Mathematik-Training

für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgaben und Lösungen aus der Differentialrechnung

Von
Diplom-Volkswirt
Lothar Schmeink

2., überarbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Schmeink, Lothar:
Mathematik-Training für Wirtschaftswissenschaftler : Aufgaben und Lösungen aus der Differentialrechnung / von Lothar Schmeink. - 2., überarb. Aufl. - München ; Wien : Oldenbourg, 1997
ISBN 3-486-24392-6

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: WB-Druck, Rieden

ISBN 3-486-24392-6

Zu diesem Buch:

Sie finden in diesem Buch 114 Mathematikaufgaben mit ausführlich und lehrreich erläuterten Lösungen, die Ihnen helfen werden, die Differentialrechnung und besonders ihre Anwendungsmöglichkeiten in der Wirtschaftstheorie besser kennenzulernen.

Die meisten Aufgaben sind modellhafte Anwendungen. Nicht nur die mathematischen Lösungsschritte, sondern auch die erforderlichen Grundlagen des jeweiligen Sachverhalts sind so erläutert, daß der Lösungsweg auch vom Sachbezug her plausibel wird.

Die Lösungen sind keine Musterlösungen, lediglich Lösungsmuster. Denn die Reihenfolge der einzelnen Lösungsschritte ist nicht immer zwingend vom Sachverhalt vorgeschrieben, sondern oft davon abhängig, welche Idee Sie zuerst haben und welche Ihnen den Zugang zum Lösungsweg eröffnet.

Wenn Sie glauben, weniger Talent für Mathematik zu haben, wird Ihnen die Arbeit mit diesen Aufgaben zeigen, daß Sie trotzdem viel erreichen können. Wenn Sie glauben, in Mathematik schon recht gut zu sein, werden Sie bei der Beschäftigung mit diesen Aufgaben Ihr Leistungsniveau halten und verbessern können. Denn auch mit dem, was Sie können, müssen Sie im Training bleiben.

Auf jeden Fall werden Sie sehen, wozu Mathematik gut sein kann - auch in der Wirtschaftstheorie. Die Differentialrechnung ist sicherlich nicht das einzige Gebiet der Mathematik, das für Wirtschaftswissenschaftler interessant ist. Auch kann diese Sammlung nicht vollständig sein, könnte aber mit dazu beitragen, daß Sie mit der Mathematik weniger Frust haben werden, als Sie befürchtet haben.

Noch ein paar schreibtechnische Hinweise:

Bei dem verwendeten Textverarbeitungsprogramm habe ich oft leider keine andere Möglichkeit gefunden, als Brüche mit schrägen Bruchstrichen zu schreiben.

ME ist die Abkürzung für Mengeneinheiten und GE die Abkürzung für Geldeinheiten.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit.

Lothar Schmeink

PS: Ich danke Frau Anette Klose für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts dieser Auflage.

Inhaltsverzeichnis

Quadratische Gleichungen
Gleichungen höheren Grades

Aufgabe 1
Lösung Seite 34

a) Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit Hilfe des Faktorisierungsverfahrens. Begründen Sie das Ergebnis.
   $A_1(x)$: $0{,}5\,x^2 - 5\,x + 19 = 0$

b) Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel für gemischt quadratische Gleichungen.
   Begründen Sie das Ergebnis.
   $A_2(x)$: $4\,x^2 + 3\,x + 9/16 = 0$

c) Die Normalform einer gemischt quadratischen Gleichung laute:
   $A_3(x)$: $x^2 - 4\,x + 1 = 0$
   Die Lösungen sind mit $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ angegeben. Überprüfen Sie die Lösungen mit Hilfe des Satzes von Vieta, und zerlegen Sie dann den Gleichungsterm in Linearfaktoren.

Aufgabe 2
Lösung Seite 35

Angenommen die Lösungen einer bestimmten gemischt quadratischen Gleichung wurden mit Hilfe des Satzes von Vieta wie folgt überprüft:

$5 \cdot (-3) = -15$ (wahr) und $5 + (-3) = 2$ (wahr)

a) Zählen Sie die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung auf.
b) Geben Sie die Normalform der gelösten Gleichung an.
c) Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe des Faktorisierungsverfahrens.
d) Zerlegen Sie die Normalform in Linearfaktoren.
e) Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Behauptung:
   $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + p\,x + q = 0$
   Dabei sind $x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$ und $x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$
   die Lösungen von $x^2 + p\,x + q = 0$.

