



Formelsammlung Mathematik

Von

Professor Dr. Karl Bosch

Institut für angewandte Mathematik und Statistik
der Universität Stuttgart-Hohenheim

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Bosch, Karl:
Formelsammlung Mathematik / von Karl Bosch. – München ; Wien :
Oldenbourg, 2002
ISBN 3-486-27254-3

© 2002 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-27254-3

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	IX
Mathematische Symbole und Bezeichnungen	X
1. Grundlagen der Geometrie	1
Planimetrie (ebene Geometrie)	1
Stereometrie (Volumen und Oberfläche)	4
2. Mathematische Grundlagen	5
Aussagenlogik	5
Mengen	5
Abbildungen und Funktionen	7
Induktionsbeweis	8
Rechnen mit reellen Zahlen	8
Komplexe Zahlen	15
Kombinatorik	17
3. Zahlenfolgen und Reihen	18
Folgen (Zahlenfolgen)	18
Unendliche Reihen	21
4. Grundlagen der Finanzmathematik	24
Grundbegriffe und Bezeichnungen	24
Zinseszinsrechnung bei einmaliger Zahlung	24
Zinseszinsrechnung bei regelmäßigen Zahlungen	25
Rentenzahlungen aus einem Kapital K	30
Tilgungsrechnung	31
Abschreibungen	33
5. Differenzialrechnung bei Funktionen einer Variablen	35
Grundbegriffe	35
Grenzwerte von Funktionen	36
Stetigkeit	37
Differenziation (Ableitungen)	39
Relative Änderungsrate und Elastizität	43
Kurvendiskussion	45
Taylorentwicklung	48
Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken	49
Potenzfunktionen	50
Polynome (ganzrationale Funktionen)	52
Gebrochen rationale Funktionen	53
Funktionenfolgen	55
Funktionenreihen	56
Potenzreihen	57

Exponentialfunktionen	59
Logarithmusfunktionen	60
Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)	62
Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen)	65
Hyperbelfunktionen (hyperbolische Funktionen)	67
Areafunktionen (inverse Hyperbelfunktionen)	68
Numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung	70
Ableitungen elementarer Funktionen	71
6. Integralrechnung bei Funktionen einer Variablen	72
Stammfunktion	72
Unbestimmtes Integral	72
Bestimmtes Integral	73
Integration durch Partialbruchzerlegung	75
Uneigentliche Integrale	76
Anwendungen der Integralrechnung in der Ökonomie	77
Numerische (näherungsweise) Integration	79
Tabelle von Grundintegralen	81
Tabelle weiterer Integrale	82
7. Differenzial- und Differenzengleichungen	83
Gewöhnliche Differenzialgleichungen	83
Systeme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen	87
Differenzengleichungen	91
8. Differenzialrechnung bei Funktionen zweier Variabler	93
Grundbegriffe	93
Grenzwerte und Stetigkeit einer Funktion	94
Differenziation	95
Taylor-Entwicklung	99
Lineare Approximation und Hesse-Matrix	100
Extremwerte und Sattelpunkte ohne Nebenbedingung	101
Extremwerte unter einer Nebenbedingung	102
9. Integralrechnung bei Funktionen zweier Variabler	104
Parameterabhängige Integrale	104
Inhalte ebener Flächen	104
Volumina von Körpern	105
Inhalt eines räumlichen Flächenstücks	106
Variablentransformationen bei Doppelintegralen	106
Relative Extremwerte und Sattelpunkte unter Nebenbedingungen	115
10. Differenzialrechnung bei Funktionen von n Variablen	109
Grundbegriffe	109
Differenziation	110

