Lehr- und Handbücher zu Geld, Börse, Bank und Versicherung

Herausgegeben von
Universitätsprofessor Dr. Guido Eilenberger

Bisher erschienene Werke:

Averdiek-Bolwin, Die Effizienz von Aktienbörsen
Beike · Barckow, Risk-Management mit Finanzderivaten, 2. Auflage
Beyer, Risikomanagement beim PKW-Leasing
Biermann, Die Mathematik von Zinsinstrumenten
Blattner, Internationale Finanzierung
Breit · Reinhart, Finanzierung der Unternehmung: Zinsmanagement
Döhring, Gesamtrisiko-Management von Banken
Dross, Genußrechte
Dürr, Investor Relations, 2. Auflage
Eilenberger, Bankbetriebswirtschaftslehre, 7. Auflage
Eilenberger, Betriebliche Finanzwirtschaft, 6. Auflage
Herzberger, Einführung in die Finanzmathematik
Jenkis, Wohnungsbaufinanzierung
Knoppe, Strategische Allianzen
Meise, Realoptionen als Investitionskalkül
Thoma, Chaostheorie, Wirtschaft und Börse, 2. Auflage
Widdel, Theorie und Praxis der Aktienspekulation

Einführung in die Finanzmathematik

Von
Universitätsprofessor
Dr. Jürgen Herzberger

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Dieses Buch ist
Alexandra und Janislav
gewidmet

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Herzberger, Jürgen:
Einführung in die Finanzmathematik / von Jürgen Herzberger. -
München ; Wien : Oldenbourg, 1999
(Lehr- und Handbücher zu Geld, Börse, Bank und Versicherung)
ISBN 3-486-24869-3

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-24869-3

Vorwort

Es gibt bereits eine stattliche Anzahl von einführenden Lehrbüchern in die Finanzmathematik im deutschsprachigen Raum. Deshalb bedarf es wohl einer kurzen Begründung, warum diesen hiermit ein weiteres, neues hinzugefügt werden soll. Die meisten der gängigen – oftmals in mehreren Auflagen erschienenen – Lehrbücher richten sich jedoch entweder an Ökonomen oder sind eher auf das Fachhochschulniveau ausgerichtet. Mit dem derzeitigen starken Aufkommen von Universitätsstudiengängen Diplom-Mathematik mit Ausrichtung Wirtschaftsmathematik oder sogar Finanzmathematik erwächst die Aufgabe der Konzipierung eines einführenden Lehrbuches, das jenen Hörerkreis anspricht. Während die meisten existierenden Lehrbücher sich mehr oder weniger auf das Anwenden der geometrischen Reihe beschränken, können nun auch etwas anspruchsvollere Hilfsmittel für diesen Hörerkreis eingesetzt werden. Oftmals steht in den Lehrbüchern auch der finanztechnische Rahmen im Vordergrund, doch dieser ist – wegen der sich immer rascheren Änderung des gesetzlichen Umfeldes (neuerdings bedingt durch die europäische Vereinigung (siehe 3.9)) – zeitlichen Änderungen unterworfen. Ein Lehrbuch für Mathematiker sollte sich nicht zu sehr in solchen Details verlieren sondern den Leser in die Lage versetzen das mathematische Modell zu erstellen und dann dieses einer brauchbaren Lösung zuzuführen. In diesem Zusammenhang kann man von einem angehenden Mathematiker erwarten, daß er auch Hilfsmittel aus dem Bereich der Numerik einzusetzen versteht. Das eröffnet die neue Möglichkeit in diesem Buche, die entstehenden formelmäßigen Zusammenhänge – hier Polynomgleichungen – einer ausreichend guten Lösung zuzuführen. Kurz gesagt, der ganze Themenkreis der Effektivzinsberechnung, welcher anderswo nur angedeutet wird, kann hier nun ausführlich und sehr allgemein behandelt werden. Dies geschieht im zweiten Teil des Buches. Um das Buch möglichst autark zu halten, wird nicht nur vor dem ersten Teil (§ 2 – § 5) der mathematische Formelapparat bereitgestellt, sondern erst recht vor dem zweiten Teil (§ 7 - § 9) sehr ausführlich das mathematische Handwerkszeug besprochen (§ 6). In den letzten Paragraphen findet sich viel Neues zur Finanzmathemtaik in strikt mathematischer Formulierung und es eignet sich somit auch als Grundlage für Seminare über Anwendungen von Numerischer Mathematik. Damit kann das Buch zwei Zwecke gleichzeitig erfüllen. Einmal ist es eine Einführung in die Finanzmathematik für Universitätsstudenten mit entsprechend klarer Formulierung. Zum anderen gibt es Beispiele für die praktische Lösung von Modellproblemen, wie sie in der Finanzmathematik auftreten.

