Mathematik Übungsbuch für Ökonomen

Aufgaben mit Lösungen

Von

Professor Dr. Otto Opitz

6., durchgesehene Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Opitz, Otto:
Mathematik / von Otto Opitz – München ; Wien :
Oldenbourg.

Übungsbuch für Ökonomen : Aufgaben mit Lösungen. – 6.,
durchges. Aufl. - 2000
ISBN 3-486-25528-2

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Huber KG, Dießen

ISBN 3-486-25528-2

Vorwort

Das vorliegende Arbeitsbuch enthält 100 Aufgaben, die sich mit den für die Ökonomie wichtigsten mathematischen Grundlagen befassen. Die Auswahl der Aufgaben orientiert sich an der Darstellung

> **Opitz, O.: Mathematik - Lehrbuch für Ökonomen**
> **Oldenbourg-Verlag, München, Wien.**

Teilweise wurden auch Prüfungsaufgaben, die an der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg in den vergangenen Jahren gestellt wurden, neu aufbereitet. An dieser Stelle darf ich mich bei allen meinen ehemaligen und gegenwärtigen Mitarbeitern, die seit dem Jahr 1978 an der Aufgabenstellung zur Klausur "Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften" beteiligt waren, herzlich bedanken.

Der Aufgabenteil des Buches ist in 4 Teile gegliedert:

A. 18 Aufgaben zur Aussagenlogik und Mengenlehre
(Lehrbuch - Kapitel 2 und 3)

B. 32 Aufgaben zur linearen Algebra, d.h., zu Matrizen, Vektoren, zu linearen Gleichungen, Abbildungen und zur linearen Optimierung sowie zu Eigenwertproblemen bei Matrizen
(Lehrbuch - Kapitel 4 bis 6)

C. 41 Aufgaben zur Analysis, d.h., zu Folgen und Reihen, zu elementaren reellen Funktionen einer und mehrerer Variablen, ihrer Differentiation und Integration
(Lehrbuch - Kapitel 7 bis 11)

D. 9 Aufgaben zu Differenzen- und Differentialgleichungen
(Lehrbuch - Kapitel 12)

Um dem Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgaben eine Kontrolle seiner Überlegungen zu ermöglichen, werden in einem umfangreichen Teil E alle Aufgaben ausführlich gelöst. Bei der Entwicklung der Lösung wird jeweils auf relevante Definitionen und Sätze, gelegentlich auch auf Beispiele, des oben angegebenen Lehrbuches verwiesen.

Für die kritische Durchsicht des Manuskripts, sowie die Organisation und Durchführung der aufwendigen Schreibarbeit in LaTeX möchte ich mich sehr herzlich bei meinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern bedanken. Es sind dies insbesondere Herr Dr. Thomas Bausch, Herr Dr. Raimund Wiedemann, Herr Dipl.-math. oec. Rainer Lasch, Frau Ingrid Betz sowie die studentischen Tutoren Ekkehard Bitterolf und Stephan Jacoby. Einmal mehr gilt mein ausdrücklicher Dank auch Herrn Martin Weigert und dem Oldenbourg-Verlag für die reibungslose Zusammenarbeit.

Otto Opitz

Inhaltsverzeichnis

A. Aufgaben zu Aussagenlogik und Mengen Lehrbuch — Kapitel 2 und 3

Aufgabe 1

Gegeben sind die Aussagen **A, B, C, D**.

a) Für den Fall, daß **A** und **D** wahr, **B** und **C** falsch sind, bestimme man den Wahrheitsgehalt der verknüpften Aussagen:

1) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{D}) \vee \mathbf{D}$
2) $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}$
3) $(\overline{\mathbf{A}} \Longleftrightarrow \mathbf{A}) \Longleftrightarrow (\overline{\mathbf{B}} \Longleftrightarrow \mathbf{B})$
4) $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Longleftrightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \overline{\mathbf{B}})$

b) Man ermittle die Wahrheitstafeln der verknüpften Aussagen

1) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{B}$
2) $\mathbf{B} \wedge (\overline{\mathbf{A}} \Rightarrow \overline{\mathbf{B}}) \Rightarrow \mathbf{A}$

und interpretiere die Ergebnisse.

c) Zu den Aussagen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ stelle man die Aussage "entweder **A** oder **B**" formal dar.

Aufgabe 2

a) Man zeige, daß die quadratische Gleichung $x^2 + px + 1 = 0$ genau dann eine reelle Lösung besitzt, wenn p nicht im offenen Intervall $\langle -2, 2 \rangle$ enthalten ist.

b) Gegeben sei die Aussage:

$$\mathbf{A}(x): \; x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{mit } x \in \mathbf{R}$$

Welche der folgenden All- bzw. Existenzaussagen

$$\bigwedge_x \overline{(x^2 + x + 1 = 0)}, \quad \bigvee_x (x^2 + x + 1 = 0), \quad \bigvee_x \overline{(x^2 + x + 1 = 0)}$$

$$\overline{\bigwedge_x (x^2 + x + 1 = 0)}, \quad \overline{\bigvee_x (x^2 + x + 1 = 0)}$$

sind wahr ?