Extremwerte und Sattelpunkte ohne Nebenbedingungen	114
Extremwerte und Sattelpunkte unter Nebenbedingungen	115
11. Vektoren	117
Grundbegriffe	117
Geraden im \mathbb{R}^2	119
Geraden im \mathbb{R}^3	120
Ebenen im \mathbb{R}^3	120
12. Matrizen	121
Grundbegriffe	121
Funktionen einer Matrix	123
13. Determinanten	124
Zweireihige Determinanten	124
Dreireihige Determinanten	124
n-reihige Determinanten	124
14. Lineare Gleichungssysteme	127
Grundbegriffe	127
Gaußscher Algorithmus	128
Lösungen bei regulären Matrizen	130
Berechnung der inversen Matrix	130
15. Eigenwerte von Matrizen - quadratische Formen	131
Grundbegriffe	131
Eigenwerte und Eigenvektoren bei symmetrischen Matrizen	132
Hauptachsentransformation bei symmetrischen Matrizen	133
Quadratische Formen	133
16 Lineare Optimierung (Programmierung)	135
Lineare Optimierung bei zwei Variablen	135
Lineare Optimierung bei n Variablen ($n \geq 3$)	137
Allgemeine Problemstellung	137
Standardform der linearen Optimierung	138
Kanonische Form der linearen Optimierung	139
Simplexverfahren	140
Ausgangseckpunkt aus einer kanonischen Form	144
Ausgangseckpunkt für eine beliebige Standardform	145
Duale lineare Optimierung	146
Literaturverzeichnis	147
Sachwortverzeichnis	149

Vorwort

In der vorliegenden Formelsammlung sollen die wichtigsten Begriffe, Formeln und mathematische Methoden zusammengestellt werden, die in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften benötigt werden. Der Autor ist bemüht, die einzelnen Formeln und Verfahren sehr ausführlich darzustellen. Durch viele Hinweise und manche Beispiele sollen die Anwendungsmöglichkeiten deutlich gemacht werden. Die ausführliche Darstellung soll dazu dienen, dass spezielle Formeln und Verfahren auch dann benutzt werden können, wenn der jeweilige Stoff in der Grundvorlesung nur ganz knapp oder überhaupt nicht behandelt wurde. Ein Beispiel dafür ist die lineare Programmierung mit dem Simplexverfahren. Ausführlich werden mathematische Begriffe und Beispiele aus der Ökonomie behandelt. Ein Beispiel dafür ist das Kapitel Finanzmathematik. Dadurch wird diese Formelsammlung zu einem ausführlichen Nachschlagewerk für alle Studierenden der Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten und Fachhochschulen und alle Personen, die in ihrem Berufsleben mit Begriffen der Betriebs- und Wirtschaftswissenschaften konfrontiert werden.

Der Aufbau ist so gewählt, dass die Formelsammlung auch von Studierenden anderer Fachrichtungen benutzt werden kann.

Seit vielen Jahren hält der Autor an der Universität Hohenheim die zweisemestrige Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. Aus dieser Lehrtätigkeit ist diese Formelsammlung entstanden.

Für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskripts möchte ich mich bei Frau Dr. S. Kröner, Frau Dipl. Math. R. Ritz, Herrn Dipl. Math. A. Janßen und Herrn Dipl. Math. A. Meister recht herzlich bedanken.

Allen Personen, welche diese Formelsammlung benutzen, wünsche ich viel Erfolg. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar.

Stuttgart-Hohenheim

Karl Bosch

Mathematische Symbole und Bezeichnungen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}_+	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
\mathbb{R}_-	Menge der nichtpositiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	Menge der n-tupel reeller Zahlen (n-dim. Vektoren)
$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$
\wedge	logisches und
\vee	logisches oder (nichtausschließend)
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent B (aus A folgt B und aus B folgt A)
\neg	nicht
$<$	kleiner
$>$	größer
\leq	kleiner gleich
\geq	größer gleich
\pm	plus minus
\mp	minus plus
$ x $	Betrag von x: $ x = x$ für $x \geq 0$; $ x = -x$ für $x < 0$
$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ n-Fakultät
$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall)
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a; \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(a; \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (unbeschränktes Intervall)
$(-\infty; +\infty)$	\mathbb{R} (Menge der reellen Zahlen)
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (Summe der n Zahlen)
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (Produkt der n Zahlen)
$x \in M$	x ist Element von M
$x \notin M$	x ist nicht Element von M
$A \cup B$	A vereinigt mit B (Vereinigung, Vereinigungsmenge)
$A \cap B (= A \cdot B)$	A Durchschnitt B (Durchschnitt, Schnittmenge)
\bar{A}	Komplement von A
$A \setminus B$	Differenz von A und B
$\det(A) = A $	Determinante der Matrix A

1. Grundlagen der Geometrie

Planimetrie (ebene Geometrie)

