Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen
und Schätzen ihrer Parameter

von
Prof. Dr. Detlef Plachky

Mit 117 Beispielen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1996

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Plachky, Detlef:
Wahrscheinlichkeitsrechnung : diskrete
Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Schätzen ihrer Parameter
: mit 117 Beispielen / von Detlef Plachky. - München ; Wien :
Oldenbourg, 1996
ISBN 3-486-23569-9

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-23569-9

Vorwort

Der Autor strebt eine elementare Einführung in Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Stochastik) auf der Grundlage von Anfängervorlesungen über Infinitesimalrechnung und lineare Algebra unter Verzicht auf maßtheoretische Hilfsmittel an. Natürlicherweise steht daher der Begriff der diskreten Verteilung an der Spitze, wobei auch bei mathematischen Aussagen aus dem Bereich der Stochastik eine möglichst elementare Version gewählt worden ist. Eine solche Spezialisierung legt die Entwicklung und Darstellung von Grundbegriffen der Stochastik an Beispielen nahe. Trotzdem hofft der Autor, auch dem Fachmann nicht nur vollkommen Bekanntes anzubieten, obgleich vorwiegend Altes "beispielhaft" dargestellt wird. Schließlich soll darauf hingewiesen werden, daß der Autor auch von neueren Ergebnissen profitiert hat, wie z. B. die konkrete Kennzeichnung eines maximalen, stochastisch unabhängigen und nicht trivialen Systems von Ereignissen unter der diskreten Gleichverteilung, die auf B. Eisenberg und B. K. Ghosh zurückgeht, der elementare Beweis von U. Gerber, die Ruinwahrscheinlichkeit von Versicherungen betreffend, die explizite Darstellung von A. N. Georghiou, C. Georghiou and G. N. Philippou für die negative Binomialverteilung höherer Ordnung und schließlich die elegante Darstellung von G. G. Lorentz für Bernsteinpolynome.

D. Plachky

Inhaltsverzeichnis

1. Der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beim Werfen einer Münze bzw. eines Würfels drückt man die Tatsache, daß die Chance für das Auftreten von Wappen oder Zahl bzw. einer bestimmten Augenzahl gleich ist, dadurch aus, daß man für die entsprechende Wahrscheinlichkeit 1/2 bzw. 1/6 angibt. In diesem Fall spricht man auch von einer echten (ungefälschten) Münze bzw. Würfel. Beim Ziehen aus einem Gefäß (Urne), die zwei verschiedene Sorten von Kugeln enthält, etwa r rote bzw. s schwarze Kugeln, wird man die Chance für das Ziehen einer roten Kugel mit $\frac{r}{r+s}$ bzw. für das Ziehen einer schwarzen Kugel mit $\frac{s}{r+s}$ bewerten. Die Chance, beim Würfeln mit einem ungefälschten Würfel eine gerade Augenzahl zu würfeln, wird mit 3/6 = 1/2 zu bewerten sein, wobei natürlich auch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer ungeraden Augenzahl 1/2 beträgt. Allgemeiner wird man in einem Zufallsexperiment mit endlich vielen möglichen Ergebnissen $\omega \in \Omega$, wobei also die Menge Ω *(Ergebnisraum)* endlich ist, die Tatsache, daß jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ die gleiche Chance hat vorzukommen, dadurch ausdrücken, daß man für die entsprechende Wahrscheinlichkeit $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ mit $|\Omega|$ als Anzahl der Elemente von Ω (*Mächtigkeit* von Ω) angibt. Man nennt (Ω,p) mit Ω als endlicher, nicht leerer Menge und $p: \Omega \to \mathbb{R}$, $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\omega \in \Omega$, ein Laplacesches Zufallsexperiment oder kurz *Laplace-Experiment*.

Ist man in einem Laplaceschen Experiment an der Chance interessiert, daß ein bestimmtes *Ereignis* $E \subset \Omega$ auftritt, d. h. daß ein $\omega \in E$ beobachtet wird, so wird man für die entsprechende Wahrscheinlichkeit die Summe $\sum_{\omega \in E} p(\omega)$ der Einzelchancen $p(\omega)$, $\omega \in E$, angeben, also $\frac{|E|}{|\Omega|}$. Man sagt auch, die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für das Auftreten eines Ereignisses $E \subset \Omega$ in einem Laplaceschen Zufallsexperiment ist der Quotient aus Anzahl der günstigen und möglichen Fälle. Die Abbildung $P: \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ($\mathfrak{P}(\Omega)$ *Potenzmenge*, also Menge aller Teilmengen von Ω) mit $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$, $E \in \mathfrak{P}(\Omega)$, heißt diskrete Laplace-Verteilung oder kurz *Laplace-Verteilung* über Ω (manchmal auch diskrete Gleichverteilung).

