Lehr- und Handbücher der Statistik

Herausgegeben von Universitätsprofessor Dr. Rainer Schlittgen

Bisher erschienene Werke:

Böhning, Allgemeine Epidemiologie
Caspary · Wichmann, Lineare Modelle
Chatterjee · Price (Übers. Lorenzen), Praxis der Regressionsanalyse, 2. Auflage
Degen · Lorscheid, Statistik-Lehrbuch
Degen · Lorscheid, Statistik-Aufgabensammlung, 3. Auflage
Hartung, Modellkatalog Varianzanalyse
Har ey (Übers. Untiedt), Ökonometrische Analyse von Zeitreihen, 2. Auflage
Har ey (Übers. Untiedt), Zeitreihenmodelle, 2. Auflage
Heiler · Michels, Deskriptive und Explorative Datenanalyse
Kockelkorn, Lineare statistische Methoden
Miller (Übers. Schlittgen), Grundlagen der Angewandten Statistik
Nae e, Stochastik für Informatik
Oerthel · Tuschl, Statistische Datenanalyse mit dem Programmpaket SAS
Pflaumer · Heine · Hartung, Statistik für Wirtschaft- und Sozialwissenschaften: Deskriptive Statistik, 2. Auflage
Pflaumer · Heine · Hartung, Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften: Induktive Statistik
Pokropp, Lineare Regression und Varianzanalyse
Rasch · Herrendörfer u.a., Verfahrensbibliothek, Band I und Band 2
Riedwyl · Ambühl, Statistische Auswertungen mit Regressionsprogrammen
Rinne, Wirtschafts- und Bevölkerungsstatistik, 2. Auflage
Rinne, Statistische Analyse multivariater Daten – Einführung
Rüger, Induktive Statistik, 3. Auflage
Rüger, Test- und Schätztheorie, Band I: Grundlagen
Schlittgen, Statistik, 9. Auflage
Schlittgen, Statistische Inferenz
Schlittgen, GAUSS für statistische Berechnungen
Schlittgen · Streitberg, Zeitreihenanalyse, 8. Auflage
Schürger, Wahrscheinlichkeitstheorie
Tutz, Die Analyse kategorialer Daten

Fachgebiet Biometrie

Herausgegeben von Dr. Rolf Lorenz

Bisher erschienene Werke:

Bock, Bestimmung des Stichprobenumfangs
Brunner · Langer, Nichtparametrische Analyse longitudinaler Daten

Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften: Induktive Statistik

Lehr- und Übungsbuch

Von
Prof. Dr. Peter Pflaumer
Dr. Barbara Heine
Prof. Dr. Joachim Hartung

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Pflaumer, Peter:
Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften / von Peter Pflaumer ; Barbara Heine ; Joachim Hartung. – München ; Wien : Oldenbourg
(Lehr- und Handbücher der Statistik)

Induktive Statistik : Lehr- und Übungsbuch. - 2001
ISBN 3-486-24015-3

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-24015-3

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die wir in den letzten Jahren für Studierende der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Wirtschaftsmathematik sowie Statistik gehalten haben. Zusammen mit dem von uns verfaßten Lehrbuch „Deskriptive Statistik", das auch im Oldenbourg-Verlag erschienen ist, liegt nun eine umfassende Einführung in die Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften vor.

Ziel der Einführung ist es, an einem kurz und übersichtlich gefaßten Lehrtext, der an Übungen orientiert ist, die wichtigsten Methoden der induktiven bzw. schließenden Statistik zu behandeln, und zwar in dem Rahmen, wie die Statistik im Grundstudium an Universitäten und Fachhochschulen gelehrt wird. Daher eignet sich dieses Lehrbuch vor allem als Begleit- und Prüfungsvorbereitungsbuch für eine Vorlesung der induktiven Statistik. Ein Übungsteil mit Lösungen, der dazu dient, das Gelernte zu festigen und zu vertiefen, schließt das Buch ab. Weitere Übungsmöglichkeiten findet man in den vermischten Aufgaben.

Während bei der deskriptiven Statistik Methoden zur Erfassung, Analyse und Beurteilung von Daten im Vordergrund stehen, werden in der induktiven Statistik Methoden zum Finden von rationalen Entscheidungen im Falle von Unsicherheit oder Risiko beschrieben. Eine solche Entscheidung muß beispielsweise ein Pharmaunternehmen bei der Einführung eines neuen Medikaments treffen. Anhand eines stichprobenweise Vergleichs von Patientendaten wird dann getestet, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit des neuen Medikaments besser ist als die eines schon bekannten Medikaments. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert der induktiven Statistik dabei die formalen Instrumente, ohne die die induktive Statistik nicht möglich wäre.

Auch die induktive Statistik befaßt sich mit Daten. Sie konzentriert sich dabei auf Fälle, bei denen eine vollständige Datenerhebung nicht möglich, unwirtschaftlich oder zu zeitaufwendig wäre. Der Rückschluß von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ist eine wesentliche Aufgabe der induktiven Statistik. Hierbei stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein solcher Rückschluß überhaupt möglich ist. Weiterhin muß geklärt werden, wie die zu erhebenden Objekte ausgewählt werden und wie viele Objekte in die Stichprobe sollen. Man darf dabei nicht übersehen, daß solche Aussagen mit Ungenauigkeiten behaftet sind, die unter bestimmten Bedingungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung quantifiziert werden können. Die induktive Statistik kann man daher auch als ein Modell des Zufalls verstehen. Sie versucht den Zufall in den Griff zu bekommen; Sicherheit über Unsicherheit zu gewinnen. Die klassischen Inhalte der induktiven Statistik, nämlich statistisches Schätzen und Testen von Hypothesen, bilden den Hauptteil des vorliegenden Buches.

Es werden nur Kenntnisse der Schulmathematik vorausgesetzt. Hilfreich zum Verständnis ist außerdem die Lektüre unseres Buches der deskriptiven Statistik.

Es bleibt uns noch übrig, Dank zu sagen. Unser Dank gebührt unseren vielen Studenten und Studentinnen, die durch zahlreiche Fragen und Hinweise zur Gestaltung des Lehrtextes und der Übungsaufgaben beigetragen haben. Frau stud. stat. Stefanie Bolte danken wir für die Textverarbeitung und für das Erstellen der Graphiken sowie für die kritische Durchsicht des Textes. Herrn Dr. Karl-Heinz Loesgen danken wir dafür, daß er uns erlaubt hat, einige Übungsaufgaben und viele der vermischten Aufgaben in unser Lehrbuch zu übernehmen. Herrn Prof. Dr. Lothar Kreienbrock und Frau Dr. Bärbel Elpelt danken wir für angeregte Diskussionen und wertvolle Hinweise. Herrn Lektoratsleiter Dipl.-Volkswirt Martin Weigert danken wir für die bewährte, gute Zusammenarbeit.