Aufgabe 3

a) Für $a \in \mathbf{R}$ beweise man die Äquivalenz

$$(a+1)^5 > (a+1)^4 \Longleftrightarrow a > 0 \ .$$

b) Mit den Aussagen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &: \ a \in \langle -1, 1 \rangle \\ \mathbf{B} &: \ \frac{a}{|a+1|} \leqq \frac{a}{|a-1|} \end{aligned}$$

beweise man $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \not\Rightarrow \mathbf{A}$.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbf{N}$ die folgenden Aussagen wahr sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(n) &: \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \\ \mathbf{A}_2(n) &: \ \prod_{i=1}^{n} i^i < n^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Man zeige mit Hilfe vollständiger Induktion nach k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), daß jede n-elementige Menge $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit genau k Elementen besitzt.

b) Zur Menge $M = \{a, b, c, d\}$ bestimme man die Menge T_1 aller 3-elementigen Teilmengen sowie die Menge T_2 aller Teilmengen, die a, b als Elemente enthalten. Man gebe ferner die Mengen $S_1 = T_1 \cap T_2$, $S_2 = T_1 \backslash T_2$, $S_3 = T_2 \backslash T_1$ an und untersuche S_1, S_2, S_3 auf Teilmengenbeziehungen. Welche Teilmengenbeziehungen existieren ferner zwischen den Elementen von S_1, S_2, S_3?

Aufgabe 6

Der Ski-Club "Buckelpiste" möchte anläßlich seines 1000-tägigen Bestehens eine alpine Vereinsmeisterschaft in den Disziplinen Abfahrt (A), Slalom (S) und Riesenslalom (RS) austragen, zu der sich 40 Teilnehmer meldeten. Selbstverständlich darf auch in mehreren Disziplinen gestartet werden.

Für die Abfahrt meldeten sich 15 Läufer, die bis auf 7 nur diese eine Disziplin bestreiten. Am Slalom wollen 20 Läufer teilnehmen, die allesamt auch im Riesenslalom gemeldet sind. An der Abfahrt beteiligt sich von ihnen außer zwei Sportskanonen, die als einzige alle drei Disziplinen belegten, niemand.

a) Wie viele Läufer starten insgesamt im Riesenslalom, wie viele davon nur im Riesenslalom, wie viele kombinieren den Riesenslalom mit dem Slalom, wie viele den Riesenslalom mit der Abfahrt?

b) In jeder der drei Disziplinen wird genau eine Gold-, eine Silber- und eine Bronzemedaille vergeben. Wie viele Möglichkeiten der Medaillenverteilung gibt es in der Abfahrt, im Slalom, im Riesenslalom?

c) Am Abend werden die Medaillengewinner gefeiert. Dabei ermittelte man unter den 40 Teilnehmern 31 Biertrinker, 22 Weintrinker, ferner 6 Personen, die Bier und Wein ablehnen. Wie viele Personen trinken Bier und Wein, wie viele ausschließlich Bier, wie viele ausschließlich Wein?

Aufgabe 7

a) Ein Autokennzeichen bestehe neben dem Städtesymbol aus einem oder zwei Buchstaben sowie aus einer ein- bis dreiziffrigen Zahl. Wie viele verschiedene Kennzeichen können in Augsburg ausgegeben werden, wenn 26 Buchstaben zur Wahl stehen?

b) Ein Autohersteller bietet für eines seiner Fahrzeuge 20 Extras zur freien Auswahl an. Wie viele verschiedene Zusammenstellungsmöglichkeiten gibt es?

c) Im Sonderpaket "Speedy" können aus jedem der drei Teilpakete Fahrwerk, Motor, Outfit, die ihrerseits jeweils aus 5 Komponenten bestehen, zwei verschiedene Ausstattungskomponenten ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?

d) Die Firma "Blaue Wolke" möchte ihren Fuhrpark um 5 Fahrzeuge aufstocken. Sie kann dabei unter drei Motortypen auswählen. Wie viele Bestellmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe 8

Eine Basketballmannschaft fährt mit 10 Spielern auf ein Turnier. Vor Beginn der Spiele muß sie aus ihren Reihen einen Schiedsrichter und einen Schriftführer bestimmen, die somit als aktive Spieler ausscheiden.

a) Wie viele unterschiedliche Schiedsrichter - Schriftführer - Kombinationen kann die Mannschaft stellen?

b) Der Schriftführer muß die aktiven Spieler in eine Tabelle eintragen. Wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten stehen ihm dafür zur Verfügung?

c) Wie viele Möglichkeiten, aus den aktiven Spielern 5 Feldspieler auszuwählen, gibt es?

d) Nach dem Spiel will sich die Mannschaft für ein Photo in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten besitzt sie dafür, wenn innerhalb der rot gekleideten aktiven Spieler und zwischen den schwarz gekleideten Personen (Schiedsrichter und Schriftführer) nicht unterschieden werden soll?