Beim n-fachen unabhängigen Wurf mit einer ungefälschten Münze bzw. mit einem ungefälschten Würfel (d. h. die einzelnen Würfe sollen sich nicht gegenseitig beeinflussen), wird man für den Ergebnisraum Ω das n-fache kartesische Produkt von $\{0,1\}$ ("0" bedeutet z. B. Wappen, "1" bedeutet z. B. Zahl) wählen (in Zeichen $\Omega = \{0,1\}^n$) bzw. $\Omega = \{1,\dots,6\}^n$ zugrunde legen, so daß $p(\omega) = 1/2^n$, $\omega \in \{0,1\}^n$, bzw. $p(\omega) = \frac{1}{6^n}$, $\omega \in \{1,\dots,6\}^n$, gilt.

Interessiert man sich in einem Laplace-Experiment für die Wahrscheinlichkeit P(E), das Auftreten eines Ereignisses $E \in \mathfrak{P}(\Omega)$ betreffend, so ist die folgende einfache Rechenregel $P(E) = 1 - \frac{|E^c|}{\Omega}$ mit E^c als *Komplement* von E, die aus $|\Omega| = |E| + |E^c|$ folgt, manchmal von Nutzen. Dazu dient das folgende

Beispiel *(Paradoxon von de Méré)*
Die Wahrscheinlichkeit, beim 4fachen Wurf mit einem ungefälschten Würfel mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}518$, wenn man die obige Rechenregel berücksichtigt, während die Wahrscheinlichkeit, beim 24-fachen Wurf mit 2 ungefälschten und unterscheidbaren Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erhalten, $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}491$ beträgt. Das Ergebnis verträgt sich mit der Erfahrung des Glückspielers de Méré, der festgestellt hat, daß es sich lohnt, auf das erstgenannte Ereignis zu setzen, nicht aber auf das zweitgenannte Ereignis. Das Paradoxon von de Méré besteht darin, daß dieser wegen $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$ für beide Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit annahm. Bemerkenswert an diesem Beispiel ist ferner, daß n = 4 die kleinste natürliche Zahl ist, so daß die Wahrscheinlichkeit $1 - (\frac{5}{6})^n$ dafür, daß beim n-fachen unabhängigen Würfelwurf mit einem ungefälschten Würfel mindestens einmal eine Sechs beobachtet wird, größer als 1/2 ist. Weiterhin ist n = 24 die größte natürliche Zahl, so daß die Wahrscheinlichkeit $1 - (\frac{35}{36})^n$ dafür, daß beim n-fachen unabhängigen Wurf mit zwei unterscheidbaren Würfeln mindestens eine Doppelsechs auftritt, kleiner als 1/2 ist.

Das folgende Beispiel ist ebenfalls wegen einer irrtümlichen Überlegung bekannt geworden und für das Verständnis der Laplace-Verteilung lehrreich.

Beispiel *(Mehrfacher Würfelwurf nach Cardano und Galilei)*
Interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augensummenzahl beim 3fachen Würfeln mit einem ungefälschten Würfel, so kann man zunächst zur Übersicht alle der Größe nach geordneten Tripel notieren. Für den Fall der Augensummenzahl 11 bzw. 12 ergibt sich:

641	651
632	642
551	633
542	552
533	543
443	444

Hieraus kann man nicht, wie Cardano bzw. Galilei bereits festgestellt haben, darauf schließen, daß beide Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Vielmehr muß jede mögliche Permutation der Tripel berücksichtigt werden, was im Fall der Augensummenzahl 11 auf $3 \cdot 3! + 3 \cdot \frac{3!}{2!} = 27$ bzw. für die Augensummenzahl 12 auf $3 \cdot 3! + 2 \cdot \frac{3!}{2!} + 1 = 25$ Möglichkeiten führt. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betragen demnach $\frac{27}{216}$ bzw. $\frac{25}{216}$.

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Laplace-Experimenten müssen also endliche Mengen abgezählt werden. Systematisches Abzählen von endlichen Mengen ist Gegenstand der Kombinatorik. Bevor im nächsten Abschnitt Grundbegriffe der Kombinatorik behandelt werden, soll noch ein weiteres Beispiel für ein Laplace-Experiment behandelt werden, welches historisch mit am Anfang von sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten bzw. Simulationsverfahren stand:

Beispiel *(Buffonsches Nadelproblem)*
Auf ein Parallelensystem mit Abstand L wird zufällig eine Nadel der Länge $\ell < L$ geworfen, wobei angenommen werden soll, daß lediglich Positionen (y,η) für das obere Ende der Nadel mit $y = 0,\lambda,\ldots,m\lambda$ mit $\lambda = \frac{L}{m}$ bzw. $\eta = 0,\omega,\ldots,n\omega$, $\omega = \frac{\pi}{n}$ ($m,n \in \mathbb{N}$ fest) möglich sein sollen. Dabei bezeichnet y den Abstand des unteren Nadelendes von der nächsten oberen Parallelen bzw. η den Winkel zwischen Nadel und Abszissenachse. Unter der Annahme, daß alle $(m + 1)(n + 1)$ Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind, soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, daß die Nadel eine der Parallelen schneidet. Die entsprechende Anzahl $A_{m,n}$ der günstigen Fälle besteht aus allen Paaren $(0,j)$, $j = 0,n$, bzw. $(m, \frac{n}{2})$ (falls n gerade ist, wobei dieser Fall doppelt zu zählen ist) und allen $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $i\lambda \le \ell \sin(j\omega)$, $1 \le i \le m-1$, $0 \le j \le n$. Bei festen $j \in \{0,\ldots,n\}$ gibt es demnach $m_j = \frac{\ell}{\lambda}\sin(j\omega) + \vartheta_j^{(m,n)}$ mit $-1 < \vartheta_j^{(m,n)} \le 2$ Möglichkeiten. Also gilt
$A_{m,n} = \frac{\ell}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\sin(j\omega) + (n+1)\vartheta_{m,n}$ mit $-1 \le \vartheta_{m,n} \le 2$, so daß man wegen

$\sum_{j=1}^{n}\sin(j\omega) = \frac{\sin(\frac{n}{2}\omega)\sin(\frac{n+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ die Beziehung $A_{m,n} = \frac{\ell}{\lambda}\frac{\sin(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$

$+ (n+1)\vartheta_{m,n}$ erhält. Hieraus resultiert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{A_{m,n}}{(m+1)(n+1)} = \frac{m}{m+1}\,\frac{n}{n+1}\,\frac{2\ell}{\pi L}\,\frac{\sin(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2n})/\frac{\pi}{2n}} + \frac{\vartheta_{m,n}}{m+1} \to \frac{2\ell}{\pi L} \text{ für } m \to \infty \text{ und } n \to \infty.$$

2. Grundbegriffe der Kombinatorik

Die Tatsache, daß $|E| + |E^c| = |\Omega|$ für jede Teilmenge E einer endlichen Menge Ω zutrifft, ist bereits benutzt worden. Allgemeiner gilt die folgende *Additionsregel* $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|$ für paarweise disjunkte Teilmengen A_j einer endlichen Menge Ω, $j = 1,\ldots,k$.

Es gilt auch eine *Multiplikationsregel* für Teilmengen B_j von endlichen Mengen Ω_j, $j = 1,\ldots,m$, nämlich $|B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m| = |B_1| \cdot |B_2| \cdot \ldots \cdot |B_m|$, wobei $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$ das *kartesische Produkt* von $B_1,\ldots,B_m$ (also die Menge $\{(b_1,b_2,\ldots,b_m)$: $b_j \in B_j$, $j = 1,\ldots,m\}$) bezeichnet.

Grundbegriffe der Kombinatorik sind die Begriffe Permutation bzw. Kombination, die sich dadurch unterscheiden, daß bei der entsprechenden Auswahl der Elemente aus einer endlichen Menge die Reihenfolge berücksichtigt bzw. nicht berücksichtigt wird, so daß man sich einer Tupel- bzw. Mengenschreibweise für die insgesamt ausgewählten Elemente aus einer endlichen Menge bedienen wird. Ferner unterscheidet man bei Permutationen bzw. Kombinationen die Fälle, wo Wiederholungen von Elementen zugelassen bzw. nicht erlaubt sind:

2.1. Permutationen mit Wiederholungen

Man kann aus einer n-elementigen Menge n^m verschiedene geordnete Proben mit Wiederholungen vom Umfang m auswählen. Dabei erfolgt also die Auswahl der m Elemente durch Zurücklegen zur n-elementigen Menge.

Dies folgt sofort aus der Multiplikationsregel, wenn man beachtet, daß die entsprechende geordnete Probe vom Umfang m als ein n-Tupel dargestellt werden kann.

2.2. Permutationen ohne Wiederholungen

Man kann aus einer n-elementigen Menge $n(n - 1)\ldots(n - m + 1) = \binom{n}{m}\, m!$ verschiedene geordnete Proben ohne Wiederholungen vom Umfang $m \leq n$ auswählen. Dabei erfolgt also die Auswahl der m Elemente aus der n-elementigen Menge, indem diese nicht wieder zurückgelegt werden.

Dies folgt ebenfalls aus der Multiplikationsregel, wenn man beachtet, daß bei der ersten Auswahl n Möglichkeiten, bei der zweiten Auswahl n - 1 Möglichkeiten, und schließlich bei der m-ten Auswahl n - m + 1 Möglichkeiten bestehen. Damit für die Begründung der Anzahl $\binom{n}{m}\, m!$ der Möglichkeiten einer geordneten Probe ohne Wiederholungen von $m \leq n$ Elementen aus einer n-elementigen Menge die Multiplikationsregel angewendet werden kann, sollte mit der letzten Komponente, für die n - m + 1 Möglichkeiten zur Besetzung vorhanden sind, begonnen werden. Bekanntlich heißt $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot m}$ *Binomialkoeffizient*, der anschließend kombinatorisch interpretiert wird (als Anzahl aller m-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, also der *Kombinationen ohne Wiederholungen)* und m! ist die symbolische Schreibweise für $1\cdot\dots\cdot m$, also kombinatorisch als Anzahl aller Permutationen einer m-elementigen Menge deutbar.

