Bücher von Herrn Univ.-Prof. Dr. Günter Altrogge im Oldenbourg Verlag:

Altrogge, Investition, 4. Auflage
Altrogge, Netzplantechnik, 3. Auflage
Altrogge, Finanzmathematik

Finanzmathematik

Von
Universitätsprofessor
Dr. Günter Altrogge

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Für Kumpelchen

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Altrogge, Günter:
Finanzmathematik / von Günter Altrogge. – München ; Wien :
Oldenbourg, 1999
ISBN 3-486-24465-5

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-24465-5

Inhaltsverzeichnis

1. Zinsrechnung

1.1. Zinsen und Bezugszeitraum

Zinsen stellen das Entgelt dar für die zeitweilige Überlassung von Kapital. Der Gläubiger ist Kapitalgeber, der Schuldner ist Kapitalnehmer. Das Geschäft der Banken ist hier beidseitig, sie sind Intermediäre zwischen Kapitalanlegern und Kreditnehmern. Banken vergüten ihren Einlagekunden Habenzinsen auf deren Einlagen etwa auf einem Sparbuch und bisweilen auch auf Girokonten. Sie berechnen ihren Kreditkunden Sollzinsen für ausgereichte Kredite etwa als Konsumentenkredite oder als Dispositionskredite bei sogenannter geduldeter Kontoüberziehung.

Die Höhe der Zinsen Z berechnet sich aus dem überlassenen Kapital K, dem Zinssatz i und der Laufzeit n. Genau sei die folgende Symbolik festgelegt:

Z	Zinsen
K_0	Anfangskapital
K_n	Endkapital
i	Zinssatz
n	Laufzeit

Zinsen, Anfangs- und Endkapital werden in einer **einheitlichen Währung** dargestellt, also etwa in US-Dollar, Kanada-Dollar, Deutscher Mark DM oder Euro.

Der Zinssatz wird üblicherweise in % angegeben und auf das Jahr bezogen wie etwa 4% oder genauer 4% p. a. Die PAngV geht sogar so weit, daß sie die Bezeichnung "**effektiver Jahreszins**" für die Preisangabe vorschreibt. Die Finanzmathematik arbeitet aber auch mit Zinssätzen für andere Bezugszeiträume wie Monat, Tag oder gar den Moment. Hierbei spricht man von **unterjährigen** oder **unterjährlichen Zinsen**. Dies geschieht aber mehr intern bei Ausweis des Jahreszinssatzes nach außen. Der Bezug auf das Jahr erfolgt nicht zuletzt aus Gründen der Vergleichbarkeit.

Es ist in der Finanzmathematik offenbar unumgänglich, auf einen Zusammenhang zwischen einem Prozentzinssatz p und dem Zinssatz i hinzuweisen, dies sogar teilweise durch das gesamte Formelwerk hindurchzuziehen. Dem Prozentzinssatz p = 4 entspricht der Zinssatz i = 4%. Dies soll folgende Formel darstellen, sie ist fast überall zu finden:

$$i = \frac{p}{100} = p\% \tag{1.1}$$

Die **Laufzeit** etwa bei Anleihen oder Krediten bis zur Tilgung wird üblicherweise in Jahren gemessen. Es kommen aber auch andere Zeitbezüge vor wie Halbjahre (= Semester), Quartale, Monate oder gar Tage. Monate haben unterschiedliche Dauern zwischen 28 Tagen und 31 Tagen; ähnlich ist es mit Quartalen, Halbjahren und gar Jahren mit Schaltjahren. Hier werden Standards vereinbart wie etwa als **deutsche Methode der Monat generell zu 30 Tagen** und folglich das Quartal zu 90 Tagen, das Halbjahr zu 180 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen.

Ebenso in Jahren, Halbjahren, Monaten und Tagen werden **Zinsperioden** definiert meistens bei strukturierten Zahlungen wie monatlichen Ratenzahlungen bei Konsumentenkrediten oder halbjährlichen Zinszahlungen bei Anleihen. Zinsperioden sind diejenigen Zeiträume, für die Zinsen oder Zinszahlen berechnet werden. Sie sind so definiert, daß innerhalb dieser Zeiträume weder Zahlungen erfolgen noch Zinsberechnungen. Die für die Zinsperiode berechneten Zinsen werden entweder direkt auf dem Konto verrechnet oder auf Nebenkonten quasi auf Lager gelegt. So bestimmt etwa § 608 BGB im wesentlichen, daß Zinsen erst "nach dem Ablaufe je eines Jahres" zu entrichten sind.

Zinsperioden spielen eine herausragende Rolle bei sogenannten **Kontoführungsmodellen** für strukturierte Zahlungen, wie etwa bei den berühmten Hypothekenurteilen des BGH vom 24. November 1988 bzw. der damals erforderlichen Neuberechnung der Kontenstände. Solche Kontoführungsmodelle werden im Bankenbereich auch als **Staffelrechnungen** bezeichnet. Sie spielten eine bedeutende Rolle bei den Diskussionen um den Ersatz der Uniformmethode für Ratenkredite durch die Methode nach PAngV, welche ihrerseits pikanterweise nach der EU-Vereinheitlichung wohl nicht mehr zulässig ist, in Deutschland aber weiterhin offenbar die Regel ist.