Das Buch ging aus einem Vorläufer, dem Bändchen „Mathematische Zinsberechnungen“ [Her95] hervor und diente zum ersten Male im Wintersemester 1997/98 als Grundlage einer entsprechenden Vorlesung an der Universität Oldenburg. Es enthält – vor allem in seinem zweiten Teil – eine ganze Reihe von Resultaten, die zusammen mit Studenten in den letzten zwei Jahren erzielt wurden. Dabei möchte ich konkret in zeitlicher Folge die Herren Dipl.-Math. G. Haase und Dipl.-Math. H. Siebenbrodt und die Frauen Dipl.-Math. K. Bachhaus und Dipl.-Math. K. Ralle nennen (mit entsprechenden Verweisen im Buch). Auch möchte ich die vielen Hinweise auf Fehler durch Hörer und Prüfungskandidaten aus meiner Vorlesung nicht vergessen zu erwähnen.

Der Vollständigkeit halber soll nun erwähnt werden, mit welchen Hilfsmitteln die im Buch gebrachten Beispiele gerechnet wurden. Die meisten Tabellen in § 2 wurden mit dem Taschenrechner CASIO *fx*- 50F berechnet. Fast alle übrigen Beispiele in dem Buch wurden mit dem in BASIC programmierbaren Pocket Computer SHARP PC-1401 gerechnet. Lediglich die Rechnungen in § 9 und die dortigen Graphiken wurden (von G. HAASE) auf einem PC vorgenommen, bzw. erstellt, vielfach mit Hilfe von PASCAL-XSC [Kla]. Desgleichen wurden einige Beispiele in § 8 auf einem PC gerechnet und schließlich wurde im Anhang B als Hilfsmittel der Business-Finanz-Taschenrechner SHARP EL-735 verwendet.

Damit komme ich zu den üblichen Danksagungen an dieser Stelle, die mir jedoch nicht nur eine formale Verpflichtung sind. Zuerst gilt mein aufrichtiger Dank der Schreibkraft Frau Chr. Büßelmann, welche mit großer Sorgfalt und in gewohnter Routine das Schreibmaschinenmanuskript in eine druckfertige Vorlage umsetzte. Ferner danke ich Herrn Professor Dr. G. Mayer (Rostock), der sich der Mühe unterzog das Rohmanuskript auf Unrichtigkeiten durchzusehen und mir viele entsprechende Hinweise gab. Schließlich danke ich dem Lektor des Oldenbourg Verlages, Herrn Dipl.-Volksw. M. Weigert, für die spontane Bereitschaft ein so mathemtisch geprägtes Buch in die Reihe der Wirtschaftswissenschaftlichen Literatur mit aufzunehmen. Es bleibt zu hoffen, daß eine entsprechend starke Resonanz auf das Erscheinen des Buches dies belohnt und auch die Mühe aller Beteiligten rechtfertigt.

J. Herzberger

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Mathematische Grundlagen

1.1 Mathematische Preliminarien

Wir betrachten hier den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den vier Grundverknüpfungen +, -, $\times$ und /. Eine Teilmenge davon sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Manchmal ist es notwendig einer nichtnegativen reellen Zahl (oftmals eines Dezimalbruches) eine natürliche Zahl zuzuordnen. Dies soll mit der Funktion $[\cdot]$ geschehen. Sie ist definiert für alle nichtnegativen reellen Zahlen x durch

$$[x] = \max\left\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqq x\right\} \tag{1.1}$$

Innerhalb der natürlichen Zahlen ist eine wichtige Funktion die Fakultät $n!$. Diese ist erklärt durch die Zuordnung

$$0! = 1,\ n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n > 0 \tag{1.2}$$

Man kann die Fakultät für $n > 0$ rekursiv durch folgende Rechenvorschrift (Algorithmus) berechnen:

$f = 1;$
für $k = 1(1)n$ setze $f = f \cdot k$;
$n! = f;$

Dabei bedeutet $1(1)n$ kurz: von 1 beginnend in Schritten von 1 bis n.