Joachim Hartung, Barbara Heine, Peter Pflaumer

INHALT

Verzeichnis wichtiger Symbole

Symbol	Bedeutung
$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0,1)$.
$\varphi(x)$	Dichte der Standardnormalverteilung $N(0,1)$.
$\sim$	„verteilt nach“, z.B. bedeutet $X \sim N(0,1)$, daß X einer Standardnormalverteilung $N(0,1)$ genügt.
μ	Erwartungswert der Zufallsvariablen X.
σ^2	Varianz der Zufallsvariablen X.
$N(\mu,\sigma^2)$	Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2.
$N(0,1)$	Standardnormalverteilung.
u_α	α-Quantil der Standardnormalverteilung.
t_n	(Studentsche) t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.
$t_{n;\alpha}$	α-Quantil der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.
χ^2_n	χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.
$\chi^2_{n;\alpha}$	α-Quantil der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.
$F_{m,n}$	(Fishersche) F-Verteilung mit den Freiheitsgraden m und n.
$F_{m,n;\alpha}$	α-Quantil der F-Verteilung mit m und n Freiheitsgraden.
$U(a,b)$	(Stetige) Gleichverteilung (Rechteckverteilung) über dem Intervall $a \le x \le b$.
$B(n,p)$	Binomialverteilung mit den Parametern n und p.
$Ex(\lambda)$	Exponentialverteilung mit Parameter λ.
$Po(\lambda)$	Poisson-Verteilung mit Parameter λ.
$M(n,p_1,\dots,p_k)$	Multinomialverteilung mit den Parametern $n, p_1,\dots,p_k$.
$H(N,M,n)$	Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n.
$G(p)$	Geometrische Verteilung mit dem Parameter p.
Ω	Ereignisraum.
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
$P(A\|B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit.
$p(x_i)$	Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X.
$F(x)$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.
$f(x)$	Dichte der Zufallsvariablen X.
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X.
$Var(X)$	Varianz der Zufallsvariablen X.
$Cov(X,Y)$	Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y.
$\rho_{X,Y}$	(Theoretische) Korrelation der Zufallsvariablen X und Y (auch $\rho(X,Y)$).
$Corr(X,Y)$	$Corr(X,Y) = \rho(X,Y) = \rho_{XY}$.
$\bar{x}$	arithmetisches Mittel.
x_α	α-Quantil ($x_{0,5}$ ist der Median).
$s^2 = s^2_x$	empirische Varianz (von X).
s_{XY}	empirische Kovarianz (von X und Y).
r_{XY}	empirische Korrelation (von X und Y).
$R^2_{Y,X}$	Bestimmtheitsmaß.

Symbol	Bedeutung
ML	Maximum Likelihood.
OC	Operationscharakteristik, die als Funktion mit L bezeichnet wird.
MSE	Mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error).
$S_n(x)$	Empirische Verteilungsfunktion einer Meßreihe $x_1,\dots,x_n$.
$F(x,y)$	gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und Y.
$f(x,y)$	gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y.
arctanh x	Arcus-Tangens-Hyperbolicus-Funktion; $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
$\Gamma(x)$	Gammafunktion.
ln x	Natürlicher Logarithmus (d.h. zur Basis e = 2,718281828459...) von x: $x = e^y$, wenn $y = \ln x$.
e^x, $\exp\{x\}$	Exponentialfunktion.
log x	Dekadischer Logarithmus (d.h. zur Basis 10) von x: $x = 10^y$, wenn $y = \log x$.
n!	„n Fakultät“: $n! = \Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ und $0! = 1$.
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient („n über k“): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
lim	Limes, Grenzwert.
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$	„a_n konvergiert gegen a, wenn n nach unendlich läuft“.
min	Minimum.
max	Maximum.
$\|x\|$	Absolutbetrag der Zahl x; z.B. $\|3\| = 3$, $\|-3\| = 3$.
$\|A\|$	Mächtigkeit der Menge A (Anzahl der Elemente von A); z.B. $\|\{1,7,6\}\| = 3$.
x^n	n-te Potenz von x („x hoch n“): $x^n = x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$ (n-mal); z.B. $x^3 = x\cdot x\cdot x$.
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	Quadratwurzel aus x; z.B. $\sqrt{9} = 3$.
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	n-te Wurzel aus x: $y = \sqrt[n]{x}$, wenn $x = y^n$; z.B. $\sqrt[3]{64} = 4$.
$x^{n/m}$	„x hoch n/m“, m-te Wurzel aus x^n, n-te Potenz der m-ten Wurzel aus x: $x^{n/m} = (x^n)^{1/m} = (\sqrt[m]{x})^n$.
x^y	„x hoch y“: $x^y = e^{y\cdot\ln x} = 10^{y\cdot\log x}$ für $x > 0$; $x^{-y} = 1/x^y$, z.B.: $x^{-1} = 1/x$.
$\sum_i$	„Summe über i“: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
$\sum_i\sum_j$	„Doppelsumme über i und j“: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} + x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2m} + \ldots$ $\ldots + x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nm}$.
$\prod_i$	„Produkt über i“: $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot\ldots\cdot x_n$.

Symbol	Bedeutung
$\int$	Integralzeichen: $\int_a^b g(x)dx =$ Summe der Flächeninhalte der Flächen zwischen der x-Achse und der Funktion g(x) im Intervall $a \leq x \leq b$, wobei Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.
$=$	„gleich“.
$\approx$	„ungefähr gleich“, „rund“.
$\triangleq$	„entspricht“.
$>$	„größer als“.
$<$	„kleiner als“.
$\geq$	„größer oder gleich“.
$\leq$	„kleiner oder gleich“.
$\in$	„Element von“: $3 \in \{1,2,3,7\}$.
$\subset$	„Teilmenge von“: $\{1,3\} \subset \{1,2,3,7\}$.
$\varnothing$	„unmögliches Ereignis“, „leere Menge“: $\{\}$, $\{1,3\} \cap \{2,4\} = \varnothing$.
$\cup$	„vereinigt mit“: $\{3,4\} \cup \{1,2,4\} = \{1,2,3,4\}$.
$\cap$	„geschnitten mit“: $\{3,4\} \cap \{1,2,4\} = \{4\}$.
$\bigcup_j$	Vereinigung über j: $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup ... \cup A_n$.
$\bigcap_j$	Durchschnitt über j: $\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap ... \cap A_n$.
$a = (a_1,...,a_n)$	reeller n-dimensionaler Zeilenvektor.
a^T	$a^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; zu a transponierter Spaltenvektor, $(a^T)^T = a$.
X	$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$; reelle m×n-Matrix.
X^T	zur Matrix X transponierte n×m-Matrix: $X^T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$.
I_n	n×n-Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
X^{-1}	Inverse einer n×n-Matrix X: $XX^{-1} = I_n$.
X	die Matrix X ist symmetrische n×n-Matrix, falls $X = X^T$

Symbol	Bedeutung
X	die Matrix X ist eine positiv (negativ) definite n×n-Matrix, wenn für alle n-dimensionalen Spaltenvektoren $y \neq 0$ gilt: $y^T X y > (<) 0$.
Cov(a)	n×n-Kovarianzmatrix zum n-dimensionalen Zufallsvektor a: $\mathrm{Cov}(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(a_1) & \mathrm{Cov}(a_1,a_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(a_1,a_n) \\ \mathrm{Cov}(a_2,a_1) & \mathrm{Var}(a_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(a_n,a_1) & \mathrm{Cov}(a_n,a_2) & \cdots & \mathrm{Var}(a_n) \end{pmatrix} = (\mathrm{Cov}(a))^T.$
Corr(a)	n×n-Korrelationsmatrix zum n-dimensionalen Zufallsvektor a: $\mathrm{Corr}(a) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(a_1,a_2) & \cdots & \rho(a_1,a_n) \\ \rho(a_2,a_1) & 1 & \cdots & \rho(a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(a_n,a_1) & \rho(a_n,a_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{Corr}(a))^T.$

