Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. Helmut Geupel

Das Gesamtwerk

Assmann / Selke, Technische Mechanik

umfasst folgende Bände:

Band 1: Statik (incl. Aufgaben)
Band 2: Festigkeitslehre
Band 3: Kinematik und Kinetik
Aufgaben zur Festigkeitslehre
Aufgaben zur Kinematik und Kinetik

Technische Mechanik 1

Statik

von
Prof. Bruno Assmann und
Prof. Dr.-Ing. Peter Selke

19., überarbeitete Auflage

Oldenbourg Verlag München

Prof. Bruno Assmann lehrte über 30 Jahre lang an der Fachhochschule Frankfurt am Main. Sein Wissen und seine Erfahrungen aus der Lehre hat er in die drei Bände zur „Technischen Mechanik" und die dazugehörigen Aufgabensammlungen einfließen lassen.

Prof. Dr.-Ing. Peter Selke lehrt seit 1992 Technische Mechanik, Maschinendynamik und Finite-Elemente-Methode an der Technischen Fachhochschule Wildau.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Anton Schmid
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Grafik + Druck, München

ISBN 978-3-486-59133-0

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch ist als Lehrbuch konzipiert. Es richtet sich vornehmlich an Studenten von Fachhochschulen.

Ein Lehrbuch muss auf ein bestimmtes Lernziel ausgerichtet sein. Dieses Buch sieht seine Aufgabe nicht darin, Lösungsrezepte für verschiedene Aufgabentypen aus dem Bereich der Statik zu vermitteln. Das Hauptanliegen dieses Buches ist es, ein Gefühl für die Wirkung von Kräften und Momenten an verschiedenen Gebilden bei unterschiedlichen Belastungen zu vermitteln. Ohne dieses Einfühlungsvermögen für die Wirkung von Belastungen ist z.B. ein guter Konstrukteur nicht denkbar. Jeder, der als Ingenieur gearbeitet hat, weiß, dass viele Probleme nicht durch eine exakte Berechnung lösbar sind. Hier findet der Ingenieur die günstigste Lösung, der sich in die Ursachen und Wirkungen am besten hineindenken kann. Im diskutierten Fall sind das Belastungen und die durch diese verursachten Wirkungen in verschiedenen Bauteilen. Dieses Gefühl für die angesprochenen physikalischen Vorgänge ist nicht ersetzbar. Es stellt den „human factor“ im Lösungsprozess dar, dem der Computer allenfalls als Hilfsmittel dient.

Das oben formulierte Ziel soll auf folgendem Wege erreicht werden. Nach einem Einführungskapitel sind im Kapitel 2 sechs Lehrsätze zusammengefasst. Diese formulieren sehr einfache Tatbestände, die aus allgemeiner Erfahrung einsichtig sind. Die Lehrsätze stellen die Grundlage der gesamten Statik dar. Es wird immer wieder von ihnen ausgegangen, bzw. es werden diskutierte Fälle auf sie zurückgeführt. Der Benutzer dieses Buches bleibt aufgefordert, die erarbeiteten Lösungsverfahren nicht schematisch zu „lernen“ sondern die Lösung von den Grundlagen her zu verstehen. Insofern hängt das Erreichen des Lernzieles weitgehend vom Studenten selbst ab.

Diejenigen Fragen tragen am meisten zum Verständnis bei, die auftauchen, nachdem man alles verstanden zu haben glaubt. Diese Fragen stellen sich aber erst, nachdem der Stoff in den verschiedensten Anwendungen durchgearbeitet wurde. Das oben postulierte Lernziel ist demnach nur zu erreichen, wenn man viele Aufgaben löst. Diese sind hauptsächlich mit dem Ziel gestaltet worden, solche klärenden Fragen aufzuwerfen. Besonders wichtig ist, dass man sich nicht mit der Lösung einer Aufgabe zufrieden gibt, sondern daran anschließend das Ergebnis kritisch betrachtet und analysiert.

Auch die Darstellung einer so klassischen Wissenschaft wie der Statik unterliegt im Laufe der Zeit einer Entwicklung und Änderung. Der ausgewogene Anteil der graphischen Verfahren stellt bei der Darstellung der gesamten Technischen Mechanik ein besonderes Problem dar. Die Entwicklung in den letzten Jahren ging eindeutig zu den analytischen Verfahren. Das liegt in der zunehmenden Verbreitung des Computers begründet. Deshalb stellt sich durchaus die Frage, wozu graphische Verfahren überhaupt nötig sind.

In einem Lehrbuch spielen didaktische Gründe naturgemäß eine besondere Rolle. Zusammenhänge kann man sich an Zeichnungen (Kräfte-, Lageplan) wesentlich besser klar machen als an Gleichungen. Diese sind letztlich nicht anschauliche Abstraktionen. Dies gilt hier im besonderen Maße, da Ingenieurstudenten wohl weit überwiegend optisch geprägt sind. Der Lösungsweg kann oft durch Kombination von Zeichnung und Rechnung besonders anschaulich und kurz gehalten werden. Graphische Verfahren stellen eine unabhängige Kontrolle der Rechnung dar.

Die Nutzung moderner Rechentechnik in der Ingenieurpraxis bringt es mit sich, dass die Probleme zunehmend dreidimensional betrachtet und gelöst werden. Dem wurde in der 18. Auflage durch die Überarbeitung des Kapitels 12 durch den Co-Autor versucht Rechnung zu tragen. Der Anteil der Mathematik, speziell der Vektorrechnung, ist dabei größer geworden. Es kam darauf an, die Möglichkeiten der gebräuchlichen Rechentechnik aufzuzeigen, aber auch deutlich zu machen, dass das ingenieurmäßige Herangehen durch die modernen „Rechenhilfen“ nicht ersetzt werden kann. Ohne gediegenes Ingenieurwissen sind die Datenmengen aus einer numerischen Rechnung nicht zu bewerten und damit auch nicht zu nutzen.

Nachdem die 18. Auflage einer größeren Umarbeitung unterzogen wurde, konnten wir uns auf einen geringeren Änderungsaufwand und eine allgemeine Durchsicht beschränken.

Dem Verlag und im besonderen Maße dem Lektor Herrn Anton Schmid danken wir für die stets sehr gute Zusammenarbeit.

Frankfurt am Main — Bruno Assmann
Berlin — Peter Selke

Verwendete Bezeichnungen

A	Fläche
$\underline{\underline{A}}$	Koeffzientenmatrix
$a, b, h, l \ldots$	Längen allgemein
d	Durchmesser
$\vec{e}_{\mathrm{x}}, \vec{e}_{\mathrm{y}}, \vec{e}_{\mathrm{z}}$	Einheitsvektoren
F	Kraft
f	Hebelarm der Rollreibung
g	Fallbeschleunigung
K	Proportionalitätsfaktor
M	Moment
m	Masse
m	Maßstabsfaktor
q	Streckenlast
R, r	Radius
S	Seilkraft; Stabkraft
V	Volumen
x, y, z	Koordinaten
$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$	Winkel allgemein
ϱ	Dichte
ϱ	Reibungswinkel
μ	Reibungszahl

Indizes

A, B, C ...	bezogen auf so bezeichnete Punkte
a	axial
b	Biegung
F	Kraft
G	Gewicht
i	Laufvariable
l	längs
M	Moment
n	normal, Normalenrichtung
q	quer
R	Reibung
r	radial
res	resultierend
S	Seil, Stab
t	tangential, Tangentialrichtung; Torsion
u	Umfangsrichtung
x, y, z	Richtungssinn nach vorgegebenem Koordinatensystem
z	Zapfen
0	Ruhezustand; Haftreibung

Hinweis:
Falls nichts Gegenteiliges in den Beispielen und Aufgaben formuliert ist, gilt:

1. **Die Eigengewichte von Trägern, Wellen, Stützen, Seilen usw. werden nicht berücksichtigt.**
2. **Lager und Gelenke sind reibungsfrei.**

1 Einführung

1.1 Was ist Mechanik?

1.1.1 Begriffsbestimmung

Die Mechanik ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf Körper. Sie ist ein Teilgebiet der Physik. Die Technische Mechanik wendet die physikalischen Erkenntnisse auf Gegenstände und Vorgänge der Technik an. Man kann das Gebiet nach der Beschaffenheit der betrachteten Körper (starr, elastisch, flüssig, gasförmig) und nach ihrem Zustand (Ruhe, beschleunigte Bewegung) einteilen. Im nachfolgenden Schema sind die einzelnen Zweige der Technischen Mechanik aufgeführt.

Technische Mechanik

	Statik	Kinetik	Kinematik
Körper			
starr	Statik starrer Körper	Kinetik starrer Körper	Kinematik starrer Körper
elastisch	Festigkeitslehre		
flüssig	Hydrostatik	Hydrodynamik	
gasförmig	Aerostatik	Gasdynamik	

Dieses Buch befasst sich mit der Statik starrer Körper. Da eine Verwechslung mit der Festigkeitslehre, der Hydro- und Aerostatik nicht möglich ist, spricht man einfach von Statik. In diesem Sinne *ist die Statik die Lehre von der Wirkung von Kräften auf starre Körper im Gleichgewicht.*

Die in dieser Definition gebrachten Begriffe werden nachfolgend erläutert.