Aufgabe 3
Lösung Seite 36

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel.

a) $A_1(x)$: $2\,x^2 - 6\,x - 56 = 0$
b) $A_2(x)$: $0{,}5\,x^2 + 12\,x + 72 = 0$
c) $A_3(x)$: $4{,}5\,x^2 - 27\,x + 63 = 0$

Aufgabe 4

Lösung Seite 36

Ermitteln Sie die Normalform der zu den angegebenen Lösungen gehörenden gemischt quadratischen Gleichung:

a) $x_1 = 2 \quad x_2 = 3$ b) $x_1 = 10 \quad x_2 = -2$
c) $x_1 = -0{,}5 \quad x_2 = -0{,}75$ d) $x_1 = a \quad x_2 = -6\,a$
e) $x_1 = -3 \quad x_2 = 8$ f) $x_1 = 19 \quad x_2 = -c$

Aufgabe 5

Lösung Seite 37

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden gemischt quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 6\,x + 5 = 0$ b) $x^2 - 28\,x + 195 = 0$
c) $9\,x^2 - 15\,x - 14 = 0$ d) $16\,x^2 + 120\,x + 256 = 0$
e) $3\,x^2 - 12\,x - 36 = 0$ f) $0{,}8\,x^2 - 1{,}6\,x - 4{,}2 = 0$
g) $2\,x^2 + 8\,x + 3 = 0$ h) $3\,x^2 - 13\,x + 12 = 0$
i) $0{,}25\,x^2 = 3\,x - 5$ j) $0{,}25\,x^2 + 1{,}2\,x + 0{,}8 = 0$

Aufgabe 6

Lösung Seite 39

Entwickeln Sie eine Gleichung, deren Lösungen wie folgt angegeben sind:
$x_1 = 1$ und $x_2 = -5$ und $x_3 = 2$

Aufgabe 7

Lösung Seite 40

Entwickeln Sie eine Gleichung, deren Lösungen
$x_1 = 1,\ x_2 = -4,\ x_3 = 2$ und $x_4 = -3$ sind.

Aufgabe 8

Lösung Seite 40

a) Überprüfen Sie mit einer Polynomdivision, ob $x_0 = -2$ ein Element der Lösungsmenge der folgenden Aussageform ist.
$A(x)\colon\ x^4 - 9\,x^3 + 30\,x^2 - 44\,x + 24 = 0$
b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Aussageform
$A(x)\colon\ x^4 - 9\,x^3 + 30\,x^2 - 44\,x + 24 = 0$
c) Berechnen Sie mit Hilfe des Horner–Schemas für
$A(x)\colon\ x^4 + 5\,x^3 + x^2 - 25\,x - 30 = 0$
eine Lösung im Intervall [1; 4] auf eine Nachkommastelle genau.

Aufgabe 9

Lösung Seite 42

Von einem bestimmten Angebotsmonopol sei die Gewinnfunktion G in der folgenden Form bekannt.

$$G:\ G(x) = -0{,}032\ x^4 + 0{,}32\ x^3 + 4\ x - 40$$

Die untere Grenze der Gewinnzone ist mit $x_0 = 5$ angegeben. Berechnen Sie die übrigen Nullstellen der Gewinnfunktion.

Aufgabe 10

Lösung Seite 43

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Aussageformen. Geben Sie jeweils das Polynom als Produkt von Linearfaktoren an.

$A_1(x)$: $-2\ x^3 + 8\ x^2 + 22\ x - 60 = 0$

$A_2(x)$: $-4\ x^4 - 6\ x^3 + 18\ x^2 + 20\ x = 0$

$A_3(x)$: $2\ x^4 - 15\ x^3 + 18\ x^2 + 64\ x - 96 = 0$

Aufgabe 11

Lösung Seite 45

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Aussageformen. Geben Sie jeweils das Polynom als Produkt von Linearfaktoren an.

