Heinrich Dörrie

Determinanten

München und Berlin 1940
Verlag von R. Oldenbourg

Druck von R. Oldenbourg, München

Printed in Germany

Vorwort.

In allen Zeiten ist es das Bestreben der Mathematiker gewesen, zur Lösung ihrer Probleme passende Hilfsmittel zu schaffen, die ihre oft mühsame Arbeit erleichtern können.

Eins der wichtigsten und wertvollsten dieser Hilfsmittel ist die Lehre von den Determinanten.

Die Vorzüge dieses Rechenverfahrens sind in der Tat erstaunlich:

Die Leichtigkeit seiner Handhabung läßt nichts zu wünschen übrig.

Die mit ihm verbundenen Beweise sind fast ausnahmslos elementar.

Die zum Ziele führenden Wege sind im Gegensatz zu anderen zweckdienlichen Methoden angenehm und kurz, oft von faszinierender Kürze.

Trotz dieser unzweifelhaft bestehenden Vorzüge ist die Determinantenlehre immer noch weit davon entfernt, Gemeingut aller mathematisch interessierten Kreise zu sein, gilt sie sogar vielfach noch als trocken.

Dieses Vorurteil zu entkräften, ist eine der beiden Aufgaben dieses Buches; die andere besteht darin, den Studierenden der Mathematik, sowie jeden, der für die Schönheit mathematischen Denkens empfänglich ist, so bequem wie möglich mit der Wirksamkeit der Determinantenmethode vertraut zu machen und ihn zu eigener Arbeit auf diesem Felde anzuregen.

Dieses erstrebenswerte Ziel suchte der Verfasser durch Beachtung der folgenden drei Gesichtspunkte zu erreichen:

1. Die theoretischen Entwicklungen wurden, um nicht von vornherein durch zu starken Umfang abschreckend zu wirken, in mäßigen Grenzen gehalten, ohne jedoch wesentliche Dinge auszulassen.

2. Auf einfache und übersichtliche Darstellung der Beweise wurde besonderer Wert gelegt.

3. Zahlreiche Anwendungen — sie füllen mehr als die Hälfte des Buches — setzen Notwendigkeit und Nutzen des Determinantenkalküls in helles Licht.

Die Auswahl der Anwendungen erfolgte nach dem Grundsatz, ein möglichst vielseitiges und abwechslungsreiches Bild von der Kraft der Determinantenmethode zu geben.

Dem Zaudernden aber, dem Ungläubigen ist zu raten, sich durch den Vergleich mit den langatmigen anderen Methoden, wo die Wege so oft unübersichtlich, die Schwierigkeiten bisweilen unüberwindlich sind, von der Eleganz und Überlegenheit des Determinantenverfahrens zu überzeugen. Er wird zur Erkenntnis kommen, daß es trotz Euklid Königswege in der Mathematik gibt.

Den Anstoß zur Niederschrift dieses Buches verdanke ich der Tatkraft und dem hohen wissenschaftlichen Interesse meines Freundes Dr. med. et chem. Hugo Heiß. Es gereicht mir zu großer Freude, ihm auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen zu können.

Nicht minder bin ich zu Dank verpflichtet Herrn Wilhelm von Cornides, der das Erscheinen meiner Arbeit im Verlag R. Oldenbourg, München, trotz der schwierigen Zeitlage ermöglichte.

Wiesbaden, im Frühjahr 1940.

Heinrich Dörrie.

Inhaltsverzeichnis.

Theorie.

Seite

§ 1. Permutationen und Inversionen 7
§ 2. Begriff der Determinante 9
§ 3. Entwicklung nach Adjunkten 15
§ 4. Säumung 18
§ 5. Die Vertauschungssätze 21
§ 6. Der Additionssatz 24
§ 7. Der Satz von Laplace 28
§ 8. Der Multiplikationssatz 32
§ 9. Matrizen 35
§ 10. Langprodukt und Kurzprodukt 45
§ 11. Rang einer Matrix 50
§ 12. Cramers Regel 55
§ 13. Der Satz von Rouché-Capelli 57
§ 14. Homogensysteme 62
§ 15. Lösungssysteme 65
§ 16. Der Verhältnissatz 74
§ 17. Ableitung einer Determinante 77
§ 18. Die Reziproke 83
§ 19. Symmetrie 85
§ 20. Schiefe Symmetrie und Schiefe 89
§ 21. Der Satz von Hadamard 93

Anwendungen.

Arithmetische Anwendungen.

§ 22. Kubische und biquadratische Gleichungen 97
§ 23. Hermites Minimumaufgabe 100
§ 24. Rationalisator 104
§ 25. Algebraische Zahlen 107
§ 26. Newtonsummen 110
§ 27. Die Resultante 112
§ 28. Die Diskriminante 122
§ 29. Cauchys Mittelwertsatz 127
§ 30. Die Funktionaldeterminante 129
§ 31. Satz von der linearen Abhängigkeit 136
§ 32. Lineartransformationen 139
§ 33. Orthogonaltransformationen 144
§ 34. Linearformen 151
§ 35. Quadratische Formen 154
§ 36. Verwandlung quadratischer Formen in Quadratsummen 159
§ 37. Die Säkulargleichung 164

Geometrische Anwendungen.

