Internationale Standardlehrbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Herausgegeben von Universitätsprofessor Dr. Lutz Kruschwitz

Bisher erschienene Werke:

Bergstrom · Varian, Trainingsbuch zu Varian, Grundzüge der Mikroökonomik, 3. A.
Dixit · Norman, Außenhandelstheorie, 4. A.
Dornbusch · Fischer, Makroökonomik, 6. A.
Ethier, Moderne Außenwirtschaftstheorie, 4. A.
Gordon, Makroökonomik, 4. A.
Granvogl · Perridon, Sozioökonomie
Hillier · Lieberman, Einführung in Operations Research, 5. A.
Kneis, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Kruschwitz, Finanzierung und Investition, 2. A.
Kruschwitz, Investitionsrechnung, 8. A.
Mehler-Bicher, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Meissner, Strategisches Internationales Marketing, 2. A.
Pindyck · Rubinfeld, Mikroökonomie, 4. A.
Sargent, Makroökonomik
Schäfer · Kruschwitz · Schwake, Studienbuch Finanzierung und Investition, 2. A.
Smith, Einführung in die Volkswirtschaftslehre, 2. A.
Stiglitz, Volkswirtschaftslehre, 2. A.
Stiglitz · Schönfelder, Finanzwissenschaft, 2. A.
Varian, Grundzüge der Mikroökonomik, 4. A.
Zwer, Internationale Wirtschafts- und Sozialstatistik, 2. A.

Mathematik für Wirtschafts-wissenschaftler

Von

Dr. Gert Kneis

Hochschuldozent
Universität Potsdam
Institut für Mathematik

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Für Ursula, Cordula und Philipp

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Kneis, Gert:
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler / von Gert Kneis. -
München ; Wien : Oldenbourg, 2000
(Internationale Standardlehrbücher der Wirtschafts- und
Sozialwissenschaften)
ISBN 3-486-24684-4

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: WB-Druck, Rieden

ISBN 3-486-24684-4

Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich in den letzten Jahren vor Studenten der Volks- und Betriebswirtschaftslehre an der Universität Potsdam gehalten habe.

Mathematische Studienliteratur für Wirtschaftswissenschaftler ist in reichem Maße vorhanden, von einführenden Texten zum Studieneinstieg, Kompendien und Formelsammlungen bis zu mathematisch anspruchsvollen Werken. Der vorliegende Text stellt eine Ergänzung dieser Literatur dar; im Vordergrund stehen dabei

- die ausführliche Erklärung derjenigen Methoden, welche zum Standard des mathematischen Grundstudiums für Wirtschaftswissenschaftler gehören, und
- deren Demonstration an Abbildungen, Beispielen und Aufgaben vorwiegend aus dem ökonomischen Bereich.

Ich habe einerseits die Erfahrung gemacht, daß einem Anwender der Mathematik der Zugang zu einer mathematischen Methode oftmals erheblich erleichtert wird, wenn – neben den unverzichtbaren grafischen Darstellungen und Beispielen – ein Beweis oder zumindest die wesentliche Idee eines Beweises vermittelt werden kann. Andererseits kann eine Darstellung, die völlig ohne Herleitungen auskommen möchte bzw. muß, dem Hörer und Leser einen einheitlich hohen Schwierigkeitsgrad mathematischer Aussagen suggerieren und so zu einer unnötigen Scheu vor der Anwendung mathematischer Methoden führen.

Gerade bei den hier behandelten Themen können die grundlegenden mathematischen Aussagen aus denkbar einfachen Bausteinen zusammengesetzt werden:

- So beruhen die meisten Sätze der Kombinatorik und viele Aussagen der linearen Algebra auf dem Induktionsprinzip, also allein auf der Tatsache, daß die natürlichen Zahlen aus der Zahl 1 durch fortgesetzte Bildung des Nachfolgers hervorgehen.
- Die Sätze der linearen Algebra und der linearen Optimierung sind im wesentlichen Aussagen über lineare Gleichungssysteme. Solche Systeme können durch elementare Rechenschritte – die Addition von Vielfachen einzelner Gleichungen zu anderen Gleichungen – in eine Form überführt werden, an der die Lösungsstruktur bequem abgelesen werden kann.
- Lineare Funktionen – also Funktionen von einfachster Bauart – spielen eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung des lokalen Verhaltens nichtlinearer Funktionen.

Aus diesem Grund habe ich für die meisten Aussagen Beweise oder Beweisskizzen, oft auch im Kleindruck, angegeben. Lediglich dort, wo ein Beweis den Rahmen dieses Lehrbuches sprengen würde, wird auf aktuelle Literatur verwiesen.

Ein Wort zur Darstellung: Begriffe, Aussagen, Methoden und wesentliche Erklärungen stehen in kursiver Schrift, sind dreistellig numeriert und jeweils mit einem Schlagwort versehen. Formeln, Beispiele und Abbildungen sind zweistellig numeriert, und zum leichteren Auffinden der referierten Beispiele und Abbildungen sind Verzeichnisse angefügt. Textstellen im Kleindruck, meist für Überleitungen und Details verwendet, sind für das Verständnis des nachfolgenden Stoffes nicht zwingend erforderlich.

Jedem Kapitel ist eine Sammlung von Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades beigefügt. Die Aufgaben überdecken den Text im wesentlichen und ergänzen ihn teilweise; sie sind zur leichteren Einordnung mit Stichworten versehen. Die am Schluß skizzierten Lösungen für die meisten Aufgaben sind als Kontrollmöglichkeit gedacht, – für die genauere Herleitung bleibt dem Leser noch genügend Freiraum.

Literaturhinweise im Text beziehen sich auf die angegebenen mathematischen Standardbücher bzw. die ergänzenden Lehrbücher zur Wirtschaftsmathematik. Die zitierte Literatur für das Grundstudium geht teilweise im Umfang der behandelten mathematischen Themen, der ökonomischen Anwendungsbeispiele oder auch des propädeutischen Teils weiter als der vorliegende Text. Hier sollte der Leser nach seinen Bedürfnissen auswählen.

Es ist mir ein Bedürfnis, meinem verehrten Kollegen Prof. Günter Zeidler für die Anregung zu diesem Lehrbuch zu danken.

Der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam danke ich für die kontinuierliche Unterstützung meiner Arbeit und das Interesse am Entstehen dieses Buches, vor allem Herrn Prof. Hans-Gerhard Strohe und Herrn Prof. Klaus Schöler, ebenso dem Institut für Mathematik der Universität Potsdam. Ein spezieller Dank gilt Frau Alexandra Franke, die das gesamte Manuskript einschließlich der Aufgaben und deren Lösungen kritisch gelesen hat, sowie Herrn Dr. Wolfgang Rother und Herrn Dipl.-Volkswirt Helge Sanner, die mir bei vielerlei Problemen mit dem Schriftsatzsystem LaTeX eine unentbehrliche Hilfe waren.

Für eine letzte Durchsicht des Manuskripts bin ich meinem Sohn Philipp sehr dankbar. Nicht zuletzt danke ich Herrn Mathias Brehe für seine langjährige Mitwirkung bei meinen Lehrveranstaltungen, für die kritische Durchsicht des Textes und mehrerer früherer Skripten, auf denen dieser aufbaut, und für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen, sowie den Hörern meiner Lehrveranstaltungen für zahlreiche Hinweise, die in den Text eingegangen sind.

Dem Verlag R. Oldenbourg gilt mein Dank für die freundliche Aufnahme dieses Buches in sein Lehrbuchprogramm.

Einen herzlichen Dank sage ich schließlich meinen Kindern und vor allem meiner Frau, die mich in der Arbeit an diesem Buch mit sehr viel Verständnis unterstützt haben.

Eichwalde und Potsdam, im Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Aussagen und Aussagenverbindungen

- *„**Wenn** das Unternehmen X mit seinen Produkten den Umsatz gegenüber dem Vorjahr steigern will, **dann** muß es die Preise anheben **oder** für die Steigerung des Absatzes sorgen."*
- *„**Wenn** die Preise **nicht** steigen **und** der Absatz **nicht** wächst, **dann** kann das Unternehmen X mit seinen Produkten den Gewinn gegenüber dem Vorjahr **nicht** steigern."*

Obwohl man über den Sinn dieser Sätze unterschiedlicher Meinung sein kann – eine Gewinnsteigerung ist auch allein durch Kostensenkung denkbar –, so bedeuten sie doch beide logisch dasselbe: der zweite Satz folgt aus dem ersten und der erste aus dem zweiten, oder, was dasselbe bedeutet, die Sätze sind entweder beide wahr oder beide falsch. Das gilt unabhängig davon, ob nun irgendeines der drei Ereignisse Gewinnzuwachs, Preissteigerung oder Absatzsteigerung tatsächlich eintritt oder nicht.

In der Aussagenlogik wird die *logische Struktur* der Verknüpfung von Sätzen mit verbindenden Wörtern (*Konnektoren*) wie „und", „oder" und „wenn ... dann" sowie deren Verneinung untersucht, unabhängig vom konkreten Inhalt der verknüpften Sätze. Die dabei geltenden Regeln bilden die Grundlage des logischen Denkens.

Beispiel 1.1 Die folgenden Sätze aus der Alltagssprache sollen auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden:

(1) *Karl V. war deutscher Kaiser bis zu seinem Tod im Jahre* 1557.