Beispiel *(Doppelgeburtstag)*
Alle n^m geordneten Proben vom Umfang m mit Wiederholungen aus einer n-elementigen Menge mögen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, ausgewählt zu werden. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß eine geordnete Probe vom Umfang m aus paarweise verschiedenen Elementen besteht $\frac{m!\binom{n}{m}}{n^m}$ $(m \leq n)$. Speziell für n = 365 ist dann $1 - \frac{m!\binom{n}{m}}{n^m}$ als Wahrscheinlichkeit deutbar, daß bei m Personen mindestens ein Doppelgeburtstag vorkommt. Für m = 60 ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit 0,994 und für m = 30 ist diese Wahrscheinlichkeit bereits 0,706. Man kann ausrechnen, daß ab m = 23 die Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 ist. Dies sieht man besonders einfach ein, wenn man berücksichtigt, daß aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel $\frac{m!\binom{n}{m}}{n^m} \leq (1 - \frac{m}{2n})^{m-1}$ gilt.
Die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten ist bereits erwähnt worden:

2.3. Kombinationen ohne Wiederholungen

Man kann aus einer Menge mit n Elementen $\binom{n}{m}$ ungeordnete Proben ohne Wiederholungen vom Umfang $m \leq n$ auswählen. Dabei kann die Auswahl der m Elemente simultan bzw. nacheinander ohne Zurücklegen zur n-elementigen Menge vorgenommen werden.
Zur Begründung beachte man, daß es $\binom{n}{m}\cdot m!$ verschiedene Permutationen ohne Wiederholung gibt, wobei jede geordnete Probe von m Elementen noch m! Permutationen zuläßt, die bei einer Kombination ohne Wiederholung nicht berücksichtigt werden, so daß genau $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten für die Anzahl von Kombinationen ohne Wiederholung in Betracht kommen.

Beispiel *(Mächtigkeit der Potenzmenge einer endlichen Menge)*
Hat die endliche Menge Ω genau n Elemente, so gilt für die Mächtigkeit von $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Beziehung $|\mathfrak{P}(\Omega)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$. Man schreibt daher manchmal auch 2^Ω statt $\mathfrak{P}(\Omega)$, wobei zu beachten ist, daß der binomische Lehrsatz $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ benutzt worden ist, der kombinatorisch dadurch zu begründen ist, daß beim Ausmultiplizieren von (a + b) genau $\binom{n}{k}$ Ausdrücke der Gestalt $a^k b^{n-k}$ auftreten, wobei k zwischen 0 und n variiert.

Beispiel *(n-facher Münzwurf)*
Eine ungefälschte Münze wird n-mal unabhängig geworfen, so daß alle 2^n Konstellationen für Wappen bzw. Zahl gleichwahrscheinlich sind. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim n-fachen Münzwurf genau k-mal Wappen auftritt $\binom{n}{k}/2^n$ mit $k \in \{0,\dots,n\}$. Natürlich ist $\binom{n}{k}/2^n$ auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim n-fachen Münzwurf genau k-mal Zahl beobachtet wird.

Der in dem hier behandelten Zusammenhang schwierigste Begriff aus der Kombinatorik ist der Begriff der *Kombination mit Wiederholung*, da es sich um eine Menge von Vektoren mit jeweils gleichen Komponenten handelt, wobei die gesamte Anzahl der Komponenten eine vorgeschriebene natürliche Zahl m ist und sämtliche Komponenten Elemente einer n-elementigen Menge sind. Das Ergebnis einer m-maligen Auswahl von Elementen aus einer n-elementigen Menge, wobei die ausgewählten Elemente wieder zur Menge zurückgelegt werden ist also darstellbar durch eine Folge von m gleichen Symbolen, die durch Hinzufügen von genau n - 1 weiteren gleichen Symbolen (Trennungsstriche) voneinander getrennt sind. Die Verteilung dieser n - 1 gleichen Symbole (Trennungsstriche) auf die insgesamt n + m - 1 Symbolplätze ist mit der Anzahl der Kombinationen von m Elementen mit Wiederholung aus einer n-elementigen Menge identisch, d. h. es ist folgendes bewiesen worden:

2.4. Kombinationen mit Wiederholungen

Man kann aus einer n-elementigen Menge genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ verschiedene ungeordnete Proben von m Elementen mit Wiederholungen auswählen. Dabei werden die ausgewählten Elemente wieder zur Menge zurückgelegt. Man beachte, daß wegen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (jeder k-elementigen Menge entspricht durch Übergang zum Komplement eine (n - k)-elementige Menge), auch $\binom{n+m-1}{m}$ statt $\binom{n+m-1}{n-1}$ geschrieben werden kann. Ausdrücke dieser Gestalt sind typisch für die Anzahl von Zerlegungen natürlicher Zahlen. Dazu dient das folgende

