Formelsammlung Mathematik

Von

Professor Dr. Karl Bosch

Institut für angewandte Mathematik und Statistik
der Universität Stuttgart-Hohenheim

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Bosch, Karl:
Formelsammlung Mathematik / von Karl Bosch. – München ; Wien :
Oldenbourg, 2002
ISBN 3-486-27254-3

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-27254-3

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In der vorliegenden Formelsammlung sollen die wichtigsten Begriffe, Formeln und mathematische Methoden zusammengestellt werden, die in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften benötigt werden. Der Autor ist bemüht, die einzelnen Formeln und Verfahren sehr ausführlich darzustellen. Durch viele Hinweise und manche Beispiele sollen die Anwendungsmöglichkeiten deutlich gemacht werden. Die ausführliche Darstellung soll dazu dienen, dass spezielle Formeln und Verfahren auch dann benutzt werden können, wenn der jeweilige Stoff in der Grundvorlesung nur ganz knapp oder überhaupt nicht behandelt wurde. Ein Beispiel dafür ist die lineare Programmierung mit dem Simplexverfahren. Ausführlich werden mathematische Begriffe und Beispiele aus der Ökonomie behandelt. Ein Beispiel dafür ist das Kapitel Finanzmathematik. Dadurch wird diese Formelsammlung zu einem ausführlichen Nachschlagewerk für alle Studierenden der Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten und Fachhochschulen und alle Personen, die in ihrem Berufsleben mit Begriffen der Betriebs- und Wirtschaftswissenschaften konfrontiert werden.

Der Aufbau ist so gewählt, dass die Formelsammlung auch von Studierenden anderer Fachrichtungen benutzt werden kann.

Seit vielen Jahren hält der Autor an der Universität Hohenheim die zweisemestrige Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. Aus dieser Lehrtätigkeit ist diese Formelsammlung entstanden.

Für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskripts möchte ich mich bei Frau Dr. S. Kröner, Frau Dipl. Math. R. Ritz, Herrn Dipl. Math. A. Janßen und Herrn Dipl. Math. A. Meister recht herzlich bedanken.

Allen Personen, welche diese Formelsammlung benutzen, wünsche ich viel Erfolg. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar.

Stuttgart-Hohenheim Karl Bosch

Mathematische Symbole und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0	
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	
$\mathbb{R}_-$	Menge der nichtpositiven rellen Zahlen	
$\mathbb{R}^n$	Menge der n-tupel reeller Zahlen (n-dim. Vektoren)	
$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$	
$\wedge$	logisches und	
$\vee$	logisches oder (nichtausschließend)	
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	
$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent B (aus A folgt B und aus B folgt A)	
$\neg$	nicht	
$<$	kleiner	
$>$	größer	
$\leq$	kleiner gleich	
$\geq$	größer gleich	
$\pm$	plus minus	
$\mp$	minus plus	
$\lvert x \rvert$	Betrag von x: $\lvert x \rvert = x$ für $x \geq 0$; $\lvert x \rvert = -x$ für $x < 0$	
$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ n-Fakultät	
$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(offenes Intervall)
$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	(halboffenes Intervall)
$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(halboffenes Intervall)
$[a;\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	(unbeschränktes Intervall)
$(a;\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	(unbeschränktes Intervall)
$(-\infty;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	(unbeschränktes Intervall)
$(-\infty;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	(unbeschränktes Intervall)
$(-\infty;+\infty)$	$\mathbb{R}$	(Menge der reellen Zahlen)
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	(Summe der n Zahlen)
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$	(Produkt der n Zahlen)
$x \in M$	x ist Element von M	
$x \notin M$	x ist nicht Element von M	
$A \cup B$	A vereinigt mit B	(Vereinigung, Vereinigungsmenge)
$A \cap B\ (= A\,B)$	A Durchschnitt B	(Durchschnitt, Schnittmenge)
$\overline{A}$	Komplement von A	
$A \setminus B$	Differenz von A und B	
$\det(A) = \lvert A \rvert$	Determinante der Matrix A	

1. Grundlagen der Geometrie

Planimetrie (ebene Geometrie)