Aufgabe 9

Zu ihrem 2000-jährigen Jubiläum veranstaltet eine Stadt einen Festumzug mit 5 mobilen Kapellen, 10 Schützenvereinen und 5 historischen Gruppen.

a) Wie viele unterschiedliche Anordnungen der 20 Teilnehmergruppen des Festzuges gibt es, falls jeweils innerhalb der Kapellen, Schützenvereine und historischen Gruppen nicht unterschieden werden soll?

b) Für einen anschließenden Festakt müssen 2 Kapellen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

c) An jedem der 3 folgenden Tage soll jeweils ein Schützenverein salutieren. Wie viele Möglichkeiten, 3 Vereine auszuwählen, gibt es, falls jeder Schützenverein dabei auch mehrmals beansprucht werden kann? Auf die Reihenfolge soll es dabei nicht ankommen.

d) Die Kostüme der 5 historischen Gruppen werden bewertet und in eine Rangfolge gebracht. Wie viele unterschiedliche Anordnungen der Gruppen können dabei auftreten?

e) Für die 3 besten historischen Kostümgruppen stehen Preise zur Verfügung. Wie viele Gruppenkombinationen sind für diese Plätze möglich?

Aufgabe 10

Die Marktforschungsabteilung einer Gummibärchenfabrik möchte die Attraktivität von 5 Farben untersuchen. Dazu werden mit 1000 Kindern folgende Tests durchgeführt:

a) Jedes Kind bekommt von jeder Farbe ein Gummibärchen und soll die 5 Bärchen gemäß seiner Farbpräferenz anordnen. Wie viele unterschiedliche Anordnungen können dabei auftreten?

b) Für das Gummibärchenkonfekt sollen in Zukunft genau 3 Farben verwendet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Farben 3 verschiedene auszuwählen?

c) Die 3 am stärksten präferierten Farben sollten im Gummibärchenkonfekt in Zukunft je nach Beliebtheit unterschiedlich stark vertreten sein. Wie viele Möglichkeiten gibt es, unterschiedliche 3-Farben-Anordnungen der angegebenen Art aus den 5 Farben zu wählen?

d) Um die unterschiedliche Beliebtheit der 5 Farben stärker zu quantifizieren, bekommt jedes Kind von jeder Farbe 5 Gummibärchen (also insgesamt 25 Gummibärchen), aus denen es entsprechend seiner Präferenz 5 Bärchen auswählen und anordnen soll. Wie viele unterschiedliche Anordnungen können dabei bei 1000 Kindern auftreten?

e) In Zukunft sollen maximal 3 Farben im Gummibärchenkonfekt enthalten sein. Wie viele unterschiedliche Farbkombinationen können auf den ersten drei Positionen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge entstehen?

Aufgabe 11

Ein Verlag will für 1991 einen Wandkalender mit Landschaftsbildern produzieren, wobei pro Monat ein Bild enthalten sein soll. Nach einer Vorauswahl kommen noch 30 Bilder in Frage.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, aus dem Vorrat von 30 Bildern 12 verschiedene auszuwählen?

b) Unter den 30 Bildern seien je 9 Sommer- bzw. Winterbilder und je 6 Frühlings- bzw. Herbstbilder. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den 30 Bildern 12 verschiedene so auszuwählen, daß jede Jahreszeit mit drei Bildern vertreten ist? Innerhalb jeder Jahreszeit soll die Reihenfolge der Bilder unberücksichtigt bleiben.

c) Eine der unter b) angegebenen Möglichkeiten sei realisiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann noch, die 12 ausgewählten Bilder dem jahreszeitlichen Ablauf entsprechend anzuordnen, wobei mit zwei Winterbildern für Januar, Februar begonnen und mit einem Winterbild für Dezember aufgehört werden soll, und innerhalb der zu einer Jahreszeit gehörenden Bilder die Reihenfolge jeweils frei wählbar ist?

Aufgabe 12

a) In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wie viele Möglichkeiten gibt es, so daß
   1) genau 5 Lampen brennen?
   2) mindestens 5 Lampen brennen?

b) Drei Ehepaare passieren eine Drehtür. Dabei geht jede der 6 Personen einzeln durch die Drehtür, doch passieren zwei zusammengehörende Ehepartner die Drehtür stets unmittelbar hintereinander. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es für die 6 Personen, durch die Drehtür zu gehen,
   1) wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß bei jedem Ehepaar die Dame zuerst durch die Tür geht?
   2) ohne die Voraussetzung aus 1)?