Beispiel *(Anzahl von Zerlegungen)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ (Menge natürlicher Zahlen) eine natürliche Zahl. Dann soll $(n_1,\dots,n_k)$ mit $n = n_1 + \dots + n_k$ und $n_j \in \mathbb{N}_o := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1,\dots,k$, Zerlegung von n in k natürliche Zahlen einschließlich der Null heißen. Es gilt: $|\{(n_1,\dots,n_k): (n_1,\dots,n_k) \text{ Zerlegung von } n\}| = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Als Anwendung der Überlegungen im vorangehenden Beispiel soll noch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Abstimmung bei einem Gremium von n Mitgliedern, wo die Anzahl der Ja-Stimmen und Nein-Stimmen nicht kleiner als die der Enthaltungen ist, beantwortet werden. Es wird sich bei Zugrundelegen einer Laplace-Verteilung herausstellen, daß diese Wahrscheinlichkeit asymptotisch 3/4 beträgt.

Beispiel *(Abstimmungen mit nicht überwiegenden Enthaltungen, kollektives Modell)*
Der Ergebnisraum Ω aller Abstimmungen eines Gremiums mit n Mitgliedern kann durch $\{(i_1,i_2,i_3): i_j \in \{0,1,\dots,n\},\ j = 1,2,3,\ i_1 + i_2 + i_3 = n\}$ beschrieben werden. Das Ereignis aller Abstimmungen mit nicht überwiegenden Enthaltungen besitzt die Darstellung $\{(i_1,i_2,i_3) \in \Omega: i_1 + i_2 \geq i_3\}$. Da $i_1 + i_2 \geq i_3$ für $(i_1,i_2,i_3) \in \Omega$ mit $i_3 \leq \frac{n}{2}$ und dies wiederum mit $i_3 \leq [\frac{n}{2}]$ ($[x]$ größte ganze Zahl $\leq x$, x reelle Zahl) äquivalent ist, gilt nach dem obigen Beispiel

$$|E| = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-i+2-1}{2-1} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (n-i+1) = ([\tfrac{n}{2}]+1)(n+1) - [\tfrac{n}{2}]([\tfrac{n}{2}]+1)/2 =$$

$= ([\frac{n}{2}] + 1)(n + 1 - [\frac{n}{2}]/2)$ und $|\Omega| = \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2}$, so daß sich bei Zugrundelegen einer Laplace-Verteilung über Ω für die gesuchte Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ der Wert 3/4 ergibt.

Abschließend soll noch eine weitere wichtige Methode der Kombinatorik behandelt werden, Mächtigkeiten endlicher Mengen zu bestimmen, nämlich sogenannte Rekursionsformeln hierfür aufzustellen und diese zu lösen. Die Methode kann man sich besonders leicht an dem bereits behandelten Problem, $|\mathfrak{P}(\Omega)|$ mit $|\Omega| = n$ zu bestimmen, klarmachen: Nennt man die zu bestimmende Anzahl $|\mathfrak{P}(\Omega)|$ in Abhängigkeit von $|\Omega| = n$ kurz a_n, so gilt $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies kann man z. B. dadurch einsehen, daß man ein bestimmtes Element $\omega_o \in \Omega$ auswählt, und jede Teilmenge danach klassifiziert, ob ω_o Element ist oder kein Element ist. Die Lösung der Rekursionsformel $a_n = 2\, a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, erfolgt durch wiederholtes Einsetzen, also $a_n = 2^{n-1} a_1$ mit $a_1 = 2$.

Eine schwieriger zu lösende Rekursionsformel zur Bestimmung der Mächtigkeit einer endlichen Menge wird im folgenden Beispiel im Zusammenhang mit der Frage nach der Wahrscheinlichkeit behandelt, daß beim n-fachen unabhängigen Münzwurf einer ungefälschten Münze Wappen nicht zweimal hintereinander auftritt.