Rechtwinkliges Dreieck

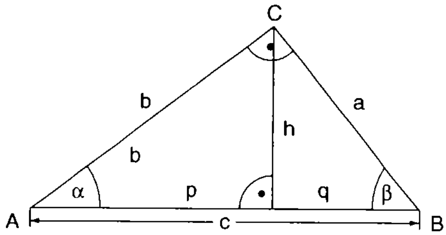
$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \gamma = 90^\circ$

a, b **Katheten**

c **Hypothenuse**

Höhe $h = \frac{a \cdot b}{c}$

p, q **Hypothenusenabschnitte**



Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Kosinus: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{p}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Tangens: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{h}{p} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

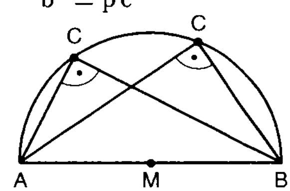
Kotangens: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{p}{h} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ **Höhensatz** $h^2 = p\,q$

Kathetensatz (Satz von **Euklid**) $a^2 = q\,c$; $b^2 = p\,c$

Flächeninhalt $F = \frac{a\,b}{2} = \frac{c\,h}{2} = \frac{c\,b \sin\alpha}{2}$

Thaleskreis
Jeder Peripheriewinkel über dem Kreisdurchmesser beträgt 90°



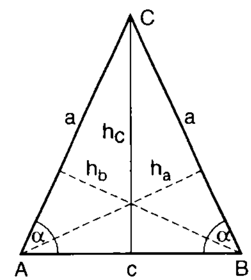
Gleichschenkliges Dreieck

$\alpha = \beta \quad \gamma = 180^\circ - 2\alpha$

Höhen $h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$

$$h_a = h_b = c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{4\,a^2}}$$

Flächeninhalt $F = \frac{c\,h_c}{2} = \frac{c \cdot \sqrt{4\,a^2 - c^2}}{4}$



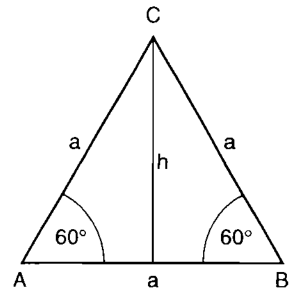
Gleichseitiges Dreieck

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

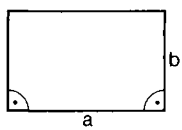
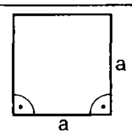
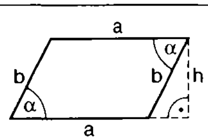
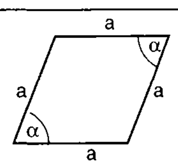
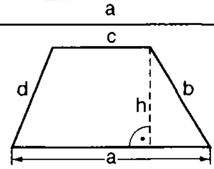
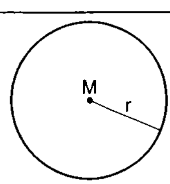
Seitenlänge a

Höhe $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Flächeninhalt $F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

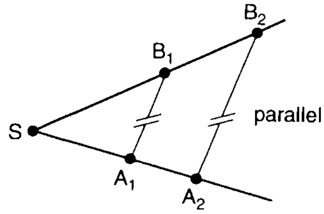


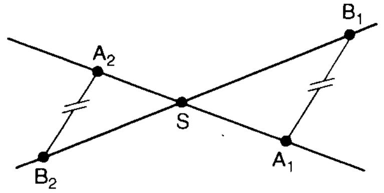
Vierecke und Kreis

Figur		Flächeninhalt	Umfang
Rechteck		$a\,b$	$2\,a + 2\,b$
Quadrat		a^2	$4\,a$
Parallelogramm		$a\,h = a\,b \sin\alpha$	$2\,a + 2\,b$
Rhombus (Raute) (gleichseitiges Parallelogramm)		$a^2 \sin\alpha$	$4\,a$
Trapez (Viereck mit zwei parallelen Seiten)		$\frac{a+c}{2} \cdot h$	$a + b + c + d$
Kreis		$\pi\, r^2$	$2\,\pi\, r$

Strahlensätze

Die beiden Schenkel eines Winkels werden durch zwei parallele Transversalen A_1B_1 und A_2B_2 geschnitten.