Griechisches Alphabet

Α	α	Alpha
Β	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Epsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	θ	Theta
Ι	ι	Jota
Κ	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	My
Ν	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
Ο	ο	Omikron
Π	π	Pi
Ρ	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
Χ	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

1 GRUNDBEGRIFFE DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1.1 Ereignisse und Zufallsexperimente

Bei fast allen Entscheidungen spielt die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle. Es gibt nämlich Vorgänge, die kein eindeutig vorhersagbares Ergebnis liefern. Beispiele hierfür sind das Werfen einer Münze oder eines Würfels, das Ziehen einer Spielkarte, die Kursnotierung einer Aktie, die zufällige Auswahl einer Person und die Feststellung ihrer Größe, ihres Blutdrucks und ähnlicher Daten oder die zufällige Auswahl einer Kuh und die Bestimmung ihres Milchertrages. Diese Vorgänge, die zwar aufgrund von physikalischen, ökonomischen oder anderen Gesetzmäßigkeiten zustande kommen, aber wegen der Komplexität der Einflußfaktoren trotzdem nicht erklärbar oder vorhersehbar sind, nennt man **zufällige** oder **stochastische** Vorgänge. Dagegen sind **sichere** oder **deterministische** Vorgänge eindeutig und vorhersehbar. Legt beispielsweise jemand 1000 DM zu 5% ein Jahr lang an, so wächst sein Kapital auf 1050 DM. Kauft er aber Aktien in gleicher Höhe, so ist der Kurswert ein Jahr später nicht bestimmbar. Trotzdem kann man in sehr vielen Fällen etwas über die Wahrscheinlichkeit des Eintretens bestimmter Kurswerte aussagen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann auch hier die Unsicherheit nicht beseitigen, aber man kann mit ihr die Unsicherheit kalkulierbar machen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist im Zusammenhang mit Glücksspielen, vor allem Würfel- und Kartenspielen, entstanden. Als einer der ersten hat sich der Mathematiker und Astronom Jacob Bernoulli im 17. Jahrhundert mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung wissenschaftlich befaßt, wobei er Wahrscheinlichkeit als Grad der Sicherheit beschreibt.

Alle oben erwähnten stochastische Beispiele sind Vorgänge, die zumindest im Prinzip beliebig oft wiederholt werden können und jedes Mal nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt werden, wobei die jeweiligen Ergebnisse vom Zufall abhängen, d. h. nicht im voraus bestimmbar sind. Solche Vorgänge werden **Zufallsexperimente** genannt. Die Menge aller Ergebnisse (oder Auskommen) eines Zufallsexperiments heißt **Ereignisraum**. Üblicherweise wird der Ereignisraum mit dem Symbol Ω bezeichnet.

Zufällige Ereignisse sind Teilmengen von Ω und werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die einelementigen Ereignisse nennt man Elementarereignisse

Beispiel:

(a) Das Experiment bestehe im Werfen einer Münze; das interessierende Ergebnis ist die obenliegende Seite, also Kopf (K) oder Zahl (Z). Dann ist $\Omega = \{K,Z\}$. Die einzigen Elementarereignisse sind $\{K\}$ und $\{Z\}$.

(b) Beim Würfeln fragt man danach, welche Seite des Würfels oben liegt. Es sind die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5 und 6 möglich. Also ist $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(c) Beim Würfeln gibt es beispielsweise die Ereignisse „gerade Zahl" $A=\{2,4,6\}$ und „ungerade Zahl" $B=\{1,3,5\}$. Das zusammengesetzte Ereignis „gerade Zahl" setzt sich aus den Elementarereignissen $\{2\},\{4\},\{6\}$ zusammen.

Bei Zufallsexperimenten kann man nur an einem einzigen Ereignis interessiert sein, wie z.B. an 6 Richtigen im Lotto, aber auch an einer Vielzahl von Ereignissen, die zudem miteinander in Beziehung stehen können. So interessiert etwa beim Roulette, einem Glücksspiel, bei welchem eine der Zahlen 1, 2, .. 35, 36 oder die Null gewinnt (vgl. Koken (1984)), ob der Spieler auf impair (ungerade Zahl), auf das erste Dutzend oder gar auf beide Chancen gesetzt hat. Alle diese Ereignisse lassen sich durch Teilmengen eines geeigneten Grundraums Ω beschreiben. Beziehungen der Ereignisse untereinander werden deutlich, wenn man sich der Mengenoperationen wie Durchschnitts-, Vereinigungsbildung usw. bedient. Sind A und B Teilmengen des Grundraums Ω, so bezeichnet

Ω	das sichere Ereignis, da es alle möglichen Ereignisse enthält;
$A\cup B$	das Ereignis, daß mindestens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt (Vereinigung),
$A\cap B$	das Ereignis, daß sowohl A und B eintritt (Durchschnitt) und
$A-B$	das Ereignis, daß A, aber nicht B eintritt (Differenz).
$\overline{A}=\Omega-A$	bedeutet, daß A nicht eintritt und heißt das zu A komplementäre Ereignis (Komplement von A).
$\varnothing$	ist das unmögliche Ereignis. Es ist das Komplement zu Ω.

Mengendiagramme (Venn-Diagramme) wie in Abb. 1.1 veranschaulichen die Mengenoperationen.

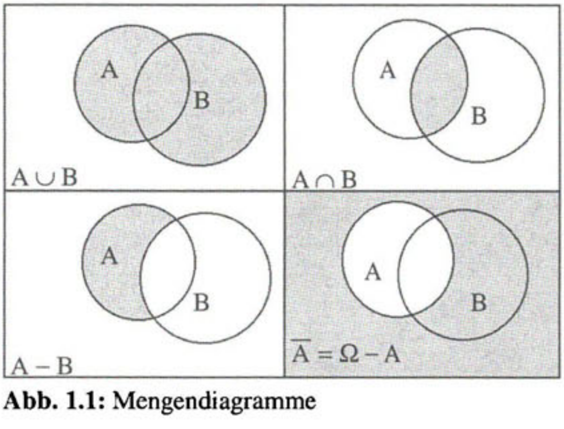

Abb. 1.1: Mengendiagramme

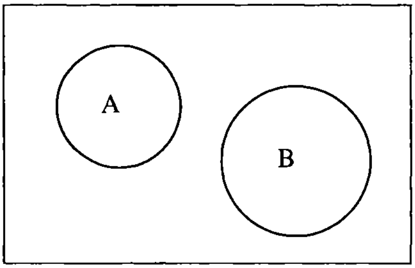

Abb. 1.2: Disjunkte Mengen A und B

Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar oder disjunkt genau dann, wenn sie nicht gleichzeitig eintreten können, d. h. wenn $A \cap B = \varnothing$ (vgl. Abb. 1.2). Das Ereignis A und das zugehörige Komplementärereignis $\bar{A}$ sind stets unvereinbar.