Bsp.: $4! = 24,\ 69! = 1.7112245\ldots \cdot 10^{98}$

Das letzte Beispiel zeigt, daß 70! bereits größer als 10^{100} ist, was für manchen Taschenrechner schon zu einer Zahlbereichsüberschreitung führt.

Eine bei Beweisen oftmals verwendete Eigenschaft der natürlichen Zahlen führt auf das Induktionsprinzip bei Beweisen. Es wird häufig beim Beweis von Formeln verwendet. Die diesem Beweisprinzip zugrunde liegende Eigenschaft von $\mathbb{N}_0$ ist die folgende:

> *Enthält eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die 0 und folgt aus der Tatsache, daß mit einer beliebigen natürlichen Zahl n auch ihre nachfolgende natürliche Zahl $n+1$ zur Teilmenge gehört, dann ist die Teilmenge bereits ganz $\mathbb{N}_0$.*

Man verwendet dieses Prinzip vielfach beim Beweis der Richtigkeit einer Formel $F(n)$, die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängt, indem man die Richtigkeit für $n = 0$ (oft einfach) nachrechnet und dann zeigt, daß diese auch für $n+1$ richtig ist, falls sie bereits für n richtig war.

Bei Ausdrücken in der Zinsrechnung kommt oftmals die binomische Formel vor. Für beliebige reelle Zahlen a und b lautet diese:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\ &= a^n + n \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + n \cdot ab^{n-1} + b^n,\ n \in \mathbb{N}_0, \\ &n > 0\end{aligned} \tag{1.3}$$

Die in der Summe auf der rechten Seite auftretenden Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binomialkoeffizienten und sind definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \in \mathbb{N}_0,\ k > 0,\ k \le n \tag{1.4}$$

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ können für moderate Werte von n Tabellen entnommen werden. Ansonsten sollen sie mit Hilfe eines Rechners (näherungsweise) ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, daß wegen des oben gegebenen Beispiels für 70! bei großen Werten von n bereits Zahlbereichsüberschreitungen auftreten können, wenn man die Formel (1.4) naiv anwendet. Hilfreicher ist z. B. die rekursive Berechnungsvorschrift für $\binom{n}{k}$:

$b = 1;$
für $i = 1(1)k$ setze $b = [(n-i+1)/(k-i+1)]b$;
$\binom{n}{k} = b;$

Bei dieser Vorschrift tritt die Zahlbereichsüberschreitung erst bei wesentlich größeren Werten von n ein, insbesondere dann, wenn $\binom{n}{k}$ selbst nicht mehr als Rechnerzahl darstellbar ist.

Zum Beweis einer in der elementaren Zinsrechnung oftmals verwendeten Ungleichung wollen wir den Induktionsbeweis einmal durchführen. Es handelt sich dabei um die BERNOULLIsche Ungleichung:

$$(1+i)^n \geqq 1 + n \cdot i, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } i > -1 \tag{1.5}$$

Für $n = 0$ ist diese Ungleichung trivialerweise richtig. Sie werde für n als richtig angenommen. Dann multiplizieren wir beide Seiten der obigen Formel (1.5) mit dem Faktor $(1+i) > 0$ und erhalten

$$(1+i)^{n+1} \geqq 1 + i + n \cdot i + i^2 \geqq 1 + (n+1) \cdot i$$

was die Ungleichung für den Wert $n+1$ darstellt. Somit gilt Formel (1.5) für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $i \neq 0$ und $n > 1$ steht immer $>$ in (1.5). (Verschärfung der BERNOULLIschen Ungleichung.)

Eine andere wichtige Funktion in der Finanzmathematik ist die Expotentialfunktion exp. Sie ist definiert durch die unendliche Reihe (siehe Abschnitt 1.1)

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \tag{1.6}$$

Diese Reihe ist für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ konvergent und damit ist $\exp(x)$ für alle diese Argumente definiert. Im Abschnitt über kontinuierliche Verzinsung (2.7) benötigen wir folgende Ungleichung für die Funktion exp :

$$\exp(x) \geqq 1 + x,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Für $x \geq 0$ ist dies aus der Definition (1.6) des Ausdruckes für $\exp(x)$ unmittelbar klar. Wir wollen diese Ungleichung hier noch für die Werte $x \geqq -3$ elementar beweisen, da in der Zinsrechnung im allgemeinen keine sehr großen Werte von x auftreten. Es gilt für $x = -|x|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\exp(-|x|) &= 1 - |x| + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{|x|}{3}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{|x|}{5}\right) + \ldots \\ &\geqq 1 - |x|,\quad |x| \leqq 3\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung aber für alle Werte $x \geqq -3$ bewiesen. Sie gilt aber darüber hinaus ganz allgemein für alle Werte von x .