1.1.2 Die Kraft

Zunächst wird nach der Wirkung einer Kraft gefragt. Eine Kraft kann eine ruhende Masse in Bewegung setzen. Sie kann einen Körper, der bereits in Bewegung ist, aus seiner Bahn ablenken und ihn dabei beschleunigen oder verzögern. Eine Kraft ist demnach in der Lage, den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern.

Kräfte vermögen auch Deformationen an Körpern zu verursachen. Ein belasteter Träger biegt sich durch, eine gezogene Feder wird länger.

Zusammenfassend kann man sagen, *eine Kraft ist die Ursache von Bewegungs- und/oder Formänderungen.*

Kräfte werden auf einen Körper durch materielle Berührung übertragen. Das geschieht z.B. durch Aufsetzen einer Last auf einen Träger. Jedoch können Kräfte auch ohne materielle Verbindung zwischen zwei Körpern wirken. Das ist z.B. der Fall bei Gravitations- und magnetischen Kräften.

Die Größe einer Kraft wird als Vielfaches einer Einheit angegeben. Im SI-System ist diese Einheit das *Newton* (siehe Abschnitt 1.2). Die Angabe der Größe ist für die Beschreibung der Wirkung einer Kraft nicht ausreichend. Es kommt auch auf die Angriffsrichtung an. Diese wird durch die Lage der *Wirkungslinie* und den *Richtungssinn* entlang dieser Linie festgelegt.

Für die Beschreibung der Wirkung einer Kraft ist die Angabe von drei Daten notwendig:

1. Größe,
2. Lage der Wirkungslinie,
3. Richtung entlang dieser Linie.

Eine physikalische Größe, die eindeutig nur durch diese drei Angaben festgelegt ist, nennt man einen *Vektor*. Zeichnerisch dargestellt wird ein Vektor durch einen in der Wirkungslinie liegenden Pfeil. Die Pfeilrichtung gibt den Wirkungssinn, die Pfeillänge die Größe der Kraft an. Nur bei graphischen Lösungen muss die Länge des Pfeils der Größe der Kraft entsprechen. Die Angabe erfolgt über eine Maßstabskonstante

$$m = \frac{\text{Abbildungsgröße}}{\text{Tatsächliche Größe}} \qquad \text{Beispiel: } m = 10{,}0\,\mathrm{kN/\,cm}$$

Eine weitere Methode ist, eine bestimmte Strichlänge als Kraft zu „vermaßen“ (s. Kap. 3; Kräfteplan). In den meisten Fällen werden Überlegungsskizzen mit Kraftpfeilen für die Formulierung von Gleichungen verwendet.

Eine vektorielle Größe wird im Druck durch einen darüber gesetzen Pfeil gekennzeichnet, z.B. Kraftvektor $\vec{F}$. Man kann auf diese besondere Kennzeichnung verzichten, wenn die Vektoreigenschaft offensichtlich ist. Als Beispiel seien genannt die Bezeichnung eines Kraftpfeils (Abb. 1-1) oder ein Text, der sich auf einen Kraftpfeil in einer Abbildung bezieht. Ohnehin eindeutige Verhältnisse liegen bei indizierten Kraftkomponenten vor. Die x-Komponente einer Kraft $\vec{F}$ wird

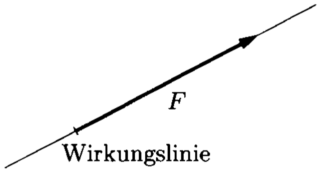

Abb. 1-1: Kraftvektor

mit F_x bezeichnet. Hier ist die Wirkungsrichtung durch den Index x angezeigt. In diesem Buch wird vorwiegend wie oben diskutiert verfahren.

1.1.3 Das Gleichgewicht

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist, wobei Ruhe ein Sonderfall der geradlinigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist. Ausführlicher wird der Gleichgewichtszustand in den Kapiteln 2 und 6 erläutert.

1.1.4 Der starre Körper

Jeder feste Körper wird durch angreifende Kräfte deformiert. Ein Körper wird als *starr* angesehen, wenn die Deformationen (z.B. Längenänderungen) verglichen mit den Abmessungen des Körpers vernachlässigbar klein sind.

Mit den relativ sehr kleinen Deformationen dieser hier als starr angenommenen Körper befasst sich die Festigkeitslehre.

1.2 Das internationale Einheitensystem (SI)

Das Ergebnis einer technischen Berechnung besteht aus einer *Maßzahl* und einer *Einheit.* Als Beispiel sei $F = 50\,\mathrm{N}$ betrachtet. Eigentlich müsste $F = 50 \cdot 1\,\mathrm{N}$ geschrieben werden. Dabei sind 50 die Maßzahl und 1 N die Einheit.

Für die Mechanik starrer Körper müssen drei *Basiseinheiten* definiert werden. Im SI-System sind das

Meter für die Länge,

Kilogramm für die Masse,

Sekunde für die Zeit.

Aus diesen werden andere Einheiten abgeleitet, z.B. für die Geschwindigkeit m/s, die Beschleunigung $\mathrm{m/s^2}$ usw.

Das Meter

Das Meter war ursprünglich als der Abstand von zwei Strichen auf dem bei Paris aufbewahrten Urmeter definiert. Die Formbeständigkeit dieses Metallstabs entspricht nicht mehr den Anforderungen an die Rekonstruierbarkeit. Deshalb hat man, nachdem zunächst die Wellenlänge eines bestimmten Lichts zur Definition benutzt wurde, die Basiseinheit der Länge auf die Basiseinheit der Zeit bezogen. Dazu benutzt man die Universalkonstante Lichtgeschwindigkeit. Das Meter ist jetzt definiert als die Länge, die das Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Diese Festlegung ist erst nach der Entwicklung von extrem genauen Atomuhren möglich geworden.

Das Kilogramm

Der Prototyp der Masseneinheit 1 kg wird bei Paris in Form eines Platin-Iridium-Zylinders aufbewahrt. Diese Masse entspricht sehr genau der von $1\,000\,\mathrm{cm}^3$ Wasser bei einer Temperatur von 4 °C.

Die Sekunde

Die Sekunde ist die Zeiteinheit. Sie entspricht sehr genau dem 86400sten Teil eines mittleren Sonnentages. Sie ist definiert als ein Vielfaches der Periode einer bestimmten atomaren Strahlung.

Die für die Statik besonders wichtige Größe Kraft wird nach dem NEWTONschen Gesetz[1] abgeleitet. *Als Einheit wird diejenige Kraft definiert, die einer Masse von 1 kg die Beschleunigung von 1 m/s² erteilt.* Diese Krafteinheit wird „Newton" (N) bezeichnet.

$$\begin{aligned}
&\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung.}\\
&1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\\
&1\,\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

Folgende, auf dem Dezimalsystem basierende Einheiten sind noch üblich

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{kN} &= 1\,000\,\mathrm{N}\\
1\,\mathrm{MN} &= 10^6\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Eine ruhende Masse übt auf ihre Unterlage die *Gewichtskraft* aus. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\text{Gewichtskraft} = \text{Masse} \cdot \text{Erdbeschleunigung}\\
&F_\mathrm{G} = m \cdot g. \qquad (1\text{-}1)
\end{aligned}$$

[1]Sir Isaac NEWTON (1643–1727), englischer Naturforscher

Die Erdbeschleunigung ist wegen der nicht homogenen Beschaffenheit und der Abplattung der Erde nicht konstant. Der Wert $g = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$ ist als Mittelwert genormt. Für die Berechnung der Gewichtskräfte genügt die Näherung $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Mit Hilfe der Gleichung (1-1) kann man sich die Krafteinheit Newton veranschaulichen. Eine Masse von 1 kg verursacht auf der Erde eine Gewichtskraft von etwa 10 N, die Kraft 1 kN entspricht mit guter Näherung der Gewichtskraft, die die Masse von 100 kg ausübt.

1.3 Einiges zur Lösung von Aufgaben

Der angehende Ingenieur sollte sich möglichst früh das exakte und systematische Arbeiten beim Lösen einer technischen Aufgabe aneignen. Dadurch werden Fehler vermieden und Kontrollen sind viel leichter, auch von anderen Personen, durchführbar. Nachfolgend sollen dafür einige Hinweise gegeben werden, die, sinngemäß angewendet, für alle technischen Aufgaben gelten.

1. Nach dem Durchdenken der Aufgabe sollte immer eine Skizze angefertigt werden, die in den Proportionen möglichst genau sein sollte, um Täuschungen vorzubeugen. Die wirkenden Kräfte werden eingetragen. Diesem Vorgang, Freimachen genannt, ist wegen der Wichtigkeit ein eigenes Kapitel (5) gewidmet. Es ist vorteilhaft, mit mehreren Farben zu arbeiten. Die Skizze soll so groß sein, dass Bezeichnungen eingetragen werden können. Ist es nicht offensichtlich, ob ein System statisch bestimmt ist, dann müssen die gesuchten und gegebenen Größen systematisch zusammengestellt werden.

