Mathematik im Grundstudium

Aufgaben und Lösungen

Von
Claus-Michael Langenbahn

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Langenbahn, Claus-Michael:
Mathematik im Grundstudium : Aufgaben und Lösungen / von Claus-Michael Langenbahn. – München ; Wien : Oldenbourg, 1998
ISBN 3-486-24584-8

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Huber KG, Dießen

ISBN 3-486-24584-8

Denken Sie daran! Neben Hammer und Zange sollten Sie stets auch den Gaußalgorithmus und die Bernoulli-Ungleichung in Ihrem Werkzeugkasten haben.

Vorwort

Das vorliegende Buch richtet sich an all jene, die im Laufe ihres Studiums Grundkenntnisse der Mathematik erwerben. Um diesem Anspruch Rechnung zu tragen, wurden Aufgaben aus den Anfängervorlesungen der Natur–, Ingenieur–, Sozial– und Wirtschaftswissenschaften sowie der Mathematik ausgewählt. Der dort behandelte Stoff wird in typischer Weise widergespiegelt und vertieft. Dem Leser soll anhand der Aufgaben Gelegenheit gegeben werden, grundlegende Techniken und Vorgehensweisen zur Bewältigung mathematischer Probleme einzuüben. Dazu gliedert sich das Buch in 16 Sektionen der unterschiedlichsten Bereiche. Jede Sektion wiederum besteht aus je 10 Aufgaben. In der Regel bauen weder die Sektionen noch die darin enthaltenen Aufgaben aufeinander auf.

Während ein reines Lehrbuch im allgemeinen lediglich Aufgabenstellungen ohne Lösungen enthält, bietet dieses Werk zu jeder Aufgabe den kompletten Lösungsweg nebst Alternativlösungen. Jede Schlußweise wird erläutert, jeder Rechenschritt begründet, wobei hervorgehobene *Schlüsselwörter* auf die zugrundeliegende Theorie hinweisen. Der Leser sollte zunächst bestrebt sein, die Aufgaben selbst zu lösen, und der Versuchung widerstehen, gleich nach den Lösungen zu schauen.

Besonders danken möchte ich der angehenden Diplom Ingenieurin Anja Bolte und dem Psychologiestudenten, meinem Bruder, Markus Langenbahn. Beide unterstützten mich in sehr fruchtbarer Weise.

Claus–Michael Langenbahn, Saarbrücken

Möchten Sie konstruktive Kritik üben, oder haben Sie Vorschläge für weitere Aufgaben oder Sektionen? Bitte zögern Sie nicht mir zu schreiben:

e–mail: micha@heron.math.uni-sb.de oder
michael@num.uni-sb.de

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung

Zeichen .... **Bedeutung**

$:\Longleftrightarrow$ .... per Definition genau dann

$\exists!$ .... es existiert genau ein

$\mathbb{N}$ .... Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0$ .... Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0

$\mathbb{Z}$ .... Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ .... Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ .... Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ .... Menge der komplexen Zahlen

$\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(z)$ .... Real–, Imaginärteil der komplexen Zahl z

i .... imaginäre Einheit

A^C .... Komplement der Menge A

$\wp(M)$ .... Potenzmenge der Menge M

$\emptyset$ .... leere Menge

$\mathbb{1}_A$ .... Indikatorfunktion der Menge A

$f_{|T}$ .... Restriktion der Funktion f auf die Menge T

$\mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbf{W})$ .... Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{W}$

$E(X)$, $V(X)$ .... Erwartungswert, Varianz der Zufallsvariablen X

P .... Wahrscheinlichkeitsmaß

ε_x .... Diracmaß

$\widehat{g}$ .... Schätzwert der Größe g

$\mathrm{Mat}(T)$ .... die zur linearen Abbildung T gehörende Matrix

$\mathrm{Op}(B)$ .... die zur Matrix B gehörende lineare Abbildung

$\mathbf{v}$ .... Vektor

$\mathrm{LH}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ .... lineare Hülle der Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

ER_w .... Eigenvektorraum zum Eigenwert w

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ .... Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

RBF .... Rentenbarwertfaktor

REF .... Rentenendwertfaktor

kw .... Kapitalwert

Kapitel 1

Aufgaben

1.1 Zahlen, Mengen und Funktionen

Aufgabe 1

Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge G. Finden Sie möglichst einfache Ausdrücke für:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B^C)$

b) $(A \cup B) \cap (A^C \cup B) \cap (A \cup B^C)$

c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

d) $(A \setminus (A \cap B)) \cup B$

e) $(C \setminus ((A \cup B) \cap C)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup A$

Aufgabe 2

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ bzw. $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

a) f, g injektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injektiv

b) f, g surjektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ surjektiv

c) Was folgt daraus für die Hintereinanderausführung bijektiver Funktionen?