Polynome und rationale Funktionen spielen in der Finanzmathematik eine zentrale Rolle. Ein Polynom vom Grade n ist dabei definiert durch den Funktionsausdruck

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0$$

und aus zwei Polynomen p und q (von im allgemeinen verschiedenem Grad) erhält man für alle Werte x mit $q(x) \neq 0$ die rationale Funktion r durch

$$r(x) = p(x)/q(x)$$

Aus der Analysis her ist der Begriff der Ableitung f' einer Funktion f bekannt. Eine mögliche Definition dafür ist (vergleiche Abschnitt 6.1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.8}$$

Die Bildung der Ableitung von Funktionen besitzt eine wichtige Eigenschaft, welche sich unmittelbar aus der Definition ergibt:

Die Bildung der Ableitung ist eine lineare Operation bei differenzierbaren Funktionen.

Dies bedeutet ausgeschrieben, daß für differenzierbare Funktionen f und g und reelle Zahlen a und b gilt

$$\frac{d}{dx}\left(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\right) = a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x)$$

Für Potenzen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ ist,

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Dies läßt sich einfach folgendermaßen zeigen:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &\quad = \lim_{n \to 0} \left(x^n + n \cdot x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - x^n \right) \Big/ h \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für alle ganzzahligen n. Damit läßt sich nun mit Hilfe der Linearität des Ableitungsbegriffes relativ einfach eine explizite Formel für die Ableitung eines Polynoms angeben (siehe Abschnitt 6.1). Diese lautet

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

Ebenso einfach zeigt man die Quotientenregel für Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)/g(x)\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Damit erhält man schließlich eine einfache Formel für die Ableitung einer rationalen Funktion r .

1.2 Reihensummen

Wir betrachten zunächst Folgen von reellen Zahlen $\{a_n\}$ $\left(a_n \in \mathbb{R}, n \geqq 0\right)$. Eine solche Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a^* genau dann, wenn zu beliebigem reellen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart existiert, daß

$$\left|a_n - a^*\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

gilt. Man schreibt dafür kurz $a^* = \lim\ a_n$.

Für reelle Zahlenfolgen $\{a_n\}$ gilt das CAUCHYsche Konvergenzkriterium. Dieses lautet: *Eine reelle Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *konvergiert genau dann, wenn für hinreichend große Indizes n und alle* $m \geq 0$

$$\left|a_n - a_{n+m}\right| < \varepsilon \text{ für beliebig vorgegebenes } \varepsilon > 0$$

gilt.

Man zeigt leicht, daß jede konvergente Zahlenfolge $\{a_n\}$ beschränkt ist. Dies kann etwa wie folgt geschehen:

Wegen $\left|a_n - a^*\right| \to 0$ folgt, daß für hinreichend große Werte von n die Aussage $\left|a_n - a^*\right| \leq c$ mit einer positiven Konstanten c gilt. Aus einer Anwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$\left||a_n| - |a^*|\right| \leqq |a_n - a^*| \leqq c$$

oder

$$|a_n| = c + |a^*| = K$$

Mit der Tatsache, daß die endlich vielen übrigen Folgengliederbeträge ein Maximum besitzen, folgt dann insgesamt die Beschränktheit der gesamten Folge.

Ein wichtiger Spezialfall von konvergenten Folgen sind die Nullfolgen mit $a^* = 0$. Hier lautet das erste Konvergenzkriterium:

$$|a_n| < \varepsilon \text{ falls } n \geqq N(\varepsilon)$$

Bsp.:

a) $a_k = (-1)^k/k,\ k \geqq 1$. Man setze hier einfach $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$.

b) $a_k = q^k,\ k \geqq 0,\ |q| < 1$. Man setze hier $N(\varepsilon) \geqq [\log \varepsilon / \log q] + 1$. Man sieht leicht ein, daß die Bedingung $|q| < 1$ auch notwendig ist.

Eine wichtige Eigenschaft der Limesbildung bei Folgen ist ihre sogenannte Linearität. Es gilt dabei als unmittelbare Folgerung aus der Definition einer konvergenten Folge, daß aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$ auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot a_n) = a \cdot a^*$ für alle $a \in \mathbb{R}$ folgt.