Beispiel *(Fibonacci-Zahlen)*

Es bezeichne a_n die Anzahl aller n-Tupel von $\{0,1\}^n$, so daß 1 nicht zweimal hintereinander auftritt. Dann ist a_{n-2} die Anzahl aller darunter vorhandenen n-Tupel mit letzter Komponente 1 und a_{n-1} die Anzahl aller anderen darunter vorhandenen n-Tupel, d. h. die letzte Komponente ist gleich 0. Man erhält also die Rekursionsformel $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n \geq 2$ mit $a_o := 1$ (Definition!) und $a_1 = 2$. Die a_n hängen eng mit den sogenannten Fibonacci-Zahlen f_n, die der Rekursionsformel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \geq 0$, mit $f_o = 0$, $f_1 = 1$, genügen, zusammen. Es gilt also $a_n = f_{n+2}$, $n \geq 0$, so daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{f_{n+2}}{2^n}$ beträgt. Eine besonders einfache Bestimmungsmöglichkeit für die f_n erhält man durch Heranziehen der Gleichung $x^2 = x + 1$ mit den beiden Lösungen $x_j = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $j = 1,2$. Durch vollständige Induktion kann man nämlich zeigen, daß $x^n = f_n x + f_{n-1}$ für $n \geq 1$ gilt. Für $n = 1$ ist wegen $f_o = 0$, $f_1 = 1$ nichts zu zeigen und der Induktionsschritt von n nach n + 1 folgt aus $x^{n+1} = f_n x^2 + f_{n-1}x = f_n(x + 1) + f_{n-1}x = (f_n + f_{n-1})x + f_n = f_{n+1}x + f_n$. Aus $x^n = f_n x + f_{n-1}$, $n \geq 1$, folgt $x_j^n = f_n x_j + f_{n-1}$, $j = 1,2$, $n \geq 1$, also gilt $x_1^n - x_2^n = f_n(x_1 - x_2) = \sqrt{5}\, f_n$ und damit $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $n \geq 1$.

Im Zusammenhang mit dem n-fachen Münzwurf lassen sich die Fibonacci-Zahlen in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man nach der Anzahl der Möglichkeiten dafür fragt, daß nicht k-mal hintereinander "Zahl" auftritt ($1 \leq k \leq n$). Dabei tritt für die gesuchte Anzahl a_n wieder eine Rekursionsformel auf, die vermöge *erzeugender Funktionen* gelöst wird, wobei sich im Spezialfall k = 2 für die Fibonacci-Zahlen eine andere Darstellung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten ergibt.

Beispiel *(Verallgemeinerte Fibonacci-Zahlen)*

Es bezeichne a_n die Anzahl a_n aller n-Tupel von $\{0,1\}^n$, so daß 1 nicht k-mal hintereinander auftritt ($1 \leq k \leq n$). Dann gilt für a_n aufgrund einer ähnlichen Argumentation wie im vorangehenden Beispiel die Rekursionsformel

$a_n = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{n-\lambda}$ für $n > k$. Allerdings ist diese Rekursionsformel auch für $n = k$

wegen $a_k = 2^k - 1$ und $a_\ell = 2^\ell$, $\ell = 0,\dots,k-1$ richtig. Wegen $a_n \le 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, existiert ferner die *erzeugende Funktion* $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ für $|t| < \frac{1}{2}$, die sich mit Hilfe der obigen Rekursionsformel folgendermaßen berechnen läßt:

$$f(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu t^\nu = f(t) - \frac{(2t)^k-1}{2t-1} = \sum_{n=k}^{\infty} \Big(\sum_{\lambda=1}^{k} a_{n-\lambda} t^{n-\lambda}\Big) t^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{k} t^\lambda \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-\lambda} t^{n-\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{k} t^\lambda \Big(f(t) - \sum_{\nu=0}^{k-\lambda-1} a_\nu t^\nu\Big) = f(t)\frac{t^{k+1}-t}{t-1} - \sum_{\lambda=1}^{k} t^\lambda \frac{(2t)^{k-\lambda}-1}{2t-1} =$$

$$f(t)\frac{t^{k+1}-t}{t-1} - \frac{\sum_{\lambda=1}^{k}(2^{k-\lambda}t^k - t^\lambda)}{2t-1} = f(t)\frac{t^{k+1}-t}{t-1} - \frac{t^k \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu - \sum_{\lambda=1}^{k} t^\lambda}{2t-1} =$$

$$f(t)\frac{t^{k+1}-t}{t-1} - \frac{t^k(2^k-1) - \frac{t^{k+1}-t}{t-1}}{2t-1}, \text{ woraus } f(t)\frac{t^{k+1}-2t+1}{t-1} = \frac{1-t^k}{t-1}, \text{ also}$$

$f(t) = \dfrac{1-t^k}{t^{k+1}-2t+1}$, $|t| < \frac{1}{2}$, resultiert. Für $g(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-2} t^n$ mit $a_{-1} := 1$, also $g(t) = t^2 f(t) + t$, $|t| < \frac{1}{2}$, erhält man die Vereinfachung $g(t) = \dfrac{t}{1-t-\dots-t^k}$, $|t| < 1$, wenn man $(1-t-\dots-t^k)(1-t) = t^{k+1} - 2t + 1$, $t \in \mathbb{R}$, beachtet. Dies liefert schließlich $g(t) = t \sum_{m=0}^{\infty} (t+\dots+t^k)^m = \sum_{\substack{1\ell_1+\dots+k\ell_k=n-1\\ \ell_j\in\mathbb{N}_0, j=1,\dots,k\\ \ell_1+\dots+\ell_k=m\\ m\in\mathbb{N}_0}} \dfrac{m!}{\ell_1!\cdot\ldots\cdot\ell_k!} t^n$, $|t| < \frac{1}{2}$, also