Aufgabe 3

Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, für alle $A, B \subseteq X$

ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, für alle $A, B \subseteq X$

Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine echte Inklusion.

iii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, für alle $A, B \subseteq X \iff f$ ist injektiv.

b) i) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, für alle $C, D \subseteq Y$

ii) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, für alle $C, D \subseteq Y$

Aufgabe 4

Sei eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gegeben. Zeigen Sie:

a) f ist injektiv $\iff$ Es gibt ein $g : Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$

b) f ist surjektiv $\iff$ Es gibt ein $h : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$

c) f ist bijektiv $\iff$ Es gibt ein $g : Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$

Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 5

Sei $f : X \longrightarrow Y$. Zeigen Sie:

a) i) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, für alle $B \subseteq Y$.

Geben Sie ein Beispiel für die echte Inklusion an.

ii) In i) gilt die Gleichheit genau dann, wenn f surjektiv ist.

b) i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, für alle $A \subseteq X$.

Geben Sie ein Beispiel für die echte Inklusion an.

ii) In i) gilt die Gleichheit genau dann, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 6

a) Sei $f : M \longrightarrow \wp(M)$ eine Abbildung von einer Menge in ihre Potenzmenge und $T := \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$. Zeigen Sie, daß es kein $x \in M$ gibt mit $f(x) = T$.

b) Gibt es surjektive Abbildungen von M auf $\wp(M)$?

Aufgabe 7

Zeigen Sie:

a) Die Mengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind jeweils abzählbar.

b) Die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Ziehen Sie sich bei Ihrem Beweis auf das Intervall $[0,1]$ zurück, und beachten Sie, daß sich jede dieser Zahlen als Dezimalzahl schreiben läßt!

Aufgabe 8

Zeigen Sie, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.

Hinweis:

Gehen Sie vom Gegenteil aus, wobei der darstellende Bruch o.B.d.A. in gekürzter Form vorliegen kann.

Aufgabe 9

a) Betrachten Sie zwei Zahlen $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Kann dann die Summe $a + b$ oder das Produkt $a \cdot b$ in der Menge $\mathbb{Q}$ liegen?

b) Existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $x^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aber $x^4 \in \mathbb{Q}$ ist?

c) Gibt es zwei irrationale Zahlen c und d, deren Summe und Produkt rational ist?

Aufgabe 10

a) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

   i) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(z) := z^2 - |z|$

   ii) $g := f_{|\mathbb{N}}$

b) Bestimmen Sie eine Teilmenge der ganzen Zahlen $T \subseteq \mathbb{Z}$, so daß die Funktion

$$h : \{1, \ldots, 15\} \longrightarrow T, \; h(n) := n^2 - n$$

bijektiv ist.

c) Finden Sie sowohl eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ als auch eine surjektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Aufgabe 11

Beweisen Sie folgende Summenformeln für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Aufgabe 12

Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen für alle natürlichen Zahlen n.

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ mit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

d) $2^n < n!$ für alle $n \geq 4$

Aufgabe 13

a) Beweisen Sie, daß die Zahl $3^{n-1} \cdot 8^{3n+1} - 4^n \cdot 7^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig durch 13 teilbar ist.

b) Man zeige, daß $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für jedes natürliche n ein Vielfaches von 133 ist.

Aufgabe 14

Zeigen Sie:

Ist M eine endliche Menge, so gilt für die Anzahl aller Teilmengen von M: $|\wp(M)| = 2^{|M|}$.

Aufgabe 15

Überprüfen Sie den folgenden Induktionsbeweis auf Korrektheit.

Behauptung:

Seien M und N endliche Mengen mit Elementenanzahl $|M| = |N|$ und $M \cap N \neq \emptyset$, dann gilt $M = N$.

Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Mächtigkeit der Mengen M und N.

Induktionsverankerung:

Sei $|M| = |N| = 1$ und gelte $M \cap N \neq \emptyset$, dann gilt $M = N = M \cap N$.

Induktionsannahme:

Es existiere ein $n' \in \mathbb{N}$, so daß obige Behauptung wahr ist für alle Mengen M' und N' mit $|M'| = |N'| \leq n'$.

Induktionsschritt:

Gegeben seien zwei Mengen M und N mit $|M| = |N| = n' + 1$ und $M \cap N \neq \emptyset$. Man zeige $M = N$.

Da $M \cap N$ nicht die leere Menge ist, existiert mindestens ein Element $x \in M \cap N$. Wir fixieren dieses Element und numerieren M und N mit x beginnend, d.h. mit $m_1 = n_1 = x$ sei

$$M = \{m_1, \ldots, m_{n'+1}\} \quad \text{und} \quad N = \{n_1, \ldots, n_{n'+1}\}.$$

Wir bilden die Mengen M_1 bzw. M_2, indem wir aus M das letzte bzw. vorletzte Element entfernen, d.h. es ist $M_1 = M \backslash \{m_{n'+1}\}$ bzw. $M_2 = M \backslash \{m_{n'}\}$. Analog verfahren wir bei der Menge N und erhalten $N_1 = N \setminus \{n_{n'+1}\}$ bzw. $N_2 = N \setminus \{n_{n'}\}$. Damit folgt offensichtlich $|M_1| = |N_1| = n'$ und $|M_2| = |N_2| = n'$. Nun gilt $M_1 \cap N_1 \neq \emptyset$ und $M_2 \cap N_2 \neq \emptyset$, da jeweils das Element x im Durchschnitt liegt. Wir können folglich auf die Mengen M_1 und N_1 bzw. M_2 und N_2 die Induktionsannahme anwenden und erhalten $M_1 = N_1$, ebenso $M_2 = N_2$. Daraus ergibt sich $M = M_1 \cup M_2 = N_1 \cup N_2 = N$.