Es genügt bei den Zinsrechnungen nun nicht, einfach von Jahren zu sprechen oder von Zinsperioden anderer Länge. Sehr deutlich ist zu unterscheiden zwischen **Kalenderjahren** einerseits und **relativen Jahren** oder Zeiträumen andererseits, welche irgendwann an eigentlich jedem Zeitpunkt beginnen können entweder als freie Vereinbarung der Vertragspartner oder als Vorgabe beispielsweise des Emittenten einer Anleihe.

Typische Beispiele für **kalenderzeitbezogene Kontoführungen** sind das Sparbuch oder der Hypothekarkredit. Bei solchen wird in Zinsberechnungen konsequent auf das Kalenderjahr abgestellt oder auf Zinsperioden, die kalenderbezogen definiert sind. Die Zahlungsreihe wird quasi mit Gewalt in das Kalenderjahr hineingepreßt. Offensichtlich ergeben sich dann normalerweise sogenannte **gebrochene Zinsperioden** sowohl vor wie auch nach den ganzen Kalenderjahren. Deren finanzmathematische Behandlung ist schwierig und insbesondere umstritten.

Beispiele für relative Zeitrechnung sind etwa ein Ratenkredit oder eine Anleihe. Ein Bankkunde nimmt einen solchen Kundenkredit zu einem ihm genehmen Zeitpunkt auf, ebenso begibt etwa die Bundesrepublik Deutschland eine Bundesanleihe zu einem von ihr bestimmten Zeitpunkt, im übrigen auch zu einem fein abgestimmten **Emissionskurs**. Zinszahlungen auf Anleihen erfolgen regelmäßig zu bestimmten Kalenderdaten, etwa bei halbjährigen Zahlungen zum 7. April und zum 7. Oktober. Dabei erfolgt die - hier als endfällig unterstellte - Tilgung regelmäßig zu einem solchen Zinstermin, bei der Emission sind durchaus Abweichungen von solchen Daten zu beobachten.

Wie immer sind solche Zeitbezüge auch vermischt anzutreffen, und das durchaus häufig. Es geht um relative Jahre und entsprechende Zinsperioden, denen absolute in Kalenderjahren oder ihren Teilen gegenüberstehen. Kalenderbezogen werden in diesem Zusammenhang immer wieder Steuerzahlungen genannt. Zweifelsohne erfolgen Steuerfestsetzungen regelmäßig mit Bezug auf das Kalenderjahr. Die Zahlungen (darauf kommt es bei finanzmathematischen Beurteilungen an), Vorauszahlungen und Nachzahlungen erfolgen zu sehr differenzierten Zeitpunkten.

Beispiel 1.1: Die Verzinsungssystematik des Sparbuches ist auf das Kalenderjahr ausgerichtet, an dessen Ende werden Zinsen zugeschrieben. Auf welchen Betrag ist eine zu Anfang des Kalenderjahres getätigte Einlage von 10.000 DM bis zum Ende des Kalenderjahres angewachsen, wenn durchgehend 4% Zinsen gezahlt werden? Auf welchen Betrag ist diese jetzt zur Mitte des Kalenderjahres getätigte Einlage nach Jahresfrist angewachsen? Wie kann man den Zinseszinseffekt auch bei Einlage zu Kalenderjahresbeginn realisieren? Wie ergäbe sich so ein Maximum an Endkapital nach Ende des Kalenderjahres?

Banktübliche Besonderheiten in Wertstellungen oder Nichtverzinsung von Pfennigbeträgen sollen keine Rolle spielen. Ebenso sollen keine Kosten für Kontoführung, Kontoeröffnung etc. anfallen. (Die Theorie zu den komplizierteren Fragen folgt später.)

Lösung:

Die Einlage von 10.000 DM zu Beginn des Kalenderjahres erbringt im Laufe dieses Kalenderjahres bei 4% genau 400 DM an Zinsen, zu Jahresende sind damit 10.400 DM verfügbar.

Werden 10.000 DM zur Mitte des Kalenderjahres auf das Sparbuch eingezahlt, ergeben sich für das restliche Kalenderjahr die Hälfte von 400 DM an Zinsen, welche zugeschrieben werden zum Jahresendbetrag von 10.200 DM. Im zweiten Halbjahr der Anlage werden an Zinsen die Hälfte von 4% darauf vergütet, das sind 204 DM. Insgesamt sind zur Mitte des zweiten Kalenderjahres 10.204 DM bei Abschluß des Sparbuches verfügbar. Die Mitte des Kalenderjahres ist im übrigen der optimale Anlagezeitpunkt, will man über genau ein relatives Jahr das Maximum an Endergebnis erzielen.

Den skizzierten Zinseszinseffekt mit dem Endbetrag von 10.404 DM kann man offenbar auch bei Anlage in genau einem Kalenderjahr dadurch erzielen, daß man das Sparbuch genau in der Mitte des Jahres ablöst und den erzielten Betrag sofort auch ein neu errichtetes Sparbuch einzahlt. Dieser Verzinsung von Zinsen über quasi künstlich hergestellte Gutschriften steht natürlich die Bankenpraxis entgegen, die solche Transaktionen eben doch nicht kostenlos macht.