(2) *Hoffentlich hat Karl V. gut regiert!*

(3) *Napoleon Bonaparte hat einmal gesagt, nur ein Faulpelz schliefe länger als fünf Stunden am Tag.*

(4) *Der Aktienkurs der UNSINN AG ändert sich am* 1. 1. 2000, *oder er ändert sich nicht.*

(5) *Für jede genügend kleine nicht negative reelle Zahl x gilt* $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

(6) *Die natürliche Zahl n ist durch* 3 *teilbar.*

(7) *Lohnt es sich, mathematische Fachbücher zu lesen, wenn man quantitative Zusammenhänge in den Wirtschaftswissenschaften studieren will?*

(8) *Zwischen der Höhe der Kreditzinsen und dem Niveau der Aktienkurse besteht kein absolut gesicherter Zusammenhang.*

(9) *Fallende Kreditzinsen bewirken stets einen Anstieg der Aktienkurse.*

(10) *Am Neujahrstag des Jahres* 1443 *hat es in München geschneit.*

Die Sätze (3) und (8) geben einen wahren Sachverhalt wieder, und der Satz (4) ist ebenfalls wahr (unabhängig vom Börsengeschehen im Jahr 2000).
Die Aussage des ersten Satzes ist falsch (Karl V. hatte vorzeitig zugunsten seines Bruders Ferdinand abgedankt).
Im 2. Satz wird ein Wunsch geäußert, im 6. Satz ist die Zahl n nicht konkret angegeben (n ist eine Variable), und der 7. Satz stellt eine Frage dar, – in diesen drei Fällen stellt sich die Frage nach dem Wahrheitsgehalt nicht.
Beim 5. Satz läßt sich über die Wahrheit erst dann entscheiden, wenn die vagen Begriffe $\approx$ und „genügend klein" präzisiert sind.[1] Der 9. Satz ist (zumindest in dieser generellen Form) falsch, – dennoch wird es für einen Anleger im allgemeinen vorteilhafter sein, sich hiernach zu richten, als nach der Binsenwahrheit des 8. Satzes.
Ob der letzte Satz wahr oder falsch ist, ist zwar schwer oder gar nicht zu entscheiden, – jedoch ist es sicher, daß er entweder wahr oder falsch ist.

1.1.1 (Aussagen, Wahrheitswerte) *Ein Satz, der einen wahren oder einen falschen Sachverhalt wiedergibt, heißt* ***Aussage****. Einer wahren Aussage wird der* ***Wahrheitswert „wahr"*** (W) *zugeordnet, einer falschen Aussage der Wahrheitswert* ***„falsch"*** (F).

Unter den Sätzen des Beispiels 1.1 sind demnach die Sätze (2), (6) und (7) keine Aussagen, die Sätze (3), (4) und (8) sind wahre Aussagen (Wahrheitswert W), (1) ist eine falsche Aussage (Wahrheitswert F), (5) wird erst nach einer Präzisierung, z. B. der hier angegebenen, eine Aussage, und (10) ist eine Aussage mit einem (dem Verfasser) unbekannten Wahrheitswert.

Daß Aussagen genau einen der beiden Wahrheitswerte besitzen, wird zusammengefaßt in dem

1.1.2 (Gesetz der zweiwertigen Logik)
Eine Aussage ist ***entweder wahr oder falsch****. Das bedeutet:*

- *Eine Aussage kann nicht weder wahr noch falsch sein.*
  (*„Eine dritte Alternative gibt es nicht"* – ***„Tertium non datur"***)
- *Eine Aussage kann nicht wahr und falsch zugleich sein.*
  (***„Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch"***)

In der ***Aussagenlogik*** wird der Wahrheitswert gewisser abgeleiteter Aussagen und Verbindungen von Aussagen *allein aus dem Wahrheitswert der beteiligten Aussagen*

[1] Dies ist aber möglich: So gilt für die Abweichung zwischen dem Wert der Wurzelfunktion und dem Näherungswert $1 + \frac{x}{2}$ die Ungleichung $|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})| \leq \frac{x^2}{8}$ für alle $x \geq 0$, wie man mit Hilfe der *Taylor*schen Formel (7.34) der Differentialrechnung nachweisen kann. Für $0 \leq x \leq 0,01$ hat diese Abweichung dann höchstens den Wert 0,0000125.

bestimmt, - deren konkreter Inhalt hat hierfür keine Bedeutung. Die Sätze der Aussagenlogik stellen daher nichts anderes dar als ein System von Regeln für den Umgang mit den Symbolen W und F.

Im folgenden werden als wichtigste abgeleitete Aussagen und Aussagenverbindungen die *Negation* (*Verneinung*), *Konjunktion* (*logisches „und"*), *Disjunktion* (*logisches „oder"*), *Implikation* (*logische Folgerung*) und *Äquivalenz* (*logische Gleichwertigkeit*) durch Angabe ihrer Wahrheitswerte eingeführt.

1.1.3 (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz)

- *Die* ***Negation*** $\neg A$ (***nicht A***) *einer Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.*
- *Die* ***Konjunktion*** $A \wedge B$ (***A und B***) *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn A und B* ***beide wahr*** *sind, in allen anderen Fällen falsch.*
- *Die* ***Disjunktion*** (***Alternative***) $A \vee B$ (***A oder B***) *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn* ***mindestens eine*** *der Aussagen A und B wahr ist, in dem verbleibenden Fall falsch.*
- *Die* ***Implikation*** $A \Rightarrow B$ (***wenn A, dann B; aus A folgt B***) *zweier Aussagen A und B ist* ***falsch****, wenn* ***A wahr und B falsch*** *ist, in allen anderen Fällen wahr.*
- *Die* ***Äquivalenz*** $A \Leftrightarrow B$ (***A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B***) *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn A und B den* ***gleichen Wahrheitswert*** *besitzen, andernfalls falsch.*

Die Wirkungsweise der Negation und der eingeführten Aussagenverbindungen kann in einer Tabelle dargestellt werden:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

(1.1)

1.1.4 (Einschließendes „oder" und ausschließendes „entweder oder")

- *Die Aussagenverbindung* ***„A oder B"*** *ist auch in dem Fall wahr, daß A und B beide wahr sind, – „oder" wird generell* ***einschließend*** *gebraucht.*
- *Die Aussagenverbindung* ***„entweder A oder B"*** *hingegen ist wahr, wenn A wahr und B falsch oder wenn A falsch und B wahr ist, – sie ist gleichbedeutend mit der Aussagenverbindung* $\neg(A \Leftrightarrow B)$ *oder auch mit* $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Um die Wirkungsweise der Aussagenverbindung „entweder oder“ – und beliebig komplizierter Verbindungen – zu ermitteln, wird zweckmäßig eine Tabelle verwendet; hierin wird der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung für jede Kombination von Wahrheitswerten der beteiligten Einzelaussagen schrittweise berechnet:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
W	W	F	F	F	F	F
W	F	F	W	W	F	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	F	F

(1.2)

1.1.5 (Hinreichende Bedingung, notwendige Bedingung)

- *Die Aussagenverbindung $A \Rightarrow B$ heißt auch **Schluß von A auf B**, A heißt die **Prämisse** und B die **Konklusion**.*
  Daß $A \Rightarrow B$ falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist, bedeutet, daß der Schluß von einer wahren auf eine falsche Aussage falsch ist, – aus einer wahren Aussage kann immer nur eine wahre Aussage geschlossen werden.

- *Ist der Schluß $A \Rightarrow B$ wahr, so folgt aus der Wahrheit von A die Wahrheit von B; A ist dann eine **hinreichende Bedingung für B** (genauer: A ist hinreichend für die Wahrheit von B).*
  *Andererseits kann bei einem wahren Schluß $A \Rightarrow B$ die Aussage A nur in dem Fall wahr sein, wenn B wahr ist; B ist dann eine **notwendige Bedingung für A** (genauer: B ist notwendig für die Wahrheit von A).*
  *Sind $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr (dies bedeutet gerade die Wahrheit von $A \Leftrightarrow B$), so ist A eine **notwendige und hinreichende Bedingung für B** (und zugleich B eine notwendige und hinreichende Bedingung für A).*

Beispiel 1.2 (Notwendige und hinreichende Bedingung) Für einen Beschuldigten X in einem Strafverfahren ist die Aussagenverbindung *„X hat für die Tatzeit ein Alibi“* (Aussage A) $\Rightarrow$ *„X ist unschuldig“* (Aussage B) generell wahr. Das Alibi ist somit eine hinreichende Bedingung für die Unschuld von X, und die Unschuld ist eine notwendige Bedingung für ein Alibi. Andererseits ist ein Alibi für den Nachweis der Unschuld zwar hilfreich, aber nicht notwendig. Hingegen ist B notwendig und hinreichend für die Aussage *„Die betreffende Tat wurde von anderen Personen begangen.“*

Für Aussagenverbindungen, in denen nur eines der Symbole $\wedge$, $\vee$ oder $\Leftrightarrow$ auftritt, hängt der Wahrheitswert nicht von der Reihenfolge der Einzelaussagen oder von der Art des Setzens von Klammern ab. Klammern können daher zur Vereinfachung auch ganz weggelassen werden, – dies gilt jedoch nicht, wenn unterschiedliche Symbole in einer Verbindung gemeinsam auftreten.
Die entsprechenden Regeln können anhand von Tabellen der Wahrheitswerte nach dem Muster (1.2) überprüft werden.

1.1.6 (Reihenfolge und Klammern in Aussagenverbindungen)
Für beliebige Aussagen A, B und C gelten die folgenden logischen Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
A \wedge B & \Leftrightarrow & B \wedge A & A \wedge (B \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \wedge B) \wedge C \\
A \vee B & \Leftrightarrow & B \vee A & A \vee (B \vee C) & \Leftrightarrow & (A \vee B) \vee C \\
A \Leftrightarrow B & \Leftrightarrow & B \Leftrightarrow A & A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) & \Leftrightarrow & (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \\
A \wedge (B \vee C) & \Leftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & (A \wedge B) \vee C & \Leftrightarrow & (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\
A \vee (B \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) & (A \vee B) \wedge C & \Leftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C)
\end{array} \tag{1.3}$$

Beispiel 1.3 (Klammern in Aussagenverbindungen) Eine Person ist klug *und* (jung oder schön), wenn sie zunächst erst einmal klug ist und dann zusätzlich noch jung oder schön (wobei auch Jugend und Schönheit zugleich möglich ist), also kurz, wenn sie (klug und jung) oder (klug und schön) ist, – siehe die vorletzte der Regeln auf der linken Seite von (1.3).
Um aber (klug und jung) *oder* schön zu sein, reicht allein die Schönheit aus, auch wenn man alt und weniger klug ist.
Durch eine Akzentverschiebung, hier durch eine Änderung der Klammersetzung verwirklicht, wird der logische Inhalt verändert:
$\{klug \wedge (jung \vee schön)\}$ und $\{(klug \wedge jung) \vee schön\}$ sind logisch nicht gleichwertig.

