Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik

Für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. Hans Lorenz

Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule zu Danzig

Mit 126 in den Text gedruckten Abbildungen

Berlin und München

Druck und Verlag von R. Oldenbourg

1910

Vorwort.

Zur Abfassung des vorliegenden Leitfadens wurde ich durch die Mitwirkung an einem Ferienkurs für Oberlehrer und einen mehrjährigen Verkehr mit solchen im Anschluß an das physikalische Kolloquium der Danziger Technischen Hochschule angeregt. Das kleine Buch enthält in durchaus elementarer, dem Verständnis des Primaners angepaßter Behandlung zunächst diejenigen Hauptlehren der analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung, welche nach meiner Erfahrung für den Beginn naturwissenschaftlicher sowie technischer Studien unentbehrlich sind und in den Lehrplan wenigstens der höheren Realanstalten Deutschlands (Realgymnasien, Oberrealschulen und technische Mittelschulen) Aufnahme finden sollten. Dieses Ziel bedingte eine scharfe Beschränkung und Konzentration des Stoffes; so wurde nicht nur die fast lediglich vom mathematischen Gesichtspunkte interessante Polarentheorie der Kegelschnitte weggelassen, sondern auch auf Konvergenz- und Restgliedbetrachtungen verzichtet. Derartige Gegenstände müssen ebenso wie das infinitesimale Verhalten von Funktionen mehrerer Veränderlichen mit der Differentialgeometrie von Flächen und Raumkurven und der Lehre von den Differentialgleichungen dem Hochschulunterrichte überlassen bleiben, dem unser Schriftchen nicht vorgreifen will.

Demgegenüber wurden an verschiedenen Stellen leicht verwendbare Näherungsverfahren abgeleitet und zahlreiche Übungsbeispiele auch geometrischer Natur eingeschaltet, während die Anwendungen auf die Mechanik mit Rücksicht auf die Vorbildung der Leser in einem besonderen Kapitel zusammengefaßt wurden. Dessen Studium dürfte im Anschluß an den Schulunterricht zweckmäßig mit dem der Differential- und Integralrechnung parallel laufen. Daß ich mich hierbei in der Hauptsache auf ebene Bewegungsvorgänge beschränkt und einige für die Allgemeinbildung wichtige astronomische Probleme aufgenommen habe, dürfte wohl kaum Bedenken unterliegen.

Das Büchlein kann natürlich nirgends den Anspruch erheben, Neues zu bringen. Gewisse Abweichungen von der üblichen Darstellungsweise, die der Kenner leicht bemerkt, sind in der Unterrichtserfahrung des Verfassers begründet und tragen hoffentlich zur Erleichterung bei. Für eingehendere Studien, insbesondere eine strengere Begründung der vorgetragenen Lehren sei auf den bewährten Leitfaden von R. Fricke »Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung« (4. Aufl. 1905), zur weiteren Übung auf die bekannten Aufgabensammlungen von Dölp, Schlömilch u. a. verwiesen; zukünftige Ingenieure werden nach der Durcharbeitung unseres Buches Perrys »Höhere Analysis für Ingenieure«, deutsch von Süchting (2. Aufl. 1910), mit Nutzen zur Hand nehmen. Außerdem sei noch bemerkt, daß die im vorliegenden Leitfaden gebotene mathematische Grundlage zum Eindringen in des Verfassers mehrbändiges »Lehrbuch der technischen Physik«[1]) größtenteils ausreicht, da in diesem fast alle weitergehenden Sätze im Zusammenhang mit konkreten Problemen abgeleitet werden.

Zum Schlusse danke ich noch meinen Herren Assistenten, Privatdozent Dr.-Ing. A. Pröll und Dr.-Ing. R. Plank für ihre Hilfe beim Lesen der Korrektur sowie für die Anfertigung der Figuren. Ich würde mich freuen, wenn das Buch in Oberlehrerkreisen, welche mit mir die Aufnahme der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen zur Vertiefung der Naturerkenntnis für notwendig erachten, Anklang finden sollte. Verbesserungsvorschläge von dieser Seite würde ich mit Dank entgegennehmen.

Danzig-Langfuhr, im September 1910.

H. Lorenz.

---

[1]) Bd. I, Techn. Mechanik starrer Systeme, 1902; Bd. II, Techn. Wärmelehre, 1904; Bd. III, Techn. Hydromechanik, 1910; Bd. IV, Techn. Mechanik elastisch-fester Körper in Vorbereitung.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.
Analytische Geometrie.