2. Wahl des Lösungsweges

   Analytische Lösung
   Die verwendeten Gleichungen sollen in allgemeiner Form, am besten links außen geschrieben werden, z.B.

   $$\sum M = 0; \qquad aF_1 - bF_2 = 0$$

   Es sollte soweit wie möglich mit allgemeinen Größen gearbeitet werden, da die Rechnung damit leichter kontrollierbar ist. Bei der Ausarbeitung der Lösung soll kein Schritt übersprungen werden, eventuell sind einzelne Schritte durch kurze Bemerkungen zu erläutern. Bei der zahlenmäßigen Auswertung wird dringend empfohlen, die Maßeinheiten mitzuschreiben. Die reine Zahlenrechnung kann durch Anwendung der 10er-Potenzen übersichtlicher gehalten werden.

Ein Ergebnis soll immer kritisch mit gesundem Menschenverstand daraufhin untersucht werden, ob es überhaupt technisch möglich ist. Man kann immer zusätzliche Kontrollgleichungen aufstellen. In diese werden die vorher errechneten Werte eingesetzt. Die Gleichungen müssen erfüllt sein. Diese Kontrolle für die richtigen Ergebnisse sollte immer durchgeführt werden. Bei sehr ungünstiger Verkettung von Fehlern sind trotz erfüllter Kontrollgleichungen falsche Ergebnisse möglich. Hier hat die graphische Lösung als völlig unabhängiges Verfahren ihren besonderen Wert.

Bei Kräften muss neben dem Betrag auch eindeutig die Wirkungsrichtung angegeben werden. Am besten geschieht das durch einen Pfeil, der in Klammern hinter der Maßzahl und der Einheit erscheint, z.B.

$F_\mathrm{x} = 125\,\mathrm{N}\ (\leftarrow)$ 125 N nach links wirkend,

$F_\mathrm{y} = -230\,\mathrm{N}\ (\uparrow$ am Teil II$)$ 230 N nach oben wirkend.

Für Kräfte senkrecht zur Zeichenebene benutzt man

$\odot$ aus der Ebene herausragend,

$\oplus$ in die Ebene hineinragend.

Graphische Lösung

Die Zeichnung soll wegen der notwendigen Genauigkeit nicht zu klein ausgeführt werden. Die Maßstäbe müssen eindeutig angegeben sein. *Lage- und Kräfteplan sind sauber zu trennen.* Alle gezeichneten Linien sind sofort zu bezeichnen. Die Ergebnisse sollen getrennt zusammengestellt werden.

1.4 Rechengenauigkeit

Die Genauigkeit einer technischen Berechnung hängt von zwei Faktoren ab, erstens von der Genauigkeit der Ausgangsdaten, zweitens von der Genauigkeit der Rechnung. Bei Verwendung eines Rechners darf man den zweiten Faktor vernachlässigen.

Das Ergebnis einer technischen Berechnung wird demnach nur von den Toleranzen beeinflusst, mit denen die Ausgangswerte gegeben sind. Diesen Einfluss untersucht die Fehlerrechnung.

Für die lineare Abhängigkeit gilt: das Ergebnis einer Berechnung ist mit dem gleichen prozentualen Fehler behaftet wie die Ausgangswerte, die in diese Rechnung eingehen. An einem Beispiel soll das erklärt werden. Die Belastungen, denen eine Getriebewelle ausgesetzt ist, sind z.B. mit einer Toleranz von ca. $\pm 10\%$ bekannt. Unter diesen Umständen kann man die in den Lagern wirkenden Kräfte auch nur mit einer Genauigkeit von $\pm 10\%$ berechnen.

Ausgangswerte für eine technische Berechnung haben selten Toleranzen von 1% oder sogar weniger. Man denke z.B. an die Schwierigkeiten, Belastungen genau festzustellen oder an die Streuungen, denen die Festigkeitswerte eines Werkstoffs unterliegen.

Welche Konsequenzen ergeben sich für eine Berechnung? Der in der Materie Mitdenkende sollte nicht sinnlos die Ergebnisse des Rechners übernehmen, sondern sie kritisch auf ihre mögliche Genauigkeit untersuchen und sinnvoll runden. Dies sollte schon bei eventuellen Zwischenergebnissen erfolgen.

2 Lehrsätze der Statik

Die Arbeitsverfahren und Lösungsansätze der Statik beruhen auf einigen wenigen Überlegungen. Diese Überlegungen führen zu Aussagen, die nicht beweisbar sind, da sie selbst Ausgangspunkt einer Theorie sind. Solche Aussagen nennt man „Axiome“. Sie werden jedoch hier Lehrsätze genannt, da der Begriff „Axiom“ einer schärferen Definition genügen muss.

Da diese Sätze selbst nicht beweisbar sind, können sie nur einfache und übersichtliche Tatbestände formulieren, die aus unmittelbarer Ansicht und Einsicht als richtig anerkannt werden müssen. Alle aus diesen Sätzen gezogenen Schlussfolgerungen dürfen nicht zu Widersprüchen führen und müssen Ergebnisse liefern, die überprüfbar richtig sind.

Nach den oben gemachten Ausführungen ist es offensichtlich, dass jede Aufgabe aus dem Bereich der Statik von den Lehrsätzen ausgehend gelöst werden kann. Dieses Verfahren kann jedoch sehr zeitraubend sein. Es ist einfacher, aus den Lehrsätzen schlussfolgernd, sich Arbeitsverfahren zu erarbeiten, die schneller eine Lösung ergeben. Jedoch ist es ein Ziel dieses Buches, dem Leser die Fähigkeit zu vermitteln, eine beliebige Aufgabe der Statik zu analysieren und auf einfache Grundlagen zurückzuführen. Deshalb wird immer wieder auf diese Lehrsätze verwiesen. *Der Leser bleibt aufgefordert, nicht Lösungsverfahren schematisch zu „lernen“, sondern die Lösung von den Grundlagen her zu verstehen. Nur dann ist es möglich, das erarbeitete Wissen auf die verschiedensten Gebiete anzuwenden.*

1. Lehrsatz (Gleichgewichtssatz)

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie

1. **gleich groß sind,**
2. **entgegengesetzt gerichtet sind,**
3. **gleiche Wirkungslinie haben (kollinear sind).**

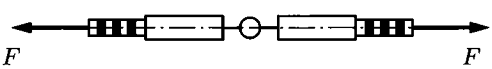

Abb. 2-1: Zwei Kräfte an einer Federwaage

Das ist die Formulierung einer trivialen Erfahrung, die jeder unzählige Male gemacht hat. Man kann z.B. zwei Federwaagen nach Abb. 2-1 miteinander verbinden und sie auseinanderziehen. Im Gleichgewicht, d.h. für ruhendes System, zeigen beide Waagen die gleiche Kraft an.

2. Lehrsatz (Reaktionssatz)

Kräfte treten nur paarweise auf, wobei sie gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und kollinear sind. Man bezeichnet sie als Aktions- und Reaktionskräfte.

Dieser Satz gehört zu den drei von NEWTON in seinem Hauptwerk über die Mechanik formulierten Gesetzen. Er wird verkürzt „actio = reactio" genannt (s. Band 3, Kap. 5).

Jede Kraft erzeugt an der Angriffsstelle eine gleich große Gegenkraft. Drückt man mit der Hand gegen einen Körper, dann verspürt man selber die Kraft, die man ausübt. Auch das vorhin beschriebene Experiment (Abb. 2-1) ist geeignet, diesen Satz zu belegen. Wenn man das System an den beiden Enden hält, ist es nicht möglich, nur eine der beiden Waagen zur Anzeige zu bringen. Die notwendige Gegenkraft belastet zwangsläufig auch die andere Waage. Eine Kraft kann ohne eine gleich große, entgegengesetzt wirkende Kraft nicht auftreten.

3. Lehrsatz (Verschiebungssatz)

Die äußere Wirkung einer Kraft bleibt unverändert, wenn man die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

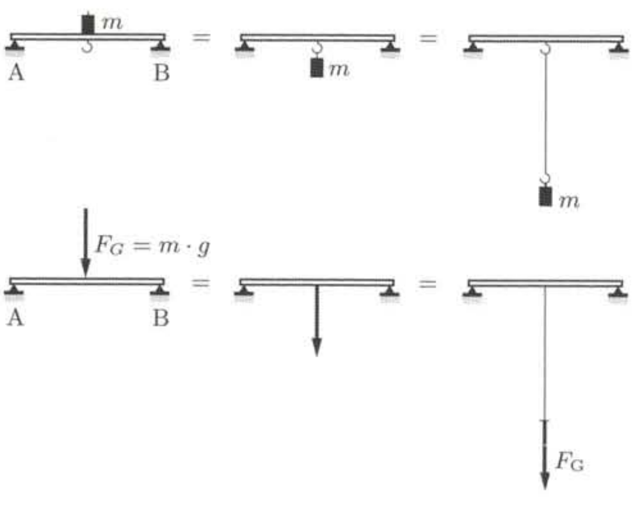

Abb. 2-2: Verschiebbarkeit einer äußeren Kraft

Als Beispiel sei der Träger Abb. 2-2 gegeben. Die Belastung der beiden Auflagepunkte A B ist offensichtlich davon unabhängig, ob die Masse m auf den Balken gesetzt, unmittelbar darunter gehängt oder an einem Seil befestigt wird. In jedem Falle müssen die beiden Auflager zusammen die Gewichtskraft aufnehmen, z.B. im Falle einer symmetrischen Anordnung sind A und B mit jeweils der halben Gewichtskraft belastet. In die symbolische Sprache der Vektoren übersetzt heißt das, der Kraftvektor $\vec{F}_\mathrm{G}$ kann entlang seiner Wirkungslinie verschoben werden. Man spricht von *äußerer Wirkung*, weil die Reaktionskraft im Auflager von außen auf den Träger wirkt. Das wird ausführlich im Kapitel 5 behandelt. Im Gegensatz dazu steht die *Wirkung im Inneren* eines belasteten Bauteils. Das soll am Beispiel des Stabes Abb. 2-3 erläutert werden. Dieser ist in A befestigt. Greift eine Kraft $\vec{F}$ im Punkt B an, dann ist nur der Bereich A B belastet und muss ausreichend dimensioniert sein, während der Teil B C, soweit es die Belastung betrifft, beliebig schwach ausgebildet werden könnte. Ganz anders sieht es aus, wenn man die Kraft F entlang ihrer Wirkungslinie in den Punkt C verschiebt. Jetzt ist auch der Bereich B C voll belastet.