1. Die zwischen den Transversalen liegenden Abschnitte auf einem Schenkel verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel. Für die Längen der Strecken gilt

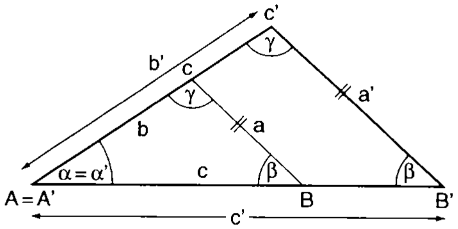
   $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$.

2. Die Längen der Transversalen verhalten sich wie die vom Scheitelpunkt S aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen:

   $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Ähnliche Dreiecke

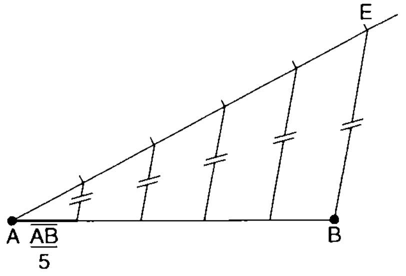
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn jeweils zwei Winkel übereinstimmen. Durch eventuelle Spiegelung kann immer erreicht werden, dass die ähnlichen Dreiecke gleich orientiert sind. Nach dem Strahlensatz verhalten sich in ähnlichen Dreiecken entsprechende Seiten gleich:



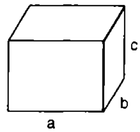
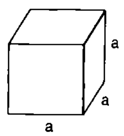
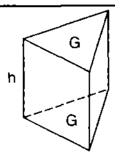
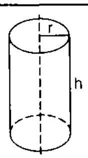
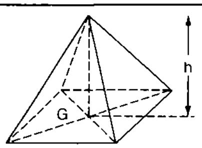
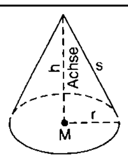
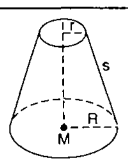
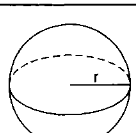
$a' : a = b' : b = c' : c = k$ (k = Ähnlichkeitsfaktor)

Streckenteilung

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann eine Strecke in n gleiche Teile geteilt werden. Dazu werden von einem Endpunkt aus auf einer Hilfsgeraden n gleiche Strecken abgetragen. Durch die Punkte werden Parallelen zur Strecke BE gezogen.



Stereometrie (Volumen und Oberfläche)

Figur		Volumen	Oberfläche O Mantelfläche M
Quader		$a\,b\,c$	$O = 2\,(a\,b + b\,c + c\,a)$
Würfel		a^3	$O = 6\,a^2$
Prisma		$G\,h$ (G = Grundfläche h = Höhe)	$M = U\,h$ (U = Umfang der Grundfläche) $O = U\,h + 2\,G$
Zylinder		$\pi\,r^2\,h$	$O = 2\,\pi\,r^2 + M$ $M = 2\,\pi\,r\,h$
Pyramide		$\frac{1}{3}G\,h$ (G Grundfläche h Höhe)	
Kreiskegel		$\frac{1}{3}\pi\,r^2\,h$	$O = M + \pi\,r^2$ $M = \pi\,r\sqrt{r^2 + h^2}$
Kegel-stumpf		$\frac{\pi\,h}{3}[R^2 + r(R + r)]$	$O = M + \pi\,(R^2 + r^2)$ $M = \pi\,s\,(R + r)$
Kugel		$\frac{4}{3}\pi\,r^3$	$O = 4\,\pi\,r^2$

2. Mathematische Grundlagen

Aussagenlogik

	lies	ist wahr, wenn	Bezeichnung
$A \wedge B$	A **und** B	A und B, also beide wahr sind	Konjunktion
$A \vee B$	A **oder** B	A oder B wahr ist (oder beide)	Disjunktion
$\neg A$	**nicht** A	A nicht wahr ist	Negation
$A \Rightarrow B$	aus A **folgt** B	mit A auch B wahr ist	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	A **äquivalent** B	beide wahr oder beide falsch sind	Äquivalenz