$a_n = \sum_{\substack{\ell_j\in\mathbb{N}_0, j=1,\dots,k\\ 1\ell_1+\dots+k\ell_k=n+1}} \dfrac{(\ell_1+\dots+\ell_k)!}{\ell_1!\cdot\ldots\cdot\ell_k!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Im Spezialfall $k = 2$ erhält man für die Fibonacci-Zahlen die Darstellung $f_n = \sum_{\ell_2\in\mathbb{N}_0} \binom{n-1-\ell_2}{\ell_2}$, $n \in \mathbb{N}$. Dabei kann man wegen $a_n = f_{n+2}$ für $k = 2$ nach dem vorangehenden Beispiel mit a_n als Anzahl aller Fälle beim n-fachen Münzwurf, wo nicht zweimal hintereinander Wappen vorkommt, die Beziehung $f_{n+2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+1-\nu}{\nu}$ auch kombinatorisch verstehen, da $\binom{n+1-\nu}{\nu}$ die Anzahl aller Fälle beim n-fachen Münzwurf mit genau ν-mal Wappen ist, wobei Wappen nicht zweimal hintereinander erscheint. Dies erkennt man am einfachsten daran, daß genau ν der $n-\nu+1$ Zwischenräume der $n-\nu$ Fälle, wo kein Wappen vorkommt (hierbei wird der dem ersten Nicht-Wappen vorangehende Zwischenraum bzw. der dem letzten Nicht-Wappen folgende Zwischenraum mitgezählt), zu besetzen sind. Wegen $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n = \dfrac{t}{1-t-t^2}$, $|t| < \frac{1}{2}$, und $1-t-t^2 = (1-\frac{1-\sqrt5}{2}t)(1-\frac{1+\sqrt5}{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$, erhält man ferner durch $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt5}\Big(\dfrac{1}{1-\frac{1+\sqrt5}{2}t} - \dfrac{1}{1-\frac{1-\sqrt5}{2}t}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt5}\Big(\big(\frac{1+\sqrt5}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt5}{2}\big)^n\Big) t^n$ erneut die Darstellung $f_n = \dfrac{1}{\sqrt5}\Big(\big(\frac{1+\sqrt5}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt5}{2}\big)^n\Big)$, $n \in \mathbb{N}$, aus dem vorangehenden Beispiel. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß $\sum\limits_{\substack{\ell_j \in \mathbb{N}_0, j=1,\dots,k \\ 1\ell_1+\dots+k\ell_k=n+1}} \frac{(\ell_1+\dots+\ell_k)!}{\ell_1!\cdot\dots\cdot\ell_k!}$ die Anzahl aller Zerlegungen $(\nu_1,\dots,\nu_N)$, $\nu_j \in \{1,\dots,k\}$, $j=1,\dots,N$, $N \le n+1$, von $n+1$ gemäß $n+1 = \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j$ ist.

Abschließend soll ein weiteres Beispiel behandelt werden, in der wieder eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Mächtigkeit einer endlichen Menge eine Rolle spielt.