Beispiel: A ={1,3,5,...,35} bezeichne das Ereignis ungerade Zahl und B = {1,2,3,...12} das Ereignis erstes Dutzend beim Roulette. Das Ereignis, daß mindestens eines dieser beiden Ereignisse eintritt, nennt man die Vereinigung $A \cup B$ ={1,2,3,..11,12, 13, 15, ...35}. Wenn beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, ist das für den Spieler besonders günstig, weil er dann mit beiden Einsätzen gewinnt. Dieses Ereignis nennt man den Durchschnitt $A \cap B$ ={1,3,5,7,9,11} von A und B. Das Ereignis B-A = {2,4,6,8,10,12}, die Differenz von B und A, gewinnt, wenn eine gerade Zahl innerhalb des ersten Dutzend erscheint. Setzt man auf das erste und auf das dritte Dutzend, also auf die Ereignisse B = {1,2,3,...12} und C = {25,26,27,...,36}, so ist es nicht möglich, daß beide Chancen gewinnen; diese Ereignisse sind unvereinbar (unmögliches Ereignis), da $B \cap C = \varnothing$. Das sichere Ereignis Ω = {0,1,2,3,...,35,36} besagt, daß nachdem die Kugel in ein Nummernfach der Roulettescheibe gefallen ist, eine der Zahlen von 0 bis 36 gewonnen hat.

Die Menge aller Teilmengen des Ereignisraums Ω ergibt die Menge der zufälligen Ereignisse, die auch **Potenzmenge** von Ω heißt; sie wird mit $P(\Omega)$ bezeichnet. Umfaßt Ω n Elementarereignisse, so weiß man aus der Kombinatorik (vgl. Abschnitt 1.3), daß es $\binom{n}{0}=1$ nullelementige ($\hat{=} \varnothing$), $\binom{n}{1}$ einelementige, $\binom{n}{2}$ zweielementige, ..., $\binom{n}{n}$ n-elementige Teilmengen (=sicheres Ereignis) von Ω gibt. Zusammen sind es also $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=(1+1)^n=2^n$ Teilmengen bzw. zufällige Ereignisse. Unmögliches und sicheres Ereignis werden zur Menge der zufälligen Ereignisse hinzugezählt.

Beispiel: Beim Werfen einer Münze lautet der Ereignisraum Ω={K,Z}. Die Potenzmenge $P(\Omega)=\{\varnothing,\{K\},\{Z\},\{K,Z\}\}$ enthält $4 = 2^2$ Ereignisse. In der Potenzmenge sind die Elementarereignisse, das unmögliche und das sichere Ereignis enthalten.

Häufig umfaßt Ω aber auch unendlich viele Elementarereignisse. Dann kann man als Menge der zufälligen Ereignisse nicht mehr alle Teilmengen von Ω, sondern nur noch ein System von Teilmengen (**Ereignisfeld**) nehmen, welches die für das Problem relevanten Elemente enthält. Die Elemente eines Ereignisfelds (also Teilmengen von Ω) heißen zufällige Ereignisse. Ein Ereignisfeld enthält immer das unmögliche und das sichere Ereignis. Sind beispielsweise die Ereignisse A und B Elemente des Ereignisfelds, dann gehören als Elemente auch deren Komplementmengen, Vereinigungen und Durchschnitte dem Ereignisfeld an.

Beispiel: Die Wartezeit vor einem Schalter betrage zwischen 0 und 20 Minuten. Der Ereignisraum enthält unendlich viele Elemente. Man kann beispielsweise 1 Minute, 1,5 Minuten, 1,51 Minuten etc. und sogar π Minuten warten. Für die Untersuchung sei eine Wartezeit von über 5 Minuten relevant (Ereignis A). Dann ist das Komplementärereignis $\overline{A}$ eine Wartezeit von maximal 5 Minuten. Das System der Teilmengen von Ω (Ereignisfeld) ist in diesem Fall die Menge $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Im folgenden sind noch einige Rechenregeln für Mengenoperationen zusammengestellt, deren Ableitungen anhand der Mengendiagramme in Abb. 1.1 leicht nachzuvollziehen sind:

$$
\begin{aligned}
&A \cup B = B \cup A \\
&A \cap B = B \cap A \\
&(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
&(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
&\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \\
&\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
&A \cap A = A; A \cup A = A; A \cap \varnothing = \varnothing; A \cup \varnothing = A; \\
&A \cap \Omega = A; A \cup \Omega = \Omega; \\
&A - B = A \cap \overline{B}.
\end{aligned}
$$

1.2 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Bei einem Zufallsexperiment kann man zwar nicht voraussagen, welches Ereignis eintritt, man hält jedoch oft das Eintreten einiger Ereignisse für mehr, anderer für weniger wahrscheinlich. So wird z.B. ein Lottospieler nicht überrascht sein, wenn er am Wochenende feststellt, keine 6 Richtigen zu haben. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist sehr gering. Im Vergleich dazu ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei einem Würfelwurf recht groß. Jeder Würfelspieler weiß aber auch, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs geringer ist als die für keine Sechs.

Wir werden jetzt der Frage nachgehen, wie man Wahrscheinlichkeiten quantitativ erfassen kann.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Rouletteergebnisse (Permanenzen) der Spielbank Hamburg von Tisch 1 am 30.09.1998 (vgl. Tab. 1.1)

Tab. 1.1: Rouletteergebnisse der Spielbank Hamburg von Tisch 1 am 30.09.1998 (Quelle: www.spielbank-hamburg.de)

17	12	5	28	18	35	29	20	27	19	27	21	35	6	18	18	15	23	29	14	0
31	32	31	19	23	16	30	13	12	23	21	11	32	15	26	24	9	20	23	20	27
34	29	20	35	33	0	15	24	6	22	8	2	1	16	5	1	19	14	9	6	27
14	23	7	9	15	14	29	12	32	0	8	30	27	19	12	0	32	21	13	2	18
24	21	5	1	18	22	0	18	29	13	20	1	33	8	4	27	16	20	15	30	8
10	8	2	10	32	12	5	28	19	24	11	35	11	0	9	15	18	9	27	33	31
6	9	30	24	0	4	9	32	23	24	28	26	16	10	36	35	35	25	15	18	27
27	29	14	28	8	27	7	11	19	18	16	24	32	7	33	31	18	32	23	13	16
32	0	31	1	28	11	32	1	18	31	31	6	24	26	13	18	19	19	22	16	5
17	32	10	20	30	26	33	12	8	28	14	34	31	26	15	25	2	22	31	11	4
14	6	25	8	31	6	18														

Beim Roulette wird entweder auf volle Nummern (Plein) 0,1,2,...,36 oder auf einfache Chancen, wie Rot oder Schwarz bzw. Gerade oder Ungerade gesetzt, wobei jeweils 18 Nummern rot, schwarz, gerade oder ungerade sind. Durch das Drehen der Roulettescheibe und das Werfen der Kugel durch den Croupier wird ein Zufallsexperiment durchgeführt, dessen Ergebnis eine Zahl zwischen 0 und 36 ist. Die Zahl kann entweder gerade, ungerade oder Null sein (vgl. Tab. 1.1). Das Ergebnis entscheidet über Gewinn oder Verlust. Es kann ein Gewinn vom einfachen (bei einfachen Chancen) bis zum 35fachen (Plein) des Einsatzes erzielt werden.

Die Kugel wird immer wieder geworfen und nach jedem Coup (Wurf) die Anzahl der bis dahin aufgetretenen geraden Zahlen n_A (absolute Häufigkeit) gezählt. Dividiert man die Anzahl der geraden Zahlen jedesmal durch die Anzahl der Coups n, dann erhält man den Anteil oder die relative Häufigkeit der geraden Zahlen

$$h_A = \frac{n_A}{n}.$$

Die folgende Tabelle (vgl. Tab. 1.2) zeigt die absoluten und die relativen Häufigkeiten des Ereignisses „gerade Zahl" in Abhängigkeit vom Roulettewurf.