Rechtwinkliges Dreieck

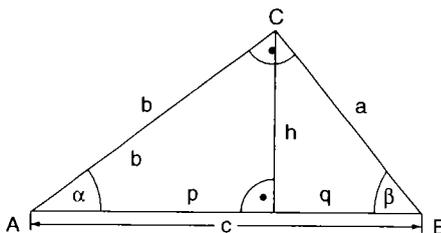
$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \gamma = 90^\circ$$

a, b Katheten

c Hypothenuse

Höhe $h = \frac{a \cdot b}{c}$

p, q Hypothenusenabschnitte



Sinus: $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Kosinus: $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{p}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Tangens: $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{h}{p} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Kotangens: $\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{p}{h} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

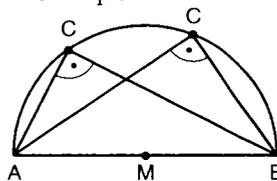
Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ Höhengsatz $h^2 = pq$

Kathetensatz (Satz von Euklid) $a^2 = qc$; $b^2 = pc$

Flächeninhalt $F = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$

Thaleskreis

Jeder Peripheriewinkel über dem
Kreisdurchmesser beträgt 90°



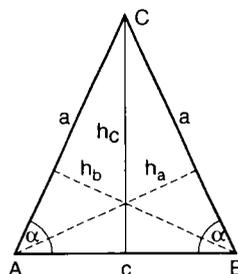
Gleichschenkliges Dreieck

$$\alpha = \beta \quad \gamma = 180^\circ - 2\alpha$$

Höhen $h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$

$$h_a = h_b = c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{4a^2}}$$

Flächeninhalt $F = \frac{c h_c}{2} = \frac{c \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}}{4}$



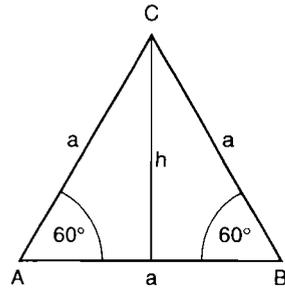
Gleichseitiges Dreieck

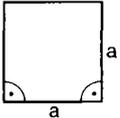
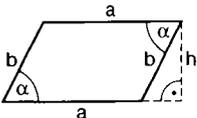
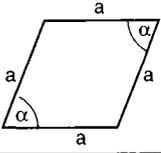
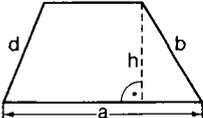
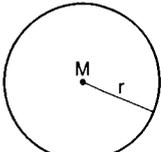
$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

Seitenlänge a

$$\text{Höhe } h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

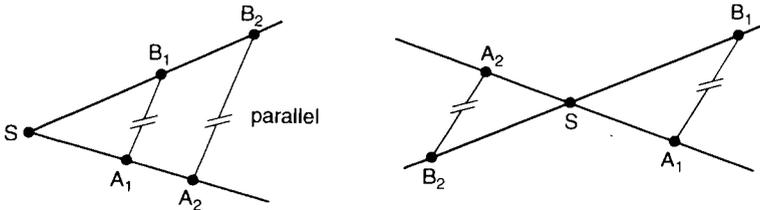
$$\text{Flächeninhalt } F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

**Vierecke und Kreis**

Figur		Flächeninhalt	Umfang
Rechteck		$a b$	$2 a + 2 b$
Quadrat		a^2	$4 a$
Parallelogramm		$a h = a b \sin \alpha$	$2 a + 2 b$
Rhombus (Raute) (gleichseitiges Parallelogramm)		$a^2 \sin \alpha$	$4 a$
Trapez (Viereck mit zwei parallelen Seiten)		$\frac{a+c}{2} \cdot h$	$a + b + c + d$
Kreis		πr^2	$2 \pi r$

Strahlensätze

Die beiden Schenkel eines Winkels werden durch zwei parallele Transversalen A_1B_1 und A_2B_2 geschnitten.