§ 1. Zusammenhang zwischen Gleichungen und Kurven.

Die Algebra lehrt, daß zur Bestimmung zweier Unbekannten x und y stets zwei Gleichungen nötig sind. Liegt nur eine solche Gleichung zwischen x und y vor, so kann man über eine der beiden Unbekannten, z. B. x frei verfügen, d. h. ihr eine Folge beliebiger Werte erteilen, der dann nach Einsetzen in die vorgelegte Gleichung eine Reihe von Werten der anderen Unbekannten y entspricht. Die durch diese Gleichung verknüpften Unbekannten stellen demnach miteinander **veränderliche Größen** dar, von denen wir die eine, deren Wertfolge willkürlich angenommen wurde, als **unabhängige**, die andere hierdurch bestimmte dagegen als **abhängige Veränderliche** bezeichnen wollen. Die Abhängigkeit der Veränderlichen y von x selbst drücken wir dagegen durch den Begriff der **Funktion** von x aus und schreiben die nach y aufgelöste Gleichung allgemein in der Form

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(gesprochen y gleich f von x), worin $f(x)$ irgend einen Ausdruck, in dem außer Konstanten nur die Veränderliche x vorkommt, bedeuten kann.

Zur geometrischen Veranschaulichung der Beziehung zwischen den beiden Veränderlichen tragen wir nunmehr in Fig. 1 eine Anzahl reeller Werte von x in irgendeinem Maßstabe auf einer

Geraden, der sog. **Abszissenachse** OX, von einem festen **Anfangspunkte** O aus derart ab, daß

$$OA_1 = x_1,\ OA_2 = x_2,\ OA_3 = x_3 \text{ usw.}$$

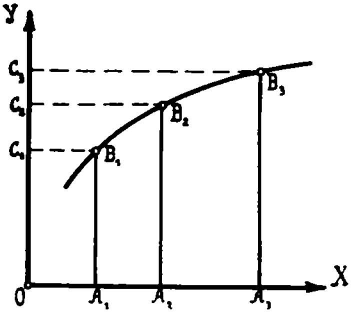

Fig. 1.

Errichten wir dann in den Enden dieser Strecken Lote, deren Länge durch die zugehörigen Werte von y gegeben ist, also

$$A_1B_1 = y_1 = f(x_1),$$
$$A_2B_2 = y_2 = f(x_2) \text{ usw.},$$

so werden die Punkte B einander um so näher liegen, je geringer die Unterschiede der aufeinander folgenden Werte der x ausfallen. Bei unmerklich werdenden Unterschieden der x werden schließlich die Punkte B eine stetige **Kurve** bilden, welche wir als eine **geometrische Darstellung der Gleichung** (1) bzw. der Funktion $f(x)$ ansprechen dürfen, während die Formel (1) als die **Gleichung der Kurve** Fig. 1 bezeichnet wird.

Es steht natürlich gar nichts im Wege, die vorgelegte Gleichung zwischen x und y nach der anderen Veränderlichen x aufzulösen, wodurch man an Stelle von (1)

$$x = F(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

erhalten würde. In dieser sog. **umgekehrten** oder **inversen Funktion** von $f(x)$ erscheint jetzt y als unabhängige und x als abhängige Veränderliche derart, daß in Fig. 1 den Strecken

$$OC_1 = y_1,\ OC_2 = y_2,\ OC_3 = y_3 \text{ usw.}$$

auf der zur Abszissenachse OX normalen **Ordinatenachse** OY die Lote

$$C_1B_1 = x_1 = F(y_1),\ C_2B_2 = x_2 = F(y_2) \text{ usw.}$$

zugehören, ohne daß die Kurve $B_1B_2B_3\ldots$ ihre Form ändert. Daraus geht hervor, daß auch die Formel (2) ohne weiteres als Gleichung der Kurve $B_1B_2B_3\ldots$ angesehen und benutzt werden darf.

Durch das vorstehende Verfahren haben wir die Lage der einzelnen Punkte einer ebenen Kurve durch ihre Abstände von zwei zueinander senkrechten Achsen definiert, also auf ein **recht-**

winkliges Achsenkreuz bezogen. Die Abstände selbst nennen wir die Koordinaten des Punktes, und zwar die auf der X-Achse gemessenen die Abszissen, die auf der Y-Achse die Ordinaten, während der Schnittpunkt O der Achsen als Anfang des Koordinatensystems oder kurz als Koordinatenanfang bezeichnet wird.