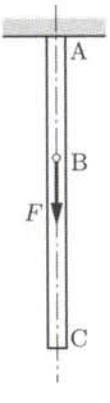

Abb. 2-3: Innere Wirkung einer Kraft im Stab

An einem weiteren Beispiel soll der Unterschied zwischen äußerer und innerer Wirkung einer Kraft erläutert werden. Die Abb. 2-4 zeigt zwei einfache Fachwerke. Im links abgebildeten Fall wird die oben am Knoten abgebildete Kraft

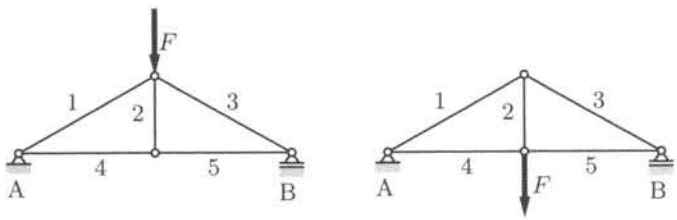

Abb. 2-4: Innere Wirkung einer Kraft am Fachwerk

von den Stäben 1 und 3 auf die Auflager übertragen, wobei die Stäbe 4 und 5 das Ausweichen des Lagers B nach rechts verhindern. Der Stab 2 hat, was die Belastung durch $\vec{F}$ betrifft, keine Funktion und dient in diesem Falle nur zur Aussteifung des Fachwerks. Anders ist es im rechts abgebildeten Belastungsfall. Jetzt hängt die Last $\vec{F}$ am Stab 2, der die Kraft auf den Knoten oben überträgt. Die vom Stab 2 übertragene Kraft ist demnach gleich $\vec{F}$. Für beide betrachteten Fachwerke ist die äußere Wirkung der Kräfte gleich. Beide belasten die Auflager mit jeweils $F/2$. Die Verteilung der Kräfte im Stabverband wird durch die innere Kraftwirkung verursacht. Sie ändert sich, wenn man die Kraft $\vec{F}$ entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

Zusammenfassend soll festgehalten werden:

Bei Untersuchung von Kraftwirkungen im Inneren eines Bauteils (z.B. Kraftverteilung im Stabverband) dürfen Kräfte nicht verschoben werden. Handelt es sich um äußere Wirkungen (z.B. Belastung von Auflagern durch einen Träger), dann dürfen Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

4. Lehrsatz (Überlagerungssatz)

Ein Kräftesystem, das im Gleichgewicht ist, kann jedem beliebigen Kräftesystem überlagert werden, ohne dabei dessen Wirkung zu beeinflussen.

Für den einfachsten Fall werden zwei Kräfte im Gleichgewicht überlagert, d.h. $F - F = 0$. Damit kann eine Änderung der Wirkung nicht eintreten.

5. Lehrsatz (Parallelogrammsatz)

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte

Zwei Kräfte, die an einem gemeinsamen Punkt angreifen, können mit Hilfe der Parallelogrammkonstruktion zu einer resultierenden Kraft zusammengesetzt werden. Die resultierende Kraft hat allein wirkend die gleiche Wirkung wie die beiden Kräfte, aus denen sie gebildet wurde. Die Konstruktion des Vektors $\vec{F}_{\text{res}}$ aus zwei Kraftvektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zeigt die Abb. 2-5a. Da die Diagonale eines Parallelogramms dieses in zwei kongruente Dreiecke teilt, kann man die resultierende Kraft durch Aneinandersetzen der Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ermitteln. Die Reihenfolge ist dabei gleich (Abb. 2-5b). Diese Operation nennt man *geometrische* oder *Vektoraddition.*

Dass Kräfte nach dem oben beschriebenen Verfahren zusammengesetzt werden können, kann man mit Hilfe verschiedener Versuche zeigen. Eine Versuchsanordnung zeigt die Abb. 2-5c. Drei Massen werden nach Skizze aufgehängt, wobei

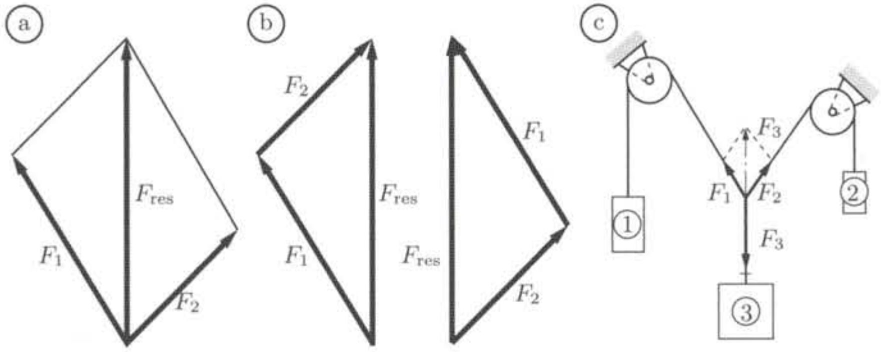

Abb. 2-5: Versuch zum Satz vom Parallelogramm der Kräfte

die Reibung möglichst gering sein sollte. Für beliebige Variationen der einzelnen Massen, pendelt sich das System immer so ein, dass die Resultierende von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gleich groß wie $\vec{F}_3$, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Damit ist nach dem 1. Lehrsatz Gleichgewicht vorhanden.

Es soll hier noch mal darauf hingewiesen werden, dass der Versuch nach Abb. 2-5c kein Beweis ist, sondern nur eine Demonstration für die Richtigkeit der Aussage.

6. Lehrsatz (Trägheitssatz)

Ein Körper verharrt im Zustand der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Dieser Satz gehört auch zu den drei, von NEWTON stammenden Gesetzen, die oben erwähnt sind.

Eine gleichförmige Bewegung erfolgt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. An dieser Stelle muss man sich überlegen, dass eine Geschwindigkeit immer bezogen auf ein bestimmtes System angegeben wird. Ein Zug fährt mit 100 km/h heißt, mit dieser Geschwindigkeit verschieben sich Zug und Erdoberfläche gegeneinander. Dabei empfinden wir die Erdoberfläche normalerweise als „ruhendes System“. Das gilt für den Fahrgast nur bedingt. Er kann, wenn er aus dem Fenster sieht, durchaus die Landschaft als bewegtes und seinen Sitz als ruhendes System empfinden. An diesem einfachen Beispiel sollte demonstriert werden, dass es keinen grundsätzlichen Unterschied zwischen geradliniger, gleichförmiger Bewegung und dem Ruhezustand gibt.

Daraus ergibt sich, dass alle Überlegungen, die vorhin für den Zustand der Ruhe angestellt wurden, auch gelten, wenn sich die betrachteten Systeme geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Das wird im Band 3 (Kinematik und Kinetik) erläutert, ist jedoch auch schon hier einsichtig. Man kann sich alle oben beschriebenen Versuche z.B. auch in einem mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegten Zug vorstellen. Wenn sich ein Zug in diesem Zustand befindet, sind wir nicht in der Lage festzustellen, ob bzw. wie schnell wir uns bewegen, wenn wir von der Deutung der Fahrgeräusche und optischer Eindrücke absehen.

Das liegt darin begründet, dass auf uns keine durch die geradlinige Bewegung verursachten Kräfte wirken. Demnach kann diese Art der Bewegung ein System von Kräften nicht beeinflussen. Völlig anders sieht es bei beschleunigter bzw. gebremster und/oder krummliniger Bewegung aus. In diesem Falle wirken zusätzliche Kräfte, die man deutlich wahrnehmen kann als Beschleunigungskraft oder Verzögerungskraft und/oder Fliehkraft.

Folgende Vorstellung ist falsch: Die geradlinige Bewegung z.B. eines mit konstanter Geschwindigkeit auf horizontaler Ebene fahrenden Kraftfahrzeuges könne nur aufrecht erhalten werden, wenn die Vortriebskraft größer sei als die Summe der Widerstandskräfte. Wenn die Vortriebskraft größer ist als die Summe der anderen Kräfte, ist das Gleichgewicht gestört. Der nicht durch andere Kräfte kompensierte Anteil der Vortriebskraft beschleunigt den Wagen nach dem NEWTONschen Gesetz „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“.

Alle Gesetze der Statik gelten nach diesen Ausführungen auch für mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegte Systeme.