		Seite
§ 38.	Der Dreiecksinhalt	170
§ 39.	Die Cosinusrelation	174
§ 40.	Die Vierpunktrelation	177
§ 41.	Ähnlichkeitsachsen	179
§ 42.	Der Mongekreis	181
§ 43.	Kegelschnitt als Geradenpaar	183
§ 44.	Steiners Problem	185
§ 45.	Tangentialgleichung der Kegelschnitte	188
§ 46.	Winkelbeziehungen	189
§ 47.	Abstand windschiefer Geraden	192
§ 48.	Der Eckensinus	192
§ 49.	Der Tetraederinhalt	195
§ 50.	Der Cosinussatz des Tetraeders	201
§ 51.	Fläche zweiten Grades als Ebenenpaar	202
§ 52.	Zylinder zweiten Grades	205
§ 53.	Kegel zweiten Grades	208
§ 54.	Gleichung des Ellipsoids	210
§ 55.	Die Hauptachsengleichung	211

Theorie.

§ 1. Permutationen und Inversionen.

Bekanntlich lassen sich aus den n »Elementen« 1, 2, 3, ..., n $n!$ Permutationen von der Form

$$P = e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_n$$

bilden, in der $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die vorgelegten Elemente $1, 2, 3, \ldots, n$ in irgendeiner Reihenfolge sind.

Die Permutation

$$P_0 = 1\ 2\ 3\ \ldots\ n,$$

in der jedes Element an seinem natürlichen Platze steht, heißt **Hauptpermutation**.

Befindet sich in der Permutation P das Element i (wie in P_0) an i^{ter} Stelle, so sagt man: »das Element i steht an seinem natürlichen Platze«; befindet es sich an einer anderen Stelle, so heißt das Element **verdrängt** oder **deplaciert**. In der Permutation 1 4 3 5 2 der 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 stehen die Elemente 1 und 3 an ihren natürlichen Plätzen, während 2, 4 und 5 deplaciert sind.

Vertauscht man in der Permutation P nur zwei Elemente, etwa e_r und e_s, miteinander, so sagt man: »man wendet auf P die **Transposition** $(e_r\, e_s)$ an« oder auch: »man transponiert das Element e_r an die s^{te} Stelle«.

Jede Permutation läßt sich durch eine Reihe sukzessiver Transpositionen aus P_0 gewinnen oder auch in P_0 überführen. Um z. B. die Permutation P in P_0 zu verwandeln, transponiere man in P zunächst das Element 1 an die erste Stelle, in der entstehenden Permutation das Element 2 an die zweite Stelle usw., bis man P_0 erhält.

Von zwei in der Permutation P stehenden Zahlen e_μ und e_ν sagt man: sie bilden eine **Inversion**, wenn die größere der beiden Zahlen in der Permutation der kleineren vorausgeht. Die Permutation 5 2 4 1 3 der 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 z. B. hat die 7 Inversionen 52, 54, 51, 53, 21, 41, 43.

Eine Permutation heißt **gerade** (auch **positiv**) oder **ungerade** (**negativ**), je nachdem ihre **Inversionszahl**, d. i. die Anzahl der in ihr vorhandenen Inversionen, gerade oder ungerade ist. Zwei Permutationen heißen **gleichartig**, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind; sie heißen ungleichartig, wenn eine von ihnen gerade, die andere ungerade ist.

Von Wichtigkeit ist folgender Satz.

Inversionssatz 1.

Vertauscht man zwei Elemente einer Permutation miteinander, so ändert sich die Inversionszahl um eine ungerade Zahl.

Beweis. Die beiden zu vertauschenden Elemente seien x und y, x stehe links von y. Zunächst ist klar, daß diese Vertauschung hinsichtlich der Elemente, die nicht zwischen x und y stehen, keinerlei Inversionsänderung bewirkt. Von den zwischen x und y stehenden m Elementen mögen vor der Vertauschung r Stück mit x Inversionen, die übrigen $\varrho\ (= m - r)$ Stück mit x keine Inversionen bilden, ebenso s Stück mit y Inversionen, die übrigen $\sigma\ (= m - s)$ Stück mit y keine Inversionen bilden. Nach der Vertauschung bilden die Zwischenelemente dann ϱ Inversionen mit x, σ Inversionen mit y. Hinsichtlich der Zwischenelemente hat sich also durch die Vertauschung die Inversionszahl um $(\varrho - r) + (\sigma - s)$ vergrößert. Dies ist aber eine gerade Zahl $2\,g$, da

$$(\varrho - r) + (\sigma - s) = (m - 2\,r) + (m - 2\,s) = 2\,(m - r - s) = 2\,g.$$

Eine weitere Inversionszahländerung, und zwar um 1, tritt dadurch ein, daß entweder x und y vor der Vertauschung eine Inversion, nach ihr keine Inversion bilden oder umgekehrt erst nach der Vertauschung eine Inversion, vor ihr keine bilden. Durch die Vertauschung ändert sich also die Inversionszahl um die ungerade Zahl $2\,g \mp 1$.

Aus Inversionssatz 1 folgt sofort der Permutationssatz:

Die aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, n$ gebildeten $n!$ Permutationen umfassen ebensoviel gerade wie ungerade Permutationen.

Vertauscht man nämlich in allen $n!$ Permutationen die beiden Elemente 1 und 2 miteinander, so entstehen wieder alle $n!$ Permutationen, nur in anderer Reihenfolge. Durch die Vertauschung gehen aber die geraden Permutationen in ungerade, die ungeraden in gerade über. Mithin muß die Anzahl der geraden Permutationen ebenso groß sein wie die der ungeraden.

Eine zweite wichtige Eigenschaft der Inversionszahl einer Permutation erhalten wir durch Zerlegung der Permutation in zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, von denen die erste, linke Gruppe die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_r$, die zweite, rechte Gruppe die Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_s$ umfassen möge. In der Permutation

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_r\;b_1\,b_2\,b_3\,\ldots\,b_s$$

haben wir dann dreierlei Inversionen zu beachten:

1. Inversionen der a unter sich,
2. Inversionen der b unter sich,
3. Inversionen, die die a mit den b bilden, und deren Anzahl μ sei.