Wenn wir den Koordinaten eines der Punkte B in Fig. 1 das positive Vorzeichen zuschreiben, so entsprechen dem Anfang O die Werte $x = 0$, $y = 0$. Die rückwärtige Verlängerung der Achsen über O hinaus führt dann folgerichtig auf negative Werte der Koordinaten, so daß das vollständige Achsenkreuz die Ebene in vier Quadranten (Fig. 2) derart teilt, daß beim Überschreiten einer Achse jedesmal eine der beiden Koordinaten ihr Vorzeichen wechselt. Weiterhin erkennt man, daß für alle Punkte der Abszissenachse OX, $y = 0$ und für alle Punkte der

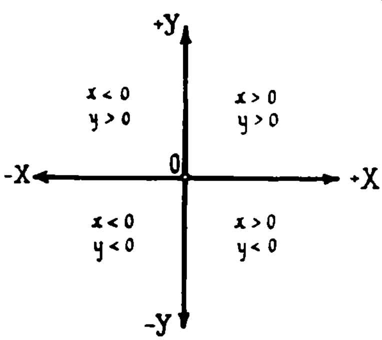

Fig. 2.

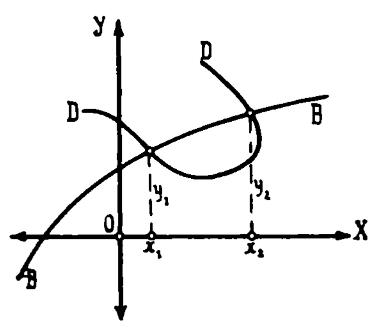

Fig. 3.

Ordinatenachse OY, $x = 0$ ist, so daß in unserem Koordinatensystem $y = 0$ die Gleichung der Abszissenachse OX und $x = 0$ die Gleichung der Ordinatenachse OY darstellt.

Sind nun zwei Gleichungen zwischen den beiden Unbekannten x und y, nämlich

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

vorgelegt, so entsprechen diesen nach dem Vorstehenden auch zwei ebene Kurven, BB und DD (Fig. 3), die sich in einem oder mehreren Punkten schneiden werden. Da diese Schnittpunkte beiden Kurven zugleich angehören, also auch beide Gleichungen (3) erfüllen, so stellen ihre Koordinatenpaare $x_1\, y_1$

und $x_2\, y_2$ offenbar Wurzeln dieser Gleichungen dar. Die Anzahl solcher Wurzelpaare hängt im Falle algebraischer Gleichungen nur von dem Grade der durch Elimination einer Veränderlichen, z. B. von y aus (3), hervorgehenden Gleichung für die andere Veränderliche x

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \ldots\ldots \quad (3\,\mathrm{a})$$

ab. Ist diese Gleichung von höherem als zweitem Grade, so bietet ihre algebraische Auflösung schon erhebliche Schwierigkeiten und wird im allgemeinen für höhere als vierte Grade sogar unmöglich. Demgegenüber lassen sich fast immer die beiden Kurven (3) leicht in ein Koordinatensystem eintragen, womit ihre Schnittpunkte ohne weiteres, und damit auch wenigstens die reellen Wurzelpaare mit einer nur durch die Strichdicke beschränkten Genauigkeit gegeben sind.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch zur graphischen Lösung einer beliebigen Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

anwenden, deren Wurzeln mit den Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4\,\mathrm{a})$$

d. i. der durch die erste Gleichung $y = f(x)$ gegebenen Kurve mit der durch $y = 0$ definierten Abszissenachse OX, identisch sind.