1.2 Aussageformen

Sätze, in denen nicht näher spezifizierte Objekte (eine natürliche Zahl n, ein Steuerzahler NN, ein Artikel a des Warensortiments einer Firma, usw.) auftreten, kommen im alltäglichen Sprachgebrauch häufig vor.

1.2.1 (Aussageform) *Enthält ein Satz $A(x)$ eine Variable x (diese steht für Objekte einer gegebenen Gesamtheit, z. B. für Zahlen), so daß durch Einsetzen eines entsprechenden konkreten Objekts x_0 der Gesamtheit für die Variable x eine (wahre oder falsche) Aussage $A(x_0)$ entsteht, so heißt dieser Satz eine **Aussageform** mit der **Aussagevariablen** x.*
Aussageformen können auch mehrere Aussagevariable enthalten.

Eine Aussageform selbst ist keine Aussage, – erst durch Belegung aller darin auftretenden Aussagevariablen mit konkreten Objekten entsteht eine (wahre oder falsche) Aussage.

Beispiel 1.4 Die Aussageform *„x ist ohne Rest durch y teilbar"* enthält die beiden Aussagevariablen x und y, die jeweils für eine ganze Zahl stehen. Durch Belegung von x mit der konkreten Zahl 8 und von y mit 2 oder 3 entsteht die wahre Aussage „8 *ist durch* 2 *teilbar"* bzw. die falsche Aussage „ 8 *ist durch* 3 *teilbar"*.

Neben der Belegung von Aussagevariablen mit konkreten Objekten gibt es zwei weitere Möglichkeiten, aus einer Aussageform eine Aussage abzuleiten.

1.2.2 (Existenz- und All-Aussage)
Für eine Aussageform $A(x)$ werden die beiden folgenden Aussagen betrachtet:

- ***Existenz-Aussage*** $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$: *„Es gibt ein x (aus einer Gesamtheit), so daß $A(x)$ wahr ist.“*

- ***All-Aussage*** $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$: *„Für alle x (aus einer Gesamtheit) ist $A(x)$ wahr.“*

Beispiel 1.5 Die Aussagevariable x stehe für eine Aktie des Aktienindex DAX, und $A(x)$ sei die Aussageform *„Wenn der DAX-Wert steigt, steigt der Kurs von x“.* Die Anwendung der Operationen $\forall$ und $\exists$ auf die Aussageform $A(x)$ ergibt:

$\forall x\ A(x)$: *„Wenn der* DAX-*Wert steigt, steigt der Kurs* **aller** *Aktien des* DAX.*“*
$\exists x\ A(x)$: *„Wenn der* DAX-*Wert steigt, steigt der Kurs (mindestens)* ***einer*** *der Aktien des* DAX.*“*

Die Verneinung von Existenz- und All-Aussagen im täglichen Sprachgebrauch führt häufig zu Mehrdeutigkeiten. So wird vielfach an Stelle der Verneinung *„nicht für alle x gilt $A(x)$“* die falsche Formulierung *„für kein x gilt $A(x)$“* verwendet. Die korrekte Verneinung wird zunächst an einem Beispiel erläutert:

Beispiel 1.6 Die Variable x stehe für eine Firma des Unternehmens *WIRTSCHAFT*, und $A(x)$ sei die Aussageform *„Die Firma x erzielt im Bilanzjahr einen Gewinn“.*

$\forall x\ A(x)$: *„Alle Firmen erzielen im Bilanzjahr einen Gewinn.“*
$\exists x\ A(x :)$ *„(Mindestens) eine Firma x erzielt im Bilanzjahr einen Gewinn.“*
$\neg\forall x\ A(x)$: *„(Mindestens) eine Firma x erzielt im Bilanzjahr keinen Gewinn.“*
$\Leftrightarrow$ *„Es gibt eine Firma x, so daß die Negation von $A(x)$ zutrifft.“*
$\neg\exists x\ A(x)$: *„Keine der Firmen erzielt im Bilanzjahr Gewinn.“*
$\Leftrightarrow$ *„Für alle Firmen x trifft die Negation von $A(x)$ zu.“*

Die Verneinung von *„alle Firmen erzielen Gewinn“* ist also nicht *„alle Firmen erzielen keinen Gewinn“*, – dies ist vielmehr die Verneinung von *„(mindestens) eine der Firmen erzielt Gewinn“.* Zur Vermeidung derartiger mißverständlicher Formulierungen können die folgenden offensichtlichen Verneinungsregeln angewandt werden.

1.2.3 (Negation von Existenz- und All-Aussagen)
Die Negation einer mit den Symbolen $\exists$ und $\forall$ gebildeten Aussage kann logisch gleichwertig durch formales ***Vertauschen der Symbole*** $\exists$ ***und*** $\forall$ *gebildet werden:*

$$\begin{aligned} \neg\,(\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}) &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\ \neg \boldsymbol{A(x)} \\ \neg\,(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}) &\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\ \neg \boldsymbol{A(x)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.3 Logisches Schließen

Es werden nun *formale Aussagenverbindungen* untersucht, die mit Hilfe der eingeführten logischen Operationen erzeugt wurden; hierbei bedeuten $A, B, C, \ldots$ Symbole für Aussagen.

Beispiel 1.7 Werden in die formale Aussagenverbindung $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$ irgendwelche konkrete Aussagen A und B eingesetzt, so ergibt sich stets eine wahre Aussage, unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B.[2] Denn die Konklusion $B \vee \neg B$ des Schlusses $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$ ist stets wahr, und folglich ist der gesamte Schluß wahr. Formal ergibt sich dies auch mit Hilfe einer Tabelle der Wahrheitswerte:

A	B	$\neg B$	$B \vee \neg B$	$A \Rightarrow (B \vee \neg B)$
W	W	F	W	W
W	F	W	W	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

1.3.1 (Tautologie) *Eine formale Aussagenverbindung heißt* ***Tautologie***[3]*, wenn sie – unabhängig vom Wahrheitswert der verbundenen Einzelaussagen – den Wahrheitswert* **W** *besitzt.*

Bei einer Tautologie kann demnach generell auf die inhaltliche Prüfung der beteiligten einzelnen Aussagen verzichtet werden. Tautologien sind daher zulässige ***logische Schlußweisen***.
Neben der wenig sinnvollen Tautologie des Beispiels 1.7 stellen die folgenden die elementaren Bausteine des logischen Schließens dar.[4]

$$\begin{array}{lll}
\textit{Abtrennungsregel}^{5}\textit{:} & A \wedge (A \Rightarrow B) & \Rightarrow \; B \\
\textit{Kettenschluß:} & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) & \Rightarrow \; A \Rightarrow C \\
\textit{Kontraposition:} & A \Rightarrow B & \Leftrightarrow \; \neg B \Rightarrow \neg A \\
\textit{Indirekter Beweis:} & A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A) & \Rightarrow \; B \\
\textit{De Morgansche Gesetze:} & \neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow \; \neg A \vee \neg B \\
 & \neg(A \vee B) & \Leftrightarrow \; \neg A \wedge \neg B
\end{array} \tag{1.5}$$

Anwendung der Tautologien:

1.3.2 (Direkte Beweisführung für $A \Rightarrow B$) *Ist die Aussage A wahr und ist der Schluß von A auf die Aussage B korrekt, so ist auch B eine wahre Aussage.*

[2]Ein volkstümliches Beispiel hierfür ist die Aussage „*Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter, oder es bleibt wie es ist*".

[3]auch *Syllogismus* oder *Pleonasmus*

[4]Zur Herleitung vgl. Aufgabe 1.2

[5]auch „*modus ponens*"

B e w e i s : Sind A und $A \Rightarrow B$ wahre Aussagen, so ist $C = A \wedge (A \Rightarrow B)$ und damit die linke Seite der Abtrennungsregel eine wahre Aussage. Da aber die Implikation $C \Rightarrow B$ als Tautologie insgesamt wahr ist, kann bei wahrer Prämisse C die Konklusion B nicht falsch sein. □

Beispiel 1.8 Zu einer *gegebenen* natürlichen Zahl n werden die Aussagen $A =$ *„6 ist ein Teiler von n“* und $B =$ *„6 ist ein Teiler von 2n“* betrachtet. Dann ist der Schluß $A \Rightarrow B$ eine wahre Aussage. Ist dann n tatsächlich durch 6 teilbar (A ist wahr), so ist $2n$ durch 6 teilbar (B ist wahr).[6]

Der direkte Beweis ist die Grundlage des – direkten – logischen Schließens. Zusammen mit dem Kettenschluß läßt sich hieraus eine beliebig lange ***Schlußkette*** aufbauen:

$$A_1 \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \quad \Rightarrow \quad A_n \tag{1.6}$$

Eine solche Schlußkette ist eine Aufeinanderfolge wahrer Aussagen, wobei jedes Glied der Folge die Wahrheit seines Vorgängers verwendet: aus einer *wahren Anfangsaussage* A_1 wird mittels korrekter Schlüsse Schritt für Schritt die *Wahrheit einer Endaussage* A_n konstruiert. In diesem Sinne ist ein direkter Beweis *konstruktiv.*

Hierbei ist darauf zu achten, daß die ***Anfangsaussage der Kette eine wahre Aussage*** ist!