Tab. 1.2: Relative Häufigkeiten beim Roulette

Coup n	Zahl	Absolute Häufigkeit der geraden Zahlen n_A	Relative Häufigkeit der geraden Zahlen h_A
1	17	0	0,000
2	12	1	0,500
3	5	1	0,333
4	28	2	0,500
5	18	3	0,600
6	35	3	0,500
7	29	3	0,429
8	20	4	0,500
9	27	4	0,444
10	19	4	0,400
⋮	⋮	⋮	⋮
212	6	104	0,491
213	25	104	0,488
214	8	105	0,491
215	31	105	0,488
216	6	106	0,491
217	18	107	0,493

Die Schwankungen der relativen Häufigkeiten um einen Wert, der kleiner als ½ ist, sind in der Abb. 1.3 veranschaulicht. Besonders auffällig ist dabei das Kleinerwerden dieser Schwankungen sowie die Stabilisierung um den Wert von $18/37$.

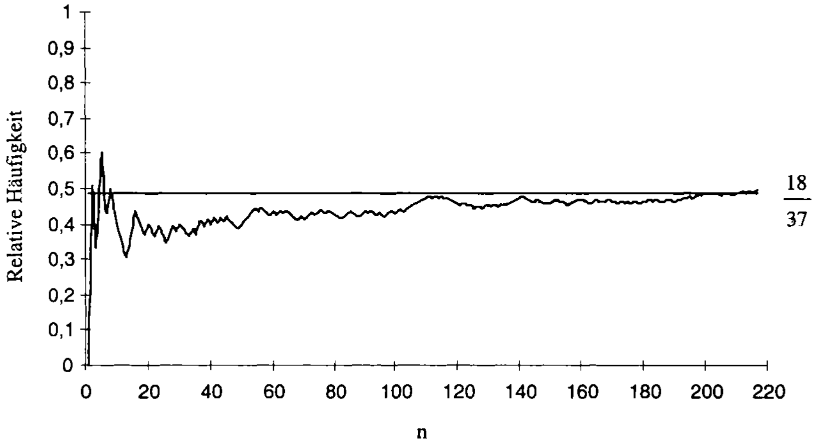

Abb. 1.3: Relative Häufigkeiten von geraden Zahlen beim Roulette in Abhängigkeit vom Coup n

Das legt uns nahe, den Wert 18/37 als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer geraden Zahl beim Roulette zu interpretieren. Der Grenzwert der relativen Häufigkeit für $n \to \infty$ führt zur Wahrscheinlichkeit P (**Probabilität**) eines zufälligen Ereignisses A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Diese Definition nennt man den **statistischen** oder **frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff** (vgl. von Mises (1951)). Vor allem im Wirtschafts- und Sozialleben spielt diese Interpretation der Wahrscheinlichkeit eine große Rolle. Die Wahrscheinlichkeit wird dann mit der relativen Häufigkeit gleichgesetzt, wenn die Zahl der Beobachtungen groß ist. Die in Tab. 1.3 aufgeführten Wahrscheinlichkeiten sind größtenteils auf diese Weise berechnet worden.

Tab. 1.3: Was ist wie wahrscheinlich? (Quelle: Lisch (1984), S.25)

	Wahrscheinlichkeit
6 Richtige im Samstaglotto 6 aus 49	0,000000072
Als Mann 100 Jahre alt zu werden	0,0005
Als Frau 100 Jahre alt zu werden	0,0028
Zwillingsgeburt	0,00945
Drillingsgeburt	0,0001
An der Grippe zu sterben	0,0000112
Vom Blitz erschlagen zu werden	0,0000003
Im Straßenverkehr ums Leben zu kommen	0,00019
Im Luftverkehr (einschl. Fallschirmspringen) ums Leben zu kommen	0,0000012
Ein bestimmtes Blatt bei Skat zu bekommen	0,000000016
Eine bestimmte Kartenverteilung beim Skatspiel	$3{,}63 \cdot 10^{-16}$
Beim Kegeln zu sterben	0,0000769
Verlust des Koffers bei einer Flugreise	0,00014

Es ist also etwa viermal wahrscheinlicher, vom Blitz erschlagen zu werden, als beim Lotto 6 Richtige zu haben.

Wichtig ist es im Wirtschafts- und Sozialleben, die Grundgesamtheit, für welche die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, genau abzugrenzen. Erst dann ist eine sinnvolle Interpretation der Wahrscheinlichkeit möglich (vgl. von Mises (1951) S. 19ff). Wird beispielsweise für 85000 55jährige Männer die Sterbewahrscheinlichkeit 0,011 ermittelt, so bedeutet dies nur, daß innerhalb der betrachteten Gesamtheit gerade 11 von 1000 Männern im 56. Lebensjahr sterben. Diese Aussage ist für eine Versicherung wichtig, um ihre Prämien adäquat zu berechnen. Man wird mit diesem Wert rechnen, solange man keinen besser begründeten Wert besitzt. Völlig sinnlos wäre es zu sagen, so schreibt von Mises, der jetzt 55jährige Herr N.N. habe 1,1 % Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines

Jahres zu sterben. Denn bildet man beispielsweise eine Grundgesamtheit aus Frauen und Männern gemeinsam, so erhält man wegen der geringen Mortalität der Frauen kleinere Sterbewahrscheinlichkeiten für das Alter von 55 Jahren. Herr N.N. gehört sowohl zur Grundgesamtheit der Männer und Frauen als auch zur Grundgesamtheit der Männer allein.

Durch den Grenzwert der relativen Häufigkeit läßt sich jedem Ereignis eines Zufallsexperiments bzw. jedem Element eines Ereignisfeldes eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Solch eine Wahrscheinlichkeit kann man durch folgende drei Eigenschaften, die man entsprechend auch bei den relativen Häufigkeiten findet, und die als **Kolmogoroffsche Axiome** bekannt sind, vollständig charakterisieren.

Axiom 1: Zu jedem zufälligen Ereignis A existiert seine Wahrscheinlichkeit P(A), wobei P(A) eine eindeutig bestimmte reelle Zahl mit $0 \leq P(A) \leq 1$ ist.

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis ist 1.

Axiom 3: Für zufällige Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit $A_j \cap A_k = \varnothing$ für $j \neq k$ gilt $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit der Summe abzählbar unendlich vieler paarweiser disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse. Das dritte Axiom beinhaltet natürlich auch die endliche Additivität. Speziell gilt für nur zwei disjunkte Ereignisse A und B $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Aus diesen drei Axiomen lassen sich sämtliche Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten folgern, wie z.B.

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (**Additionstheorem**),

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (**Gegenwahrscheinlichkeit**),

(3) Ist $A \subset B$, dann gilt $P(A) \leq P(B)$,

(4) $P(\varnothing) = 0$,

(5) $P(A - B) = P(A) - P(B)$, falls $B \subset A$.

Das Additionstheorem lautet für drei Ereignisse A,B und C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

wie man aus dem Venn-Diagramm in Abb. 1.4 leicht nachvollziehen kann.