a) $2\ x^5 + 36\ x^4 + 222\ x^3 + 484\ x^2 - 24\ x - 720 = 0$

b) $2\ x^5 - 13\ x^4 - 14\ x^3 + 205\ x^2 - 300\ x = 0$

c) $x^4 + 4\ x^3 - 28\ x^2 - 64\ x + 192 = 0$

d) $2\ x^3 + 11\ x^2 + 13\ x + 4 = 0$

e) $4\ x^3 + 6\ x^2 - 28\ x - 30 = 0$

Aufgabe 12

Lösung Seite 46

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe des Substitutionsverfahrens.

a) $x^4 - 26\ x^2 + 25 = 0$

b) $x^4 - 5\ x^2 - 36 = 0$

c) $x^6 - 4\ x^4 - x^2 + 4 = 0$

Grundlagen der Differentialrechnung

Aufgabe 13

Lösung Seite 48

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4$

a) Formulieren Sie einen Satz, der die Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer ersten Ableitungsfunktion schildert.
b) Bilden Sie alle Ableitungsfunktionen von f.
c) Berechnen Sie, welche Steigung f an der Stelle 1 und welche sie an der Stelle −1 hat.
d) Berechnen Sie die Stelle, an der die zweite Ableitungsfunktion die Steigung 6 hat.
e) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der dritten Ableitungsfunktion.

Aufgabe 14

Lösung Seite 48

Gegeben sei die folgende ganzrationale Funktion f.

f: $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x$

a) Überprüfen Sie, ob die Punkte P $(2|6)$, Q $(3|7{,}5)$ und R $(6|6)$ auf dem Funktionsgraphen liegen.
b) Berechnen Sie, welche Steigung der Funktionsgraph an den Stellen 2, 3 und 6 hat.
c) Ermitteln Sie für diese Stellen jeweils die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen.
d) Ermitteln Sie die Gleichung einer Tangente, deren Steigung gleich −3 ist.

Aufgabe 15

Lösung Seite 49

Gegeben sei die folgende ganzrationale Funktion f.

f: $f(x) = 1/12\,x^3 - 1/2\,x^2 - 5/4\,x + 9$

Ermitteln Sie die Gleichungen der Kurventangenten, die die Steigung 4 haben.

Aufgabe 16

Lösung Seite 50

Gegeben sei die Funktion f mit dem folgenden Funktionsterm.

$f(x) = 1/60\ x^6 - 1/30\ x^3 + 1/20\ x^2 - x + 1$

a) Berechnen Sie, mit welcher Steigung der Graph von f die y-Achse schneidet.

b) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph der dritten Ableitungsfunktion die Steigung 24 hat.

Aufgabe 17

Lösung Seite 51

Gegeben sei die folgende Funktion f: $y = -0{,}5\ x^2 + 4\ x - 4$

Der Graph dieser Funktion f hat eine Tangente, deren Steigung 2 ist, und eine Tangente, deren Steigung −2 ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese beiden Tangenten mit der x-Achse bilden.

Aufgabe 18

Lösung Seite 52

Diskutieren Sie die folgende ganzrationale Funktion f.

f: $f(x) = 0{,}05\ x^3 - 0{,}6\ x^2 + 1{,}8\ x + 6{,}4$

Behandeln Sie dabei folgende Punkte:

a) Ordinatenachsenabschnitt
b) Nullstellen
c) Randverhalten
d) Relative Extremwerte
e) Wendepunkte
f) Sattelpunkte
g) Skizze

Aufgabe 19

Lösung Seite 54

Gegeben sei die Funktion f mit dem Term $f(x) = 0{,}5\ x^3 - 2{,}5\ x^2 + x + 4$

Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Kurventangente, die durch den Punkt P $(5\,|\,-7)$ verläuft. Der Berührungspunkt soll ganzzahlige Koordinaten haben.

Aufgabe 20

Lösung Seite 55

Diskutieren Sie die folgende Funktion f.

f: $f(x) = x^4 - 7\ x^3 + 15\ x^2 - 13\ x + 4$

Behandeln Sie dabei die folgenden Punkte.

a) Ordinatenachsenabschnitt
b) Nullstellen
c) Randverhalten
d) Relative Extremwerte
e) Wendepunkte
f) Sattelpunkte
g) Skizze

Aufgabe 21

Lösung Seite 57

Die Funktion f sei gegeben mit dem Funktionsterm

$f(x) = 0{,}0125\ x^5 - 0{,}09375\ x^4 - 0{,}0625\ x^3 + 1{,}75\ x^2 - 3\ x - 0{,}8$

a) Untersuchen Sie f auf Extremstellen.
b) Untersuchen Sie, ob die Stelle 4 eine Wendestelle ist und um welche Art Wendepunkt es sich handelt.