Dieser künstliche Zinseszinseffekt des Sparbuches läßt sich - falls eben keine Kosten anfallen - noch verbessern etwa durch monatliches "erneuern" des Sparbuches mit jeweiliger Zinszuschreibung. Der Endbetrag zu Jahresende beträgt dann 10.407,42 DM. Bei tagtäglicher "Erneuerung" über 365 Tage im Jahr werden es zum Schluß 10.408,08 DM. Im theoretischen Extrem der permanenten "Erneuerung" sind es letztendlich 10.408,11 DM.

1.2. Einfache Zinsen

Einfache Zinsen werden etwa von Gerichten in Zivilstreitigkeiten oder von Finanzämtern festgesetzt, können auch von Kaufleuten untereinander gefordert werden. Im folgenden sind einige gesetzliche Vorschriften über einfache Zinsen und Höhe eines Zinssatzes wiedergegeben, zudem der vielzitierte § 608 BGB zur Zinszuschreibung. Interessant ist die Steigerung eines vorgegebenen Zinssatzes von 4% im BGB über 5% nach HGB bis zu 6% nach AO. Zumindest im BGB und im HGB sind Zinsen von Zinsen ausdrücklich untersagt.

§ 246 BGB Gesetzlicher Zinssatz

Ist eine Schuld nach Gesetz oder Rechtsgeschäft zu verzinsen, so sind vier vom Hundert für das Jahr zu entrichten, sofern nicht ein anderes bestimmt ist.

§ 248 BGB Zinseszinsen

(1) Eine im voraus getroffene Vereinbarung, daß fällige Zinsen wieder Zinsen tragen sollen, ist nichtig.

(2) ...

§ 608 BGB Fälligkeit der Zinsen

Sind für ein Darlehen Zinsen bedungen, so sind sie, sofern nicht ein anderes bestimmt ist, nach dem Ablaufe je eines Jahres und, wenn das Darlehen vor dem Ablauf eines Jahres zurückzuerstatten ist, bei der Rückerstattung zu entrichten.

§ 352 HGB Gesetzlicher Zinssatz

(1) Die Höhe der gesetzlichen Zinsen mit Einschluß der Verzugszinsen, ist bei beiderseitigen Handelsgeschäften fünf vom Hundert für das Jahr. Das gleiche gilt, wenn für eine Schuld aus einem solchen Handelsgeschäfte Zinsen ohne Bestimmung des Zinsfußes versprochen sind.

(2) Ist in diesem Gesetzesbuche die Verpflichtung zur Zahlung von Zinsen ohne Bestimmung der Höhe angesprochen, so sind darunter Zinsen zu fünf vom Hundert für das Jahr zu verstehen.

§ 353 HGB Fälligkeitszinsen

Kaufleute untereinander sind berechtigt, für ihre Forderungen aus beiderseitigen Handelsgeschäften vom Tage der Fälligkeit an Zinsen zu fordern. Zinsen von Zinsen können auf Grund dieser Vorschrift nicht gefordert werden.

§ 233a AO Verzinsung von Steuernachforderungen und Steuererstattungen

(1) Führt die Festsetzung der Einkommen-, Körperschaft-, Vermögen-, Umsatz- oder Gewerbesteuer zu einer Steuernachforderung oder Steuererstattung, ist diese nach Maßgabe der folgenden Absätze zu verzinsen. Dies gilt nicht für die Festsetzung von Vorauszahlungen und Steuerabzugsbeträgen.

(2) Der Zinslauf beginnt 15 Monate nach Ablauf des Kalenderjahrs, in dem die Steuer entstanden ist. Er beginnt für die Einkommen- und Körper-

schaftsteuer 21 Monate nach diesem Zeitpunkt, wenn die Einkünfte aus Land- und Forstwirtschaft bei der erstmaligen Steuerfestsetzung die anderen Einkünfte überwiegen. Er endet mit Ablauf des Tages, an dem die Steuerfestsetzung wirksam wird, spätestens vier Jahre nach seinem Beginn.

(3) ...

§ 234 AO Stundungszinsen

(1) Für die Dauer einer gewährten Stundung von Ansprüchen aus dem Steuerschuldverhältnis werden Zinsen erhoben. ...

§ 235 AO Verzinsung von hinterzogenen Steuern

(1) Hinterzogene Steuern sind zu verzinsen. ...

§ 238 AO Höhe und Berechnung der Zinsen

(1) Die Zinsen betragen für jeden Monat einhalb vom Hundert. Sie sind von dem Tag an, an dem der Zinslauf beginnt, nur für volle Monate zu zahlen; angefangene Monate bleiben außer Ansatz.

(2) Für die Berechnung der Zinsen wird der zu verzinsende Betrag jeder Steuerart auf volle hundert Deutsche Mark nach unten abgerundet.

Die Zinsen Z sind proportional der Höhe des überlassenen Kapitals K und der Laufzeit n. Mit dem Zinssatz i ergeben sich die Zinsen nach

$$Z = K \cdot i \cdot n \tag{1.2}$$

Das **Endkapital** ergibt sich als Summe aus **Anfangskapital** und **Zinsen**. Verdeutlicht man das Anfangskapital durch seinen Index, so ergibt sich das Endkapital nach der folgenden Beziehung:

$$K_n = K_0(1 + i \cdot n) \tag{1.3}$$

Beispiel 1.2: A leiht B 1.000 DM für 5 Jahre bei Vereinbarung von einfachen Zinsen in Höhe von 8% und Zahlung der Zinsen nach den 5 Jahren. Wie hoch sind die jährlichen Zinsen, wie hoch sind die insgesamten zu zahlenden Zinsen, welchen Betrag bekommt A nach den 5 Jahren zurück?