1. Beispiel. Gegeben sei die Gleichung ersten Grades

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

deren graphische Darstellung in Fig. 4 eine Gerade mit dem Neigungswinkel α ergibt, welche die Abszissenachse ($y = 0$) in dem Punkte $x = -\dfrac{b}{\operatorname{tg}\alpha} = -b \operatorname{cotg} \alpha$ und die Ordinatenachse ($x = 0$) im Punkte $y = +b$ schneidet. Die Umkehrung der Gleichung liefert die inverse Funktion

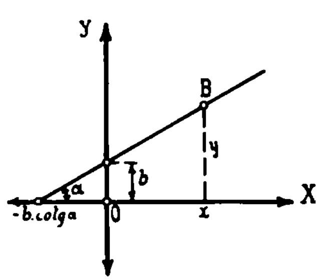

Fig. 4.

$$x = \frac{y - b}{\operatorname{tg}\alpha} = (y - b) \operatorname{cotg} \alpha, \quad . \quad (5\,\mathrm{a})$$

die ebenfalls eine Gleichung der Geraden B bedeutet.

2. Beispiel. Bezeichnen wir mit y den Druck eines Gases in Kilogramm auf ein Quadratmeter, mit x das Volumen von 1 Kilogramm

des Gases, gemessen in Kubikmetern, so ändern sich nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze diese Größen bei konstanter Temperatur nach der Gleichung

$$xy = C. \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

Wir erhalten also eine Kurve AB mit einem konstanten Inhalt C des aus der Abszisse und Ordinate jedes Punktes gebildeten Rechtecks, woraus sich sofort die in Fig. 5 angedeutete einfache punktweise Konstruktion der Kurve ergibt. Lösen wir die Gleichung nach y oder x auf, schreiben also

$$y = \frac{C}{x} \text{ oder } x = \frac{C}{y} \quad (6\,\text{a}),$$

so erkennen wir, daß die Funktion durch Umkehrung keine Änderung erleidet, oder daß wir, ohne die Lage der Kurve zu ändern, die beiden Koordinatenachsen miteinander vertauschen können. Weiter folgt aus diesen beiden Formeln für $x = 0$, $y = \infty$, bzw. für $y = 0$, $x = \infty$, d. h. die Kurve erreicht die beiden Achsen erst im Unendlichen. Schließlich ändert sich die Gleichung $xy = C$ auch nicht durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel beider Veränderlichen, so daß unserer Gleichung auch ein im Scheitelquadranten gelegener in Fig. 5 punktierter Kurvenzweig genügt, der mit dem ausgezogenen kongruent ist. Dieser Zweig besitzt übrigens keine physikalische Bedeutung für Gase.

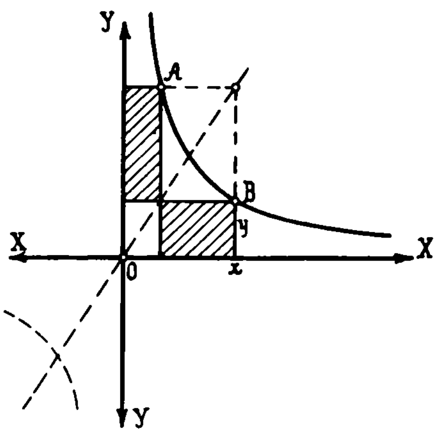

Fig. 5.

3. Beispiel. Trägt man die den beiden Gleichungen (5) und (6)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b, \quad xy = C \quad \dots \dots \quad (7)$$

entsprechenden Kurven Fig. 4 und 5 in ein und dasselbe Koordinatensystem ein, so ergeben die Koordinaten ihrer Schnittpunkte die Wurzeln des simultanen Gleichungspaares (7), die sich in diesem Falle auch leicht exakt berechnen lassen. Eliminiert man nämlich aus beiden Gleichungen die Veränderliche x, so folgt

$$y^2 - by = C \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \dots \quad (7\,\text{a})$$

mit den beiden Wurzeln

$$y = +\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + C \operatorname{tg} \alpha}, \quad \dots \quad (7\,\text{b})$$

denen dann die Werte

$$x = (y - b) \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{b}{2} \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\frac{b^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}{4} + C \operatorname{cotg} \alpha} \qquad (7\,c)$$

entsprechen. Wir erhalten also infolge der quadratischen Natur von (7 a) zwei Wurzelpaare im Einklang mit den beiden Schnittpunkten der Kurven.