Ebenso folgert man aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b^*$ leicht, daß $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a^* \pm b^*$ gelten muß. Dies ergibt sich folgendermaßen: Zu $\varepsilon > 0$ bildet man $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Dafür existieren $N_1(\varepsilon')$ und $N_2(\varepsilon')$ mit den Eigenschaften $|a_n - a^*| < \varepsilon'$ für $n > N_1(\varepsilon')$ und $|b_n - b^*| < \varepsilon'$ für $n \geq N_2(\varepsilon')$. Für alle $n \geq N(\varepsilon') = \max\{N_1(\varepsilon'), N(\varepsilon')\}$ folgt dann aber

$$\left|(a_n \pm b_n) - (a^* \pm b^*)\right| \leqq |a_n - a^*| + |b_n - b^*| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

Bsp.: $a_n = 1 - 1/(2n),\, b_n = 2 - 1/n,\, n \geqq 1$.

Es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 2 - 3/(2n)) = 3$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/(2n)) + \lim\limits_{n\to\infty}(2 - 1/n)$.

Eine (unendliche) Reihe $\{s_n\}$ von reellen Teilsummen $s_n \in \mathbb{R},\, n \geqq 0$ liegt vor, wenn $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ mit einer reellen Folge $\{a_k\}$ definiert ist. Eine solche Reihe $\{s_n\}$ heißt konvergent und s ihr Grenzwert, wenn $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)$ ist. Der Grenzwert der Folge $\{s_n\}$ wurde bereits oben erklärt.

Eine Folgerung aus der eben gegebenen Definition einer konvergenten Reihe $\{s_n\}$ ist, daß notwendig die dazugehörige Folge $\{a_k\}$ eine Nullfolge sein muß. Dies ergibt sich aus dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium bei $m = 1$ unter Berücksichtigung, daß $|s_n - s_{n+m}| = |a_{n+1}|$ ist.

Die Bedingung $a_n \to 0$ ist dagegen nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe s_n. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Bsp.: Sei $s_n > 0$ mit $a_n = 1/n,\, n \geqq 1$ definiert. Dann läßt sich die Folge der Teilsummen s_n nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \ldots \\ &\geqq 1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + \ldots \\ &= 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots \end{aligned}$$

Die abgeschätzte untere Schranke strebt aber gegen $+\infty$. Somit ist die Reihe $\{s_n\}$ nicht konvergent.

Manchmal spielen Reihen eine Rolle, die gewisse Funktionen definieren sollen. Hierzu gehören Reihen der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

die man Potenzreihen nennt

Die einzelnen Reihenglieder enthalten also neben dem Koeffizienten a_k auch noch die Potenz x^k einer Variablen. Für $x = 1$ entsteht daraus eine Reihe der Form, wie sie bisher behandelt wurde. Dabei können zwei extreme Fälle auftreten.

Bsp.:

a) Die Potenzreihe

$$1 + x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \ldots$$

ist nur für $x = 0$ konvergent. Es gilt nämlich, daß $|k \cdot x| \to +\infty$ für alle $x \neq 0$ für $k \to +\infty$ strebt. Deshalb gilt auch $|k \cdot x|^k = \left|k^k \cdot x^k\right| \to +\infty$ für $k \to +\infty$, also divergiert die Reihe für alle Werte $x \neq 0$.

b) Die Reihe

$$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots \; (= \exp(x))$$

konvergiert dagegen für alle Werte von $x \in \mathbb{R}$, da bekanntlich folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}
|s_n - s_{n+m}| &\leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!}|x|^{n+m} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\left[1 + \frac{|x|}{n+2} + \ldots \frac{|x|^{m-1}}{(n+2)\cdots(n+m-1)}\right] \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\left[1 + \frac{|x|}{n} + \ldots + \frac{|x|^{m-1}}{n^{m-1}}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{n}\right)^m - 1}{\frac{|x|}{n} - 1}$$

Für hinreichend große Werte von n strebt bekanntlich $|x|^{n+1}/(n+1)!$ gegen 0 und es ist $|x|/n < 1$, so daß der letzte Faktor durch $1/(1-|x|/n)$ beschränkt bleibt. Damit ist aber das CAUCHYsche Kriterium erfüllt. Der Fall $|x| = 1$ läßt sich eben einfach abschätzen.