Auf die Bestimmung von μ kommt es an.

Die kleinste der Zahlen a sei α_1, die zweitkleinste α_2 usw. bis α_r.

Nun bildet α_ν mit den Zahlen b $(\alpha_\nu - \nu)$ Inversionen. [In $\mathfrak{B}$ stehen nämlich alle $(\alpha_\nu - 1)$ Zahlen, die kleiner als α_ν sind, ausgenommen die $(\nu - 1)$ Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}$, die ja zu $\mathfrak{A}$ gehören. Das gibt aber $(\alpha_\nu - 1) - (\nu - 1) = (\alpha_\nu - \nu)$ Inversionen.] Folglich ist

$$\mu = \sum_\nu^{1,r} (\alpha_\nu - \nu) = \sum_\nu^{1,r} \alpha_\nu - \sum_\nu^{1,r} \nu = \sum_\nu^{1,r} a_\nu - r\,\frac{r+1}{2}.$$

Nennen wir also die Summe aller a_ν A, so erhalten wir

$$\mu = A - r\,\frac{r+1}{2}.$$

Mithin gilt

Inversionssatz 2.

Man erhält die Inversionszahl der Permutation

$$a_1\, a_2 \ldots a_r\, b_1\, b_2 \ldots b_s,$$

indem man die Summe der Inversionszahlen der Permutationen $a_1\, a_2 \ldots a_r$ und $b_1\, b_2 \ldots b_s$ um die Summe aller a_ν vermehrt und um $r\,\frac{r+1}{2}$ vermindert.

§ 2. Begriff der Determinante.

Die Entdeckung der Determinanten verdanken wir dem Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). In seinen Briefen an L'Hospital zeigte er (1693) ihr Auftreten und ihre Verwendung bei der Lösung linearer Gleichungen. Auch die Bezeichnungsweise der Elemente einer Determinante bzw. der Koeffizienten eines Systems linearer Gleichungen durch Doppelindizes stammt von ihm.

Sei

$$\begin{aligned} c_1^1\, x + c_1^2\, y + c_1^3\, z &= f_1, \\ c_2^1\, x + c_2^2\, y + c_2^3\, z &= f_2, \\ c_3^1\, x + c_3^2\, y + c_3^3\, z &= f_3 \end{aligned}$$

ein System linearer Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, z. [c_3^2 ist nicht etwa die 2. Potenz von c_3, sondern die Bezeichnung für den in der 3. Gleichung stehenden Koeffizienten der 2. Unbekannten.] Wir multiplizieren die 1., 2., 3. Gleichung bzw. mit

$$c_2^2\, c_3^3 - c_3^2\, c_2^3, \quad c_3^2\, c_1^3 - c_1^2\, c_3^3, \quad c_1^2\, c_2^3 - c_2^2\, c_1^3,$$

addieren die entstehenden drei Gleichungen und erhalten

$$D\,x = A,$$

wo D und A gewisse übereinstimmend gebaute sechsgliedrige Ausdrücke sind, von denen D nur von den neun Unbekanntenkoeffizienten c_r^s abhängt, während in A außer Unbekanntenkoeffizienten auch noch die drei Freiglieder f vorkommen. Um die Argumente, von denen die beiden Ausdrücke abhängen, mit einem Blick erfassen zu können und um die Übereinstimmung in der Bauart der Ausdrücke anzudeuten, schreibt man sie in der Form sog. dreireihiger »Determinanten«:

$$\text{den ersten} \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix}, \quad \text{den zweiten} \begin{vmatrix} f_1 & c_1^2 & c_1^3 \\ f_2 & c_2^2 & c_2^3 \\ f_3 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix}.$$

Für D findet sich z. B. der Wert

$$D = c_1^1\,c_2^2\,c_3^3 - c_1^1\,c_2^3\,c_3^2 + c_1^2\,c_2^3\,c_3^1 - c_1^2\,c_2^1\,c_3^3 + c_1^3\,c_2^1\,c_3^2 - c_1^3\,c_2^2\,c_3^1.$$

Trotz scheinbarer Kompliziertheit ist der Ausdruck D überaus einfach gebaut. Die unteren Zeiger stehen in allen sechs Gliedern in der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3. Die oberen Zeiger bilden alle möglichen Reihenfolgen, und das Vorzeichen eines Gliedes heißt + oder —, je nachdem die Reihenfolge eine gerade oder ungerade Permutation der drei Zahlen 1, 2, 3 ist.

Aber selbst wenn obere und untere Zeiger in beliebigen Reihenfolgen geschrieben werden, ändert sich die Einfachheit des Aufbaus von D nicht, wenn man nur beachtet, daß bei einem Gliede wie $c_x^u\,c_y^v\,c_z^w$ das positive oder negative Vorzeichen zu setzen ist, je nachdem die Permutationen $x\,y\,z$ und $u\,v\,w$ gleichartig oder ungleichartig sind.

Nach dieser Betrachtung der dreireihigen Determinante D wird die folgende Definition der n-reihigen Determinante nicht weiter überraschen.

Unter der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & \dots & c_2^n \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & \dots & c_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & c_n^3 & \dots & c_n^n \end{vmatrix}$$

der n^2 Größen c_1^1, c_1^2, ... bis c_n^n versteht man die Summe aller möglichen ($n!$) Glieder von der Form

$$G = \varepsilon \cdot c_{r_1}^{s_1} \cdot c_{r_2}^{s_2} \cdot \;\dots\; \cdot c_{r_n}^{s_n},$$

in der $\mathfrak{R} = r_1\,r_2 \dots r_n$ und $\mathfrak{S} = s_1\,s_2 \dots s_n$ irgend zwei Permutationen der n Zahlen 1, 2, ..., n sind und ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem diese Permutationen gleichartig oder ungleichartig sind.