4. Beispiel. Um die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

graphisch zu ermitteln, setze man in der Formel

$$y = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \quad \ldots\ldots \quad (8\,a)$$

der Reihe nach verschiedene Werte von x ein. Man erhält so die Koordinatenpaare

$$x = -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, +1, +2, +3 \text{ usw.},$$
$$y = -300, \ -41, \ -20, \ -5, \quad 0, +1, +4 \text{ usw.}$$

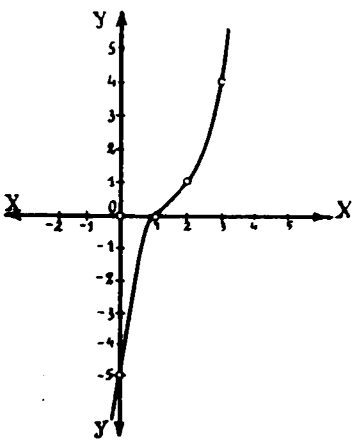

Fig. 6.

und erkennt, daß die der Gleichung (8 a) entsprechende Kurve Fig. 6 die Abszissenachse in dem Punkte $x = 1$ schneidet, womit schon eine reelle Wurzel von (8) gegeben ist. Das stetige Ansteigen der Kurve mit wachsendem x deutet darauf hin, daß weitere Schnittpunkte mit der X-Achse nicht existieren, d. h. daß die beiden anderen Wurzeln von (8) konjugiert komplex sind. Zur Entscheidung dieser Frage setze man probeweise

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x^2 + ax + b)(x - 1)$$

oder nach Ausführung der rechtsseitigen Multiplikation

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b.$$

Die Identität beider Ausdrücke erfordert aber die Übereinstimmung der Faktoren der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten, woraus

$$a = -4, \quad b = +5$$

folgt. Die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

liefert schließlich das konjugiert komplexe Wurzelpaar

$$x = 2 \pm \sqrt{-1},$$

womit im Verein mit $x = 1$ alle Wurzeln von (8) gegeben sind.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß man die rechnerische Behandlung von Gleichungen mit zwei Unbekannten durch geometrische Darstellungen ersetzen kann, solange wenigstens die vorgelegten Gleichungen nur reelle Konstanten enthalten. Daraus dürfen wir schließen, daß auch der umgekehrte Weg, d. h. der Ersatz geometrischer Konstruktionen durch analytische Rechnungen mit Gleichungen, welche aus den Eigenschaften geometrischer Gebilde abgeleitet sind, praktische Vorteile insbesondere dann verspricht, wenn es sich um die Aufdeckung allgemeiner Beziehungen handelt. Dieses von dem Franzosen Descartes (Cartesius), nach dem man wohl auch die rechtwinkligen Koordinaten als Cartesische bezeichnet, zuerst mit Erfolg angewandte Verfahren bildet in der Tat die Grundlage der sog. analytischen Geometrie, mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§ 2. Die gerade Linie.

Eine gerade Linie oder kurz eine Gerade ist in der Ebene vollständig bestimmt durch einen ihrer Punkte und die Neigung gegen eine feste Gerade, z. B. die Abszissenachse. Bezeichnen wir die Koordinaten dieses Punktes P_1 mit $x_1\, y_1$, diejenigen eines beliebigen Punktes P der Geraden mit $x\, y$ und ihren Neigungswinkel gegen die X-Achse mit α, so ist in dem Dreieck P_1PC (Fig. 7)

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder

$$y = y_1 - x_1 \operatorname{tg}\alpha + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Hierin bedeutet aber (mit $x = 0$) $y_1 - x_1 \operatorname{tg}\alpha = b$ den Abschnitt OB der Geraden auf der Ordinatenachse, so daß wir an Stelle von (1) auch

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als Gleichung der Geraden schreiben dürfen. Fällt die Konstante b weg, so haben wir es mit einer Geraden durch den Anfangspunkt O selbst zu tun, deren Gleichung somit

$$y = x \operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

lautet.

Bezeichnen wir ferner den Abschnitt der Geraden auf der positiven Abszissenachse (für $y = 0$) mit a, so wird in Fig. 7 in dem Dreieck APD die Strecke $AD = x + a$, woraus sich die Proportion ergibt

$$\frac{y}{x+a}=\frac{b}{a}$$

oder

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

als eine dritte Form der Gleichung unserer Geraden, die sich durch ihren symmetrischen Bau auszeichnet und aus (2) durch Division mit b sowie mit $\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}=a$ unmittelbar hervorgeht.

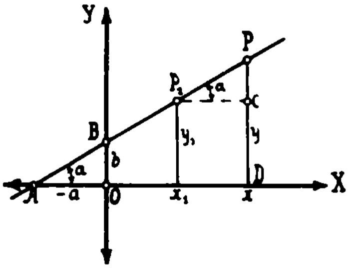

Fig. 7.