Abgesehen von diesen beiden Extremfällen gibt es zu jeder Potenzreihe eine eindeutige Zahl $r \in \mathbb{R}$, $r \geqq 0$ derart, daß für

$|x| < r$ *die Potenzreihe konvergiert und damit einen festen Wert* $f(x)$ *bestimmt und für*

$|x| > r$ *die Potenzreihe divergiert.*

Für $|x| = r$ läßt sich allgemein nichts aussagen. r heißt der Konvergenzradius. Für alle Werte von x mit $|x| < r$ bestimmt die Potenzreihe eine Funktion $f(x)$. Dafür gilt, daß f für alle Werte x mit $|x| < r$ differenzierbar ist und daß die Ableitung f' durch formales, gliedweises Differenzieren der Potenzreihe berechnet werden kann. Es gilt also

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

wobei die Ableitung wiederum den gleichen Konvergenzradius r besitzt. Näheres zu den entsprechenden Beweisen findet man etwa in [Kno].

1.3 Arithmetische Reihen

Als Grundlage für die arithmetische Reihe kann die Reihe mit $a_k = k$ und damit mit den Teilsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n, \quad n \geq 0$$

dienen. Für die Teilsummen der (divergenten) Reihe erhält man auf folgende einfache Weise eine explizite Summenformel

$$2 \cdot s_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = n \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1)$$

Somit folgt die einfache Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = n \cdot (n+1)/2 \tag{1.9}$$

Mit Hilfe dieser Summenformel läßt sich dann die allgemeine Form der arithmetischen Reihe mit $a_k = a + k \cdot d$ behandeln. Wegen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d) = a \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 + d \cdot \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)a + \left[(n+1)n/2\right] \cdot d$$

ergibt sich daraus die Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d) = a \cdot (n+1) + (d/2) \cdot (n+1)n \tag{1.10}$$

1.4 Geometrische Reihen

Ausgangspunkt für viele Verallgemeinerungen der geometrischen Reihe ist die Reihe mit $a_k = q^k$ und den Teilsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n,\ n \geqq 0$$

Für die Teilsummen dieser geometrischen Reihe ergibt sich auf folgende Weise eine explizite Summenformel:

$$(1-q) \cdot s_n = (1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

Hieraus folgt die Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \left(1 - q^{n+1}\right) \big/ (1-q), \quad q \neq 1,\ n \geqq 0 \tag{1.11}$$

In der Zinsrechnung spielen manchmal Verallgemeinerungen der obigen geometrischen Reihe eine Rolle. Dies wird etwa bei der formelmäßigen Behandlung von Renten und Annuitäten mit veränderlichen Raten der Fall sein. Wir wollen hier ein einfaches Beispiel bringen und zeigen, wie dabei die Summenformel (1.11) hilfreich Verwendung finden kann. Die tatsächlich benötigten verallgemeinerten geometrischen Reihen werden wir dann später bei ihren Anwendungen in analoger Weise mathematisch behandeln. Wir benutzen dabei die Tatsache, daß die Differentiation ein linearer Operator ist.

Gegeben sei die Reihe mit $a_0 = a,\ a_k = a \cdot k \cdot q^k,\ k > 1$, also die Reihe mit den Teilsummen

$$s_n = a + a \cdot q + a \cdot 2 \cdot q^2 + \ldots + a \cdot n \cdot q^n,\ n \geqq 1$$

Wir betrachten dazu die Teilsummen $t_n = \left(s_n - a\right) \big/ q \neq 0$ mit

$$t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n,\ n \geqq 1 \text{ mit } b_k = a \cdot k \cdot q^{k-1},\ k > 1$$

wobei dann $b_k = \frac{d}{dq}\left(a \cdot q^k\right)$ ist. Dann können wir wie folgt umformen:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dq}\left(aq^k\right) = \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{n} aq^k\right) = \frac{d}{dq}\left(a \cdot \left(1-q^{n+1}\right)/(1-q)\right)$$
$$= a \cdot \left(n \cdot q^{n+1} - (n+1) \cdot q^n + 1\right)/(1-q)^2,\ q \neq 0, 1$$

Daraus errechnet sich durch einfache Umformung schließlich die gesuchte Summenformel

$$s_n = a + \sum_{k=1}^{n} a \cdot k \cdot q^k = a + a \cdot q \cdot \left(n \cdot q^{n+1} - (n+1) \cdot q^n + 1\right)/(1-q)^2 \quad (1.12)$$