Lösung:

Die jährlichen Zinsen mit 8% von 1.000 DM betragen 80 DM, das sind zusammen über 5 Jahre 400 DM. Nach 5 Jahren wird A 1.400 DM zurückbekommen. Entsprechend (1.3) folgt dieses Ergebnis aus

$$K_5 = 1.000\text{DM}(1 + 8\% \cdot 5) = 1.000\text{DM} \cdot 1{,}4 = 1.400\text{DM}$$

Beispiel 1.3: V leiht L 2.000 DM für 3 Jahre und 5 Monate bei Vereinbarung von einfachen Zinsen in Höhe von 9% und Zahlung der Zinsen nach den 3 Jahren und 5 Monaten. Wie hoch sind die jährlichen Zinsen, wie hoch sind die insgesamten zu zahlenden Zinsen, welchen Betrag bekommt A nach den 3 Jahren und 5 Monaten zurück?

Lösung:

Die jährlichen Zinsen mit 9% von 1.000 DM betragen 90 DM, das sind zusammen über 3 Jahre und 5 Monate = 3,4167 Jahre 307,50 DM. Nach diesen 3 5/12 Jahren wird A 1.307,50 DM zurückbekommen. Gemäß (1.3) folgt dieses Ergebnis aus

$$K_n = 1.000\text{DM}(1 + 9\% \cdot 3{,}4167) = 1.000\text{DM} \cdot 1{,}3075 = 1.307{,}50\text{DM}$$

An der Gleichung (1.3) werden die **"vier Fragestellungen der Zinsrechnung"**[1] deutlich, wie sie prinzipiell für die gesamte Zinsrechnung gelten. Es wird wohl der häufigere Fall sein, daß bei Kapitalhingabe die zu zahlenden Zinsen interessieren und damit auch der final zu zahlende Gesamtbetrag, so ist (1.3) konditioniert. Gleichung (1.3) hat 4 Parameter, auch nach den anderen wird gefragt. So kann die Frage lauten nach dem Kapitaleinsatz jetzt zur Erzielung eines bestimmten Endbetrages nach n Jahren, so kann nach einem (kritischen) Zinssatz i gefragt werden bei vorgegebenen Kapitalbeträgen anfangs und final bei vorgegebener Laufzeit, so kann nach einer notwendigen Laufzeit bei ansonsten vorgegebenen Konditionen gefragt sein. Die entsprechenden Formeln ergeben sich einfach aus (1.3) zu

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} \tag{1.4}$$

[1] Kruschwitz, Finanzmathematik, 1996, S. 4

$$i = (K_n / K_0 - 1) / n \tag{1.5}$$

$$n = (K_n / K_0 - 1) / i \tag{1.6}$$

Beispiel 1.4: Welcher Zinssatz ist erforderlich, damit ein Anfangskapital von 10.000 DM bei einfachen Zinsen über 4 Jahre auf das Endkapital von 11.500 DM anwächst?

Lösung:

Nach (1.5) ergibt sich der geforderte Zinssatz zu

$$i = (11.500\text{DM} / 10.000\text{DM} - 1) / 4 = (1{,}15 - 1) / 4 = 0{,}15 / 4 = 3{,}75\%$$

Beispiel 1.5: Ein Wechsel über 60.000 DM wird in 2 1/2 Jahren fällig. Er soll jetzt übertragen werden nach (bei Banken unüblicher, sogenannter amtlichen) Diskontierung gemäß (1.6) mit dem Zinssatz von 8%. Welchen Wert hat der Wechsel heute?

Lösung:

Unter Anwendung von (1.4) berechnet sich der Wert zu

$$K_0 = 60.000\text{DM}(1 + 8\% \cdot 2{,}5) = 60.000\text{DM} / 1{,}2 = 50.000\text{DM}$$

Exkurs: Vorschüssiger Jahreszinssatz

"Als Bezugsgröße des Zinssatzes verwendet man das dem Geschäft zugrunde liegende Kapital."[2] Dieses ist praktisch fast immer das Anfangskapital, aber theoretisch - und bisweilen praktisch etwa bei der Diskontierung von Wechseln - **kann man den Zinssatz auch auf das Endkapital** beziehen, die Summe aus Anfangskapital und Zinsen. Mit einem solchen vorschüssiger Zinssatz i^{vor} ergeben sich für die **Zinsen** und das **Anfangskapital** die Relationen zum **Endkapital**:

---

[2] Kruschwitz, Finanzmathematik, 1996, S. 3

$$Z = K_n \cdot i^{vor} \cdot n \tag{1.7}$$

$$K_0 = \left(1 - i^{vor} \cdot n\right) K_n \tag{1.8}$$

Die Zinsen in Bezug zum Anfangskapital werden:

$$Z = K_0 \frac{i^{vor} \cdot n}{1 - i^{vor} \cdot n} \tag{1.9}$$

Aus (1.8) und (1.4) ergibt sich die Relation von i^{vor} zu dem üblichen (nachschüssigen) Zinssatz i zu:

$$i^{vor} = \frac{i}{1 + i \cdot n} \tag{1.10}$$

Der **vorschüssige Zinssatz** i^{vor} ist offensichtlich kleiner als der übliche (nachschüssige) Zinssatz i, theoretisch unter der wohl immer erfüllten Bedingung positiver Werte für Zinssatz i und Laufzeit n. Der Wert von i^{vor} wird in Relation zu i umso kleiner, je größer die Laufzeit n ist. Dies umgekehrt bedeutet, daß der übliche (nachschüssige) Zinssatz i vergleichsweise immer größer wird, je größer der Wert von n ist.