Würde der Punkt A rechts von O liegen, so hätten wir in (3) $-a$ durch $+a$ zu ersetzen, wodurch die Gleichung die Form

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad . \quad . (3a)$$

annimmt.

Eine Gerade ist weiterhin auch bestimmt durch zwei ihrer Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, welche die Gleichung erfüllen müssen. Benutzen wir hierfür die Form (2) so folgt

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha + b$$
$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha + b$$

und daraus durch Subtraktion

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Dividieren wir diese Formel in Gl. (1), so erhalten wir als neue Gleichung der durch unsere zwei Punkte hindurchgehenden Geraden

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die wir natürlich auch auf rein geometrischem Wege aus Fig. 7 hätten ableiten können.

Fällen wir nun in Fig. 8 vom Koordinatenanfang O aus ein Lot von der Länge l auf die Gerade vom Neigungswinkel α gegen die Abszissenachse und gleichzeitig ein solches AC vom Endpunkte A der Abzisse eines beliebigen Punktes P der Geraden, so wird dieses letztere Lot von einer Parallelen zur Geraden durch O im Punkte B getroffen und wir erhalten

$$l = BC = AC - AB$$

oder wegen

$$AC = y \cos \alpha, \; AB = x \sin \alpha$$

auch

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = l \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

als fünfte Gleichungsform. Diese läßt sich durch Division mit l sowie mit den Substitutionen

$$\frac{l}{\cos \alpha} = b, \quad \frac{l}{\sin \alpha} = a$$

sofort auf die Form (3) zurückführen bzw. aus dieser herleiten.

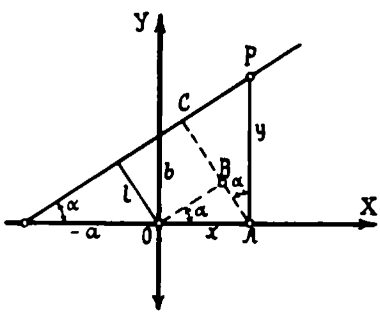

Fig. 8.

Alle bisher entwickelten Gleichungen der Geraden sind sowohl für die Abszisse x wie auch für die Ordinate y vom **ersten Grade** und können daher als Sonderfälle der allgemeinen Gleichung ersten Grades

$$Ax + By = C \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

angesehen werden, worin A, B, C beliebige reelle Konstanten bedeuten. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$y = -\frac{A}{B} x + \frac{C}{B} \quad \ldots\ldots \quad (6\,a)$$

so wird sie offenbar mit (2) identisch, wenn wir

$$-\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{C}{B} = b$$

setzen. Daraus geht hervor, daß **nicht nur die Gerade durch Gleichungen ersten Grades befriedigt wird, sondern daß umgekehrt jede Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen eine Gerade darstellt und darum auch als lineare Gleichung bezeichnet wird.**

Der Schnittpunkt zweier Geraden

$$\left.\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha_1 + b_1 \\ y &= x \operatorname{tg} \alpha_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

besitzt die Koordinaten

$$x = -\frac{b_2 - b_1}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}, \quad y = \frac{b_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - b_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} \quad (7\,a),$$

welche für $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, d. h. im Falle eines parallelen Verlaufes der Geraden unendlich werden.

Stehen die beiden Geraden (7) senkrecht zueinander, so ist $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$, also

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = -1$$

und wir erhalten für den Schnittpunkt die Koordinaten

$$x = (b_2 - b_1) \sin \alpha \cos \alpha; \quad y = b_1 \cos^2 \alpha_1 + b_2 \sin^2 \alpha_1 \quad (7b).$$

Bezeichnen wir die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $x_1\, y_1$ bezw. $x_2\, y_2$ mit s (Fig. 9), so ist bei einem Neigungswinkel α der Geraden $P_1 P_2$

$$x_2 - x_1 = s \cos \alpha, \quad y_2 - y_1 = s \sin \alpha,$$

woraus

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

im Einklang mit dem Pythagoreischen Lehrsatz für das aus den Seiten $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und s bestehende Dreieck hervorgeht.

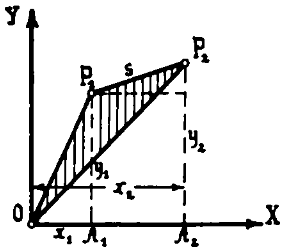

Fig. 9.