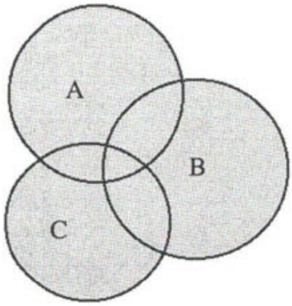

Abb. 1.4: Vereinigung von drei Mengen A, B und C

Beispiel: 80% der Kunden einer Direktbank kaufen mindestens eine der folgenden Wertpapierarten: Aktien, Investmentfonds oder Optionsscheine. 50% der Kunden kaufen Aktien und 70% Investmentfonds, 30% der Kunden kaufen Aktien und Investmentfonds, 40% Aktien und Optionsscheine, 10% Investmentfonds und Optionsscheine, 5% Aktien, Investmentfonds und Optionsscheine. Wieviel Prozent der Kunden kaufen Optionsscheine?
A, I und O seien die Ereignisse Aktien, Optionsscheine und Investmentfonds zu kaufen. Da

$$P(A \cup I \cup O) = P(A) + P(I) + P(O) - P(A \cap I) - P(A \cap O) - P(I \cap O) + P(A \cap I \cap O)$$

ist, ergibt sich

$$0{,}8 = 0{,}5 + 0{,}7 + P(O) - 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}05;$$

daraus folgt

$$P(O) = 0{,}35;$$

d.h. 35% der Kunden der Direktbank kaufen Optionsscheine.

Für mehr als drei Ereignisse führt das Additionstheorem zu einer komplizierten Formel, deren Struktur wie folgt aufgebaut ist:

1. Die Wahrscheinlichkeiten der n Ereignisse werden addiert.
2. Die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen aller möglichen Ereignispaare werden subtrahiert.
3. Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Schnittmengen bestehend aus drei Ereignissen werden addiert.
4. Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Schnittmengen bestehend aus vier Ereignissen werden subtrahiert.

usw.

Beispiel:
Für vier Ereignisse A_1, A_2, A_3 und A_4 ergibt sich

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)\\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4)\\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\ &- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mittels wiederholter Durchführung eines Zufallsexperiments Ungenauigkeiten und Fehler auftreten können. Das ist besonders der Fall, wenn nur eine kleine Anzahl von Versuchen durchgeführt werden kann, oder die Anzahl der Beobachtungen gering ist. Ist jedoch überhaupt keine Wiederholbarkeit gegeben (z.B.: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Absatz eines neuen Produktes eine bestimmte Höhe überschreitet oder mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine bestimmte Person Vorstandsvorsitzender?), so läßt sich nur eine **subjektive Wahrscheinlichkeit** angeben, die auf Meinungen, Intuitionen und Einschätzungen von Personen und Experten beruht.

Subjektive Wahrscheinlichkeiten benötigt man im Rahmen der statistischen Entscheidungstheorie (vgl. Bamberg/Coenenberg (1989) oder Menges (1974)). So hängt beispielsweise eine Investitionsentscheidung von vielen Faktoren ab, die unsicher sind. Zur Bestimmung der Vorteilhaftigkeit der Investition müssen diese Faktoren prognostiziert werden. In vielen Fällen ist eine Trendprognose nicht sinnvoll oder nicht möglich, da entweder ein Strukturbruch zu erwarten ist oder nicht genügend Daten der Vergangenheit zur Verfügung stehen. Statt dessen werden Experten befragt, die subjektive Wahrscheinlichkeiten für Realisationen der einzelnen Einflußfaktoren in der Zukunft angeben. Ein systematisches Programm der Expertenbefragung ist die **Delphi-Methode**, die symbolisch nach dem Orakel von Delphi benannt ist. Die Experten werden zunächst anonym befragt, um eine gegenseitige Beeinflussung zu verhindern. Nach der Auswertung dieser ersten Befragungsrunde werden die Ergebnisse diskutiert; die Teilnehmer der Expertenrunde werden mit der Mehrheitsmeinung konfrontiert; Argumente werden ausgetauscht. Danach erfolgt eine neue Runde einer anonymen Experteneinschätzung mit anschließender Gruppendiskussion. Diese Runden werden solange fortgesetzt, bis sich ein stabiles Meinungsbild ergibt.

Eine Hilfe zu Ermittlung subjektiver Wahrscheinlichkeiten stellt die Übersicht 1.1 dar, die von Krelle (1968), S. 198 übernommen wurde.

Übersicht 1.1: Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Verbale Umschreibung	Subjektive Wahrscheinlichkeit in Prozent
durchaus möglich	40-60
sehr möglich	50-70
wahrscheinlich	60-80
recht wahrscheinlich	70-90
sehr wahrscheinlich	80-95
außerordentlich wahrscheinlich	90 und mehr

Beispiel: Ein Investor beabsichtigt, in eine der drei folgenden Anlageformen zu investieren:
(1) Festgeld in inländischer Währung,
(2) Investmentfonds-Anteile,
(3) Aktien.
Die Rendite und das Risiko bzw. die Unsicherheit der Investition hängt von der gesamtwirtschaftlichen Lage im nächsten Jahr ab, die mit subjektiver Wahrscheinlichkeit prognostiziert werden kann.

Tab. 1.4: Subjektive Wahrscheinlichkeiten für die gesamtwirtschaftliche Lage

Gesamtwirtschaftliche Lage	Wahrscheinlichkeit	Renditen Festgeld	Fonds-Anteile	Aktien
Konjunkturaufschwung	0,4	5%	10%	16%
unverändertes Wachstum	0,5	5%	6%	6%
Konjunkturabschwung	0,1	5%	–2%	–10%

Welche Anlage soll er wählen?
Zur Lösung der Aufgabe müßten wir eigentlich die Kennzahlen Erwartungswert (Mittelwert) und Standardabweichung (Risiko) aus dem Kapitel 2 berechnen. Aber es wird auch so deutlich, daß die Entscheidung wesentlich von der individuellen Risikopräferenz des Investors abhängt. Will er überhaupt kein Risiko eingehen, dann wird er eine Festgeldanlage wählen. Bei mittlerer Risikoeinstellung entscheidet er sich für den Kauf der Fonds-Anteile. Ist er dagegen risikobereit, dann kauft er Aktien.

Vertreter eines speziellen Begriffs der subjektiven Wahrscheinlichkeit sind die sogenannten **Bayesianer**. Die subjektive Wahrscheinlichkeit nach Bayes wird indirekt definiert, und zwar als das Verhältnis des Wetteinsatzes zum erwarteten Gewinn. Wenn jemand – ohne objektive Kenntnis der Wahrscheinlichkeit – den Betrag von 25 DM setzt, in der Hoffnung 100 DM zu gewinnen, so vermutet er offenbar, daß die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ¼ ist (vgl. u.a. Menges (1972), S. 34 und S. 106). Weitere Ausführungen mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten und wirtschaftliche Beispiele zur statistischen Entscheidungstheorie findet der interessierte Leser etwa bei Loesgen (1990) oder Harnett, Horrell (1997).

Bei einigen Zufallsexperimenten, die oft dem Bereich der Glücksspiele zuzuordnen sind, kommt man schon allein durch Plausibilitätsüberlegungen zu der Auffassung, daß jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit haben muß. So wird man aufgrund der Symmetrie eines Würfels jeder Zahl die gleiche Chance einräumen, als Ergebnis eines Wurfes zu erscheinen, und ihr somit die Wahrscheinlichkeit 1/6 zuordnen. Für solche Zufallsexperimente, bei denen also nur endlich viele, gleichwahrscheinliche Ergebnisse möglich sind, ergibt sich für ein beliebiges Ereignis A die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}},$$

wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A bezeichnet und $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente von Ω. Auf diese Weise hat der Mathematiker Laplace im 18. Jahrhundert die Gewinnchancen von Glücksspielen berechnet. Deshalb spricht man hier auch von der **Laplace-Wahrscheinlichkeit** oder von der **klassischen Wahrscheinlichkeit**, obwohl schon vor ihm Jacob Bernoulli sowohl diesen als auch den statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet hat. Die klassische Wahrscheinlichkeit bezieht also die für A günstigen Fälle auf die möglichen Fälle. Bei einem symmetrischen Roulettespiel beispielsweise lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse auf diese Weise berechnen. Jeder

Coup ist also ein Laplace-Experiment mit Wahrscheinlichkeit $1/37$. Die Wahrscheinlichkeiten für einfache Chancen ergeben dann $18/37 = 0{,}4865$.