Glieder, die aus einem schon hingeschriebenen Gliede G durch bloße Vertauschung von Faktoren c_r^s entstehen, sind in die Summe nicht aufzunehmen.

Daß die so definierte Einheit ε von der Reihenfolge der Faktoren c in G unabhängig ist, sieht man sofort. Vertauscht man nämlich etwa die beiden Faktoren c_x^u und c_y^v von G miteinander, so ändert sich sowohl in der Permutation der oberen wie in der der unteren Zeiger die Inversionszahl um einen ungeraden Betrag (Inversionssatz 1). Die beiden Permutationen bleiben also gleichartig (ungleichartig), wenn sie vor der Vertauschung gleichartig (ungleichartig) waren, so daß die Vertauschung auf den Wert von ε keinen Einfluß hat.

Im Interesse einer übersichtlichen Aufstellung der Glieder G wird man ihre Faktoren c für gewöhnlich so anordnen, daß etwa die unteren Zeiger in der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3, ..., n stehen. Wir haben dann

$$\varDelta = \Sigma\, \varepsilon\, c_1^{s_1} c_2^{s_2} \dots c_n^{s_n},$$

wo nun ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Permutation $s_1 s_2 \dots s_n$ der oberen Zeiger gerade oder ungerade ist. Aus dieser Schreibweise der Determinante erkennen wir am leichtesten, daß sie $n!$ Glieder umfaßt, insofern nämlich die oberen Zeiger $n!$ Permutationen zulassen. Und da es ebensoviel gerade wie ungerade Permutationen der n Elemente 1, 2, 3, ..., n gibt, so enthält die Determinante $\varDelta$ ebensoviel Glieder mit positivem wie mit negativem ε.

Natürlich kann man statt der unteren auch die oberen Zeiger in der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3, ..., n stehen lassen und der Vorschrift

$$\varDelta = \Sigma\, \varepsilon\, c_{r_1}^1 c_{r_2}^2 \dots c_{r_n}^n$$

gemäß nur die unteren Zeiger permutieren, wobei wieder ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Permutation $r_1 r_2 \dots r_n$ gerade oder ungerade ist.

Hieraus ergibt sich leicht der Satz:

Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man die Spalten zu Zeilen macht (oder wenn man die Zeilen zu Spalten macht). In Zeichen:

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{vmatrix}.$$

Die hier rechts stehende Determinante heißt die Transponierte von $\varDelta$, und man sagt, sie geht aus der Ausgangsdeterminante durch »Stürzen« hervor.

Der Name »Determinante« stammt von Gauß, wurde von ihm aber nur bei zweireihigen Determinanten benutzt; auf mehrreihige Determinanten wurde er von Cauchy übertragen. Die Zahl n heißt Grad oder Ordnung der Determinante, die in dem obigen quadratischen Schema stehenden n^2 Größen c_r^s nennt man die Elemente der Determinante. Eine waagrechte Reihe wie $c_r^1, c_r^2, c_r^3, \ldots, c_r^n$ heißt Zeile (r^{te} Zeile), eine senkrechte Reihe Spalte, so ist z. B. $c_1^s, c_2^s, c_3^s \ldots, c_n^s$ die s^{te} Spalte. Bei diesen Bezeichnungen bedeutet also c_r^s das s^{te} Element der r^{ten} Zeile, zugleich das r^{te} Element der s^{ten} Spalte. Demgemäß heißen die unteren Zeiger Zeilenzeiger, die oberen Spaltenzeiger.

Bisweilen hat man auch auf die Diagonalen der Determinante zu achten: die von links oben nach rechts unten laufende Hauptdiagonale, die aus den Elementen $c_1^1, c_2^2, c_3^3, \ldots, c_n^n$ besteht und die von links unten nach rechts oben laufende aus den Elementen $c_n^1, c_{n-1}^2, \ldots, c_1^n$ bestehende Nebendiagonale.

Da die Zeilenzeiger in G untereinander verschieden sind, ebenso auch die Spaltenzeiger, so enthält jedes Glied der Determinante ein einziges Element aus jeder Zeile, sowie ein einziges Element aus jeder Spalte.

Führen wir die angegebene Entwicklung für die einfachsten Fälle $n = 2$ und $n = 3$ durch, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{vmatrix} = c_1^1\, c_2^2 - c_2^1\, c_1^2$$

und

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{cases} + c_1^1\, c_2^2\, c_3^3 + c_1^2\, c_2^3\, c_3^1 + c_1^3\, c_2^1\, c_3^2 \\ - c_1^1\, c_2^3\, c_3^2 - c_1^2\, c_2^1\, c_3^3 - c_1^3\, c_2^2\, c_3^1 \end{cases}$$

oder, indem wir in diesen oft vorkommenden Fällen bequemere Bezeichnungen verwenden,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a b' - b a'$$

und

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\,(b' c'' - c' b'') + b\,(c' a'' - a' c'') + c\,(a' b'' - b' a''),$$

zwei wichtige Formeln, die vielfache Verwendung finden und deshalb zu merken sind.