3 Die Resultierende des ebenen Kräftesystems

3.1 Einführung

Diese Darstellung der Technischen Mechanik, – nicht nur der hier vorliegenden Statik - ist nach dem Prinzip „vom Einfachen zum Schwierigen“ aufgebaut. Deshalb wird zunächst das in einer Ebene liegende Kräftesystem behandelt. Im Kapitel 12 erfolgt dann die Übertragung der Arbeitsverfahren auf das räumliche Kräftesystem.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Ausführungen ist ein System mehrerer Kräfte, die nach Abb. 3-1 an einem starren Körper angreifen. Diese können eine Verschiebung, eine Drehung und beides gleichzeitig verursachen. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, diese Wirkung durch eine einzige Kraft zu erzeugen. Von den Lehrsätzen ausgehend wird gezeigt, dass eine solche Kraft existiert und wie man sie bestimmt.

Eine Kraft, die in *Bezug auf alle Punkte* eines starren Körpers die gleiche Wirkung hat wie mehrere Kräfte, die sie ersetzt, nennt man *resultierende Kraft* oder *Resultierende* F_{res}.

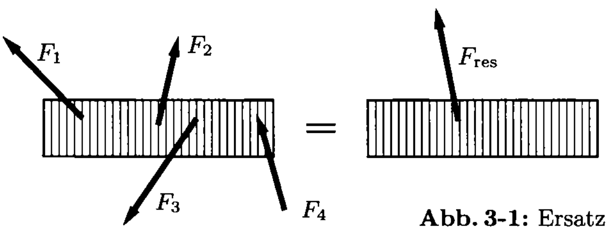

Abb. 3-1: Ersatz von Kräften durch die Resultierende

Aus welchem Grunde ist es notwendig, diese Kraft für verschiedene Kräftesysteme bestimmen zu können? Statische Berechnungen erfolgen in der Regel mit dem Ziel, Kräfte am starren Körper im Gleichgewicht zu berechnen. Der Körper befindet sich in Ruhe, d.h. im Gleichgewicht. Alle angreifenden Kräfte heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf. Die mathematische Bedingung für diesen Zustand ist $F_{\text{res}} = 0$. Sie ist immer notwendig, aber nicht immer ausreichend. Ausführlich wird dieses Thema im Kapitel 6 behandelt.

Die analytischen und graphischen Verfahren zur Bestimmung der Resultierenden werden anschließend für folgende Kräftesysteme abgeleitet.

1. Kräftesystem mit gemeinsamem Angriffspunkt.
2. Parallele Kräfte.
   Hier wird das *Moment einer Kraft* definiert. Das führt zu dem *Kräftepaar*, das keine Kraftwirkung hat, da dessen Resultierende null ist. In diesem Abschnitt wird in einem Beispiel das nächste Kapitel (Schwerpunktbestimmung) vorbereitet.
3. Allgemeines Kräftesystem.
   Dieses entsteht durch Überlagerung von zwei Systemen paralleler Kräfte, deren Wirkungsrichtung unterschiedlich ist. Bei der Lösung kann man deshalb auf den vorigen Punkt zurückgreifen.

Im Zeitalter der Computer und der elektronischen Rechner ist es zwingend, die Anwendung der graphischen Verfahren zu rechtfertigen. Zunächst kann man sich die Zusammenhänge an Kräfte- und Lageplan besser klar machen als an Gleichungen, die letztlich den physikalischen Vorgang nur abstrakt wiedergeben. Weiterhin ist mit Hilfe der graphischen Verfahren eine unabhängige Kontrolle möglich und auch sinnvoll. Ein weiteres und durchaus gewichtiges Argument ist die Möglichkeit, beide Verfahren zu kombinieren. Es genügt, die Kraftecke zu skizzieren und mit Hilfe der Winkelfunktionen die Kräfte und/oder Winkel zu berechnen. In vielen Fällen ist das der schnellste Weg zum Ergebnis.

3.2 Gemeinsamer Angriffspunkt

Ein Kräftesystem mit gemeinsamem Angriffspunkt ist nicht immer auf den ersten Blick als solches erkennbar. Es kommt hier nicht auf den konstruktiv festgelegten Angriffspunkt der Kraft an (z.B. Bolzen), sondern nur auf den Schnittpunkt der Wirkungslinien. Das folgt aus der Verschiebbarkeit der Kräfte entlang der Wirkungslinie (3. Lehrsatz). Ein Beispiel dafür zeigt die Abb. 3-2.

An einem gemeinsamen Angriffspunkt greifen mehrere Kräfte an (Abb. 3-3). Die Kräfte sind nach Größe und Richtung bekannt. Zu bestimmen ist analytisch und graphisch die resultierende Kraft.

Analytische Lösung

Es ist zweckmäßig, sich zunächst mit der *Zerlegung einer Kraft in vorgegebene Richtungen* zu befassen.

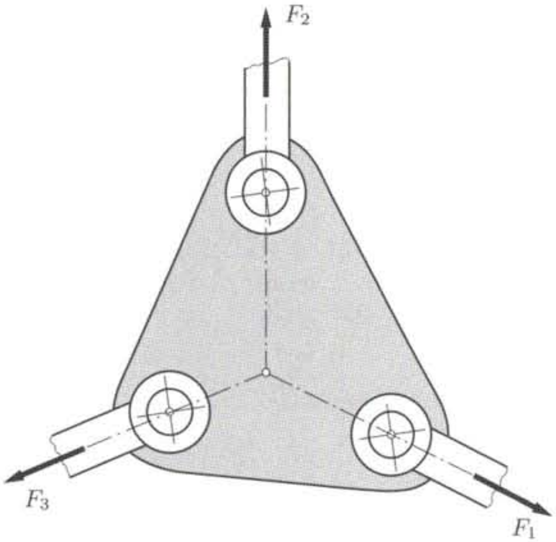

Abb. 3-2: Knotenblech mit drei Stäben

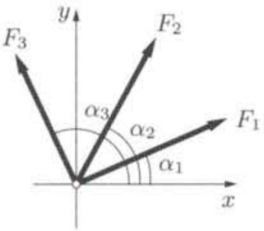

Abb. 3-3: Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Eine nach Größe und Richtung gegebene Kraft $\vec{F}$ soll nach Abb. 3-4 in die vorgegebenen Richtungen 1 und 2 zerlegt werden. Das erfolgt nach dem Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte. Man geht folgendermaßen vor. Der Vektor $\vec{F}$ wird gezeichnet (Kräfteplan). Jeweils in den Anfangs- und Endpunkt werden Linien der Richtungen (1) und (2) gezogen. So entsteht ein Parallelogramm, dessen Seiten die gesuchten Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ darstellen. Diese nennt man *Komponenten* der Kraft $\vec{F}$.

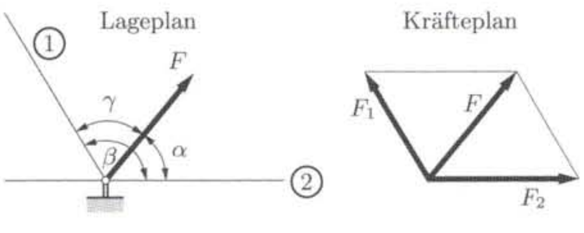

Abb. 3-4: Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei vorgegebene Richtungen ist nicht möglich. Das ist in Abb. 3-5 für drei Wirkungslinien gezeigt. Es gibt beliebig viele Möglichkeiten, die Kraft $\vec{F}$ aus den Komponenten $\vec{F_1}\vec{F_2}\vec{F_3}$ zusammenzusetzen.

Da Berechnungen meistens im Kartesischen Koordinatensystem durchgeführt werden, ist die Zerlegung einer Kraft in die x- und y-Richtung besonders wichtig.

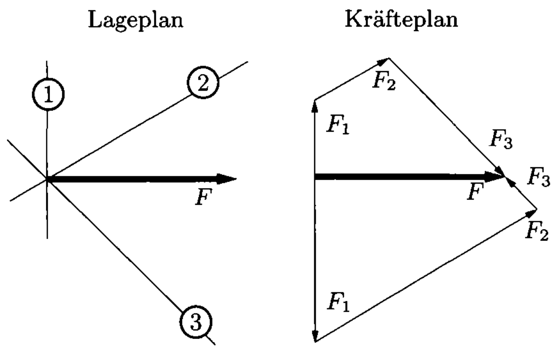

Abb. 3-5: Mehrdeutigkeit der Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen

Wie man aus Abb. 3-6 ersieht, ergeben sich folgende Beziehungen:

$$F_\mathrm{x} = F \cdot \cos\alpha; \qquad F_\mathrm{y} = F \cdot \sin\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{y}}{F_\mathrm{x}} \tag{3-1}$$
$$F = \sqrt{F_\mathrm{x}^2 + F_\mathrm{y}^2}$$

Will man mehrere Kräfte analytisch zu einer Resultierenden zusammenfassen, dann ist es zweckmäßig, zunächst alle Kräfte in die x- und y-Richtung zu zerlegen. In der Abb. 3-7 sind zunächst nach dem 5. Lehrsatz $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zur Resultierenden $\vec{F}_{\mathrm{res}12}$ zusammengesetzt. Diese mit $\vec{F}_3$ vereinigt, ergibt die gesuchte Resultierende aller Kräfte. Aus der Konstruktion ersieht man, dass die x-Komponente der Resultierenden $\vec{F}_{\mathrm{res\,x}}$ die Summe der x-Komponenten der Einzelkräfte ist. Analoges gilt für die y-Richtung.