Ein häufig anzutreffender Fehler beim Nachweis der Wahrheit einer Aussage A_1 besteht darin, daß A_1 erst einmal als wahr angenommen und aus dieser Annahme über eine Kette (1.6) korrekter Schlüsse eine wahre Aussage A_n abgeleitet wird. *Hieraus läßt sich nicht allgemein auf die Wahrheit von A_1 schließen.*

Beispiel 1.9

$$A_1 = \text{„}1 = 0\text{“}, \; A_2 = \text{„}\left(\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right)\text{“}, \; A_3 = \text{„}\left(\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\right)\text{“}$$

Aus der Annahme, daß A_1 wahr ist, ergibt sich über die korrekten Schlüsse $A_1 \Rightarrow A_2$ (Subtraktion von 1/2 auf beiden Seiten einer Gleichung) und $A_2 \Rightarrow A_3$ (Quadrieren beider Seiten einer Gleichung) die wahre Aussage A_3.

Um die Wahrheit von A_1 nachzuweisen, muß vielmehr von der wahren Aussage A_3 ausgegangen und durch die Umkehrschlüsse $(A_3 \Rightarrow A_2)$ und $(A_2 \Rightarrow A_1)$ auf die Wahrheit von A_1 geschlossen werden. Dies ist aber hier nicht möglich, da der Schluß von A_3 auf A_2 nicht korrekt ist.

1.3.3 (Kontraposition) *Der Schluß $A \Rightarrow B$ und seine Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ haben den gleichen Wahrheitswert.*

Oftmals gelingt der Nachweis, daß $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr bzw. falsch ist, einfacher als für den ursprünglichen Schluß $A \Rightarrow B$, – dies ist aber logisch äquivalent. Das ist vor allem bei indirekten Formulierungen zu beachten.

[6] Ist n nicht durch 6 teilbar, dann ist $A \Rightarrow B$ automatisch wahr, da die Prämisse A falsch ist.

Beispiel 1.10 Statt der Aussage *„Veranstaltungen im Freien finden nur bei günstigem Wetter statt“* ($A \Rightarrow B$) kann auch die logisch gleichwertige Formulierung *„Bei ungünstigem Wetter finden die Veranstaltungen nicht im Freien statt“* ($\neg B \Rightarrow \neg A$) verwendet werden, nicht aber *„Bei günstigem Wetter finden die Veranstaltungen im Freien statt“* ($B \Rightarrow A$).

1.3.4 (Indirekter Beweis für die Wahrheit einer Aussage B)
A sei eine wahre Aussage. Läßt sich dann aus der Annahme, die Aussage B sei falsch (also $\neg B$ wahr), nachweisen, daß $\neg A$ wahr ist, so ist B eine wahre Aussage.

B e w e i s : Sind A und der Schluß $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr, so ist die linke Seite $C = A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$ der Tautologie „indirekter Beweis“ wahr. Da $C \Rightarrow B$ als Tautologie insgesamt wahr ist, kann B nicht falsch sein. □

Beispiel 1.11 Von einem Buch sei bekannt, daß es Druckfehler enthält (Aussage A). Es ist nachzuweisen, daß das erste Kapitel fehlerhaft ist (Aussage B). Nimmt man das erste Kapitel als fehlerfrei an ($\neg B$ ist wahr) und findet dann im Rest des Buches keine Fehler, so müßte – im Widerspruch zu A – das gesamte Buch fehlerfrei sein ($\neg A$). Also ist das erste Kapitel fehlerhaft.

Indirekte Beweise lassen sich oft durch einen direkten Beweis ersetzen. So stellt sich die Wahrheit der Aussage B im Beispiel 1.11 unmittelbar durch das Auffinden eines Fehlers im ersten Kapitel heraus. Ein klassisches Beispiel für die Notwendigkeit eines indirekten Beweises ist der im folgenden geführte Nachweis dafür, daß die Quadratwurzel aus der Zahl 2 keine rationale Zahl ist.

Beispiel 1.12 (Nachweis von $B =$ „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“)
Hierfür wird die Tatsache verwendet, daß sich jeder Bruch aus zwei ganzen Zahlen so lange kürzen läßt, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind, also bis auf 1 und -1 keine gemeinsamen Teiler haben.

Annahme, B sei falsch	$\Leftrightarrow$	„$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl p/q.“
Kürzen von p/q	$\Rightarrow$	$A =$ „Die Zahlen p und q sind teilerfremd.“ [7]
Quadrieren von $\sqrt{2} = p/q$	$\Rightarrow$	$A_1 =$ „$2q^2 = p^2$.“
A_1	$\Rightarrow$	$A_2 =$ „2 ist ein Teiler von p^2.“
A_2	$\Rightarrow$	$A_3 =$ „2 ist ein Teiler von p.“ [8]
A_3	$\Rightarrow$	$A_4 =$ „$p = 2s$ für eine geeignete ganze Zahl s.“
A_1 und A_4	$\Rightarrow$	$A_5 =$ „$2q^2 = 4s^2$.“
Kürzen von A_5	$\Rightarrow$	$A_6 =$ „$q^2 = 2s^2$.“
A_6	$\Rightarrow$	$A_7 =$ „2 ist ein Teiler von q.“
A_3 und A_7	$\Rightarrow$	A ist falsch, denn 2 ist ein Teiler von p *und* q.

Die Schlußkette $\neg B \Rightarrow A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_5 \Rightarrow A_6 \Rightarrow A_7 \Rightarrow \neg A$ führt auf den Widerspruch, daß A wahr und falsch zugleich ist, und damit ist B wahr. □

[7] Für diese Aussage A wird der Widerspruch $A \wedge \neg A$ konstruiert.
[8] Vgl. Aufgabe 1.4

1.4 Mengen und Elemente

Für die Anwendung mathematischer Methoden ist ein geregelter Umgang mit Mengen von großem Vorteil. Eigenschaften von Objekten, Beziehungen zwischen Strukturen und komplexe Zusammenhänge lassen sich in der Sprache der Mengen wesentlich rationeller darstellen als es in der Umgangssprache möglich ist.
In der Mengenlehre werden der *Mengenbegriff* und die *Beziehung zwischen Mengen und Elementen* ohne eine weitere Erklärung als gegeben vorausgesetzt.

1.4.1 (Mengen und Elemente) *Eine* ***Menge*** *M ist die Zusammenfassung von bestimmten (realen oder begrifflichen) „Objekten" zu einem Ganzen; die Objekte m der Menge M heißen deren* ***Elemente*** *(Symbol: $m \in M$).*[9]
Ist M eine Menge und m ein Element (irgendeiner) Menge, so ist $(m \in M)$ eine Aussage und damit entweder wahr oder falsch.
Ist diese Aussage falsch, so ist m ***kein Element*** *von M (Symbol: $m \notin M$).*

Die Zweiwertigkeit der Logik bedeutet, angewandt auf die Aussage $(m \in M)$:
Ist M eine Menge und m ein Element irgendeiner Menge, so ist entweder m ein Element von M oder kein Element von M.

Mengen können auf unterschiedliche Weise, etwa durch die Charakterisierung ihrer Elemente mittels *Text* oder *Formeln* oder manchmal auch durch konkrete Angabe ihrer Elemente in einer *Aufzählung* beschrieben werden; hierbei kommt es auf die Reihenfolge nicht an.

Beispiel 1.13

M = Menge der Einwohner der Stadt NN

M = Menge der ersten 10 natürlichen Zahlen

= $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}=\{10,9,8,7,6,3,4,5,1,2\} =\{10,8,5,7,1,2,4,6,9,3\}$

$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen $=\{1,2,3,\ldots\}$

(Eine Aufzählung ist nur unvollständig möglich, da $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente enthält.)

$\mathbb{P}$ = Menge der rationalen Zahlen (endliche oder periodische Dezimalbrüche)

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen (alle Dezimalbrüche)

1.4.2 (Teilmenge) *Eine Menge A heißt* ***Teilmenge*** *einer Menge B, wenn jedes Element von A zugleich auch Element von B ist (Symbol: $A \subseteq B$).*
$A \subseteq B$ bedeutet: Für alle $a \in A$ ist $\Big((a \in A) \Rightarrow (a \in B)\Big)$ eine wahre Aussage.
Eine Teilmenge A von B heißt ***echte Teilmenge*** *von B, wenn B Elemente enthält, die nicht zugleich Elemente von A sind (Symbol: $A \subsetneqq B$).*

---

[9] Hierdurch werden die Begriffe Menge und Element nicht erklärt, sondern lediglich mit den – ebenfalls nicht erklärten – Begriffen „Gesamtheit" und „Objekt" umschrieben.

Eine Teilmenge einer Menge M kann dadurch gebildet werden, daß alle Elemente von M mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefaßt werden.

1.4.3 (Bildung von Teilmengen durch eine charakterisierende Eigenschaft) *Eine **Eigenschaft A** für die Elemente m einer Menge M ist durch eine **Aussageform $A(m)$** mit $m \in M$ gegeben:*
Hierbei hat ein konkretes Element m_0 von M die Eigenschaft A, wenn die konkrete Aussage $A(m_0)$ wahr ist.

- *Die Menge aller Elemente m von M, für die $A(m)$ wahr ist, bildet dann die **Teilmenge** M_A aller Elemente von M mit der Eigenschaft A (Symbol: $M_A = \{m \in M \ : \ A(m)\}$).*

Beispiel 1.14 Die Aussageform $A(m)$ = „m ist Quadratzahl" charakterisiert in der Menge $M = \{m \in \mathbb{N} : m \leq 16\}$ die Teilmenge $M_A = \{m \in M : A(m) \text{ ist wahr }\} = \{1, 4, 9, 16\}$.

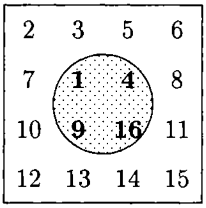


Abb. 1.1: „Quadratzahl" als charakterisierende Eigenschaft einer Teilmenge

Die folgende naheliegende Erklärung der Gleichheit zweier Mengen zeigt zugleich eine praktische Möglichkeit auf, wie zwei Mengen konkret auf Gleichheit überprüft werden können.