Die beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmen aber auch mit dem Koordinatenanfang O ein Dreieck OP_1P_2, dessen Inhalt nach Fig. 9 sich zusammensetzt wie folgt

$$OP_1 P_2 = OA_1 P_1 + A_1 P_1 P_2 A_2 - OA_2 P_2.$$

Nach Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte $P_1\, P_2$ berechnet sich hiermit die Dreieckfläche F zu

$$F = \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{(x_2 - x_1)\,(y_2 + y_1)}{2} - \frac{x_2 y_2}{2}$$

woraus nach Kürzung

$$2F = y_1 x_2 - y_2 x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

hervorgeht. Dieser Ausdruck ändert offenbar sein Vorzeichen, wenn man die Indizes 1 und 2 mit einander vertauscht, so daß man auch schreiben darf

$$OP_1 P_2 = - OP_2 P_1.$$

Das heißt aber nichts anderes, als daß das Vorzeichen unserer Dreieckfläche davon abhängt, ob wir seinen Umfang im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt umfahren. Welchem der beiden Drehungssinne wir das positive Vorzeichen zuordnen wollen, bleibt zunächst unserem Ermessen anheimgestellt.

1. Beispiel. Um die Länge des Lotes l_1 von einem Punkte $x_0 y_0$ auf die Gerade von der Gl. (5)

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = l$$

zu ermitteln, brauchen wir nur durch den Punkt eine Parallele hinzuzuziehen, deren Abstand vom Anfang O mit l_0 bezeichnet werde. Alsdann ist

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = l_0$$

die Gleichung dieser Parallelen, der auch der Punkt $x_0\, y_0$ derart genügt, daß

$$y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha = l_0$$

gilt. Das gesuchte Lot l_1 ist nun offenbar nichts anderes als die Differenz $l_0 - l$, so daß wir dafür schreiben dürfen

$$l_1 = l_0 - l = y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha - l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

2. Beispiel. Es seien die Koordinaten $x_1\, y_1$ des Fußpunktes des Lotes von einem Punkte $x_0\, y_0$ auf die Gerade

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b$$

anzugeben. Dieser Fußpunkt genügt einerseits der Gleichung dieser Geraden, so zwar daß

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

während die Gleichung des durch $x_0\, y_0$ und $x_1\, y_1$ hindurchgehenden Lotes mit dem Neigungswinkel α_0

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha_0$$

ist. Die Bedingung für die Normalstellung zur vorgelegten Geraden lautet aber

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha = -1$$

oder

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \operatorname{tg} \alpha = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Für die Auflösung der beiden Gl. (11) und (12) nach x_1 und y_1 schreiben wir sie zweckmäßig in der Form

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha &= b \\ y_1 \operatorname{tg} \alpha + x_1 &= y_0 \operatorname{tg} \alpha + x_0 \end{aligned}$$

woraus sich schließlich ergibt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (y_0 - b) \sin \alpha \cos \alpha + x_0 \cos^2 \alpha \\ y_1 &= x_0 \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + y_0 \sin^2 \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

3. Beispiel. Der Flächeninhalt eines Polygons mit den Eckpunkten $P_1 P_2 \ldots . P_n$, deren Koordinaten bzw. $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots x_n y_n$ sein mögen, ergibt sich durch Zusammensetzung aus den Dreiecken $OP_1 P_2$, $OP_2 P_3 \ldots O P_n P_1$ (Fig. 10), von denen das letzte im umgekehrten Sinne umfahren wird, wie die vorhergehenden. Diesem Umstand wird man indessen schon gerecht durch Summierung des Aus-

drucks (9) für die doppelte Fläche der Einzeldreiecke mit fortschreitenden Indizes, so daß wir schließlich erhalten

$$2F = \left| \begin{array}{l} y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ + y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + y_n x_1 - y_1 x_n \end{array} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

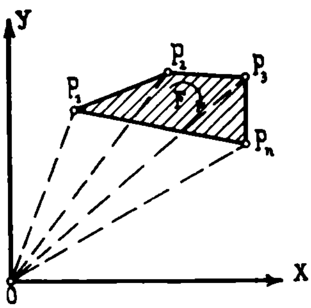

Fig. 10.