1. Die zwischen den Transversalen liegenden Abschnitte auf einem Schenkel verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel. Für die Längen der Strecken gilt

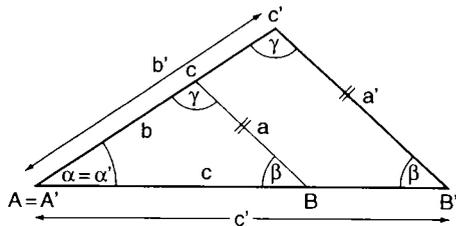
$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2} .$$

2. Die Längen der Transversalen verhalten sich wie die vom Scheitelpunkt S aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen:

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

Ähnliche Dreiecke

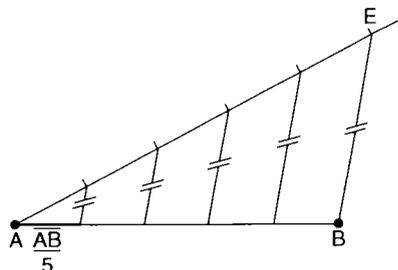
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn jeweils zwei Winkel übereinstimmen. Durch eventuelle Spiegelung kann immer erreicht werden, dass die ähnlichen Dreiecke gleich orientiert sind. Nach dem Strahlensatz verhalten sich in ähnlichen Dreiecken entsprechende Seiten gleich:



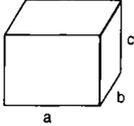
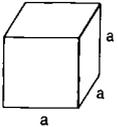
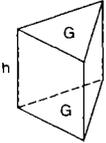
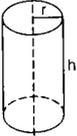
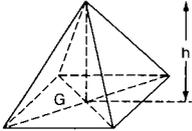
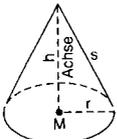
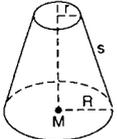
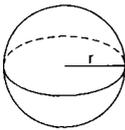
$$a' : a = b' : b = c' : c = k \quad (k = \text{Ähnlichkeitsfaktor})$$

Streckenteilung

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann eine Strecke in n gleiche Teile geteilt werden. Dazu werden von einem Endpunkt aus auf einer Hilfsgeraden n gleiche Strecken abgetragen. Durch die Punkte werden Parallelen zur Strecke BE gezogen.



Stereometrie (Volumen und Oberfläche)

Figur		Volumen	Oberfläche O Mantelfläche M
Quader		abc	$O = 2(ab + bc + ca)$
Würfel		a^3	$O = 6a^2$
Prisma		Gh ($G = \text{Grundfläche}$ $h = \text{Höhe}$)	$M = Uh$ ($U = \text{Umfang}$ der Grundfläche) $O = Uh + 2G$
Zylinder		$\pi r^2 h$	$O = 2\pi r^2 + M$ $M = 2\pi r h$
Pyramide		$\frac{1}{3}Gh$ (G Grundfläche h Höhe)	
Kreiskegel		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$O = M + \pi r^2$ $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
Kegelstumpf		$\frac{\pi h}{3} [R^2 + r(R + r)]$	$O = M + \pi (R^2 + r^2)$ $M = \pi s (R + r)$
Kugel		$\frac{4}{3}\pi r^3$	$O = 4\pi r^2$

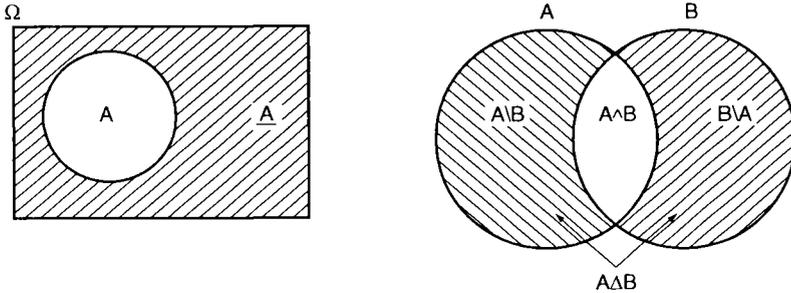
2. Mathematische Grundlagen

Aussagenlogik

	lies	ist wahr, wenn	Bezeichnung
$A \wedge B$	A und B	A und B, also beide wahr sind	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	A oder B wahr ist (oder beide)	Disjunktion
$\neg A$	nicht A	A nicht wahr ist	Negation
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	mit A auch B wahr ist	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent B	beide wahr oder beide falsch sind	Äquivalenz