■

Aufgabe 16

Man zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt:

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}$$

Berechnen Sie damit $\prod\limits_{k=m}^{n} (1 + x^{(2^k)})$ für $n \geq m$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$. Was ergibt sich für $x = -1$ bzw. $x = 1$?

Aufgabe 17

Es war wieder einmal Montag morgen, und der Hörsaal hoffnungslos überfüllt. Die Kommilitonen mußten teilweise mit einem Platz auf der Treppe vorliebnehmen, da führte der Dozent folgenden Beweis. Wo liegt der Fehler?

Behauptung:

Wenn von n Personen eine einen Sitzplatz hat, so haben bereits alle n Personen einen Sitzplatz.

Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Personen n.

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist die Behauptung sicher richtig.

Induktionsannahme:

Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch für $n + 1$ Personen, von denen eine einen Sitzplatz hat, daß alle sitzen können.

Induktionsbeweis:

Nach Voraussetzung hat von den $n + 1$ Personen eine einen Sitzplatz. Wir schicken eine vor die Tür, so daß n Personen übrigbleiben, von denen eine einen Sitzplatz hat. Deshalb hat nach Induktionsannahme jede eine Sitzplatz. Nun tauschen wir die Person vor der Tür mit einer dieser n Personen aus, wobei letztere ihren Stuhl mitnimmt. Wir haben dann wieder n Personen, von denen $n - 1$, also insbesondere eine, einen Sitzplatz hat. Und wieder gilt nach Induktionsannahme, daß alle einen Platz finden. Da auch die vor der Tür ihren Platz hat, haben somit alle $n + 1$ Personen einen Sitzplatz.

■

Aufgabe 18

Gegeben sei eine Menge M mit folgender Eigenschaft

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{8}(2n+1)^2\}$$

Man zeige: $n \in M \Longrightarrow n + 1 \in M$.

Was folgt daraus nach dem Prinzip der vollständigen Induktion?

Aufgabe 19

Zeigen Sie, daß für n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n > 0$, die die Voraussetzung $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$ erfüllen, stets nachfolgende Ungleichung gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 2^n$$

<u>Hinweis:</u>

Man fasse beim Induktionsschritt zwei Faktoren a_i und a_k mit $a_i \leq 1 \leq a_j$ zu einem Faktor zusammen.

Aufgabe 20

Man definiert $n_1 := 1$ und für $m \geq 2$ die n_m induktiv durch

$$n_m := \sum_{k=1}^{m-1} k \cdot n_k$$

Weisen Sie nach, daß für $m \geq 2$ die Gleichheit $n_m = \frac{m!}{2}$ gilt.

1.3 Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 21

Beweisen Sie den *Binomischen Satz*, der folgendes besagt:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Zeigen Sie die Richtigkeit der Behauptung mittels vollständiger Induktion nach n.

Hinweis:
Für natürliche Zahlen n und k gilt: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Aufgabe 22

Man zeige, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und jedes reelle $r \geq 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$(r+1)^n \geq \frac{n^2 \cdot r^2}{4}$$

Aufgabe 23

Beweisen Sie die *Bernoulli-Ungleichung* mittels vollständiger Induktion nach n. Sei dazu $x \geq -1$ eine reelle Zahl, dann gilt, so die Behauptung, für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Aufgabe 24

Man beweise die *Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel:* Sei K ein angeordneter Körper. Für alle $u_1, \ldots, u_n \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{u_1 \cdot \ldots \cdot u_n} \leq \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $u_1 = \ldots = u_n$ ist.

Aufgabe 25

Seien a_k und b_k reelle Zahlen, $k = 1, \ldots, n$. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

Aufgabe 26

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Weisen Sie die *Dreiecksungleichung* nach, die da lautet:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Zeigen Sie anschließend die Gültigkeit der Aussage

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$$

Aufgabe 27

Man zeige die Gültigkeit der *Hölderungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i \cdot b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Unter Zuhilfenahme des *Mittelwertsatzes der Differentialrechnung*, angewandt auf die Funktion $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{p}}$, erhält man die Abschätzung

$$(1 + x)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{x}{p} + 1,$$

eine Variante der *Bernoulli-Ungleichung*, vergleiche Aufgabe 23, für reelle Exponenten zwischen 0 und 1.

b) Beweisen Sie die *Hölderungleichung*, indem Sie die Tatsache verwenden, daß

$$\alpha, \beta > 0 \implies \frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \vee \frac{\beta}{\alpha} \geq 1,$$

mit geeignetem α und β.

Aufgabe 28

Wir befinden uns in der Ausgangssituation von Aufgabe 27, diesmal mit $p \geq 1$. Beweisen Sie mit Hilfe der *Hölderungleichung* die nachfolgende *Minkowskiungleichung*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$