Beispiel 1.6: A leiht B 1.000 DM für ein Jahr bei Vereinbarung von einfachen vorschüssigen Zinsen in Höhe von 11%. Wie hoch sind die zu zahlenden Zinsen, welchen Betrag bekommt A nach dem Jahre zurück? Wie hoch ist der entsprechende nachschüssige Zinssatz?

Lösung:

Mit n = 1 ergeben sich die zu zahlenden Zinsen gemäß (1.9) zu

$$Z = 1.000\text{DM} \cdot 8\% / (1 - 8\%) = 86{,}96\text{DM}$$

Insgesamt bekommt A nach dem Jahr den Betrag von 1.086,96 DM zurück. Das entspricht für diesen Fall offensichtlich einem nachschüssigen Zinssatz von 8,696%.

Beispiel 1.7: R erhält eine Rechnung über 5.010 DM mit der Skontoformel: zahlbar in 30 Tagen netto oder mit 2% Skonto innerhalb von

10 Tagen. Wie hoch ist der nach 10 Tagen zu zahlende Betrag? Wie hoch ist der vorschüssige Jahreszinssatz, wie hoch ist der nachschüssige Jahreszinssatz?

Lösung:

Der nach der Skontoformel spätestens nach 10 Tagen zu zahlende Betrag macht 98% von 5.010 DM aus, also 4.909,80 DM.

Der vorschüssige Zinssatz auf 20 Tage beträgt

$$(5.010DM - 4.909{,}80\text{DM}) / 5.010\text{DM} = 100{,}20\text{DM} / 5.010\text{DM} = 2\%$$

Das ist der vorgegebene %-Satz.

Der nachschüssige Zinssatz auf 20 Tage beträgt

$$(5.010\text{DM} - 4.909{,}80\text{DM}) / 4.909{,}80\text{DM}$$
$$= 100{,}20\text{DM} / 4.909{,}80\text{DM} = 2{,}0408\%$$

Daraus läßt sich der nachschüssige Jahreszinssatz einfach berechnen durch Multiplikation mit 360/20 = 18 zu i = 36,7347%.

Dann ergibt sich nach (1.10) wieder der vorschüssige Jahreszinssatz von

$$i^{vor} = i / (1 + i / 18) = 36\%$$

Das sind genau die vorgegebenen 2% auf 20 Tage.

Anmerkungen zu solchen Rechnungen und diesen erfreulichen Zinssätzen des Geldsparens sind unerläßlich, obschon die Rechnungen zweifelsohne fehlerfrei sind. In der Praxis ist der unterstellte Zeitraum von 20 Tagen wenig relevant. Es ist durchaus üblich und wird akzeptiert, das das **Skonto** auch noch bei Zahlungen nach 15 oder 20 Tagen abgezogen wird. Bei Behörden ist es durchaus üblich und gar Vorschrift, generell ein von Behörden vorgegebenes Skonto abzuziehen auch ohne Skontoformel auf der Rechnung und auch bei mancher Langsamkeit von Behörden. Was soll der Lieferant machen bei einer solchen Skonto-Verrechnung, die er in keiner Weise eingeräumt hat? Zum zweiten ist die Begleichung der Rechnung netto Kasse nach 30 Tagen in keiner Weise sicher. Was soll denn der Lieferant nun machen, wenn er den Rechnungsbetrag etwa erst nach 6 Monaten erhält, in Hoffnung für ihn dann nicht mehr mit Skontoabzug. Klagen mögen in allen

Fällen erfolgversprechend sein, Anschlußaufträge sind wahrscheinlich in den Kamin zu schreiben.

Beispiel 1.8: Ein Wechsel über 60.000 DM wird in 2 1/2 Jahren fällig. Eine Bank kauft ihn jetzt im Rahmen ihrer Kreditgeschäfte mit einem Diskontierungssatz von 8% bei üblicher Verrechnung vorschüssiger Zinsen. Welchen Betrag schreibt die Bank dem Einreicher gut? Irgendwelche Gebühren und Steuern sollen hier unberücksichtigt bleiben.

Lösung:

Die Zinsen errechnen sich einfach gemäß (1.9) mit 8% über 2,5 Jahre auf den Betrag von 60.000 DM, das macht 12.000 DM an Zinsen. Dem Bankkunden werden folglich 48.000 gutgeschrieben. Das sind 2.000 DM weniger gegenüber dem vergleichbaren Fall des Beispiels 1.5 mit 8% nachschüssigen Zinsen.