Aufgabe 22

Lösung Seite 58

Gegeben sei die folgende Funktion f: $f(x) = -\ x^3 + 3\ x^2$

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Geraden g, die durch den Tiefpunkt und durch den Hochpunkt dieser Funktion verläuft.
b) Berechnen Sie, welche Steigung der Graph von f in seinem Wendepunkt hat.

Aufgabe 23

Lösung Seite 59

Gegeben sei die folgende ganzrationale Funktion f.

f: $f(x) = 1/16\ x^4 - 1/4\ x^3 - 9/8\ x^2 + 11/4\ x + 57/16$

Die Wendetangenten des Graphen von f bilden mit der x-Achse ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
Übrigens: $f(-3) = -3$ $f(-1) = 0$ $f(1) = 5$ $f(3) = 0$

Aufgabe 24

Lösung Seite 61

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 0{,}03125\ x^3 + 0{,}375\ x^2 - 8$

Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Kurventangente, die die y-Achse in Höhe von −10 schneidet.

Aufgabe 25

Lösung Seite 62

Gegeben sei die Funktion f: $f(x) = -1/16\ x^3 - 3/4\ x^2 + 16$

Überprüfen Sie, ob die Gerade, die durch die Extrempunkte von f verläuft, auch durch deren Wendepunkt führt.

Rekonstruieren von Funktionen

Aufgabe 26 *Lösung Seite 64*

Von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades sei bekannt, daß sich die Graphen der ersten und der zweiten Ableitungsfunktion an der Stelle 4 berühren. Weiterhin gilt: $f(1) = 4{,}25$ und $f(3) = 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 27 *Lösung Seite 65*

Ermitteln Sie die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph durch den Punkt A $(0|12)$ verläuft, im Punkt W $(3|-6)$ seinen Wendepunkt und an der Stelle $x_0 = 2$ eine waagerechte Tangente hat.

Aufgabe 28 *Lösung Seite 66*

Eine bestimmte ganzrationale Funktion 3. Grades besitze im Punkt W $(1|4)$ einen Sattelpunkt und an der Stelle 2 die Steigung 1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 29 *Lösung Seite 66*

Angenommen über den Verlauf einer Funktion 5. Grades werden folgende Angaben gemacht:

Der Punkt S $(0|-4)$ ist Sattelpunkt des Funktionsgraphen.
Der Punkt H $(-6|0)$ ist lokales Maximum.
An der Stelle 6 liegt ein Tiefpunkt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 30 *Lösung Seite 67*

Eine bestimmte ganzrationale Funktion vierten Grades besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x_1 = 3$ und hat in W $(1|4)$ einen Wendepunkt.

An der Stelle $x_2 = -1$ ist die notwendige Bedingung für den zweiten Wendepunkt erfüllt.

Stellen Sie das zur Bestimmung der Funktionsgleichung erforderliche lineare Gleichungssystem auf.

Aufgabe 31

Lösung Seite 69

Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, deren Graph den Hochpunkt H $(-3|25)$ und an der Stelle 6 die Steigung -9 hat und die Parabel p an der Stelle -9 berührt.

p: $p(x) = 0{,}5\ x^2 + 5\ x + 5{,}5$

Stellen Sie das zur Bestimmung der Funktionsgleichung erforderliche lineare Gleichungssystem auf.

Aufgabe 32

Lösung Seite 70

Gesucht ist die ganzrationale Funktion dritten Grades, die die y-Achse in Höhe von 1 schneidet und in dem Punkt S $(4|5)$ ihren Sattelpunkt hat. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 33

Lösung Seite 71

Gesucht ist die ganzrationale Funktion dritten Grades, die in H $(4|6)$ ihren Hochpunkt und in T $(-1|2)$ ihren Tiefpunkt hat. Ermitteln Sie den Funktionsterm.