1.4.4 (Gleichheit von Mengen) *Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn sie die gleichen Elemente enthalten (Symbol: $A = B$).*
$A = B$ ist gleichbedeutend damit, daß $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zugleich gelten.

Nützlich sind auch solche Mengen, die keine Elemente enthalten. So ist zum Beispiel durch die Aussageform $A(n)$ = „$n = n + 1$" diejenige Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen n erklärt, für welche $A(n)$ wahr ist. Diese Menge enthält aber keine einzige natürliche Zahl.

Merkwürdig ist nun, daß alle Mengen ohne Elemente untereinander gleich sind, wie sich allein mit Hilfe der logischen Regeln zeigen läßt. Daher ist es vernünftig, von *der* leeren Menge zu sprechen.

1.4.5 (Leere Menge) *Alle Mengen, die keine Elemente enthalten, bilden ein und dieselbe Menge, die sogenannte **leere Menge** (Symbol $\emptyset$).*
Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge M.

B e w e i s : Nach 1.4.4 ist zu zeigen, daß für je zwei Mengen X und Y, die beide keine Elemente enthalten, sowohl $X \subseteq Y$ als auch $Y \subseteq X$ gilt.

Die Beziehung $X \subseteq Y$ bedeutet, daß $(x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ für jedes $x \in X$ wahr ist. Nun ist aber $x \in X$ für kein Element x wahr, damit ist die Prämisse des Schlusses falsch,

und folglich ist der gesamte Schluß wahr. Durch Vertauschung der Bedeutung von X und Y folgt entsprechend $Y \subseteq X$. Die Mengen X und Y sind daher untereinander gleich, und es kann für beide ein und dasselbe Symbol $\emptyset$ verwendet werden.
Mit dem gleichen Argument kann nun auch $\emptyset \subseteq M$ für eine beliebige Menge M gezeigt werden:
Der Schluß $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in M)$ ist generell wahr, da die Prämisse für jedes Element x falsch ist. □

1.4.6 (Spezielle Mengen reeller Zahlen) *(für reelle Zahlen a und b mit $a < b$):*

$[a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	(***abgeschlossenes Intervall***)
(a, b)	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	(***offenes Intervall***)
$(a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	(***nach links halboffenes Intervall***)
$[a, b)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	(***nach rechts halboffenes Intervall***)
$(-\infty, a]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	(***nach links halboffener Strahl***)
$[a, \infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	(***nach rechts halboffener Strahl***)
$(-\infty, \infty)$	$=$	$\mathbb{R}$	(***Menge aller reellen Zahlen***)

usw.

1.5 Operationen mit Mengen

Die Operationen mit Mengen können auf die vier Grundoperationen *Durchschnitt*, *Vereinigung*, *Differenz* und *Produkt* zurückgeführt werden.

1.5.1 (Durchschnitt $A \cap B$) *Der* ***Durchschnitt zweier Mengen A und B*** *besteht aus denjenigen Elementen, die* ***sowohl A als auch B*** *angehören.*

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x : (x \in A) \land (x \in B)\}}$$

1.5.2 (Vereinigung $A \cup B$) *Die* ***Vereinigung zweier Mengen A und B*** *besteht aus denjenigen Elementen, die* ***A oder B*** *angehören.*

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x : (x \in A) \lor (x \in B)\}}$$

1.5.3 (Differenz $A \setminus B$) *Die Differenz zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen Elementen, die* ***A, aber nicht B*** *angehören.*

$$\boldsymbol{A \setminus B = \{x : (x \in A) \land (x \notin B)\}}$$

1.5.4 (Symmetrische Differenz)
Die Menge $\{x : ((x \in A) \land (x \notin B)) \lor ((x \notin A) \land (x \in B))\}$ aller derjenigen Elemente, die ***entweder A oder B*** *angehören, hat die Darstellung*

$$\boldsymbol{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}.$$

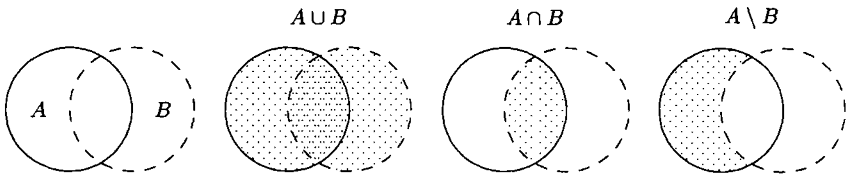


Abb. 1.2: Mengenoperationen mit zwei Kreisscheiben A und B

1.5.5 (Komplementärmenge $\overline{A}^X$ bezüglich einer festen Grundmenge X)

Ist X eine festgelegte Menge und A eine Teilmenge von X, so ist die ***Komplementärmenge von A bezüglich X*** *die Menge aller derjenigen Elemente von X, die der Teilmenge A nicht angehören.*[10]

$$\overline{A}^X = \overline{A} = X \setminus A$$

In der Abbildung 1.3 ist die Grundmenge X ein Quadrat mit Berandung und A ein darin liegender Kreis ohne Berandung. Die Komplementärmenge $\overline{A}$ besteht aus dem Rand des Kreises und allen Punkten des Quadrats außerhalb des Kreises.

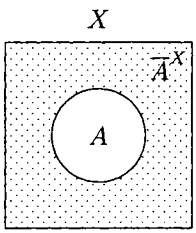


Abb. 1.3: Komplementärmenge einer Kreisscheibe bezüglich eines Quadrats

Beispiel 1.15 (Komplementärmenge bezüglich der Menge $X = \mathbb{R}$)

$$\overline{[a,b]} = (-\infty, a) \cup (b, \infty), \quad \overline{(a,b)} = (-\infty, a] \cup [b, \infty) \quad (a, b \text{ reelle Zahlen mit } a < b)$$

A und B seien beliebige Mengen. Die nachfolgend aufgeführten Gesetze folgen unmittelbar aus den logischen Regeln (1.3).

1.5.6 (Assoziative Gesetze)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.7}$$

Auf Grund der assoziativen Gesetze können Durchschnitte und Vereinigungen von beliebig vielen Mengen gebildet und dabei Klammern nach Belieben gesetzt und damit zur Vereinfachung auch weggelassen werden, ohne daß sich dabei das Ergebnis ändert. So kann beispielsweise für $(A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap \big((B \cap C) \cap D\big)$ auch $A \cap B \cap C \cap D$ geschrieben werden.

---

[10]Steht die Grundmenge X von vornherein fest, kann in $\overline{A}^X$ das Zeichen X weggelassen werden.

1.5.7 (Kommutative Gesetze)

$$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A} \tag{1.8}$$

1.5.8 (Distributive Gesetze)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(A \cap B) \cup C} &= \boldsymbol{(A \cup C) \cap (B \cup C)} \\ \boldsymbol{A \cap (B \cup C)} &= \boldsymbol{(A \cap B) \cup (A \cap C)} \\ \\ \boldsymbol{(A \cup B) \cap C} &= \boldsymbol{(A \cap C) \cup (B \cap C)} \\ \boldsymbol{A \cup (B \cap C)} &= \boldsymbol{(A \cup B) \cap (A \cup C)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hierin gehen die Formeln der zweiten Gruppe aus denen der ersten Gruppe durch Vertauschen der Operationen $\cap$ und $\cup$ hervor.

1.5.9 (Gesetze für Teilmengen) *A und B seien Teilmengen einer festgelegten Grundmenge X. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{array}{lclclcl} \boldsymbol{A \cup X} & = & \boldsymbol{X} & \quad & \boldsymbol{A \cup \overline{A}} & = & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{A \cap X} & = & \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{A \cap \overline{A}} & = & \boldsymbol{\emptyset} \\ \boldsymbol{A \cup \emptyset} & = & \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{\overline{\overline{A}}} & = & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A \cap \emptyset} & = & \boldsymbol{\emptyset} & & \boldsymbol{A \setminus B} & = & \boldsymbol{A \cap \overline{B}} \end{array} \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}} \qquad (\textbf{\textit{De Morgan}}) \tag{1.11}$$

Die Formeln von *De Morgan* gehen unmittelbar aus den gleichnamigen logischen Tautologien (1.5) hervor:

$$\begin{array}{lclclcl} x \in \overline{A \cap B} & \Leftrightarrow & \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) & \Leftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) & \Leftrightarrow & x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ x \in \overline{A \cup B} & \Leftrightarrow & \neg((x \in A) \vee (x \in B)) & \Leftrightarrow & (x \notin A) \wedge (x \notin B) & \Leftrightarrow & x \in (\overline{A} \cap \overline{B}) \end{array}$$

Bisher spielte die Reihenfolge der Elemente in einer Menge keine Rolle, – alle Elemente sind hierin gleichberechtigt. Eine Reihenfolge zwischen den Elementen wird erst durch die Einführung *geordneter Paare* (a, b) von Elementen möglich: hierin ist a *das erste* und b *das zweite* Element.

1.5.10 (Produkt $\boldsymbol{A \times B}$) *Für zwei Mengen A und B heißt die **Menge aller geordneten Paare $\boldsymbol{(a,b)}$** von Elementen, wobei a ein Element der Menge A und b ein Element der Menge B ist, (**kartesisches**) **Produkt $\boldsymbol{A \times B}$** von A und B.*

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}}$$

Für $\boldsymbol{A \times A}$ wird auch das Symbol $\boldsymbol{A^2}$ verwendet.[11]

[11]Für drei Faktoren wird statt $(A \times B) \times C$ kurz $A \times B \times C$ und für das Element $((a, b), c)$ kurz (a, b, c) geschrieben. Entsprechend bezeichnet das Symbol A^3 die Produktmenge $A \times A \times A$.

Die Produktmenge $A \times B$ kann symbolisch in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden:
Wird der erste Faktor A auf der horizontalen Achse und der zweite Faktor B auf der vertikalen Achse „abgetragen", so werden die Elemente (a, b) des Produkts $A \times B$ durch diejenigen Punkte der Ebene symbolisiert, deren „horizontale Koordinate" der Menge A und deren „vertikale Koordinate" der Menge B angehören.