4. Beispiel. Nach dem vorigen Beispiel ist der doppelte Inhalt des durch die drei Punkte $P_1\,P_2\,P_3$ mit den Koordinaten $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$ bestimmten Dreiecks

$$2\,F = \left| \begin{array}{l} y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ + y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ + y_3 x_1 - y_1 x_3 \end{array} \right| \quad (14a)$$

Das Verschwinden dieses Ausdrucks liefert zugleich die **Bedingung dafür, daß die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ auf einer Geraden liegen**, nämlich

$$y_1 x_2 - y_2 x_1 + y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_3 x_1 - y_1 x_3 = 0 \quad . \;\; . \quad (15)$$

Diese Bedingung folgt auch aus Gl. (4), wenn wir dort $y = y_3$ und $x = x_3$ einsetzen und beiderseit die Nenner wegschaffen.

Das Verschwinden des Ausdrucks (14) für ein Polygon mit mehr als drei Seiten bedingt dagegen noch nicht, daß die Punkte $P_1\,P_2 \ldots P_n$ auf einer Geraden liegen, sondern nur, daß beim Fortschreiten von einem Punkte zum nächsten in der obigen Reihenfolge die im positiven und negativen Sinne umfahrenen Flächenstücke sich ausgleichen. Dieser entgegengesetzte Drehungssinn ist natürlich nur möglich, wenn die Polygonseiten sich, wie in Fig. 11 angedeutet, kreuzen, wodurch bei vier Ecken ein sog. Vierseit $P_1 P_2 P_3 P_4$ entsteht im Gegensatze zu dem Viereck $P_1 P_2 P_4 P_3$.

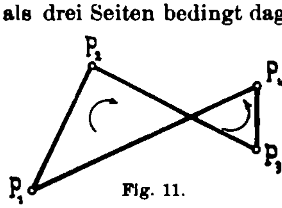

Fig. 11.

5. Beispiel. Der geometrische Ort eines Punktes xy, der von zwei anderen $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ dieselbe Entfernung besitzt, ergibt sich durch Gleichsetzen der Abstandsquadrate

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

woraus nach Auflösung der Klammern und Kürzung der beiderseits gleichen Glieder

$$2(x_2 - x_1)\,x + 2(y_2 - y_1)\,y = (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \quad . \quad (16),$$

d. h. die **Gleichung einer Geraden** resultiert, die, wie der Vergleich mit Gl. (4) lehrt, auf der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ senkrecht steht und diese halbiert. Wir wollen diese Gerade als die mittlere Normale zu den Punkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bezeichnen.

§ 3. Der Kreis.

Den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene mit gleichem Abstand oder Radius von einem vorgelegten festen Punkt, sog. Mittelpunkt oder Zentrum, bezeichnen wir als einen Kreis. Wählen wir im einfachsten Fall als Mittelpunkt den Koordinatenanfang O und bezeichnen mit a den Radius OP eines Kreispunktes P (Fig. 12), so erfüllen dessen Koordinaten xy nach dem Pythagoreischen Lehrsatz die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad (1),$$

welche schon die Mittelpunktsgleichung des Kreises darstellt.

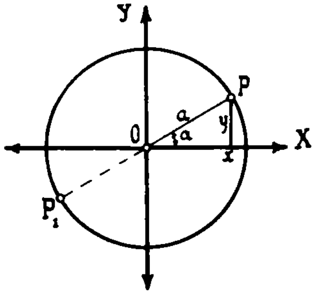

Fig. 12.

Schneiden wir den Kreis mit einer Geraden durch den Mittelpunkt O mit der Gl. (2a) des § 2, d. h.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so ergibt sich nach Einsetzen in Gl. (1)

$$x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} = a^2$$

oder umgekehrt

$$y^2 (1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha) = \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = a^2.$$

Dies führt auf zwei zusammengehörige Wertpaare

$$x = \pm\, a \cos \alpha, \quad y = \pm\, a \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für die Koordinaten mit entgegengesetzt gleichen Vorzeichen und liefert somit zwei auf der Schnittgeraden symmetrisch zum Anfang O liegende Punkte, deren Abstand $PP_1 = 2a$ einen Durchmesser des Kreises bildet.

Schneiden wir dagegen in Fig. 13 den Kreis um O mit einer beliebigen Geraden von der Gl. (1) des § 2, d. h.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$