Aufgabe 34

Lösung Seite 72

Die Funktion f sei mit ihrer 2. Ableitung $f''(x) = 6\ x - 12$ und mit der Aussage gegeben, daß ihr Graph den Hochpunkt H $(1|4)$ besitzt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente.

Aufgabe 35

Lösung Seite 73

Von einer ganzrationalen Funktion f seien die dritte Ableitungsfunktion $f'''(x) = 1/2$ und der Sattelpunkt S $(2|4)$ bekannt. Rekonstruieren Sie den Funktionsterm von f.

Viel Erfolg! *LSch*

Einfache Monopolsituationen

Aufgabe 36

Lösung Seite 74

Gesetzt den Fall, bei einem Angebotsmonopol seien die folgenden Funktionen gegeben.

Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -1/5\ x + 10$
Kostenfunktion $K(x) = 2\ x + 60$

a) Ermitteln Sie die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion.
b) Berechnen Sie die Grenzen der Gewinnzone.
c) Berechnen Sie, wie groß der Gewinn bei maximalem Umsatz ist.
d) Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 37

Lösung Seite 75

Bei einem bestimmten Angebotsmonopol seien die Funktionsgleichungen für den Preis p und die Kosten K gegeben:

$p(x) = -1/5\ x + 2$ und $K(x) = 2/5\ x + 3$

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umsatzkurve an, und berechnen Sie die Koordinaten des Umsatzmaximums.
b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion, und berechnen Sie die Grenzen der Gewinnzone.

Aufgabe 38

Lösung Seite 75

Ein Angebotsmonopolist möge von den folgenden Angaben über seine Kosten- und Preissituation ausgehen.

(1) Die Nachfrage, der er gegenübersteht, läßt sich mit einer Funktion ersten Grades beschreiben bzw. als Gerade graphisch darstellen. Die Gleichung lautet: $p(x) = -1/4\ x + 4$
(2) Bei der Produktion machen die fixen Kosten 7,5 GE aus. Die Kostenfunktion läßt sich als eine Gerade darstellen, deren Steigung 3/4 ist.

a) Berechnen Sie den Gewinn im Umsatzmaximum. Ermitteln Sie, welcher Preis dabei erzielt wird.
b) Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
c) Zeichnen Sie die Graphen der Nachfragefunktion, der Kostenfunktion und der Umsatzfunktion in ein Koordinatensystem. Skizzieren Sie die Gewinnfunktion.

Aufgabe 39

Lösung Seite 76

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol folgende Angaben gemacht:

(1) Die Preis-Absatz-Funktion lautet $p(x) = -0{,}75\ x + 12$.
(2) Die Kostenfunktion ist eine Funktion ersten Grades.
(3) Die Gewinnzone liegt zwischen 2 ME und 12 ME.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 40

Lösung Seite 77

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol die folgenden Angaben gemacht.

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen ersten Grades.
(2) Bei einem Absatz von 6 ME ist der Preis 3 GE.
Bei einem Absatz von 12 ME ist der Preis 1 GE.
(3) Die Gewinnzone liegt zwischen 3 ME und 9 ME.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 41

Lösung Seite 78

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol folgende Angaben gemacht:

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen ersten Grades.
(2) Bei einem Absatz von 2 ME beträgt der Umsatz 10 GE.
Bei einem Absatz von 10 ME beträgt der Umsatz ebenfalls 10 GE.
(3) Bei der Herstellung von 3 ME betragen die Kosten 13,5 GE. Bei der Herstellung von 7 ME entstehen Kosten in Höhe von 17,5 GE.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum und die Gewinngrenzen.

Aufgabe 42

Lösung Seite 79

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol die folgenden Angaben gemacht.

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen ersten Grades.
(2) Bei einem Absatz von 3 ME beträgt der Umsatz 9 GE.
Bei einem Absatz von 12 ME wird kein Umsatz erzielt.
(3) Bei der Herstellung von 3 ME entstehen Kosten in Höhe von 9 GE.
Bei der Herstellung von 6 ME entstehen Kosten in Höhe von 12 GE.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum und die Gewinngrenzen.

Aufgabe 43

Lösung Seite 80

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol die folgenden Angaben gemacht.