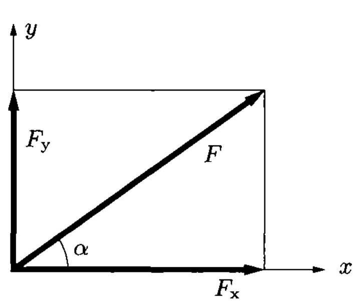

Abb. 3-6: Zerlegung einer Kraft im Kartesischen Koordinatensystem

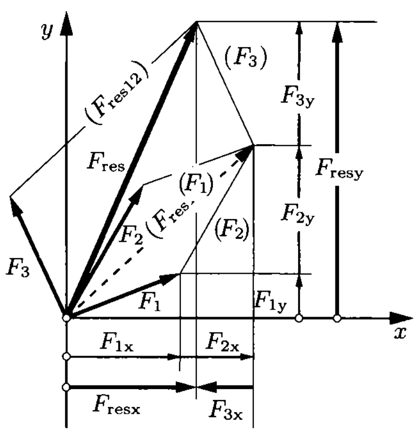

Abb. 3-7: Resultierende Kraft und ihre Komponenten im Kartesischen Koordinatensystem

Daraus folgen die Berechnungsgleichungen

$$F_{\text{res x}} = \sum F_{\text{x}} \qquad F_{\text{res y}} = \sum F_{\text{y}}$$

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_{\text{res x}}^2 + F_{\text{res y}}^2} \tag{3-2}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_{\text{res y}}}{F_{\text{res x}}}$$

Die Vorzeichen von $F_{\text{res x}}$ und $F_{\text{res y}}$ ergeben die Richtung und den Wirkungssinn der resultierenden Kraft. Die einzelnen Kombinationen sind in Tabelle 3-1 zusammengefasst.

	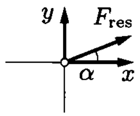	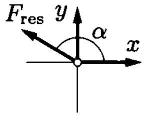	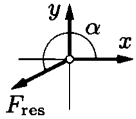	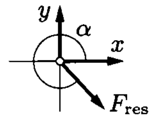
$F_{\text{res x}}$	+	−	−	+
$F_{\text{res y}}$	+	+	−	−
Quadrant	1.	2.	3.	4.

Tabelle 3-1: Lage der Resultierenden

Graphische Lösung

Man kann jeweils zwei Kräfte nach dem Parallelogramm der Kräfte (5. Lehrsatz) zusammenfassen und dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis eine Kraft, nämlich die gesuchte Resultierende, übrig bleibt. Dieses Verfahren ist umständlich. Man kann es vereinfachen, wenn man bedenkt, dass die Diagonale ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke teilt (s. Abb. 2-5a).

Für eine rationelle Lösung des Problems ist es notwendig, sich zwei Darstellungsarten zu eigen zu machen und diese streng voneinander zu trennen. Es handelt sich um den *Lageplan* und den *Kräfteplan.*

Lageplan

Dieser stellt eine Bauteilzeichnung dar, die für eine statische Berechnung in der Struktur vereinfacht sein kann. Die am Bauteil angreifenden Kräfte müssen jedoch in ihrer Lage zueinander und in der Richtung richtig eingetragen sein. Für eine graphische Lösung muss die Zeichnung maßstäblich sein, soweit dies die Abmessungen des Teils betrifft. Die Pfeillängen, die die Kraftgröße darstellen sollen, müssen nicht maßstäblich sein, wenn die Kräfte anderweitig angegeben sind. Als Beispiele für einen Lageplan kann neben der Abb. 3-3 auch die Abb. 6-24 gelten.

Kräfteplan

Im Kräfteplan müssen die Kräfte in ihrer Größe und Richtung, jedoch nicht in ihrer Lage zueinander richtig dargestellt werden. Das erfordert die Angabe eines Kräftemaßstabs. Das kann durch Einzeichnen einer bestimmten Länge erfolgen, die einer vorgegebenen Kraftgröße entspricht. Eine andere Methode, die aus satztechnischen Gründen im Buch nicht angewendet wird, ist die Angabe einer Maßstabskonstanten, z.B. $m_F = 100\,\mathrm{kN/cm}$. In diesem Falle entspricht eine Pfeillänge von 1 cm einer Kraft von 100 kN. Nach diesen Ausführungen stellt die Abb. 2-5b einen Kräfteplan dar, denn hier ist jeweils eine Kraft parallel verschoben. Diese Operation ist im Lageplan nicht erlaubt (s. 3. Lehrsatz). Wie die Abb. 6-25 zeigt, sind die Kräfte aus dem Lageplan parallel in den Kräfteplan verschoben und dort aneinandergesetzt (Krafteck).

Auf die Angabe eines Kräftemaßstabes kann man im Kräfteplan verzichten, wenn es sich um eine Überlegungsskizze handelt, die für eine Berechnung der einzelnen Größen dient.

Nach diesen Ausführungen soll auf die ursprüngliche Aufgabenstellung eingegangen werden. In einem Kräfteplan nach Abb. 3-8 kann man durch Aneinandersetzen der Kräfte nach dem 5. Lehrsatz zunächst z.B. die Reslutierende von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ermitteln (dünn eingezeichnet). Dieser wird vektoriell die Kraft $\vec{F}_3$ hinzuaddiert. Man erhält die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$. Die vektorielle Addition kann in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden (Abb. 2-5b). Das zeigt der gestrichelte Linienzug in Abb. 3-8.

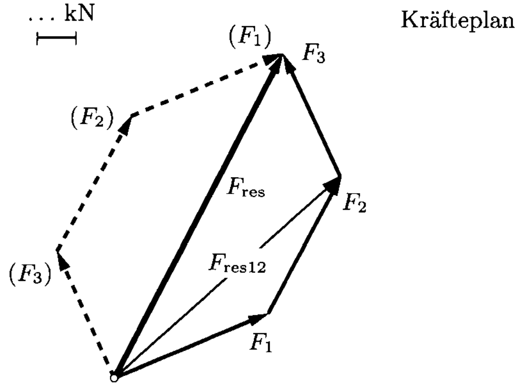

Abb. 3-8: Vektorielle Addition von Kräften

Zusammenfassend kann man feststellen:

Die Resultierende beliebig vieler Kräfte, die an einem gemeinsamen Angriffspunkt angreifen, erhält man durch geometrische Addition der Kräfte in beliebiger Reihenfolge.

Beispiel 1 (Abb. 3-9)

Für das gegebene Kräftesystem ist die resultierende Kraft nach Größe und Richtung zu bestimmen.

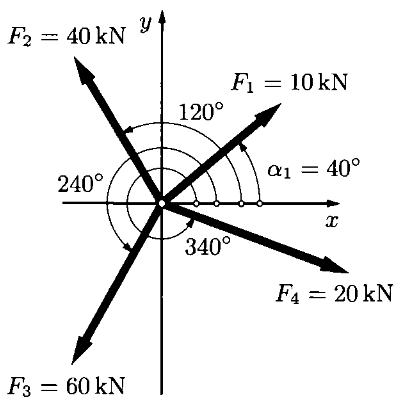

Abb. 3-9: Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Analytische Lösung

Es müssen die Gleichungen (3-2) ausgewertet werden. Die Kräfte sind in Form von Polarkoordinaten gegeben (Winkel und Länge der Vektoren).

Man kann mit dem Rechner auf Kartesische Koordinaten, d.h. auf x- und y-Komponenten übergehen und diese jeweils in einen addierenden Speicher geben. Es ist auch möglich, die Komponenten einzeln nach Gl. (3-1) zu ermitteln und sie zu addieren, was am einfachsten tabellarisch erfolgt:

i	$\frac{\alpha}{°}$	$\frac{F}{\text{kN}}$	$\frac{F_x}{\text{kN}}$	$\frac{F_y}{\text{kN}}$
1	40	10	7,66	6,43
2	120	40	−20,00	34,64
3	240	60	−30,00	−51,96
4	340	20	18,79	− 6,84
			$\sum$ −23,55	$\sum$ −17,73
			$= F_{\text{res x}}$	$= F_{\text{res y}}$

Die Komponenten der resultierenden Kraft werden nach den Gleichungen (3-2) zusammengesetzt. Das kann auch mit dem Rechner so geschehen, dass man diese

Werte als x- und y-Werte eingibt und in Polarkoordinaten umwandelt. Man erhält:

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_{\text{res x}}^2 + F_{\text{res y}}^2} = \sqrt{23{,}55^2 + 17{,}73^2}\,\text{kN}$$

$$\underline{F_{\text{res}} = 29{,}48\,\text{kN}}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_{\text{res y}}}{F_{\text{res x}}} = \frac{-17{,}73\,\text{kN}}{-23{,}55\,\text{kN}}; \qquad \underline{\alpha = 217{,}0°}$$

Die resultierende Kraft liegt im dritten Quadranten.

Graphische Lösung (Abb. 3-10)

Nach Festlegung eines Kräftemaßstabes werden die Kräfte in beliebiger Reihenfolge vektoriell addiert. Die Verbindung vom Ursprungspunkt der Konstruktion zur letzten Pfeilspitze ergibt die gesuchte resultierende Kraft nach Größe und Richtung.

