$ oder in $B$ oder in beiden enthalten sind
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	<b>Differenz</b> enthält alle Elemente, die in $A$ , aber nicht in $B$ enthalten sind
$A \cap B = \emptyset$	<b>disjunkte</b> Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen
$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$	
$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \text{ liegt in mindestens einem } A_i\}$	
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $= \{x \mid x \text{ ist in genau einer der beiden Mengen } A, B \text{ enthalten}\}$	<b>(ausschließendes oder)</b>



### Eigenschaften der Mengenoperationen

$$\begin{aligned}
 A \cup \bar{A} &= \Omega & A \cap \bar{A} &= \emptyset & \bar{\bar{A}} &= A & \bar{\Omega} &= \emptyset & \bar{\emptyset} &= \Omega \\
 A \subset B &\Rightarrow (A \cap B = A) \wedge (A \cup B = B) \\
 A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A & & & & & & \text{(Kommutativgesetze)} \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C & & & & & & & & \text{(Assoziativgesetze)} \\
 (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) & & & & & & & & \\
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) & & & & & & & & \text{(Distributivgesetze)} \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) & & & & & & & & \\
 \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} & \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} & & & & & & \text{(De Morgansche Regeln)}
 \end{aligned}$$

### Direkte Produkte von Mengen (Produktmengen)

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} & \text{Menge der } \mathbf{geordneten Paare} \\
 & & (a, b) \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B \\
 A \times A &= A^2 & \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \mathbb{R}^2 \\
 \prod_{i=1}^n A_i &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \dots, a_n \in A_n\} \\
 &= \text{Menge aller } \mathbf{n\text{-tupel}} (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ mit } a_i \in A_i \text{ f\"ur } i = 1, 2, \dots, n \\
 \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ Faktoren}} &= A^n & \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} &= \mathbb{R}^n
 \end{aligned}$$



## Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	<b>natürliche</b> Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	<b>nichtnegative ganze</b> Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	<b>ganze</b> Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$	<b>rationale</b> Zahlen
$\mathbb{R}$	<b>reelle</b> Zahlen
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	<b>nichtnegative reelle</b> Zahlen
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	<b>nichtpositive reelle</b> Zahlen
$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	<b>komplexe</b> Zahlen; imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ mit $i^2 = -1$ (s. S. 15)

Manchmal wird auch die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen gezählt. Wir benutzen jedoch die Bezeichnung  $\mathbb{N}_0$ .

Die **Dezimalbruchentwicklung** einer rationalen Zahl ist endlich oder periodisch. Jede unendliche periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl (s. S. 23). Jede unendliche nichtperiodische Dezimalzahl stellt eine irrationale Zahl, also eine reelle Zahl dar, die nicht rational ist. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl.  $\mathbb{R}$  besteht aus den rationalen Zahlen sowie aus allen irrationalen Zahlen. Jede irrationale Zahl kann als nicht-periodische unendliche Dezimalzahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden. Beispiele für irrationale Zahlen:

$\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\pi$  (Kreisgröße);  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\dots$  (Eulersche Zahl).

## Abbildungen und Funktionen

f: Abbildung von X in Y	$x \in X \Rightarrow y = f(x) \in Y$
	jedes Urbild x besitzt genau ein Bild $f(x) \in Y$
f: Abbildung von X auf Y	jedes $y \in Y$ besitzt mindestens ein Urbild x
(surjektiv)	mit $y = f(x)$
f: <b>eindeutig (injektiv)</b>	$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
	$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
<b>f bijektiv</b>	$\Leftrightarrow f$ ist eindeutige Abbildung von X auf Y
<b>zusammengesetzte</b>	
Abbildung g of	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
<b>Umkehrabbildung</b> $f^{-1}$	$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ , falls f bijektiv ist
	( <b>inverse Abbildung, Inverse</b> )
$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$	(Assoziativgesetz)
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$	(Reihenfolge beachten)
$f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$	für jedes $x \in X$ und $y \in Y$