Gerade bei **einfachen Zinsen** ist es unproblematisch, die Laufzeit auch in Monaten M oder Tagen T auszudrücken. Dies wird erforderlich, wenn die Laufzeit nicht in ganzzahligen Jahren ausgedrückt werden kann. Dabei kann ein Runden auf volle Monate gefordert werden, wie es etwa § 238 (1) AO für Zinsen auf Steuerforderungen vorschreibt. § 238 (2) AO nennt zudem das Runden des Anfangsbetrages. Die Beziehung (1.2) für Zinsen und (1.3) für das Endkapital lassen sich folgendermaßen auf den **Monat als Bezug** umschreiben:

$$Z = K_0 \cdot i \cdot M / 12 \tag{1.11}$$

$$K_n = K_0(1 + i \cdot M / 12) \tag{1.12}$$

Beispiel 1.9: Für den einkommensteuerpflichtigen A ergeht am 22. Juni 1988 ein - geänderter - Steuerbescheid 1983 über 4.224,00 DM ESt und am 1. Juli 1988 ein solcher für 1984 über 1.600,00 DM ESt. Auf einen Einspruch gegen beide und Antrag auf Aussetzung der Vollziehung vom 20. Juli 1988 hin werden die Beträge ausgesetzt "bis zum Ablauf eines Monats nach Bekanntgabe der Entscheidung über den Einspruch". Mit Schreiben vom 28. April 1995 wird der Einspruch vom Finanzamt zurückgewiesen, Klage wird dann von A nicht mehr erhoben. Unter dem 23. November 1995 ergeht ein "Bescheid über Aussetzungszinsen (§ 237 AO)" für beide Jahre. In welcher Höhe werden diese Zinsen festgesetzt?

Lösung:

Bezüglich der ESt 1983 beträgt der abgerundete zu verzinsende Betrag 4.200 DM, der Zinslauf beginnt am 25. Juli 1988 und endet am 1. Juni 1995, der Zinszeitraum in vollen Monaten beträgt 82 Monate, der Zinssatz mit 0,5% für jeden Monat ergibt sich zu 41,0%, daraus errechnet sich ein Zinsbetrag von 1.722,00 DM.

Für die ESt 1984 beträgt der theoretisch abzurundende und zu verzinsende Betrag weiterhin 1.600 DM, der Zinslauf beginnt am 4. August 1988 und endet am 1. Juni 1995, der Zinszeitraum in vollen Monaten beträgt 81 Monate, der Zinssatz mit 0,5% für jeden Monat ergibt sich zu 40,5%, daraus errechnet sich ein Zinsbetrag von 648,00 DM.

Insgesamt sind für die Jahre 1983 und 1984 Aussetzungszinsen in Höhe von 2.370,- DM zu zahlen.

Anmerkung: Dieses Beispiel ist pfenniggenau und insbesondere datumsgenau der Realität entnommen. Endgültige Klärungen von Steuertatbeständen nach einem Dutzend von Jahren sind offenbar nicht auszuschließen, möglicherweise durchaus an der Tagesordnung. Die Klärung eines Einspruchs dauerte in diesem Fall kanpp 7 Jahre. Pikanterweise hat das betroffene Finanzamt die beiden Beträge von 1.722 DM und 648 DM in der Summe und im Bescheid auch noch auf 2.523 DM festgesetzt. Dieser Irrtum ließ sich allerdings durch einen einfachen Anruf klären und korrigieren, man muß es aber bemerken.

Ähnlich (1.11) und (1.12) ergeben sich die **auf Tage bezogenen Beziehungen für Zins und Endkapital**, wenn nach der sogenannten deutschen Methode das Jahr zu 360 Tagen und die Monate gleichlang zu 30 Tagen gerechnet werden. Dies ist bei kurzen Zeiträumen weniger Tage einfach, bei längeren Zeiträumen sind die Monate mit 30 Tagen und die Jahre mit 360 Tagen anzusetzen. So wird analog:

$$Z = K_0 \cdot i \cdot T / 360 \tag{1.13}$$

$$K_n = K_0 (1 + i \cdot T / 360) \tag{1.14}$$

Beispiel 1.10: Vom 29. Februar 2004 bis zum 28. Dezember 2006 verzinst sich der Betrag von 23.000 Euro zu 13% mit einfachen Zinsen. Wie hoch sind die erzielten Zinsen, welcher Betrag wird dann am Tag (Fest) der unschuldigen Kinder ausgezahlt?

Lösung:

Die Laufzeit ergibt sich aus 2 Jahren = 720 Tagen bis Ende Februar 2006, aus weiteren 9 Monaten = 270 Tagen bis Ende November 2006 und aus weiteren 28 Tagen im Dezember 2006, insgesamt zu 1.018 Tagen. Nach (1.13) errechnen sich die Zinsen zu

$$Z = 23.000\text{Euro} \cdot 13\% \cdot 1{,}018/360 = 8.455{,}06\text{Euro}$$

Am 28. Dezember 2006 werden insgesamt 31.455,06 Euro ausgezahlt.