Beispiel *(Rencontre-Problem)*
Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, daß bei zufälliger Auswahl einer Permutation der natürlichen Zahlen $1,\dots,n$, kein Element auf seinem Platz bleibt, unter der Annahme, daß über Ω als Menge aller Permutationen $\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ die Laplace-Verteilung ausgezeichnet worden ist. Es bezeichne a_n die Anzahl der günstigen Ereignisse, also $a_n = |E|$ mit $E = \{\pi \in \Omega: \pi(i) \neq i, i = 1,\dots,n\}$. Dann gilt $E = E_2 \cup \dots \cup E_n$ mit $E_k = \{\pi \in E: \pi(k) = 1\}$, $k = 2,\dots,n$. Um für a_n eine Rekursionsformel herzuleiten, wird E_2 in die folgenden beiden Teilmengen $E_{21}: = \{\pi \in E_2: \pi(1) = 2\}$ und $E_{22}: = \{\pi \in E_2: \pi(1) \neq 2\}$ zerlegt. Es gilt offenbar $|E_{21}| = a_{n-2}$ für $n > 2$. Für E_{22} soll nun $a_{n-1} = |E_{22}|$ gezeigt werden, falls $n > 1$ ist. Zu diesem Zweck sei π_o die durch $\pi_o(1) = 2$, $\pi_o(2) = 1$ und $\pi_o(i) = i$ für $i = 3,\dots,n$, definierte Permutation. Dann ist für ein $\pi \in \Omega$ die Bedingung $\pi(2) = 1$ mit $\pi_o^{-1}(\pi(2)) = 2$ und die Bedingung $\pi(1) \neq 2$ mit $\pi_o^{-1}(\pi(1)) \neq 1$ gleichwertig. Ferner ist $\pi(i) \neq i$ für $i > 2$ mit $\pi_o^{-1}(\pi(i)) \neq i$ für $i > 2$ äquivalent, so daß $|E_{22}| = |\{\pi_o^{-1} \circ \pi: \pi \in E_{22}\}| = a_{n-1}$ zutrifft. Damit gilt die Rekursionsformel $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n > 2$ mit $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, da man in den obigen Überlegungen für die Mächtigkeit von E_2 die natürliche Zahl 2 durch ein $k \in \{3,\dots,n\}$ ersetzen kann und $|E_k| = a_{n-1} + a_{n-2} = |E_2|$ erhält. Setzt man noch $a_o: = 1$, so gilt die Rekursionsformel auch noch für $n = 2$.
Für die zugehörige Wahrscheinlichkeit $p_n := \frac{a_n}{n!}$, $n \ge 0$, eine fixpunktfreie Permutation auszuwählen, gilt daher $p_n = \frac{n-1}{n} p_{n-1} + \frac{1}{n} p_{n-2}$, $n \ge 2$, also die Rekursionsformel $p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2})$, $n \ge 2$, die man sofort durch wiederholtes Einsetzen löst, nämlich $p_n - p_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}(p_{n-2} - p_{n-3}) = \dots = \frac{(-1)^{n-2}}{n!} 2(p_2 - p_1) = \frac{(-1)^{n-2}}{n!} 2 \cdot \frac{1}{2!} = \frac{(-1)^n}{n!}$, $n \ge 1$, so daß $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, $n \ge 1$, gilt. Für $n \to \infty$ erhält man aufgrund der Potenzreihendarstellung für die e-Funktion $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$, so daß die Wahrscheinlichkeit, eine Permutation auszuwählen, die mindestens ein Element festläßt, überraschend groß $1 - \frac{1}{e} = 0{,}63$ ist, wobei die Approximation von p_n durch $\frac{1}{e}$ schon für $n \ge 8$ sehr gut ist. Nach

den vorangegangenen Überlegungen ist es klar, daß p_n auch als Wahrscheinlichkeit gedeutet werden kann, eine zufällig ausgewählte Permutation von n Elementen zu raten, wobei $1 - p_n$ als Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer überraschend groß, nämlich 0,63 ist, falls $n \geq 8$ gilt. Ferner ist es jetzt nicht mehr schwer, die Wahrscheinlichkeit p(m) für m Treffer ($0 \leq m \leq n$) beim Raten einer zufällig ausgewählten Permutation zu bestimmen, wenn man beachtet, daß es sich um die Wahrscheinlichkeit handelt, eine Permutation mit genau m Fixpunkten zufällig auszuwählen. Dann gibt es zunächst $\binom{n}{m}$ mögliche Konstellationen für die Fixpunkte und für jede Konstellation a_{n-m} Möglichkeiten, so daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_n(m) = \binom{n}{m}\left(\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}\right)(n-m)!\ \frac{1}{n!} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$, $m = 0,1,\ldots,n$, beträgt. Durch Zusammenfassen von zwei aufeinanderfolgenden Termen sieht man, daß diese Wahrscheinlichkeit für m = 1 bzw. m = 0 am größten ist, falls n ungerade bzw. n gerade ist. Schließlich ist noch $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)}{k!} \cdot \frac{1}{m!} = \frac{1}{m!} e^{-1}$ für numerische Zwecke zu beachten, wobei man zeigen kann, daß für den absoluten Fehler $|p_n(m) - \frac{1}{m!} e^{-1}| \leq 4 \cdot 10^{-4}$ für alle $m \in \{0,\ldots,n\}$ gilt, falls $n \geq 8$ zutrifft.

Die vier Grundbegriffe der Kombinatorik (Permutationen und Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen) lassen sich besonders einfach mit Hilfe von Abbildungen zwischen endlichen Mengen darstellen.

Permutationen mit Wiederholungen betreffen das

Beispiel *(Mächtigkeit der Menge aller Abbildungen zwischen endlichen Mengen)*
Für $m,n \in \mathbb{N}$ gilt $|\{f : f:\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}\}| = n^m$, wenn man berücksichtigt, daß $f:\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ mit $(f(1),\ldots,f(m))$ identifiziert werden kann.

Permutationen ohne Wiederholungen lassen sich durch die Menge aller injektiven Abbildungen zwischen endlichen Mengen beschreiben.

Beispiel *(Mächtigkeit der Menge aller injektiven Abbildungen zwischen endlichen Mengen)*
Für $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt $|\{f : f:\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\} \text{ injektiv}\}| = \frac{n!}{(n-m)!}$, wenn man wieder berücksichtigt, daß $f:\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ mit $(f(1),\ldots,f(m))$ identifiziert werden kann.

Alle Kombinationen ohne Wiederholungen lassen sich durch die Menge der streng monoton wachsenden Funktionen zwischen $\{1,\ldots,m\}$ und $\{1,\ldots,n\}$ für $n \geq m$ gemäß des folgenden Beispiels darstellen.