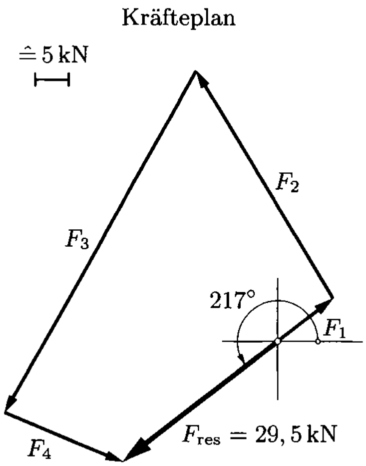

Abb. 3-10: Vektorielle Addition der Kräfte von Abb. 3-9

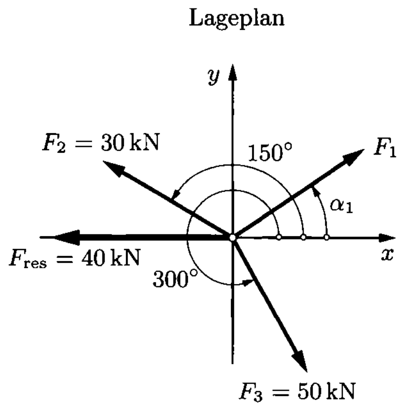

Abb. 3-11: Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Beispiel 2 (Abb. 3-11)

Die Kraft F_1 ist nach Größe und Richtung so zu bestimmen, dass die Resultierende des Kräftesystems wie angegeben wirkt.

Analytische Lösung

Ausgegangen wird von den Gleichungen (3-2):

$$\sum F_x = F_{\text{res}\,x}$$
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_{\text{res}\,x}$$
$$F_{1x} = F_{\text{res}\,x} - F_{2x} - F_{3x} \qquad F_{\text{res}\,x} = -40\,\text{kN}$$
$$F_{1x} = -40\,\text{kN} - 30\,\text{kN} \cdot \cos 150° - 50\,\text{kN} \cdot \cos 300°$$
$$F_{1x} = -39{,}02\,\text{kN}$$
$$\sum F_y = F_{\text{res}\,y} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$
$$F_{1y} = -F_{2y} - F_{3y} = -30\,\text{kN} \cdot \sin 150° - 50\,\text{kN} \cdot \sin 300°$$
$$F_{1y} = +28{,}301\,\text{kN}.$$

Die beiden Komponenten ergeben mit Hilfe der Gleichungen (3-1) die Kraft

$$\underline{F_1 = 48{,}20\,\text{kN}} \qquad \underline{\alpha_1 = 144{,}0°}.$$

Diese liegt im zweiten Quadranten.

Graphische Lösung (Abb. 3-12)

Es muss sich bei der vektoriellen Addition ein Linienzug

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_1 = \vec{F}_{\text{res}}$$

ergeben. Von diesen Größen ist nur $\vec{F}_1$ unbekannt. Die Verbindungslinie Pfeilspitze $\vec{F}_3$ zur Pfeilspitze $\vec{F}_{\text{res}}$ ist die gesuchte Kraft $\vec{F}_1$ nach Größe und Richtung.

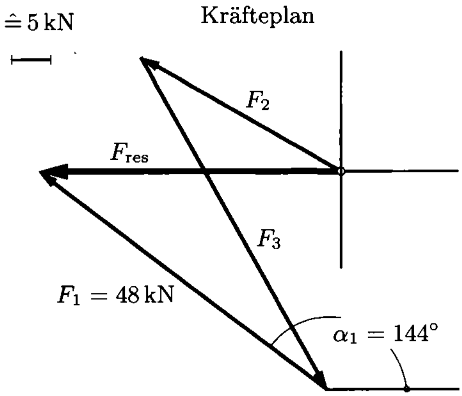

Abb. 3-12: Vektorielle Addition der Kräfte von Abb. 3-11

Beispiel 3 (Abb. 3-13)

Auf einer schiefen Ebene liegt nach Skizze ein Block der Masse $m = 30\,\text{kg}$. Er wird durch eine Stange am Herabgleiten gehindert. Block und Unterlage sind sehr glatt. Deshalb kann an der Berührungsstelle eine Kraft nur senkrecht zur Oberfläche angreifen. Wie groß sind Stangenkraft F_S und Kraft an der Auflagenseite des Blocks F_A, wenn die resultierende Kraft am Block gleich null sein soll?

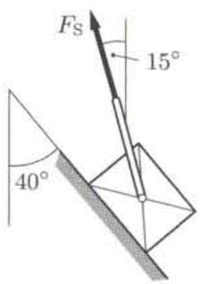

Abb. 3-13: Block auf schiefer Ebene

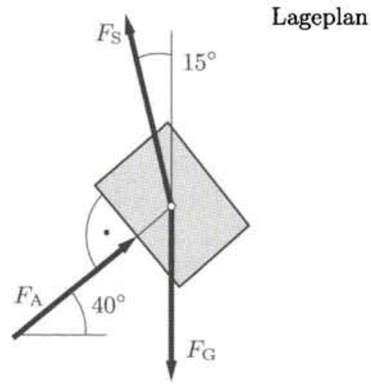

Abb. 3-14: Freigemachter Block

Analytische Lösung (Abb. 3-13/3-14)

Zunächst ist es notwendig, sich an Hand einer Skizze über die Wirkung der Kräfte klar zu werden. Es wird der *Lageplan* nach Abb. 3-14 gezeichnet. Die Gewichtskraft wirkt senkrecht nach unten, die Auflagekraft senkrecht zur Oberfläche und damit unter 40° zur Horizontalen. Für dieses Kräftesystem wird die Bedingung $F_{\text{res}} = 0$ nach den Gleichungen (3-2) angesetzt. Es stehen die Gleichungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ für die Berechnung der beiden Unbekannten F_S und F_A zur Verfügung. Bei Verwendung eines gedrehten Koordinatensystems kann man jeweils eine Gleichung nach einer Unbekannten auflösen. So vermeidet man das simultane Lösen beider Gleichungen. Das Koordinatensystem muss so gedreht werden, dass eine Achse in Richtung einer Unbekannten fällt. Hier wurde die x-Achse in die Wirkungslinie von F_A gelegt (Abb. 3-15). Für die Summation der Kräfte in die y-Richtung geht F_A nicht ein.

$$\sum F_y = 0 \qquad F_S \cdot \cos 25° - F_G \cdot \cos 40° = 0$$

$$F_S = \frac{\cos 40°}{\cos 25°} \cdot F_G$$

Mit $F_G = m \cdot g = 30\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 294\,\text{N}$ ist $\underline{F_S = 249\,\text{N}}$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_A + F_S \cdot \sin 25° - F_G \cdot \sin 40° = 0$$

$$F_A = F_G \cdot \sin 40° - F_S \cdot \sin 25°$$

$$F_A = 294\,\text{N} \cdot \sin 40° - 249\,\text{N} \cdot \sin 25°$$

$$\underline{F_A = 84\,\text{N}}$$

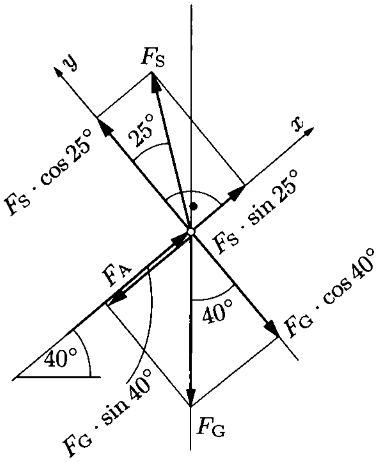

Abb. 3-15: Kräftesystem für Block

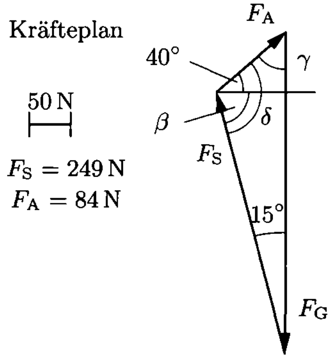

Abb. 3-16: Vektorielle Addition der Kräfte am Block

Graphische Lösung (Abb. 3-16)

Wenn $F_{res} = 0$ sein soll, muss die vektorielle Addition der drei Kräfte auf den Ausgangspunkt der Konstruktion zurückführen. Nach Festlegung eines Maßstabs beginnt die Konstruktion des *Kräfteplans* mit der bekannten Kraft F_G. Am Ende dieses Vektors wird die Wirkungslinie von F_S, vom Ausgangspunkt die von F_A gezogen. Bei der vektoriellen Addition werden Pfeile aneinandergesetzt. Diese Überlegung ergibt die Lage der Pfeilspitzen und damit die Kraftrichtungen.

Besonders günstig kann man das Problem lösen, wenn man von einer nicht maßstäblichen Skizze nach Abb. 3-16 ausgeht. Die Winkel im Dreieck betragen

$$\beta = 90° - 15° = 75°$$

$$\delta = \beta + 40° = 115°$$

$$\gamma = 90° - 40° = 50°$$

Es wird der sin-Satz angewendet.

$$\frac{F_S}{\sin 50°} = \frac{F_G}{\sin 115°}; \qquad \underline{F_S} = \frac{\sin 50°}{\sin 115°} \cdot 294\,\text{N} \underline{= 249\,\text{N}}$$

$$\frac{F_A}{\sin 15°} = \frac{F_G}{\sin 115°}; \qquad \underline{F_A} = \frac{\sin 15°}{\sin 115°} \cdot 294\,\text{N} \underline{= 84\,\text{N}}$$

Die Bedingung $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ bedeutet, alle Kräfte heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf. Damit bleibt die Masse in Ruhe, d.h. im Gleichgewicht. Die oben berechnete Stangenkraft würde sich im vorliegenden Fall tatsächlich in der Stange einstellen.