Eine elementare, aber auch nicht viel einfachere Art, eine solche Summenformel ohne Verwendung der Ableitung herzuleiten ist die folgende:

$$\begin{aligned}
s_n &= a + a \cdot q + a \cdot 2 \cdot q^2 + \ldots + a \cdot n \cdot q^n \\
&= a + a \cdot \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} q^k = a + a \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} \cdot \frac{q^{n-i}-1}{q-1} \\
&= a + \frac{a}{q-1} \cdot \left\{\sum_{i=0}^{n} q^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1}\right\} \\
&= a + \frac{a}{q-1}\left\{(n+1)q^{n+1} - q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right\} \\
&= a + a \cdot q \cdot \left(n \cdot q^{n+1} - (n+1) \cdot q^n + 1\right)/(1-q)^2
\end{aligned}$$

In den Anwendungen, insbesondere bei unendlichen Laufzeiten von Renten, ist oftmals der Fall $n \to \infty$ von Bedeutung. Dies bedeutet, daß wir nach der Konvergenz der geometrischen Reihe und ihrer Verallgemeinerungen fragen müssen. Bei der geometrischen Reihe selbst, nämlich bei $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$, ergibt sich dabei

$$s_n = \left(1-q^{n+1}\right)/(1-q) = 1/(1-q) - q^{n+1}/(1-q)$$

Nach dem ersten Beispiel b) in Abschnitt 1.2 folgt daraus aber bei $n \to \infty$ schließlich, falls $|q| < 1$ ist,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1/(1-q), \quad |q| < 1 \tag{1.13}$$

Bei einer konvergenten geometrischen Reihe ergibt sich auch eine einfache Formel für den Reihenrest, falls man die Summierung der Reihe mit der Teilsumme s_n abbricht. Hierfür erhalten wir

$$s = \lim_{n\to\infty} s_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = s_n + \sum_{n=n+1}^{\infty} q^k = s_n + q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \\ = s_n + q^{n+1}/(1-q)$$

Wir erhalten somit die einfache Formel

$$s = s_n + q^{n+1}/(1-q) \tag{1.14}$$

1.5 Abschätzung von Reihensummen durch bestimmte Integrale

Bei manchen Reihen $\{s_n\}$ läßt sich die Teilsumme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ durch keine einfache Summenformel ausdrücken. Nach Abschnitt 1.2 gilt für eine konvergente Reihe $\{s_n\}$ notwendig, daß $a_k \to 0$ ist. Gilt zusätzlich, daß

$$0 \leqq \ldots \leqq a_{k+2} \leqq a_{k+1} \leqq a_k \quad \text{für alle } k \geqq 0$$

ist, dann können wir die Folgenelemente a_k als Funktionswerte $f(k) = a_k$ einer monoton gegen 0 abfallenden Funktion f auffassen. Die Funktion ist auf der positiven reellen Achse definiert und nimmt für die natürlichen Zahlen k die Werte der Folgenelemente a_k an. Bekanntlich sind für solche monotonen Funktionen f die RIEMANNschen Ober- bzw. Untersummen obere bzw. untere Schranken für das bestimmte Integral von f über ein entsprechendes Intervall.

Wir bilden nun für das Intervall $[0, n]$ bzw. $[0, n+1]$ die Zerlegung in die Teilintervalle $[k, k+1]$, $0 \leqq k \leqq n-1$ (bzw. n). Dann schätzen wir das bestimmte Integral $\int_0^n f(x)dx$ ab durch die Untersummen

$$s_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)-k)f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \int_0^n f(x)dx$$

und ebenso das bestimmte Integral $\int_0^{n+1} f(x)dx$ durch die Obersummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}((k+1)-k)f(k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \geqq \int_0^{n+1} f(x)dx$$

Insgesamt erhalten wir also die folgenden Schranken für s_n:

$$\int_0^{n+1} f(x)dx \leqq s_n \leqq \int_0^n f(x)dx + a_0 \tag{1.15}$$

Als konkrete Anwendung der obigen Abschätzung betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp.: Wir betrachten die Reihensummen s_n mit $a_k = 1/(1+k\cdot i)$, $i>0$ $0 \leqq k \leqq n$, also die Summen

$$s_n = 1 + 1/(1+i) + 1/(1+2i) + \ldots + 1/(1+n\cdot i),\ i>0$$

Formel (1.5) ergibt die folgenden Schranken für s_n, wenn $f(x) = 1/(1+x\cdot i)$ gesetzt wird,