Wir haben oben jedes Element der Determinante $\varDelta$ mit einem unteren und einem oberen Index versehen. Man kann statt dessen auch einen linken (vorderen) und einen rechten (hinteren) Index anwenden und schreibt demgemäß c_{rs} statt c_r^s. Der linke Index gibt dann (gewöhnlich) die Zeile, der rechte die Spalte an, so daß c_{rs} das s^{te} Element der r^{ten} Zeile bedeutet. Die Determinante $\varDelta$ sieht dann so aus:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Schreibweise mit nebeneinander stehenden Zeigern hat gegenüber der obigen Schreibung die stärkere Verbreitung gefunden.

Der Erste, der die Determinantenelemente rechteckig anordnete, war Cauchy. Außer dieser ausführlichen Schreibweise einer Determinante sind auch noch die abgekürzten Schreibweisen von

Jacobi: $\varDelta = \Sigma \pm c_1^1 c_2^2 \dots c_n^n$ bzw. $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn}$,
Kronecker: $\varDelta = |c_r^s|$ bzw. $|c_{rs}|$ und
Salmon: $\varDelta = |c_1^1 c_2^2 \dots c_n^n|$ bzw. $|c_{11} c_{22} \dots c_{nn}|$

im Gebrauch. Letzterer bezeichnet übrigens mit Vorliebe das s^{te} Element der r^{ten} Zeile durch den s^{ten} Buchstaben des Alphabets mit dem angehängten Zeiger r, so daß er z. B. unter $|a_1 b_2 c_3|$ die dreireihige Determinante

$$|a_1 \; b_2 \; c_3| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

versteht. Auch diese Schreibweise hat ihre Vorzüge.

Von großer Bedeutung für den Aufbau der Determinante sind die in ihren Gliedern G auftretenden Einheiten ε. Wir stellen einige wichtige Eigenschaften dieser Einheiten zusammen.

Um die Abhängigkeit der Einheit ε in G von den Permutationen $\mathfrak{R} = r_1 r_2 \dots r_n$ und $\mathfrak{S} = s_1 s_2 \dots s_n$ anzudeuten, schreiben wir

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}} = \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{s_1 s_2 \dots s_n}$$

und nennen ε die durch die Permutationen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bestimmte Einheit oder kurz die Einheit der Permutationen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$.

I. Zunächst ist klar, daß man Zähler und Nenner dieses »Permutationsbruches« vertauschen kann, ohne den Wert von ε zu ändern:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}.$$

II. Bedeutet $\mathfrak{r}$ die Inversionszahl von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{s}$ die von $\mathfrak{S}$, so ist

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}} = \iota^{\mathfrak{r}+\mathfrak{s}} \; *).$$

*) Das Zeichen ι bedeutet die negative Einheit.

III. Ist eine der beiden Permutationen die Hauptpermutation $1\ 2\ 3\ 4 \ldots n$, so ist $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{s}$ gleich Null und

$$\varepsilon = \iota^{\mathfrak{s}} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \iota^{\mathfrak{r}}.$$

Auch schreiben wir in diesem Falle kürzer

$$\varepsilon = \overline{s_1 s_2 \ldots s_n} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \overline{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

IV. $P = a\,b\,c\,d\,e \ldots$ und $\Pi = \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \ldots$ seien zwei Permutationen der n-Zahlen $1, 2, \ldots, n$, p und π ihre Inversionszahlen. Vertauschen wir in ihnen zwei an gleicher Stelle stehende Elemente, etwa d und δ, mit ihren linken Nachbarn, so bestimmen die neuen Permutationen dieselbe Einheit $P:\Pi$. Auch in den neuen Permutationen können wir wieder d und δ mit ihren linken Nachbarn vertauschen, ohne die Einheit der Permutationen zu ändern. So können wir sukzessive d und δ an den Anfang schieben und erhalten

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{a\,b\,c\,d\,e \ldots}{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \ldots} = \frac{d\,a\,b\,c\,e \ldots}{\delta\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon \ldots}.$$

Wir nennen die Permutationen $a\,b\,c\,e \ldots$ und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon \ldots$ P' und Π', ihre Inversionszahlen p' und π'.

In der Permutation $d\,a\,b\,c\,e \ldots$ bzw. $\delta\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon \ldots$ bildet d bzw. δ mit den folgenden Elementen $(d-1)$ bzw. $(\delta-1)$ Inversionen. Folglich ist

$$p = (d-1) + p' \quad \text{und} \quad \pi = (\delta - 1) + \pi'$$

und damit

$$\frac{P}{\Pi} = \iota^{d+\delta} \cdot \frac{P'}{\Pi'}.$$

Diese Formel enthält folgende Regel:

Die Einheit zweier Permutationen der n-Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist das ι^{r+s}fache der Einheit der beiden Permutationen, die man erhält, wenn man aus den zwei gegebenen Permutationen die beiden an gleicher Stelle stehenden Elemente r und s entfernt.

Zum Schluß dieses Paragraphen möge noch erwähnt werden, daß die Zeiger der 1., 2., 3., ... Zeile (Spalte) einer Determinante nicht notwendig die aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... sein müssen. An der obigen Definition der Determinante ändert sich nichts, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} E_a^\alpha & E_a^\beta & E_a^\gamma & \ldots \\ E_b^\alpha & E_b^\beta & E_b^\gamma & \ldots \\ E_c^\alpha & E_c^\beta & E_c^\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

heißt, wo die n Zeilenzeiger $a, b, c, \ldots$ beliebige wachsende Zahlen, ebenso die n Spaltenzeiger $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige wachsende Zahlen sind, welche letzteren übrigens mit den a, b, c, ... durchaus nicht übereinzustimmen brauchen: die Determinante D ist ebenfalls die Summe aller $n!$ möglichen Glieder von der Form

$$\varepsilon \cdot E_x^\xi \cdot E_y^\eta \cdot E_z^\zeta \ldots,$$

in der $P = x\,y\,z \ldots$ irgendeine Permutation der Zeilenzeiger, $\Pi = \xi\,\eta\,\zeta \ldots$ irgendeine Permutation der Spaltenzeiger ist und

$$\varepsilon = \frac{P}{\Pi} = \frac{x\,y\,z \ldots}{\xi\,\eta\,\zeta \ldots}$$

die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die beiden Permutationen P und Π gleichartig oder ungleichartig sind.