Beispiel 1.16 Das Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann als Menge aller Zahlenpaare (Punkte) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgefaßt werden.
In der Abbildung 1.4 sind die Produkte $A \times B$ zweier abgeschlossener Intervalle sowie einer endlichen Menge mit einem offenen Intervall dargestellt. Im ersten Fall ist das Produkt ein Rechteck (einschließlich Berandung) und im zweiten Fall eine aus drei vertikalen offenen Strecken bestehende Menge.

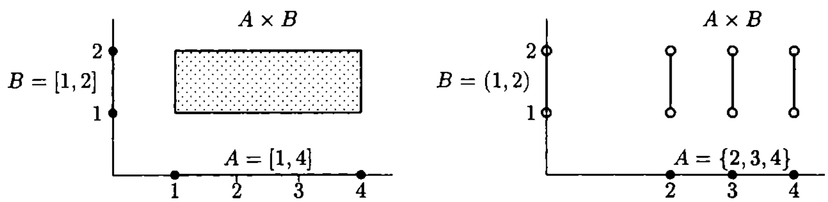


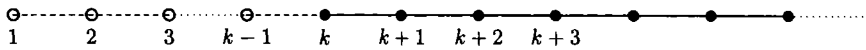
Abb. 1.4: Produkt zweier Mengen

Beispiel 1.17 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ seien zwei Mengen von m bzw. n Elementen.
Das Produkt $A \times B$ besteht dann aus den $m \times n$ Paaren (a_i, b_j) für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Diese können in einer zweidimensionalen Liste (Tabelle, Matrix) angeordnet werden:

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \ldots & (a_m, b_n) \end{pmatrix}$$

1.6 Induktiver Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen

Beim Umgang mit natürlichen Zahlen treten häufig „Abschnitte“ der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen von folgender Form auf:



$$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

Ein solcher Abschnitt besitzt folgende Eigenschaften:

(1) k ist die kleinste Zahl der Menge $\mathbb{N}_k$.

(2) Ist n irgendeine Zahl von $\mathbb{N}_k$, so enthält $\mathbb{N}_k$ auch die Nachfolgerzahl $n+1$: $(n \in \mathbb{N}_k) \Rightarrow (n+1 \in \mathbb{N}_k)$.

Es gilt aber auch das Umgekehrte: Eine Menge natürlicher Zahlen mit den beiden Eigenschaften (1) und (2) ist gerade der Abschnitt $\mathbb{N}_k$ *aller* Nachfolgerzahlen von k, einschließlich k.

1.6.1 (Induktionsgesetz für die Menge der natürlichen Zahlen)
Enthält eine Menge M von natürlichen Zahlen eine ***kleinste Zahl*** $\boldsymbol{k}$ *und* ***mit jeder Zahl*** $\boldsymbol{n}$ ***auch deren Nachfolger*** $\boldsymbol{n+1}$*, so stimmt die Menge M mit der Menge $\mathbb{N}_k$ aller natürlichen Zahlen überein, die größer oder gleich k sind.*

Das Induktionsgesetz findet vielfältige Anwendungen dort, wo Begriffe oder Aussagen mit einer natürlichen Zahl als Parameter auftreten.

1.6.2 (Induktive Definition) *Für die Erklärung aller Glieder einer unendlichen Folge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ von Elementen einer Menge – zum Beispiel von Zahlen oder Aussagen – genügt es,* ***das erste Element*** *a_k anzugeben sowie eine* ***Vorschrift,*** *wie aus einem beliebigen bereits bekannten Element a_n der Folge* ***das nachfolgende Element*** *a_{n+1} bestimmt werden kann.*

Beweis: Auf Grund des Induktionsgesetzes stimmt die Menge derjenigen natürlichen Zahlen i, für welche das Element a_i erklärt ist, mit der Menge $\{k, k+1, \ldots\}$ überein. Damit ist die gesamte Folge erklärt. □

Beispiel 1.18 (Fakultät) Die induktive Definition für das Produkt $\mathbf{1 \cdot 2 \cdots n}$ der ersten n natürlichen Zahlen (Symbol $\boldsymbol{n!}$, gelesen „*n Fakultät*“) lautet:

- $\mathbf{1! = 1}$ (Erklärung für das erste Element)
- $\boldsymbol{(n+1)! = n!(n+1)}$ (Induktive Erklärung für das $(n+1)$-te Element)[12]

[12] Oft ist es zweckmäßig, die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen hinzuzunehmen. Dann wird $0! = 1$ gesetzt. Dies ist auch die einzig sinnvolle Festsetzung, denn soll $(n+1)! = n!(n+1)$ auch für $n = 0$ gelten, so muß $0!$ wegen $1! = (0+1)! = 0! \cdot 1!$ den Wert 1 haben.

Beispiel 1.19 (Summensymbol) Für eine Zahlenfolge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ lautet die induktive Definition der Summe

$$S_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n} = \sum_{i=k}^{k+n} a_i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots):$$

$$\boldsymbol{S_0 = a_k;\ S_{n+1} = S_n + a_{k+n+1}}$$

Beispiel 1.20 (Zinseszinsformel) Ein Anfangskapital K werde jährlich mit einem Zinssatz p verzinst. Die dabei anfallenden Zinsen sollen jeweils nach der Verzinsung dem Kapital hinzugefügt werden. Die induktive Definition für das nach n-maliger Verzinsung aufgelaufene Kapital K_n lautet:

$$\boldsymbol{K_0 = K;\ K_n = K_{n-1}(1+p)} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$$

Die Aussage $A_n = (n! > 2^n)$ ist für die Anfangszahl $n = 4$ und für alle natürlichen Zahlen $n > 4$ wahr. Für den Nachweis der Gültigkeit von A_n und weiterer derartiger Aussagen für *alle* natürlichen Zahlen n oberhalb einer gewissen Anfangszahl kann das Induktionsgesetz verwendet werden.

1.6.3 (Induktiver Beweis) *Es sei A_n eine von einer natürlichen Zahl n abhängende Aussageform, zum Beispiel eine Gleichung oder Ungleichung, welche n als Parameter enthält. Dabei seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

(1) *Für eine Anfangszahl k ist die Aussage A_k wahr.* (***Induktionsanfang***)

(2) *Für jede natürliche Zahl $n \geq k$ folgt aus der Annahme, A_n sei wahr, daß auch A_{n+1} wahr ist.* (***Schluß von n auf n + 1***)

*Dann sind **alle Aussagen A_n für $n \geq k$ wahr**.*

B e w e i s : Aufgrund des Induktionsgesetzes enthält die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen n, für die A_n wahr ist, die Zahl k und mit jeder Zahl n auch deren Nachfolger. Folglich enthält die Menge M alle natürlichen Zahlen $n \geq k$. □

Beispiel 1.21 Ein Kapital, das jährlich um 10% *des Startwertes* K_0 zunimmt, bildet eine linear wachsende Folge L_n mit $L_n = K_0\left(1 + \frac{n}{10}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wird dagegen das Kapital jährlich um 5% *des aktuellen Wertes* erhöht, so entsteht die exponentiell wachsende Kapitalfolge $K_n = K_0\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Für $1 \leq n \leq 26$ ist $L_n > K_n$. Es wird nun induktiv gezeigt, daß ab $n = 27$ die Ungleichung $K_n > L_n$ gilt.[13]
Induktionsanfang: Für die Anfangszahl $k = 27$ ist $L_k = 3,7 < K_k \approx 3,73$.
Schluß von n auf n + 1: Die Ungleichung $K_0\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n > K_0(1 + \frac{n}{10})$ sei für irgendeine Zahl $n \geq 27$ erfüllt. Dann gilt:

$$(1 + \frac{5}{100})^{n+1} = (1 + \frac{5}{100})^n(1 + \frac{5}{100}) > (1 + \frac{n}{10})(1 + \frac{5}{100}) = (1 + \frac{n}{10}) + \frac{5}{100}(1 + \frac{n}{10})$$

[13] Der Wert von $K_0 > 0$ ist hierfür unerheblich, so daß $K_0 = 1$ angenommen werden darf.

Hierin ist der letzte Summand $\frac{5}{100}(1+\frac{n}{10})$ für $n > 10$ größer als $\frac{1}{10}$, also insbesondere für alle $n \geq 27$. Daher gilt:

$$K_{n+1} = (1+\frac{5}{100})^{n+1} > 1 + \frac{n}{10} + \frac{1}{10} = 1 + \frac{n+1}{10} = L_{n+1}$$

Damit ist der Schluß von n auf $n+1$ korrekt. □

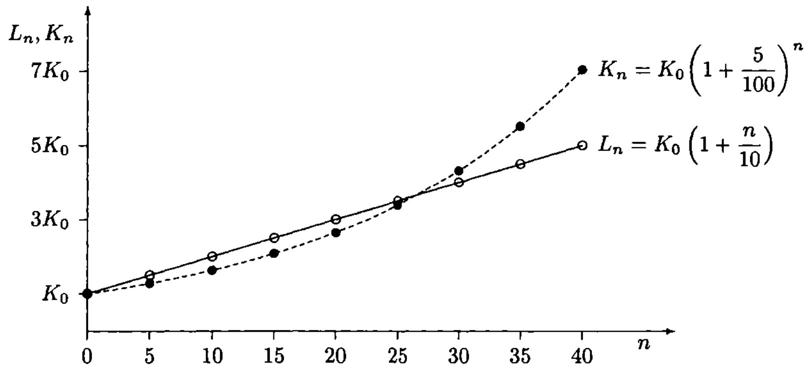


Abb. 1.5: Größenvergleich zwischen linearem und exponentiellem Wachstum durch induktiven Beweis

Beispiel 1.22 Ist der Schluß von n auf $n+1$ korrekt, so folgt aus der Wahrheit von A_n die Wahrheit von A_{n+1}. Gibt es aber keine erste Zahl k, für welche A_k wahr ist, so hat der zweite Teil des induktiven Beweises keinen Sinn. Dies liegt daran, daß das zugrundeliegende Induktionsgesetz 1.6.1 eine solche kleinste Zahl zwingend erfordert. So kann z. B. für die falsche Aussage $A_n =$ „$n = n+1$" der Schluß von n auf $n+1$ problemlos durchgeführt werden, während es keine Anfangszahl k gibt, für welche A_k eine wahre Aussage ist.