Exkurs: Zinszahlen und Kontoführung

Insbesondere bei Banken sind vielfältig verzinsliche Konten zu führen mit häufig veränderlichen Kontenständen und auch veränderlichen Zinssätzen. In der Kontoführung ist es üblich, zur Berechnung von (einfachen) Zinsen während der Zeit gleichbleibender Zinssätze und in einem Kalenderjahr "nur" sogenannte **Zinszahlen** anzusammeln und erst bei Zinssatzänderung oder am Ende des Kalenderjahres die Zinszahlungen zu berechnen durch Anwendung des sogenannten **Zinsdivisors** (oder Zinsteilers). (1.13) wird umgeschrieben mit Zinszahl ZZ und Zinsdivisor ZD zu

$$Z = ZZ / ZD \qquad (1.15)$$

Die jeweils auf einen bestimmten Betrag und einen bestimmten Zeitraum berechneten **Zinszahlen** werden definiert mit

$$ZZ = K_0 \cdot T / 100 \qquad (1.16)$$

Für den **Zinsdivisor**, der offensichtlich unabhängig vom zu verzinsenden Betrag ist und ebenso von der Zeit des Zinslaufes, ergibt sich einfach

$$ZD = 3{,}6 / i \qquad (1.17)$$

Diese Beziehung ist wohl nicht schön anzusehen. Jedenfalls findet man regelmäßig die Verschönerung der Optik durch Einbeziehung von (1.1) zu

$$ZD = 360 / p \tag{1.18}$$

Beispiel 1.11: Das Konto des Herrn XYZ weist zu Anfang des Kalenderjahres den Stand von 30.200 DM aus. Am 15. Januar werden 1.000 DM eingezahlt, am 31. Januar erfolgt eine Auszahlung von 3.500 DM. Am 29. Februar kommt eine Einzahlung von 500 DM, am folgenden Tag des 1. März eine gleiche von 500 DM. Auszahlungen von je 9.000 DM erfolgen am 5. April, am 20. Oktober und am 30. November. Daneben werden am 20. August und am 20. Dezember je 700 DM eingezahlt. Die Daten sollen Daten der Wertstellung sein. Der Zinssatz beträgt bis einschließlich August 4%, dann steigt er auf 5%. Wie werden die Zinsen des Jahres berechnet über Staffeln von Zinszahlen und die Zinsdivisoren?

Lösung:

Die Zinszahlen werden gemäß (1.16) berechnet aus den Kapitalstand der vorhergehenden Buchung und den Zeitabstand dazu, der gemessen wird in Tagen mit der Normierung des Monats auf 30 Tage. Die Staffeln von Zinszahlen sind getrennt zu führen einmal bis Ende August für den Zinssatz von 4% und dann ab Anfang September für den Zinssatz 5%. Mit den beiden Zinsdivisoren nach (1.17) ergeben sich gemäß (1.15) die entsprechenden Zinsbeträge. In der folgenden Tabelle sind die Rechnungen wiedergegeben.

Wertstellung	Laufzeit in Tagen	Kontenbewegung	Kontostand	Zinszahlen 4%	Zinszahlen 5%
31.12.			30.200		
15.1.	15	+ 1.000	31.200	4.530	
31.1.	15	- 3.500	27.700	4.680	
29.2.	29	+ 500	28.200	8.033	
1.3.	1	+ 500	28.700	282	
5.4.	34	- 9.000	19.700	9.758	
20.8.	135	700	20.400	26.595	
31.8.	10	0	20.400	2.040	
20.10.	50	- 9.000	11.400		10.200
30.11.	40	- 9.000	2.400		4.560
20.12.	20	+ 700	3.100		480
31.12.	10	0	3.100		310
Summen	359		55.918	15.550	
Zinsdivisor			90	72	
Zinsen			621,31	215,97	

In den ersten 8 Monaten werden 621,31 DM an Zinsen erzielt, in den letzten 4 Monaten 215,97 DM, für das ganze Jahr insgesamt 837,28 DM. Durch die Buchung im Februar wird die Kürze dieses Monats relevant, im gesamten Jahr werden nur 359 Tage gerechnet.

Beispiel 1.12: Frau ABC führt das gleiche Konto wie Herr XYZ unter gleichen Bedingungen mit dem einen Unterschied, daß sie die 500 DM des 29. Februars einen Tag länger behält und die Einzahlung aus Faulheit oder Berechnung oder Cleverness erst einen Tag später am 1. März tätigt mit dann insgesamt 1.000 DM Einzahlung an dem Tage. Wieviel Zinsen erzielt Frau ABC in dem Jahr?

Lösung:

Die vorhergehende Staffelrechnung der Zinszahlen ändert sich offenbar in den beiden Positionen Ende Februar / Anfang März, dies ist im folgenden wiedergegeben.

Wert-stellung	Laufzeit in Tagen	Konten-bewegung	Konto-stand	Zinszahlen 4%	Zinszahlen 5%
31.12.			30.200		
15.1.	15	+1.000	31.200	4.530	
31.1.	15	-3.500	27.700	4.680	
1.3	31	+1.000	28.700	8.587	
5.4	34	-9.000	19.700	9.758	
20.8	135	+700	20.400	26.595	
31.8	10	0	20.400	2.040	
20.10.	50	- 9.000	11.400		10.200
31.10.	40	- 9.000	2.400		4.560
20.12.	20	+700	3.100		480
31.12.	10	0	3.100		310
Summen	360			56.190	15.550
Zinsdivisor				90	72
Zinsen				624,33	215,97

Frau ABC realisiert alle unterstellten 360 Zinstage. Obschon sie die genannten 500 DM einen Tag länger verfügbar hatte und damit einen Vorteil gegenüber Herrn XYZ aus Beispiel 1.11, erzielt sie insgesamt 840,30 DM an Zinsen und hat damit 3,02 DM mehr erzielt als Herr XYZ.