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen 1. Grades.
(2) Bei einem Absatz von 6 ME ist der Preis 4 GE.
Bei einem Absatz von 12 ME ist der Preis 1 GE.
(3) Die Gewinnzone liegt zwischen 4 ME und 8 ME.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 44

Lösung Seite 81

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol folgende Angaben gemacht:

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen 1. Grades.
(2) Bei einem Absatz von 3 ME ist der Preis 6 GE.
Bei einem Absatz von 9 ME ist der Preis 2 GE.
(3) Bei der Herstellung von 2 ME betragen die Kosten $13,\overline{3}$ GE.
Bei der Herstellung von 8 ME machen die Kosten $21,\overline{3}$ GE aus.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum und die Gewinngrenzen.

Aufgabe 45

Lösung Seite 81

Der Hersteller von "Pantokin" sei Angebotsmonopolist. Es sei angenommen, daß er bei seiner Markt- und Kostensituation von folgenden Daten ausgeht:

(1) Wird nichts produziert, so beträgt der Gewinn –3 GE, d. h. der Verlust macht 3 GE aus.
(2) Das Gewinnmaximum liegt mit 1 GE bei 4 ME.
Der Preis ist dann 3 GE.

a) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion (1. Grades), die Kostenfunktion (1. Grades), die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion.
b) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.

Aufgabe 46

Lösung Seite 83

Bei einem bestimmten Angebotsmonopol seien 2 ME und 6 ME die Grenzen der Gewinnzone. Die fixen Kosten betragen 3 GE. Die Abhängigkeit des Gewinns von der Menge läßt sich mit einer Funktion 2. Grades beschreiben. Bei 2 ME ist der Umsatz 4 GE.

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.
b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion (1. Grades).
c) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion und die Umsatzfunktion.
d) Berechnen Sie, wieviel Gewinn erzielt wird, wenn der Umsatz maximal ist.

Aufgabe 47

Lösung Seite 84

Ein nicht näher bezeichneter Angebotsmonopolist kennt von seiner Kosten- und Preissituation die folgenden Daten.

(1) Die Nachfrage, der er gegenübersteht, läßt sich mit einer Funktion ersten Grades beschreiben bzw. als eine Gerade graphisch darstellen.
Die Gleichung lautet: $p(x) = -1/4\ x + 4$

(2) Bei der Produktion machen die fixen Kosten 7,5 GE aus.
Die Kostenfunktion läßt sich als Gerade darstellen.
Die Gleichung lautet: $K(x) = 3/4\ x + 7{,}5$

Zeichnen Sie die Nachfragefunktion und die Kostenfunktion in ein Koordinatensystem, und ergänzen Sie die Skizze schrittweise zu einer graphischen Darstellung dieser Monopolsituation.

a) Berechnen Sie den Gewinn im Umsatzmaximum. Ermitteln Sie, welcher Preis dabei erzielt wird.

b) Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 48

Lösung Seite 84

Gesetzt den Fall, ein Angebotsmonopolist kenne von seiner Markt- und Kostensituation die folgenden Daten.

(1) Wird nichts produziert, so beträgt der Gewinn $-13{,}\overline{3}$ GE, d. h. der Verlust macht $13{,}\overline{3}$ GE aus.

(2) Die Gewinnzone liegt zwischen 4 und 10 ME.

(3) Die Herstellung von 10 ME verursacht 30 GE Kosten.

a) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion (1. Grades), die Kostenfunktion (1. Grades), die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion.

b) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.

Aufgabe 49

Lösung Seite 85

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol folgende Angaben gemacht:

(1) Das Maximum der quadratischen Umsatzfunktion hat die Koordinaten $(5|25)$.

(2) Die Gewinnzone liegt zwischen 3 ME und 6 ME.

(3) Die Kostenfunktion ist eine Funktion 1. Grades.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 50

Lösung Seite 86

Ein Angebotsmonopolist möge bei seiner Markt- und Kostensituation von folgenden Daten ausgehen:

(1) Würde er den Preis auf 3 GE festsetzen, so könnte er 4 ME absetzen und dabei weder Gewinn noch Verlust erzielen.

(2) Würde er einen Preis von 1,5 GE verlangen, so würde er bei einem Absatz von 10 ME ebenfalls weder Gewinn noch Verlust erzielen.