Man sieht das sofort ein, wenn man

$$E_a^\alpha = c_1^1, \quad E_a^\beta = c_1^2, \quad \ldots; \quad E_b^\alpha = c_2^1, \quad E_b^\beta = c_2^2, \quad \ldots$$

setzt und bedenkt, daß die unteren Zeiger (wie auch die oberen Zeiger) in einem beliebigen Gliede von D und in dem entsprechenden Gliede von

$$\varDelta = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \ldots & c_n^n \end{vmatrix}$$

gleichartige Permutationen bilden.

§ 3. Entwicklung nach Adjunkten.

Die in § 2 unter IV gegebene Regel für die ε erlaubt uns, die Berechnung einer Determinante n^{ten} Grades auf die Berechnung von n Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückzuführen.

Wir denken uns alle $n!$ Glieder der n-reihigen Determinante $\varDelta = |c_1^1\, c_2^2 \ldots c_n^n|$ hingeschrieben und stellen uns die Aufgabe, in der entstandenen algebraischen Summe den Faktor C_r^s von c_r^s zu ermitteln.

Eins der (vielen) Glieder, die den Faktor c_r^s enthalten, sei

$$G = \varepsilon\, c_r^s\, c_{r_1}^{s_1}\, c_{r_2}^{s_2} \ldots.$$

Dabei ist

$$\varepsilon = \frac{r\,r_1\,r_2 \ldots}{s\,s_1\,s_2 \ldots},$$

mithin nach obiger Regel (IV in § 2)

$$\varepsilon = \iota^{r+s} \cdot \frac{r_1\,r_2\,r_3 \ldots}{s_1\,s_2\,s_3 \ldots},$$

so daß

$$G = c_r^s \cdot \iota^{r+s} \cdot g \qquad \text{mit } g = \frac{r_1\,r_2 \ldots}{s_1\,s_2 \ldots}\, c_{r_1}^{s_1}\, c_{r_2}^{s_2} \ldots.$$

Der gesuchte Faktor C_r^s von c_r^s ist daher — von dem zusätzlichen Multiplikator ι^{r+s} abgesehen — die Summe aller möglichen Glieder von der Form

$$g = \frac{s_1 \, s_2 \ldots}{r_1 \, r_2 \ldots} \cdot c_{r_1}^{s_1} \cdot c_{r_2}^{s_2} \ldots,$$

wo aber unter den unteren Zeigern die Zahl r, unter den oberen die Zahl s nicht auftritt. Diese Summe ist aber nichts anderes als die $(n-1)$-reihige Determinante δ, die aus Δ entsteht, wenn man die r^{te} Zeile und die s^{te} Spalte herausnimmt. Daher ist

$$C_r^s = \iota^{r+s} \cdot \delta.$$

Die Determinante δ heißt eine (zum Element c_r^s gehörige) Subdeterminante oder ein Minor von Δ, die Größe C_r^s wird die Adjunkte oder der Cofaktor von c_r^s in der Determinante Δ genannt.

Unser Ergebnis lautet:

Die Adjunkte des Elements c_r^s der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \ldots & c_n^n \end{vmatrix}$$

ist das ι^{r+s} fache des Minors, den man durch Streichung der r^{ten} Zeile und s^{ten} Spalte aus Δ erhält.

Dieser Satz führt uns sofort zu folgender

Vorschrift für die Berechnung einer Determinante:

Man wähle eine Reihe beliebig aus und multipliziere jedes Element derselben mit seiner Adjunkte; die Summe der entstehenden Produkte ist die Determinante.

Es gilt demnach folgende

Grundformel:

$$\boxed{\Delta = c_r^1 \, C_r^1 + c_r^2 \, C_r^2 + \ldots + c_r^n \, C_r^n},$$

ebenso

$$\boxed{\Delta = c_1^s \, C_1^s + c_2^s \, C_2^s + \ldots + c_n^s \, C_n^s},$$

wobei der Zeilenzeiger r wie auch der Spaltenzeiger s beliebig ausgewählt werden darf.

Diese Formel enthält die Entwicklung einer Determinante nach Adjunkten oder, wie man auch sagt, nach den Elementen einer Zeile bzw. Spalte oder endlich kürzer die Entwicklung nach einer Zeile (Spalte) und wird deshalb Entwicklungssatz genannt.

Es kommt oft vor, daß man aus den beiden Reihen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ den Ausdruck $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ bildet. Man sagt dann »man multipliziert die beiden Reihen (skalar) miteinander« und nennt den Ausdruck das (skalare) »Produkt der beiden Reihen«. Bedient man sich dieser Redeweise, so entsteht folgende bequeme Fassung für den

Entwicklungssatz:

Der Wert einer Determinante wird gefunden, indem man irgendeine ihrer Reihen mit der Reihe der zugehörigen Adjunkten multipliziert.

Wenden wir den Entwicklungssatz auf die vierreihige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

an, so erhalten wir z. B. bei Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1$$

mit

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Die Adjunkten A_1, B_1, C_1, D_1 lassen sich nach der oben angegebenen Berechnungsvorschrift für dreireihige Determinanten bestimmen, womit dann die Berechnung von Δ vollzogen ist.