Beispiel 1.13: Der Jungunternehmer QRS führt das Konto ähnlich wie Frau ABC mit dem ersten Unterschied, daß er an den drei genannten Tagen nicht je 9.000 DM an Auszahlung veranlaßt, sondern jeweils 16.000 DM für sein gutlaufendes Geschäft. Damit nimmt QRS den für ihn günstigen Überziehungskredit in Anspruch, der bis einschließlich August 9% kostet und ab September 12% kosten soll. Durch geschäftstüchtige Verhandlungen erreicht QRS allerdings, daß ihm ganzjährig Habenzinsen von nur 4% und dafür ganzjährig Sollzinsen von 9% verrechnet werden. Welche Zinsbeträge ergeben sich zu Jahresende?

Lösung:

Nun sind Staffeln der Zinszahlen für Soll- und Habenstände zu unterscheiden. Die Rechnungen sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Wertstellung	Laufzeit in Tagen	Kontenbewegung	Kontostand	Zinszahlen Haben 4%	Zinszahlen Soll 9%
31.12.			30.200		
15.1.	15	+ 1.000	31.200	4.530	
31.1.	15	- 3.500	27.700	4.680	
1.3.	31	+ 1.000	28.700	8.587	
5.4.	34	- 16.000	12.700	9.758	
20.8.	135	+ 700	13.400	17.145	
20.10.	50	- 16.000	2.600	6.700	
30.11.	40	- 16.000	18.600		1.040
20.12.	20	+ 700	17.900		3.720
31.12.	10	0	17.900		1.790
Summen	360			51.400	6.550
Zinsdivisor				90	40
Zinsen				511,11	163,65

Dem Jungunternehmer QRS werden zu Jahresende 511,11 DM an Habenzinsen gutgeschrieben und 163,65 DM an Sollzinsen belastet.

Exkurs: Berechnung von Zeitdifferenzen (übernommen von Locarek-Junge)

"Die kleinste Zeitspanne, für die in der Praxis normalerweise Zinsen berechnet werden, ist ein Tag. Die Verzinsung eines einbezahlten Betrages mit Habenzinsen oder eines ausbezahlten Betrages mit Sollzinsen beginnt aber nicht unbedingt ab dem Tag, an dem die Zahlung erfolgt. Der Verzinsungsbeginn, die **Wertstellung** des Betrages, wird von den Banken und Sparkassen unterschiedlich gehandhabt. Große Differenzen ergeben sich z.B. im täglichen Zahlungsverkehr (auf **Girokonten**) zwischen der Wertstellung für

Ein- und Auszahlungen. Bei Sparkonten unterscheidet man im wesentlichen zwei Ansätze:

- Die meisten Sparkassen verzinsen Einzahlungen ab dem Einzahlungstag (**Wert heute**) und bei Auszahlungen endet die Verzinsung des ausbezahlten (Teil-)Betrages am Tag vor der Auszahlung (**Wert gestern**).
- Alle anderen Kreditinstitute verzinsen Einzahlungen ab dem der Einzahlung folgenden Tag (**Wert morgen**) und bei Auszahlungen endet die Verzinsung des ausbezahlten Betrages am Tag der Auszahlung (**Wert heute**).

Auch zwischen den Zahlungen wird für die Bestimmung des Zinsbetrages Z maßgebliche Zeit oft nicht nach dem exakten Kalenderdatum berechnet, da diese Berechnung bei Differenzen von mehreren Monaten schnell umständlich wird. Man unterscheidet deshalb drei **Methoden zur Berechnung der Zinstage.**

a) Englische Methode (365/365) bzw. (act/act)

Die Methode der exakten Berechnung sowohl der Kalendertage als auch der Länge des Kalenderjahres (nach dem bei uns gültigen gregorianischen Kalender) heißt auch **englische Methode**. Abgekürzt wird die Bezeichnung auch als "365/365", wobei die erste Zahl "365" die im Jahr berechneten Tage und die zweite "365" die angenommene Länge des Kalenderjahres in Tagen angibt. Dies ist nicht ganz exakt, da bei dieser Methode die Schaltjahre mit 366 Tagen gerechnet werden, und in Schaltjahren der 29. Februar berücksichtigt wird. Die zweite Abkürzung "act/act" (act steht für **actual**, also "tatsächlich") trifft den Sachverhalt deshalb besser. Diese Methode ist nicht nur in England gebräuchlich, sondern auch für die Abrechnung von Sparkonten in Kanada und dem restlichen Commonwealth, USA, sowie z.B. Portugal und Griechenland. Aus historischen Gründen werden auch die meisten Wertpapiere, die vom US-Schatzamt (US-Treasury) ausgegeben werden, nach dieser Methode abgerechnet. ...

b) Französische Methode (365/360)

Nach der **französischen Methode** rechnet man die Zinstage exakt, das Kalenderjahr aber stets mit 360 Tagen ab. Auf diese Weise erhält ein Anleger, der sein Geld in mehreren Abschnitten, aber insgesamt ein Jahr lang anlegt, mehr als den nominellen Jahreszinssatz. Nach dieser Methode werden die Zinsen in Frankreich, den Benelux-Staaten, sowie z.B. Spanien und Italien errechnet. Auch bei der Abrechnung von Lombard-Darlehen durch die deutsche Bundesbank und oft bei Tagesgeld und Festgeldanlagen auf dem Euro-Markt wird diese Methode benutzt.