(3) Sowohl die Kostenfunktion als auch die Preis-Absatz-Funktion sind Funktionen 1. Grades.

a) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion, die Kostenfunktion, die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion.

b) Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

c) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.

Aufgabe 51

Lösung Seite 88

Ein Angebotsmonopolist möge seiner Kosten- und Marktsituation die folgenden Daten zugrunde legen.

(1) Bei einem Preis von 4 GE erzielt er einen Umsatz in Höhe von 12 GE, bei einem Preis von 1 GE ebenfalls.

(2) Die Herstellung von 7 ME verursacht Kosten in Höhe von 17 GE. Die fixen Kosten betragen 10 GE.

(3) Kostenfunktion und Preis-Absatz-Funktion sind Funktionen 1. Grades.

Ermitteln Sie die Gleichungen

a) der Preis-Absatz-Funktion und der Umsatzfunktion,

b) der Kostenfunktion und der Gewinnfunktion.

Berechnen Sie

c) das Gewinnmaximum,

d) die Gewinngrenzen.

Aufgabe 52

Lösung Seite 89

Ein nicht näher benannter Angebotsmonopolist kennt von seiner Kosten- und Preissituation die folgenden Daten.

(1) Die Nachfrage, der er gegenübersteht, läßt sich mit einer Funktion ersten Grades beschreiben bzw. als eine Gerade graphisch darstellen.

(2) Bei der Produktion machen die fixen Kosten 7,5 GE aus. Die Kostenfunktion ist eine Funktion ersten Grades.

(3) Würde er 3 ME absetzen, so hätte er bei einem Umsatz von 9,75 GE zwar keinen Gewinn, aber auch keinen Verlust.

(4) Auch bei einem Absatz von 10 ME entstünde weder Gewinn noch Verlust.

Übertragen Sie diese Angaben in ein Koordinatensystem, und ergänzen Sie die Skizze schrittweise zu einer graphischen Darstellung dieser Monopolsituation.

Berechnen Sie den Gewinn im Umsatzmaximum.
Ermitteln Sie, welcher Preis dabei erzielt wird.

Aufgabe 53

Lösung Seite 90

Angenommen es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol folgende Angaben gemacht:

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen 1. Grades.
(2) Bei einem Absatz von 3 ME ist der Preis 8 GE.
Bei einem Absatz von 12 ME ist der Preis 2 GE.
(3) Die fixen Kosten betragen 18 GE. Bei der Herstellung von 12 ME entstehen Kosten in Höhe von 24 GE.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum und die Gewinngrenzen.

Aufgabe 54

Lösung Seite 91

Ein bestimmter Angebotsmonopolist möge von seiner Kosten- und Preissituation die folgenden Daten kennen.

(1) Die Nachfrage, der er gegenübersteht, läßt sich mit einer Funktion ersten Grades beschreiben bzw. als Gerade graphisch darstellen.
(2) Bei der Produktion machen die fixen Kosten 7,5 GE aus.
Die Kostenfunktion läßt sich als Gerade graphisch darstellen.
(3) Würde er 6 ME absetzen, so hätte er einen Gewinn von 3 GE; würde er 9 ME absetzen, so wäre der Gewinn nur 1,5 GE.
(4) An der oberen Gewinngrenze betragen die Kosten 15 GE.

Übertragen Sie diese Angaben in ein Koordinatensystem, und ergänzen Sie die Skizze schrittweise zu einer graphischen Darstellung dieser Monopolsituation.

Berechnen Sie den Gewinn im Umsatzmaximum.
Ermitteln Sie, welcher Preis dabei erzielt wird.

Aufgabe 55

Lösung Seite 92

Es werden über ein bestimmtes Angebotsmonopol die folgenden Angaben gemacht.

(1) Preis-Absatz-Funktion und Kostenfunktion sind Funktionen 1. Grades.
(2) Bei einem Absatz von 3 ME ist der Preis 6,5 GE.
Bei einem Absatz von 10 ME ist der Preis 3 GE.
(3) Bei der Herstellung von 4 ME entstehen Kosten in Höhe von 24 GE.
Bei der Herstellung von 10 ME entstehen Kosten in Höhe von 30 GE.

Berechnen Sie das Gewinnmaximum und die Gewinngrenzen.