Mengen

Menge M	Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte (Elemente) zu einem Ganzen
Element a	Objekt einer Menge $a \in M \Leftrightarrow a$ ist Element (Objekt) der Menge M $a \notin M \Leftrightarrow a$ ist nicht Element der Menge M
Grundmenge Ω	enthält alle im Moment betrachteten Elemente
leere Menge \emptyset	enthält kein Element
Darstellung	$M = \{a, b, c, \dots\}$ (aufzählende Darstellung) $M = \{x \in \Omega \mid x \text{ besitzt eine vorgegebene Eigenschaft}\}$ (beschreibende Darstellung)
$A \subset B$	A ist Teilmenge von $B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A = B$	Gleichheit $\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$	Komplement von A
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $= AB$ (\cap weglassen)	Durchschnitt enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Vereinigung enthält alle Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Differenz enthält alle Elemente, die in A , aber nicht in B enthalten sind
$A \cap B = \emptyset$	disjunkte Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen
$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$	
$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \text{ liegt in mindestens einem } A_i\}$	
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $= \{x \mid x \text{ ist in genau einer der beiden Mengen } A, B \text{ enthalten}\}$	(ausschließendes oder)



Eigenschaften der Mengenoperationen

$$\begin{aligned}
 A \cup \bar{A} &= \Omega & A \cap \bar{A} &= \emptyset & \bar{\bar{A}} &= A & \overline{\Omega} &= \emptyset & \bar{\emptyset} &= \Omega \\
 A \subset B &\Rightarrow (A \cap B = A) \wedge (A \cup B = B) \\
 A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A & & & & & & \text{(Kommutativgesetze)} \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C & & & & & & & & \text{(Assoziativgesetze)} \\
 (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) & & & & & & & & \text{(Distributivgesetze)} \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} & \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} & & & & & & \text{(De Morgansche Regeln)}
 \end{aligned}$$

Direkte Produkte von Mengen (Produktmengen)

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} & \text{Menge der } \mathbf{geordneten Paare} \\
 & & (a, b) \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B \\
 A \times A &= A^2 & \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \mathbb{R}^2 \\
 \prod_{i=1}^n A_i &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \dots, a_n \in A_n\} \\
 &= \text{Menge aller } \mathbf{n\text{-tupel}} (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ mit } a_i \in A_i \text{ f\"ur } i = 1, 2, \dots, n \\
 \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ Faktoren}} &= A^n & \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} &= \mathbb{R}^n
 \end{aligned}$$

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	nichtnegative ganze Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$	rationale Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	nichtnegative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	nichtpositive reelle Zahlen
$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	komplexe Zahlen; imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ mit $i^2 = -1$ (s. S. 15)

Manchmal wird auch die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen gezählt. Wir benutzen jedoch die Bezeichnung \mathbb{N}_0 .

Die **Dezimalbruchentwicklung** einer rationalen Zahl ist endlich oder periodisch. Jede unendliche periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl (s. S. 23). Jede unendliche nichtperiodische Dezimalzahl stellt eine irrationale Zahl, also eine reelle Zahl dar, die nicht rational ist. Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl. \mathbb{R} besteht aus den rationalen Zahlen sowie aus allen irrationalen Zahlen. Jede irrationale Zahl kann als nicht-periodische unendliche Dezimalzahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden. Beispiele für irrationale Zahlen:

$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π (Kreisgröße); $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\dots$ (Eulersche Zahl).

Abbildungen und Funktionen

f: Abbildung von X in Y	$x \in X \Rightarrow y = f(x) \in Y$
	jedes Urbild x besitzt genau ein Bild $f(x) \in Y$
f: Abbildung von X auf Y	jedes $y \in Y$ besitzt mindestens ein Urbild x
(surjektiv)	mit $y = f(x)$
f: eindeutig (injektiv)	$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
	$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f bijektiv	$\Leftrightarrow f$ ist eindeutige Abbildung von X auf Y
zusammengesetzte	
Abbildung g of	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Umkehrabbildung f^{-1}	$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, falls f bijektiv ist
	(inverse Abbildung, Inverse)
$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$	(Assoziativgesetz)
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$	(Reihenfolge beachten)
$f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$	für jedes $x \in X$ und $y \in Y$