1.7 Abbildungen

Durch einen funktionalen Zusammenhang f zwischen zwei Mengen A und B werden gewissen Elementen a der Menge A gewisse Elemente b der Menge B zugeordnet.

Beispiel 1.23

(1) $A = S =$ Menge der Studenten der Universität NN (während eines bestimmten Semesters)

   (a) $B_1 =$ Buchbestand der Bibliotheken der Universität NN
   Zuordnung f_1: Vom Studenten $a \in A$ (innerhalb des Semesters) ausgeliehene Bücher

(b) $B_2 = \mathbb{N} =$ Menge der natürlichen Zahlen
Zuordnung f_2: Körpergröße des Studenten $a \in A$ (in cm)

(c) $B_3 = \mathbb{N}$
Zuordnung f_3: Immatrikulationsnummer des Studenten $a \in A$

(2) $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$
Zuordnung f: Der reellen Zahl x wird ihr absoluter Betrag $|x|$ zugeordnet

(3) $A = (-\frac{4}{3}, \infty)$, $B = \mathbb{R}$
Zuordnung f: Der Zahl x wird die Zahl $\ln(3x + 4)$ zugeordnet

Eine derartige Zuordnung f kann durch Angabe aller Paare (a, b), für die das Element $b \in B$ dem Element $a \in A$ zugeordnet ist, realisiert werden, und sie ist demnach eine Teilmenge des Produkts $A \times B$.
Diese Teilmenge kann zum Beispiel beschrieben werden

- durch Angabe einer ***Liste aller Paare*** (a, b) zusammengehöriger Elemente,
- mit Hilfe von ***Pfeilen***, welche die Zuordnung elementweise angeben (Symbol: $f : a \mapsto b$),
- durch eine ***Formel*** (Rechenvorschrift, Beispiele (2) und (3)).

1.7.1 (Abbildung als Teilmenge von $A \times B$) *Eine **Abbildung f aus einer Menge A in eine Menge B** ist eine Teilmenge des Produkts $A \times B$. Diese Menge heißt auch **Graph von f**. Eine Abbildung f kann als eine **Zuordnung** zwischen (gewissen) Elementen von A und (gewissen) Elementen von B interpretiert werden.*[14]

In der Abbildung 1.6 sind die Lieferbeziehungen zwischen einer Menge $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ von Zulieferern und einer Menge $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ von Produzenten als Abbildung dargestellt, links durch elementweise Zuordnung und rechts durch den Graphen als Teilmenge des Produkts $Z \times P$.

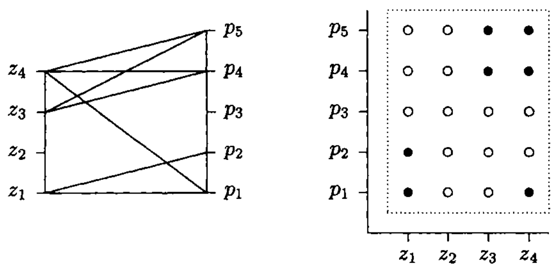


Abb. 1.6: Darstellung einer Abbildung durch elementweise Zuordnung und durch den Graphen

[14] f heißt auch ***Funktion***, wenn A und B Mengen reeller Zahlen sind.

1.7.2 (Bezeichnungen für eine Abbildung f aus A in B)

- *Ist $(a,b) \in f$, so heißt a (ein)* ***Urbild von b****, und b heißt (ein)* ***Bild von a*** *(bzgl. der Abbildung f).*

- *Die Menge aller Elemente von A, die ein Bild besitzen, heißt* ***Definitionsbereich*** *oder* ***Urbildbereich*** *der Abbildung f (Symbol: $\mathrm{db}(f)$), und die Menge aller Elemente von B, die ein Urbild besitzen, heißt* ***Wertebereich*** *oder* ***Bildbereich*** *von f (Symbol: $\mathrm{wb}(f)$).*

- *Ist der Definitionsbereich die gesamte Menge A, so heißt f eine Abbildung* ***von A*** *in B, und ist der Wertebereich die gesamte Menge B, so heißt f eine Abbildung aus A* ***auf B****.*

- *Ist f auf der gesamten Menge A definiert und besteht das Bild jedes Elements von A nur aus einem einzigen Element b, so heißt f eine* ***eindeutige Abbildung von A in B.***
  (Symbole: $b = f(a)$ für die elementweise Zuordnung und $f : A \to B$ für die gesamte Abbildung)

1.7.3 (Umkehrbar eindeutige Abbildung, Umkehrabbildung)

Eine eindeutige Abbildung $f : A \to B$ von A auf die gesamte Menge B heißt ***umkehrbar eindeutig****, wenn jedes Element von B Bild eines eindeutig bestimmten Elements von A ist. Dies bedeutet, daß* ***für jedes Element*** *$b \in B$ die Beziehung $b = f(a)$ eindeutig nach a „aufgelöst" werden kann.*

Wird für eine solche Abbildung zu gegebenem $b \in B$ das eindeutig bestimmte Urbild mit $f^{-1}(b)$ bezeichnet, so ist hierdurch eine ***eindeutige Abbildung $f^{-1} : B \to A$ von B auf A*** *erklärt, die* ***Umkehrabbildung*** *oder auch* ***inverse Abbildung****.*

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

Für jedes Element $a \in A$ führt die Anwendung von f^{-1} auf das Bild $f(a)$ zum Ausgangselement a zurück, und entsprechend führt für jedes Element $b \in B$ die Anwendung von f auf $f^{-1}(b)$ zum Ausgangselement b zurück, also:

$$\boldsymbol{f^{-1}(f(a)) = a} \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{f(f^{-1}(b)) = b} \quad \textit{für alle } \boldsymbol{a \in A,\ b \in B} \tag{1.12}$$

Zu den Beispielen 1.23:

(1a) $\mathrm{db}(f) \subseteq A$ = Menge aller Studenten, die während des Semesters ein Buch ausleihen; $\mathrm{wb}(f) \subseteq B$ = Menge aller Bücher, die während des Semesters an Studenten ausgeliehen werden.
Die Abbildung f wird im allgemeinen weder eindeutig noch umkehrbar eindeutig sein.

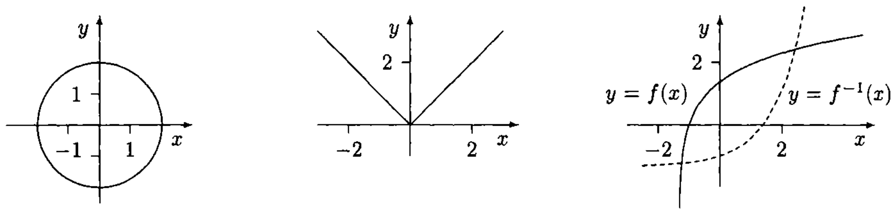
(1b) f ist eine eindeutige Abbildung von A auf die echte Teilmenge $\mathrm{wb}(f)$ der Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die aus allen hierbei auftretenden Körpergrößen besteht. $f : A \to \mathrm{wb}(f)$ ist umkehrbar eindeutig, wenn keine Größe mehrfach auftritt.

(1c) f ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von A auf die Menge $\mathrm{wb}(f)$ der tatsächlich auftretenden Immatrikulationsnummern. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathrm{wb}(f) \to A$ ordnet jeder Immatrikulationsnummer den zugehörigen Studenten zu.

(2) f ist eine eindeutige Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und dem Wertebereich $[0, \infty)$. Wegen $f(x) = f(-x)$ ist f nicht umkehrbar eindeutig.
Wird der Definitionsbereich jedoch auf $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ eingeschränkt, so entstehen zwei umkehrbar eindeutige Abbildungen auf $[0, \infty)$: $x \mapsto f_1(x) = -x$ für $x \le 0$ sowie $x \mapsto f_2(x) = x$ für $x \ge 0$.
Deren Umkehrfunktionen sind durch $f_1^{-1}(y) = -y$ bzw. $f_2^{-1}(y) = y$ für $y \in [0, \infty)$ erklärt.

(3) f ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $(-\frac{4}{3}, \infty)$ auf $\mathbb{R}$, da sich die Funktionsgleichung $y = f(x)$ für *jede* reelle Zahl y durch $x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 4}{3}$ eindeutig nach x auflösen läßt. Die Umkehrabbildung (Umkehrfunktion) $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{4}{3}, \infty)$ ist in der Abbildung 1.7 rechts dargestellt.

Abb. 1.7: Eindeutigkeit und umkehrbare Eindeutigkeit von Abbildungen



Nicht eindeutige Abbildung: $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Nicht umkehrbar eindeutige Funktion: $y = f(x) = |x|$

Umkehrbar eindeutige Funktion: $y = f(x) = \ln(3x + 4)$ $x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 4}{3}$

Beispiel 1.24 (Umkehrfunktion und gespiegelte Umkehrfunktion)

Die Gesamtkosten k [€] für die Herstellung von x [t] eines Produkts seien durch eine lineare Funktion $k = f(x) = ax + b$ gegeben.