Bei einer Tanzparty sind 10 Damen und 12 Herren anwesend.

c) Wie viele Tanzpaarkombinationen sind für den ersten Tanz möglich, wenn zu einem Tanzpaar jeweils eine Dame und ein Herr gehören sollen?

d) Die im ersten Tanz allein gebliebenen Herren dürfen für den zweiten Tanz jeweils einen Herrn der ersten Runde ablösen. Wie viele neue Tanzpaarkombinationen sind möglich?

e) Wie viele unterschiedliche Tanzpaare hat ein unparteiischer Gast als Schiedsrichter nach dem zweiten Tanz tatsächlich zu bewerten?

Aufgabe 13

Gegeben seien die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ sowie die Relationen

$$\begin{aligned} R &= \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,d)\} \subset M \times M \\ S &= \{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\} \subset M \times M. \end{aligned}$$

a) Man bestimme die inversen Relationen R^{-1}, S^{-1} sowie die Kompositionen $R^{-1} \circ S$ und $S^{-1} \circ R$.

b) Man gebe zu den in a) ermittelten Relationen die Relationsgraphen und Relationstabellen an.

c) Welche der in a) ermittelten Relationen erfüllen die Eigenschaften einer Abbildung der Form $f : M \to M$?

d) Man untersuche die in c) erhaltenen Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Relationen

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}_+^2 : x_1 \leqq x_2 \leqq 2\} \\ S_2 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}_+^2 : x_1 + x_2 = 2\} \\ S_3 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}_+^2 : x_1 > 2\} \end{aligned}$$

sowie die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+^2$

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= (0,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) &= (x_1 + x_2, x_2)\,. \end{aligned}$$

a) Man ermittle die Kompositionen $S_1 \circ S_2$, $S_2 \circ S_1$, $S_3 \circ S_1$ sowie deren Umkehrrelationen $(S_1 \circ S_2)^{-1}$, $(S_2 \circ S_1)^{-1}$, $(S_3 \circ S_1)^{-1}$ und stelle die Ergebnisse sowie S_1, S_2, S_3 graphisch dar.

b) Man ermittle die Mengen $f_1(S_1)$, $f_2(S_1)$, $(f_2 \circ f_1)(S_1)$, $f_1(S_2)$, $f_2(S_2)$, $(f_1 \circ f_2)(S_2)$ und stelle diese graphisch dar.

Aufgabe 15

a) Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{\text{rot, grün, gelb, blau}\}$ sowie die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} f_1 & : & A \to B & \text{mit} \quad f_1(a) = 1,\ f_1(b) = 2,\ f_1(c) = 3 \\ f_2 & : & B \to C & \text{mit} \quad f_2(2) = \text{rot},\ f_2(1) = f_2(3) = f_2(4) = \text{grün}. \end{array}$$

Welche der Abbildungen f_1, f_2 ist surjektiv, injektiv, bijektiv? Gegebenenfalls ermittle man f_1^{-1}, f_2^{-1}, $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_1$.

b) Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} g_1 & : & \mathbf{R} \to \langle 0, \infty \rangle & \text{mit} \quad g_1(x) = 2^x \\ g_2 & : & \mathbf{R} \to \langle 0, 1] & \text{mit} \quad g_2(x) = (x^2 + 1)^{-1}\ . \end{array}$$

Welche der Abbildungen g_1, g_2 sind surjektiv, injektiv, bijektiv? Gegebenenfalls ermittle man g_1^{-1}, g_2^{-1}, $g_1 \circ g_2$, $g_2 \circ g_1$.

Aufgabe 16

Eine Unternehmung möchte ein neues Produkt in drei Ausführungen a, b, c auf den Markt bringen. Eine Umfrage zur Ermittlung der Kaufneigung bei alternativem Angebot führte zu folgendem Ergebnis:

Angebot	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$
Kaufneigung in %	60	40	30	80	80	70

a) Man ermittle die prozentuale Kaufneigung für a und b $(a \wedge b)$, a und c $(a \wedge c)$, b und c $(b \wedge c)$, sowie für das Angebot $\{a, b, c\}$.

b) Man gebe die Abbildung f, die jedes mögliche Angebot X mit $X \subset \{a, b, c\}$, $X \neq \emptyset$ durch den Quotienten $f(X) = \dfrac{\text{Kaufneigung in \% bei } X}{|X|}$ bewertet, in Form einer Wertetabelle an.

c) Auf dem Definitionsbereich D von f ist eine Relation P durch

$$(X, Y) \in P \iff f(X) \leqq f(Y)$$

definiert. Man zeige, daß P eine vollständige Präordnung auf D darstellt und bestimme alle größten Elemente von D bzgl. P.