Der Entwicklungssatz führt uns sofort zur Regel über die

Multiplikation einer Determinante mit einer Zahl:

Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert, indem man eine beliebige Reihe mit der Zahl multipliziert und die andern Reihen beibehält.

Bemerkung. Eine Reihe mit einer Zahl multiplizieren heißt jedes Glied der Reihe mit der Zahl multiplizieren. Das $m$fache der Reihe a, b, c ist z. B. die Reihe ma, mb, mc.

Die Gültigkeit der Regel kann man sich an der dreireihigen Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

klarmachen. Sind A, B, C die Cofaktoren von a, b, c, so ist

$$\Delta = aA + bB + cC, \quad \text{mithin} \quad m\Delta = ma \cdot A + mb \cdot B + mc \cdot C.$$

Diesen selben Wert erhält man aber auch, wenn man die Determinante

$$\begin{vmatrix} ma & mb & mc \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

nach den Elementen ihrer ersten Zeile entwickelt.

Eine bemerkenswerte Anwendung dieser Multiplikationsregel bildet der folgende

Vorzeichensatz:

Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man jedes an ungerader Stelle stehende Element mit umgekehrtem Vorzeichen versieht.

Dabei heißt die Stelle, an der im Schema der Determinante $\Delta = |c_1^1 \, c_2^2 \, \ldots \, c_n^n|$ das Element c_r^s steht, ungerade (gerade), wenn die Summe $r + s$ aus Zeilenzeiger und Spaltenzeiger ungerade (gerade) ist.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & -c_1^2 & c_1^3 \\ -c_2^1 & c_2^2 & -c_2^3 \\ c_3^1 & -c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Multipliziert man die erste, zweite, dritte, ... Zeile und gleichzeitig die erste, zweite, dritte, ... Spalte von Δ mit bzw. ι^1, ι^2, ι^3, ..., so ändert sich der Wert von Δ nicht. Anderseits wird dabei das Element c_r^s mit ι^{r+s} multipliziert, d. h. mit $+1$ oder -1, je nachdem das Element an gerader oder ungerader Stelle steht.

§ 4. Säumung.

Bisweilen ist es nützlich, eine Determinante durch Ansetzen von Zeilen und Spalten in eine Determinante höheren Grades zu verwandeln. Das Verfahren ist überaus einfach. Beispielsweise stellt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

die Verwandlung einer dreireihigen Determinante in eine vierreihige dar, wobei die x_ν ganz beliebige Größen sein dürfen. (Von der Richtigkeit der Gleichung überzeugt man sich, indem man die rechts stehende Determinante nach den Elementen der vierten Zeile entwickelt.) Diese Verwandlung heißt Säumung oder Ränderung der Ausgangsdeterminante, und man sagt: die vorgelegte Determinante ist rechts und unten gesäumt.

Natürlich kann die Säumung auch links und oben vollzogen werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder auch rechts und oben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$$

usw.

Statt einfach kann man auch zweifach, dreifach, ... säumen. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 \\ u_1 & v_1 & w_1 & t_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung einzusehen, entwickelt man die rechte Determinante nach den Elementen der 5. Spalte, darauf die entstehende vierreihige Determinante nach den Elementen der 4. Spalte.

Allgemein gilt der Satz:

Jede Determinante kann in eine andere beliebig höheren Grades verwandelt werden.

Eine besonders wichtige Säumung stellt die folgende dar:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n & x_1 \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n & x_n \\ x^1 & x^2 & \dots & x^n & z \end{vmatrix},$$

wobei die n-reihige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{vmatrix}$$

rechts mit der neuen Spalte $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, unten mit der neuen Zeile $x^1, x^2, \dots, x^n, z$ gesäumt wurde, und wo die x_r und x^s sowie z $(2n+1)$ beliebige Veränderliche sind.

Es ist von Wichtigkeit, die Entwicklung der Determinante $\mathfrak{D}$ nach den genannten Veränderlichen zu kennen.

Wir entwickeln $\mathfrak{D}$ zunächst nach den Elementen der letzten Zeile und erhalten

$$\mathfrak{D} = \varDelta z + \sum_{s}^{1,n} x^s \cdot \iota^{s+n+1} X^s,$$

wobei X^s die n-reihige Determinante

$$X^s = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^{s-1} & c_1^{s+1} & \dots & c_1^n & x_1 \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^{s-1} & c_2^{s+1} & \dots & c_2^n & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^{s-1} & c_n^{s+1} & \dots & c_n^n & x_n \end{vmatrix}$$

bedeutet. Die Determinante X^s entwickeln wir nun nach den Elementen der letzten Spalte und bekommen

$$X^s = \sum_{r}^{1,n} x_r \cdot \iota^{r+n} \mathfrak{x}_r,$$

wobei $\mathfrak{x}_r$ die Determinante

$$\mathfrak{x}_r = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^{s-1} & c_1^{s+1} & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^{s-1} & c_2^{s+1} & \dots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r-1}^1 & c_{r-1}^2 & \dots & c_{r-1}^{s-1} & c_{r-1}^{s+1} & \dots & c_{r-1}^n \\ c_{r+1}^1 & c_{r+1}^2 & \dots & c_{r+1}^{s-1} & c_{r+1}^{s+1} & \dots & c_{r+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^{s-1} & c_n^{s+1} & \dots & c_n^n \end{vmatrix}$$

bedeutet, die aus X^s hervorgeht, wenn man in dieser Determinante die letzte Spalte und die r^{te} Zeile streicht. Aus dem Anblick der Determinante $\mathfrak{x}_r$ geht aber hervor, daß sie nichts anderes ist, als der Minor von $\varDelta$, den man erhält, wenn man in $\varDelta$ die r^{te} Zeile und die s^{te} Spalte streicht. Da dieser Minor das ι^{r+s}fache der Adjunkte C_r^s von c_r^s in der Determinante $\varDelta$ ist, so haben wir

$$\mathfrak{x}_r = \iota^{r+s} C_r^s.$$

Hieraus folgt

$$X^s = \sum_{r}^{1,n} x_r \, \iota^{n+s} C_r^s$$

und weiter

$$\mathfrak{D} = \varDelta z + \sum_{s}^{1,n} \sum_{r}^{1,n} \iota \, x_r \, x^s \, C_r^s.$$