Der Parameter a bedeutet hierbei den Preis in € pro t, und mit dem Parameter b sind die von x unabhängigen Fixkosten bezeichnet. In der Abbildung 1.8 ist die Kostenfunktion $k = f(x)$ (innere Achsenbezeichnungen) für $a = 2.000$ [€ /t] und $b = 1.500$ [€] dargestellt.
Werden die vertikal aufgetragenen Kosten als unabhängige Veränderliche betrachtet, so kann der gleiche Graph für das Ablesen der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(k)$ verwendet werden. Um k in der üblichen Weise auf der horizontalen Achse ablesen zu können, werden die Koordinatenachsen vertauscht (äußere Achsenbezeichnungen). Dem entspricht geometrisch eine Spiegelung des Koordinatensystems an der (punktierten) Winkelhalbierenden. Der Punkt $P' = (k, x)$ ist dabei der Spiegelpunkt von $P = (x, k)$. Hierbei

geht der Graph der Funktion $k = f(x)$ in den Graphen der (gespiegelten) Umkehrfunktion $x = f^{-1}(k)$ über.

Der eingetragene Punkt P und sein Spiegelpunkt P' stellen den Fall $x = 3$ [t] und $k = 7.500$ [€] dar: $f(3) = 7.500$ und $f^{-1}(7.500) = 3$

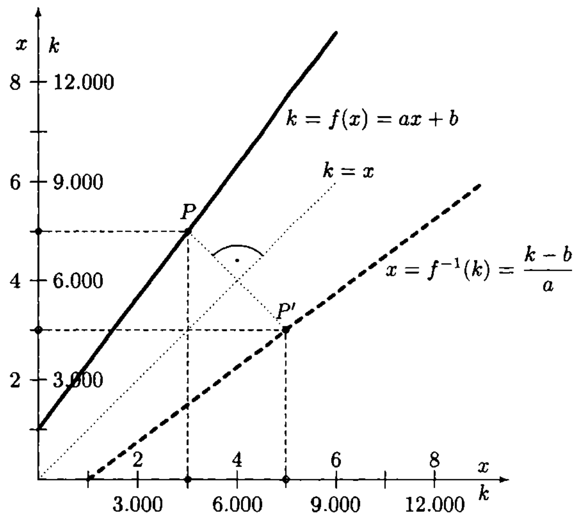


Abb. 1.8: Lineare Kostenfunktion und gespiegelte Umkehrfunktion

1.8 Aufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1.1 (Kontraposition)
Untersuchen Sie den logischen Zusammenhang zwischen den folgenden vier Aussagen:

(a) *„Gute Arbeit wird gut bezahlt."*

(b) *„Schlechte Arbeit wird schlecht bezahlt."*

(c) *„Wer gut bezahlt wird, hat gute Arbeit geleistet."*

(d) *„Wer schlecht bezahlt wird, hat schlechte Arbeit geleistet."*

Aufgabe 1.2 (Tautologien)
Zeigen Sie anhand von Tabellen der Wahrheitswerte, daß die Schlußregeln (1.5) Tautologien sind.

Aufgabe 1.3 (Verneinung)
Was bedeuten die Verneinungen der folgenden Aussagen?

(a) *„Alle Produkte der Marke XY sind von guter Qualität oder sind bei minderer Qualität im Preis reduziert."*

(b) *„Alle Zimmer des Hotels NN haben Balkon und Blick zum Meer."*

Aufgabe 1.4 (Indirekter Beweis)
Beweisen Sie folgende Aussage:
Für je zwei natürliche Zahlen n und p ist die Potenz n^p dann und nur dann eine gerade Zahl, wenn n eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 1.5 (Mengenoperationen)
Gegeben seien die Grundmenge $X = (0,3] \subseteq \mathbb{R}$ und deren Teilmengen $A = (0,1)$, $B = (\frac{1}{2}, 2)$, $C = (\frac{3}{2}, 3)$ und $D = [1,2]$.
Beschreiben Sie die Mengen

$$A \cap (B \cup C),\ A \cup (B \cap C),\ (D \setminus C) \cap A,\ (D \setminus C) \cup A,\ (C \setminus D) \cap B,\ (C \setminus D) \cup B$$

sowie deren Komplementärmengen (bzgl. der Grundmenge X) mit Hilfe von Ungleichungen bzw. Gleichungen; stellen Sie die Mengen als Vereinigungsmengen von Intervallen bzw. Punkten dar.

Aufgabe 1.6 (Mengenoperationen)
Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengenbeziehungen für beliebige Mengen gilt; führen Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

(a) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ $\qquad$ $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \cup C)$

(b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$ $\qquad$ $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cap C)$

(c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ $\qquad$ $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Aufgabe 1.7 (Mengenoperationen, Formeln von *de Morgan*)
Es sollen x Einheiten einer Ware P zum Preis $p = 2$ € pro Einheit und y Einheiten einer Ware Q zum Preis $q = 3$ € pro Einheit verkauft werden; dabei sind x und y reelle Zahlen mit $0 \leq x \leq 8$ und $0 \leq y \leq 8$. Die Menge aller Verkaufssituationen (x, y) stellt eine Teilmenge M von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dar. Durch drei weitere Bedingungen sind Teilmengen A_1, A_2 und A_3 von M definiert:

A_1 : Der Verkaufserlös beträgt mindestens 12 € .
A_2 : $2x + y \leq 16$
A_3 : $2y \leq 8 + x$

Bestimmen Sie – durch Ungleichungen und grafisch – folgende Teilmengen von M (die Bildung der Komplementärmenge ist hierbei bezüglich der Grundmenge M zu verstehen):

(a) Es gelten alle drei Bedingungen.

(b) Die dritte Bedingung ist erfüllt, aber mindestens eine der ersten beiden Bedingungen ist verletzt.

(c) Die ersten beiden Bedingungen sind verletzt.

(d) $\overline{A_1 \cap (A_2 \setminus A_3)}$

Aufgabe 1.8 (Induktionsprinzip)

(a) Beweisen Sie ***induktiv*** die Formeln (6.7) und (6.10) für die Summe einer arithmetischen bzw. geometrischen Folge.

(b) *Logarithmisches Wachstum ist schwächer als lineares Wachstum, lineares Wachstum ist schwächer als exponentielles Wachstum, aber $n!$ wächst stärker als exponentiell.*
So sind für alle hinreichend großen Zahlen n die Ungleichungen $5 \ln n < n$, $50n < 2^n$ und $10^n < n!$ erfüllt.

Untersuchen Sie, für welche natürlichen Zahlen diese Ungleichungen gelten.

Aufgabe 1.9 (Abbildungen)
Bestimmen Sie die Anzahl aller eindeutigen Abbildungen der Menge $\{£, \$, €\}$ in die Menge $\{\oplus, \odot, \bigcirc, \otimes\}$ und geben Sie unter diesen die umkehrbar eindeutigen konkret an.

Aufgabe 1.10 (Umkehrabbildung)
Durch die Zuordnung

$$(u, v) = f(x, y) = (1 + 2x + 3y, 2 + 3x - 2y)$$

ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt, die dem Paar (x, y) ein Paar (u, v) zuordnet.

Zeigen Sie, daß f eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist und geben Sie eine Formel für die Umkehrabbildung $(x, y) = f^{-1}(u, v)$ an. Bestimmen Sie hiermit diejenige Menge, die durch die Abbildung f auf die Gerade $v = u$ abgebildet wird.

Aufgabe 1.11 (Monotonie und Umkehrfunktion)
Begründen Sie, daß eine streng monoton steigende bzw. streng monoton fallende Funktion (vgl. (7.10)) eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Definitionsbereichs auf den Wertebereich ist.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 1.12 (Umkehrfunktion)
Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich der nachfolgenden Funktionen an und skizzieren Sie deren Kurvenverlauf.
Untersuchen Sie die Funktionen auf umkehrbare Eindeutigkeit, geben Sie die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ in denjenigen Intervallen an, in denen die Funktion umkehrbar eindeutig ist, und skizzieren Sie den Graphen der gespiegelten Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$.

(1) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ (2) $y = f(x) = 2|x-1| + 1$ (3) $y = f(x) = 10^{5x^2} - 4$

(4) $y = f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3x-2}}$ (5) $y = f(x) = 2\ln x + \lg x$ (6) $y = f(x) = \ln\left(2 - \dfrac{3}{x}\right)$

Kapitel 2

Grundaufgaben der Kombinatorik

2.1 Permutationen (Vertauschungen)

Eine Menge M aus n Elementen kann in einer Reihe angeordnet werden, indem ein Element die Nummer 1, ein weiteres die Nummer 2, ein weiteres die Nummer 3 erhält, usw. Eine solche Anordnung sei jetzt fest ausgewählt: a_1 = erstes Element, a_2 = zweites Element, ...
Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf sich führt dann zu einer neuen Anordnung: das neue erste Element ist das Bild von a_1, das neue zweite Element ist das Bild von a_2, usw. Aber auch das Umgekehrte ist richtig: je zwei Anordnungen von M gehen durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auseinander hervor; eine solche Abbildung ordnet je zwei Elemente mit der gleichen Nummer einander zu. Anordnungen einer Menge können daher auch als umkehrbar eindeutige Abbildungen der Menge auf sich interpretiert werden.

2.1.1 (Permutation) *Eine Anordnung einer aus endlich vielen Elementen bestehenden Menge M in irgendeiner Reihenfolge (bzw. eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge M auf sich) heißt* ***Permutation*** *(**Vertauschung**) von M.*

- ***Anzahl der Permutationen:*** *Zu einer aus n Elementen bestehenden Menge gibt es genau*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \tag{2.1}$$

verschiedene Permutationen.

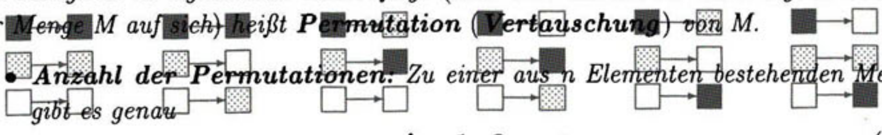


Abb. 2.1: Permutationen einer Menge von drei Elementen als umkehrbar eindeutige Abbildungen und als Anordnungen

B e w e i s (mit Hilfe des Induktionsprinzips):
1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr: Ein einziges Element kann nur auf eine Weise angeordnet werden.