Ist das Erscheinen der einzelnen Zahlen beim Roulette dagegen nicht gleichwahrscheinlich, so sprechen wir von einem nichtsymmetrischen oder fehlerhaften Roulettespiel. Gründe für ein nichtsymmetrisches Roulettespiel können die fehlerhafte Beschaffenheit des Roulettekessels oder die Routine des Croupiers sein, der beim Werfen der Kugel zumindest zeitweise in einen gewissen nicht zufälligen Rhythmus fällt. Dies hat zur Folge, daß bestimmte Sektoren des Roulettekessels wahrscheinlicher als andere getroffen werden. Schon der berühmte Statistiker Karl Pearson (1894) hat sich mit fehlerhaftem Roulette beschäftigt. Für eine neuere Behandlung dieses Themas und der damit eventuell verbundenen positiven Gewinnerwartung sei der Leser auf Basieux (1993) und Barnhart (1992) verwiesen. Ist das Roulette fehlerhaft, so kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nur durch häufig wiederholtes Werfen der Kugel ermittelt werden. Die relative Häufigkeit entspricht dann der Wahrscheinlichkeit. Es wird dann eine Aufgabe der Testtheorie in Kapitel 8 sein, zu entscheiden, ob die Abweichung der relativen Häufigkeit von der Laplace-Wahrscheinlichkeit zufällig oder nicht zufällig (signifikant) ist.

Beispiel:

(a) Zwei unterscheidbare Würfel werden einmal geworfen. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß mit beiden Würfeln eine Sechs geworfen wird (Ereignis A).

Da $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$ und $A = \{(6,6)\}$ sind, folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

(b) Wie oben werden zwei unterscheidbare Würfel einmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Würfel eine Sechs aufzeigt (Ereignis B)?

Da $B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$ ist, folgt

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}.$$

Ein Spezialfall der Laplace-Wahrscheinlichkeit ist die sogenannte **geometrische Wahrscheinlichkeit,** zu deren Berechnung relevante Flächen zueinander in Beziehung gesetzt werden. Schießt man beispielsweise zufällig auf eine kreisrunde Schießscheibe, so berechnet man als Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Kreissektor zu treffen, den Quotienten aus Kreissektorfläche und Schießscheibenfläche (vgl. auch Übungsaufgabe 10).

1.3 Anwendungen der Kombinatorik zur Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Zur Bestimmung der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit bedarf es der Abzählung von unter Umständen sehr großen Mengen. Hierzu bedient man sich häufig der Kombinatorik, die man als die Kunst des Zählens bezeichnen kann. Mit der Kombinatorik können folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Elemente **anzuordnen**?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von n Elementen k **auszuwählen**?

Im ersten Fall spricht man von **Permutationen** und im zweiten Fall von **Kombinationen**, wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt und von **Variationen**, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird.

1.3.1 Permutationen

Jede Anordnung von n Elementen heißt **Permutation**. Die Anzahl der möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen beträgt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

denn es gibt n Möglichkeiten den ersten Platz in der Reihe zu besetzen, $n-1$ Möglichkeiten den zweiten Platz,... und 1 Möglichkeit den letzten Platz zu besetzen. Dabei heißt $n!$ (gesprochen „n Fakultät") die Fakultät der Zahl n.
Sind jeweils n_i der Elemente gleich, $i = 1,\ldots,r$, so gibt es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten der n Elemente.

Beispiel: Für die Fertigungsreihenfolge von zehn unterschiedlichen Werkstücken gibt es $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$ verschiedene Möglichkeiten. Haben wir dagegen zehn Werkstücke, von denen drei von der Sorte A, fünf von der Sorte B und zwei von der Sorte C sind, so ist die Anzahl der möglichen Fertigungsreihenfolgen

$$\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = \frac{3628800}{6 \cdot 120 \cdot 2} = 2520.$$

Sollen Stücke der gleichen Sorte jeweils hintereinander produziert werden, dann hat man nur noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

1.3.2 Variationen

Aus einer Menge von n verschiedenen Elementen sollen k Stücke ausgewählt werden. Ist dabei die Auswahlreihenfolge von Bedeutung, so heißt jede Anordnung mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Stücke eine **Variation**. Werden die k Stücke ohne Zurücklegen gezogen, d.h. werden k verschiedene Stücke ausgewählt, so spricht man von einer Variation ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von k aus n Elementen beträgt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

denn für die Besetzung des ersten Platzes der Reihenfolge bestehen n Möglichkeiten, für den zweiten Platz $n-1$ und für die Besetzung des k-ten Platzes $n-k+1$ Möglichkeiten.

Beispiel: Beim Pferderennen gibt es, wenn acht Pferde am Start sind, für die Belegung der ersten drei Plätze (Dreiereinlaufwette) $8!/(8-3)! = 336$ Möglichkeiten.

Kann jedes Stück auch mehrfach in der Anordnung vorkommen, d.h. werden die k Stücke mit Zurücklegen gezogen, so heißt die Anordnung auch Variation mit Wiederholung.

Die mögliche Anzahl der Variationen mit Wiederholung von k aus n Elementen beträgt

$$n^k = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n,$$

denn für die Besetzung jeder der k Plätze gibt es n Möglichkeiten.

Beispiel: Bei einem 80386-Prozessor mit 32 verfügbaren Adreßleitungen können maximal 2^{32} = 4294967296 Byte = 4 GB RAM im Hauptspeicher eines Computers adressiert werden.

1.3.3 Kombinationen

Werden k Stücke aus n verschiedenen Elementen so ausgewählt, daß die Reihenfolge der Auswahl ohne Bedeutung ist, dann heißt jede Anordnung **Kombination** von k aus n Elementen. Wieder wollen wir dabei zwischen Kombinationen mit und ohne Wiederholung unterscheiden. Werden die k Stücke ohne Zurücklegen gezogen, d.h. werden k verschiedene Elemente ausgewählt, so spricht man von einer Kombination ohne Wiederholung. Allgemein beträgt die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

denn von den $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Variationen ohne Wiederholung fallen jeweils k! zu einer Kombination zusammen. Die Größe $\binom{n}{k}$ (gesprochen „n über k") ist der sogenannte Binomialkoeffizient.

Beispiel: Beim Lotto hat man

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Möglichkeiten, aus den insgesamt 49 Zahlen sechs Stück zu wählen.

Wenn die Stücke nach jedem Zug wieder zurückgelegt werden, d.h. wenn jedes Stück auch mehrfach gezogen werden kann, spricht man von einer Kombination mit Wiederholung.

Die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von k aus n Elementen beträgt

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Beispiel: Hat man vier verschiedene Sorten Bonbons, so gibt es

$$\binom{4+10-1}{10} = 286$$

Möglichkeiten, eine Tüte mit zehn Bonbons zu füllen.

Zusammenfassend lassen sich die verschiedenen Anzahlen der Kombinationen bzw. Variationen in nachfolgender Tab. 1.5 übersichtlich darstellen.