Unser Ergebnis lautet:

Säumungssatz:

Die mit $x_1, x_2, \dots, x_n$; $x^1, x^2, \dots, x^n$ und z gesäumte Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} c_1^1 & \dots & c_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & \dots & c_n^n \end{vmatrix}$$

gestattet die Entwicklung

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n & x_1 \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n & x_n \\ x^1 & x^2 & \dots & x^n & z \end{vmatrix} = \Delta z - \sum_{r,s}^{1,n} C_r^s\, x_r\, x^s.$$

Dabei durchlaufen r und s unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen von 1 bis n, und C_r^s bedeutet die Adjunkte von c_r^s in der Determinante Δ.

§ 5. Die Vertauschungssätze.

I. Der Transpositionssatz.

Vertauscht man in einer Determinante zwei Parallelreihen miteinander, so geht die Determinante in den entgegengesetzten Wert über.

Wir führen den Beweis für Spaltenvertauschung (die Zeilenvertauschung läßt sich genau so erledigen).

Um bequemes Schreiben und gute Übersicht zu haben, bezeichnen wir die sukzessiven Spalten bzw. Zeilen der vorgelegten Determinante $\mathfrak{d}$ durch die sukzessiven Buchstaben des lateinischen Alphabets bzw. Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, so daß

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 & \dots \\ \dots & & & & & & \end{vmatrix}.$$

Die Aufstellung der Glieder von $\mathfrak{d}$ nehmen wir so vor, daß wir die Buchstaben in ihrer natürlichen Reihenfolge schreiben und nur ihre Zeiger permutieren. Ein beliebiges Glied g von $\mathfrak{d}$ sieht dann so aus:

$$g = \mathfrak{z}\, a_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma\, d_\delta\, e_\varepsilon \dots,$$

wobei das Zeichen $\mathfrak{z}$ + oder — ist, je nachdem die Permutation $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \dots$ gerade oder ungerade ist.

Wir vertauschen jetzt etwa die Spalten c und e in $\mathfrak{d}$ und erhalten die neue Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 & d_1 & c_1 & f_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & e_2 & d_2 & c_2 & f_2 & \dots \\ \dots & & & & & & \end{vmatrix}.$$

Um aber im Einklang mit der obigen Verabredung zu bleiben, ersetzen wir e durch C, c durch E und jeden andern kleinen lateinischen Buchstaben durch den gleichnamigen großen, so daß

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & \dots \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & \dots \\ \dots & & & & & & \end{vmatrix}.$$

Wir behaupten: jedes Glied von $\mathfrak{D}$ findet sich in $\mathfrak{d}$, jedes Glied von $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{D}$, nur jedesmal mit umgekehrtem Vorzeichen.

In der Tat, sei

$$G = \mathfrak{Z}\, A_\alpha\, B_\beta\, C_\gamma\, D_\delta\, E_\varepsilon \ldots$$

irgendein Glied von $\mathfrak{D}$. Da

$$A_\alpha\, B_\beta\, C_\gamma\, D_\delta\, E_\varepsilon \ldots = a_\alpha\, b_\beta\, e_\gamma\, d_\delta\, c_\varepsilon \ldots = a_\alpha\, b_\beta\, c_\varepsilon\, d_\delta\, e_\gamma \ldots$$

ist, finden wir es — vom Vorzeichen abgesehen — in $\mathfrak{d}$ unter der Form

$$\mathfrak{z}'\, a_\alpha\, b_\beta\, c_\varepsilon\, d_\delta\, e_\gamma \ldots .$$

Da aber die Permutationen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \ldots$ und $\alpha\,\beta\,\varepsilon\,\delta\,\gamma \ldots$ ungleichartig sind [die zweite entsteht durch die Transposition $(\gamma\,\varepsilon)$ aus der ersten], so sind die Vorzeichen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{z}'$ entgegengesetzt. Ähnlich zeigt man, daß das Glied g von $\mathfrak{d}$ mit umgekehrtem Vorzeichen in $\mathfrak{D}$ vorkommt.

Aus der bewiesenen Behauptung ergibt sich die Richtigkeit des Transpositionssatzes unmittelbar.

Der Transpositionssatz führt sofort auf den folgenden

Nullsatz:

Eine Determinante, in der zwei Parallelreihen übereinstimmen, ist Null. Z. B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nach dem Transpositionssatze wird nämlich durch Vertauschung der übereinstimmenden Reihen

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix} = -\Delta,$$

folglich

$$\Delta = -\Delta$$

und somit

$$\Delta = 0.$$

Der Transpositionssatz liefert noch einen zweiten

Nullsatz:

Das Produkt einer beliebigen Reihe einer Determinante mit der zu einer andern parallelen Reihe gehörigen Adjunktenreihe ist Null.

In der Determinante $|c_1^1\, c_2^2 \ldots c_n^n$ ist z. B.

$$\underline{c_r^1\, C_\varrho^1 + c_r^2\, C_\varrho^2 + \ldots + c_r^n\, C_\varrho^n = 0,} \qquad r \neq \varrho,$$