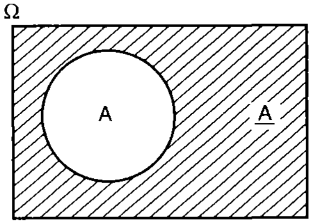
Mengen

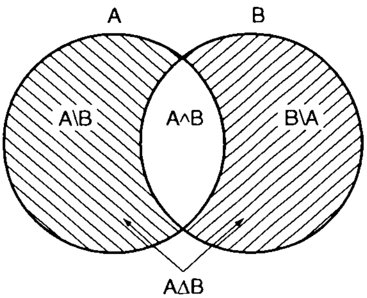
Menge M	Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte (Elemente) zu einem Ganzen
Element a	Objekt einer Menge
	$a \in M \quad \Leftrightarrow \quad$ a ist Element (Objekt) der Menge M
	$a \notin M \quad \Leftrightarrow \quad$ a ist nicht Element der Menge M
Grundmenge Ω	enthält alle im Moment betrachteten Elemente
leere Menge $\emptyset$	enthält kein Element
Darstellung	$M = \{a, b, c, \ldots\}$ (aufzählende Darstellung)
	$M = \{x \in \Omega \mid x$ besitzt eine vorgegebene Eigenschaft$\}$ (beschreibende Darstellung)
$A \subset B$	A ist **Teilmenge** von B $\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A = B$	**Gleichheit** $\Leftrightarrow (A \subset B \ \wedge \ B \subset A)$
$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$	**Komplement** von A
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $= A\,B$ ($\cap$ weglassen)	**Durchschnitt** enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung** enthält alle Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	**Differenz** enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind
$A \cap B = \emptyset$	**disjunkte** Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \;= \{x \mid x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \;= \{x \mid x \text{ liegt in mindestens einem } A_i\}$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad \textbf{(ausschließendes oder)}$$
$$= \{x \mid x \text{ ist in genau einer der beiden Mengen } A, B \text{ enthalten}\}$$





Eigenschaften der Mengenoperationen

$A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad \overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = \Omega$

$A \subset B \;\Rightarrow\; (A \cap B = A) \wedge (A \cup B = B)$

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetze)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetze)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetze)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgansche Regeln)

Direkte Produkte von Mengen (Produktmengen)

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ Menge der **geordneten Paare** (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$

$A \times A = A^2 \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

= Menge aller **n-tupel** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{n Faktoren}} = A^n \qquad \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{n Faktoren}} = \mathbb{R}^n$$

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	**natürliche** Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	**nichtnegative ganze** Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	**ganze** Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$	**rationale** Zahlen
$\mathbb{R}$	**reelle** Zahlen
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	**nichtnegative reelle** Zahlen
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	**nichtpositive reelle** Zahlen
$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	**komplexe** Zahlen; imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ mit $i^2 = -1$ (s. S. 15)

Manchmal wird auch die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen gezählt. Wir benutzen jedoch die Bezeichnung $\mathbb{N}_0$.

Die **Dezimalbruchentwicklung** einer rationalen Zahl ist endlich oder periodisch. Jede unendliche periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl (s. S. 23). Jede unendliche nichtperiodische Dezimalzahl stellt eine irrationale Zahl, also eine reelle Zahl dar, die nicht rational ist. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl. $\mathbb{R}$ besteht aus den rationalen Zahlen sowie aus allen irrationalen Zahlen. Jede irrationale Zahl kann als nichtperiodische unendliche Dezimalzahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden. Beispiele für irrationale Zahlen:

$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π (Kreisgröße); $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots$ (Eulersche Zahl).

Abbildungen und Funktionen

f: Abbildung von X **in** Y	$x \in X \Rightarrow y = f(x) \in Y$ jedes **Urbild** x besitzt genau ein **Bild** $f(x) \in Y$
f: Abbildung von X **auf** Y (surjektiv)	jedes $y \in Y$ besitzt mindestens ein Urbild x mit $y = f(x)$
f: **eineindeutig (injektiv)**	$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f **bijektiv**	$\Leftrightarrow$ f ist eineindeutige Abbildung von X auf Y
zusammengesetzte Abbildung $g \circ f$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Umkehrabbildung f^{-1}	$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, falls f bijektiv ist (**inverse Abbildung, Inverse**)
$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$	(Assoziativgesetz)
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$	(Reihenfolge beachten)
$f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$	für jedes $x \in X$ und $y \in Y$