Tab. 1.5: Kombinationen und Variationen mit und ohne Wiederholungen von k aus n Elementen

Anzahl	Variation (mit Berücksichtigung der Reihenfolge)	Kombination (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

1.3.4 Beispiele zur Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel:

(a) In einem Raum sind 30 Personen versammelt. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Der Grundraum Ω besteht aus den Elementarereignissen (Geburtstag der 1. Person),..., (Geburtstag der 30. Person).

$$|\Omega| = 365^{30} \qquad \text{(Variationen mit Wiederholung).}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, daß alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben (Ereignis A) ist

$$|A| = \frac{365!}{(365-30)!} \qquad \text{(Variationen ohne Wiederholung).}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$P(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{365^{30} - \frac{365!}{(365-30)!}}{365^{30}} = 0{,}706\,.$$

(b) Beim Lotto ist die Wahrscheinlichkeit sechs Richtige zu haben

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0{,}0000000715\ .$$

(c) Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß beim fünfmaligen Würfeln die größte Augenzahl mindestens eine Vier ist. Bei den fünf Würfen kommen mit einer Wahrscheinlichkeit $4^5/6^5$ Zahlen kleiner oder gleich vier vor. Die Wahrscheinlichkeit, daß nur Zahlen kleiner als vier vorkommen, beträgt $3^5/6^5$. Wir erhalten somit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4^5}{6^5} - \frac{3^5}{6^5} = \frac{4^5 - 3^5}{6^5} = \frac{1024 - 243}{7776} = \frac{781}{7776} = 0{,}1004\,.$$

(d) Beim dreimaligen Würfeln gibt es $6!/(6-3)!$ Möglichkeiten, daß alle Würfe verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist demnach

$$\frac{6!/(6-3)!}{6^3} = \frac{120}{216} = 0{,}5556\ .$$

(e) Eine Urne enthalte drei weiße, drei schwarze und drei rote Kugeln. Entnehmen wir zufällig (ohne Zurücklegen) vier Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir von jeder Farbe mindestens eine erhalten, gegeben durch

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{3\cdot\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14} = 0{,}6429\ .$$

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Oft interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Annahme, daß ein bestimmtes Ereignis B schon eingetreten ist. Man möchte z.B. wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Motor eines PKWs noch 20000 km hält, wenn man schon weiß, daß er bereits 100000 km ohne Störung gelaufen ist, oder wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, an einem Herzinfarkt zu sterben, wenn es sich um eine männliche Person handelt, deren Alter mehr als 60 Jahre beträgt. In solchen Fällen spricht man von einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Wie eine bedingte Wahrscheinlichkeit konkret berechnet wird, wollen wir an einem Beispiel erklären.

Beispiel: An einer Statistikklausur nahmen weibliche und männliche Studierende der Studiengänge BWL und Tourismus eines Fachbereichs laut folgender Tab. 1.6 teil.

Tab. 1.6: Teilnehmer einer Statistikklausur

Geschlecht / Studiengang	W weiblich	M männlich	Insgesamt
T Tourismus	33	27	60
B BWL	22	38	60
Insgesamt	55	65	120

Aus dieser Tabelle können wir beispielsweise entnehmen, daß die relative Häufigkeit der weiblichen Studierenden h(W) = 55/120=0,458 beträgt, die der Studierenden im Studiengang Tourismus h(T)=60/120=0,5, die der weiblichen Studierenden im Studiengang Tourismus $P(W \cap T)=33/120=0{,}275$ usw. Diese Häufigkeiten sind alle auf die Gesamtzahl der Klausurteilnehmer $n(M \cup W) = n(B \cup T)=120$ Studierende bezogen. Interessieren wir uns speziell für die weiblichen Studierenden, so werden wir uns auf deren Anzahl n(W)=55 beschränken und erhalten dadurch die sogenannten bedingten relativen Häufigkeiten

$$h(T \mid W) = \frac{n(T \cap W)}{n(W)} = \frac{33}{55} = \frac{33/120}{55/120} = \frac{h(T \cap W)}{h(W)} = 0{,}6\,,$$

$$h(B \mid W) = \frac{n(B \cap W)}{n(W)} = \frac{22}{55} = \frac{22/120}{55/120} = \frac{h(B \cap W)}{h(W)} = 0{,}4\,,$$

d.h. 60% der Studentinnen belegen den Studiengang Tourismus und 40% der Studentinnen den Studiengang BWL.

Beschränkt man sich hingegen auf den Studiengang Tourismus, so erhalten wir folgende bedingte relative Häufigkeiten

$$h(W \mid T) = \frac{n(W \cap T)}{n(T)} = \frac{33}{60} = \frac{33/120}{60/120} = \frac{h(W \cap T)}{h(T)} = 0{,}55\,,$$

$$h(M \mid T) = \frac{n(M \cap T)}{n(T)} = \frac{27}{60} = \frac{27/120}{60/120} = \frac{h(M \cap T)}{h(T)} = 0{,}45\,,$$

d.h. 55% der Touristikstudierenden sind weiblich und 45% sind männlich.

Analog zu den bedingten relativen Häufigkeiten wird die **bedingte Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A unter der Bedingung B mit P(B) > 0 definiert als

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bzw. mit $P(A) > 0$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Beispiel: Eine Klausur wird im o.a. Beispiel bei der Korrektur zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß
a) die Klausur von einer Studentin geschrieben worden ist?
b) die Klausur von einer Studentin, die Tourismus studiert, geschrieben worden ist?
c) die Klausur von einer Studentin geschrieben worden ist, wenn man weiß (man hat die Vorinformation), daß sie im Studiengang Tourismus immatrikuliert ist?
d) die Klausur von einem bzw. einer Studierenden im Studiengang Tourismus geschrieben worden ist?
e) die Klausur von einem Studierenden im Studiengang Tourismus geschrieben worden ist, wenn man weiß (man hat die Vorinformation), daß das Geschlecht des Studierenden männlich ist?

Mit $P(W)=55/120$, $P(M)=65/120$, $P(T)= 60/120$, $P(W \cap T)=33/120$, und $P(M \cap T)=27/120$ bestimmt man

a) $P(W) = 55/120 = 0{,}458$,

b) $P(W \cap T) = 33/120 = 0{,}275$,

c) $P(W \mid T) = \dfrac{P(W \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}275}{0{,}5} = 0{,}55$,

d) $P(T) = 0{,}5$,

e) $P(T \mid M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{27}{120}}{\frac{65}{120}} = 0{,}415$.

Mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit lassen sich auch scheinbare Paradoxe leicht erklären. In Gardner (1982) wird folgende Situation geschildert:

Beispiel (vgl. Gardner (1982), S. 104):
A lady owned two parrots. One day a visitor asked:
Visitor: Is one bird a male?
Owner: Yes

What is the probability both birds are males? It´s one third.

Suppose the visitor asks:
Visitor: Is the dark bird a male?
Owner: Yes.

Now the probability both birds are males goes up to one-half. This doesn´t make sense. Why does asking about the dark bird change the probability?

Das Problem kann auf folgendes Münzwurfbeispiel übertragen werden:
Eine Münze wird zweimal geworfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal Zahl zu erhalten, wenn man die Vorinformation hat, daß schon einmal Zahl erschienen ist? Mit $\Omega=\{(K,Z),(Z,K),(Z,Z),(K,K)\}$, $A=\{(Z,Z)\}$ und $B=\{(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ berechnet man