Aufgaben zum Abschnitt 3.2

Hinweis: Alle Aufgaben sollen analytisch gelöst werden. Die Ergebnisse sind mit dem graphischen Verfahren zu kontrollieren.

A3-1 bis A3-3 Für das abgebildete Kräftesystem sind zu bestimmen:

a) die x- und y-Komponente der resultierenden Kraft,
b) die resultierende Kraft nach Größe und Richtung.

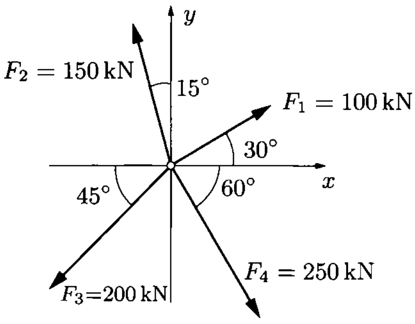

Abb. A3-1

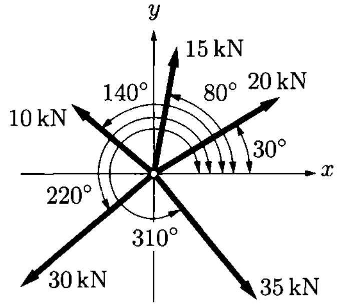

Abb. A3-2

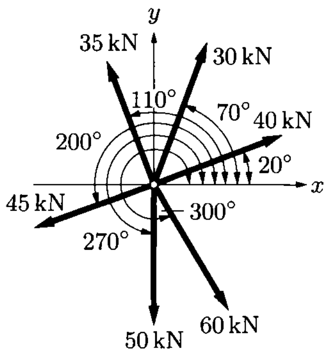

Abb. A3-3

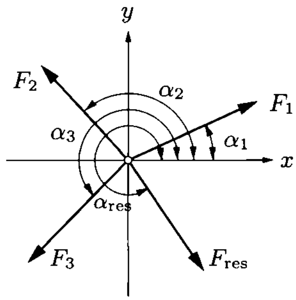

Abb. A3-4

A3-4 In dem skizzierten Kräftesystem sind $F_2; \alpha_2$ so zu bestimmen, dass die resultierende Kraft wie angegeben angreift.

$$F_1 = 100\,\mathrm{kN}; \quad \alpha_1 = 35°;$$
$$F_3 = 200\,\mathrm{kN}; \quad \alpha_3 = 250°;$$
$$F_{res} = 300\,\mathrm{kN}; \quad \alpha_{res} = 300°$$

A3-5 Zu bestimmen ist die Resultierende des skizzierten Kräftesystems für

$F_1 = 200\,\mathrm{kN}$; $F_2 = 300\,\mathrm{kN}$;
$a = 4$; $b = 5$; $c = -3$.

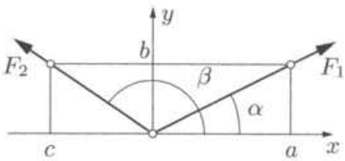

Abb. A3-5

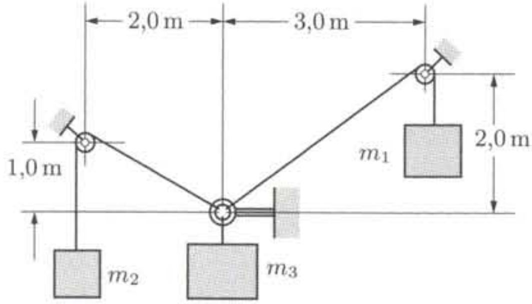

Abb. A3-6

A3-6 Eine Halterung ist nach Skizze belastet. Zu bestimmen ist die resultierende Kraft an der Öse für folgende Daten:

$m_1 = 500\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 300\,\mathrm{kg}$; $m_3 = 600\,\mathrm{kg}$.

(Rollen klein und reibungsfrei.)

A3-7 Zwei Kräfte greifen nach Skizze an einem Haltestab an. Mit welcher resultierenden Komponente wird am Stab gezogen und mit welcher gebogen? Lösung allgemein und für

$F_1 = 10{,}0\,\mathrm{kN}$; $\alpha_1 = 20°$;
$F_2 = 6{,}0\,\mathrm{kN}$; $\alpha_2 = 40°$.

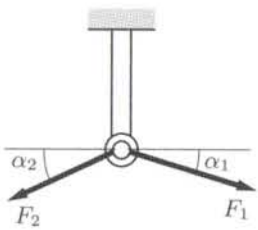

Abb. A3-7

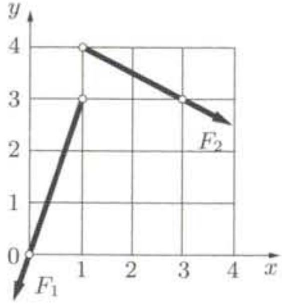

Abb. A3-8

A3-8 An einer Scheibe greifen nach Skizze zwei Kräfte an. Zu bestimmen ist die Resultierende und die Gleichung der zugehörigen Wirkungslinie für das eingezeichnete Koordinatensystem.

$F_1 = 500\,\mathrm{kN}$; $F_2 = 700\,\mathrm{kN}$.

Zusatzfrage: Wie müsste eine dritte Kraft wirken, damit $F_{res} = 0$ ist und welche physikalische Bedeutung hätte dieser Zustand?

A3-9 Für das abgebildete Kräftesystem ist eine fünfte Kraft nach Größe und Richtung für die Bedingung $F_{res} = 0$ zu bestimmen.

i	1	2	3	4
$F_i(\mathrm{kN})/\alpha_i(°)$	3,0/0	5,0/45	4,0/210	2,0/300

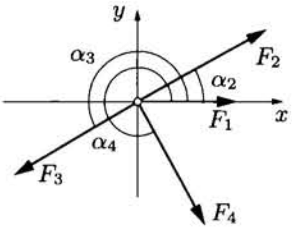

Abb. A3-9

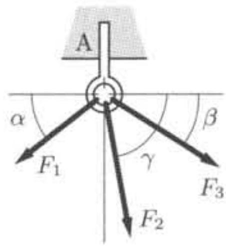

Abb. A3-10

A3-10 An der skizzierten Halterung sind drei Seile befestigt. Alle Seilkräfte und die Winkel β und γ sind vorgegeben. Die Kraft F_1 soll in der Richtung so eingestellt werden, dass die Befestigung in A nur vertikal belastet wird. Die Lösung soll allgemein erfolgen und anschließend für folgende Daten ausgewertet werden.

$$F_1 = 3{,}0\,\mathrm{kN}; \quad F_2 = 2{,}5\,\mathrm{kN}; \quad F_3 = 1{,}8\,\mathrm{kN};$$
$$\beta = 30°; \quad \gamma = 80°$$

A3-11 Zwei Schlepper ziehen geradlinig wie abgebildet ein Schiff. Die Seilkraft F_2 und die beiden Winkel werden gemessen. Zu bestimmen sind die Seilkraft F_1 und die am Schiff angreifende Resultierende. Die allgemeine Lösung soll für folgende Daten ausgewertet werden.

$$F_2 = 50{,}0\,\mathrm{kN}; \quad \alpha = 22°; \quad \beta = 30°$$

Abb. A3-11/A3-12

A3-12 Zwei Schlepper ziehen geradlinig wie abgebildet ein Schiff. Die beiden Kräfte und der Winkel β werden gemessen. Zu bestimmen sind die am Schiff angreifende Resultierende und die Richtung der Seilkraft F_1. Die allgemeine Lösung soll für folgende Daten ausgewertet werden.

$$F_1 = 40{,}0\,\mathrm{kN}; \quad F_2 = 50{,}0\,\mathrm{kN}; \quad \beta = 30°$$

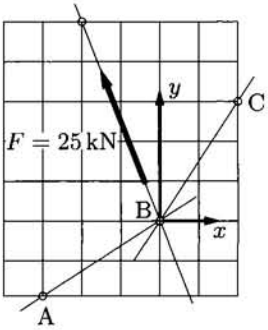

Abb. A3-13/A3-14

A3-13 An einer quadratisch gerasterten Scheibe greift nach Skizze eine Kraft an. Diese ist in die x- und y-Richtung zu zerlegen.

A3-14 An einer quadratisch gerasterten Scheibe greift nach Skizze eine Kraft an. Diese ist in die Richtungen A-B und B-C zu zerlegen.

A3-15 Ein Stabverband ist am Knoten nach Abbildung mit einer Masse m belastet. Die Gewichtskraft ist auf die beiden Stäbe aufzuteilen. Lösung allgemein und für $m = 1500\,\text{kg}; \beta = 25°$.

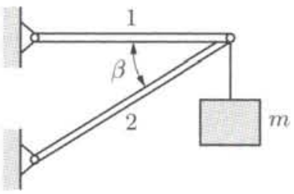

Abb. A3-15

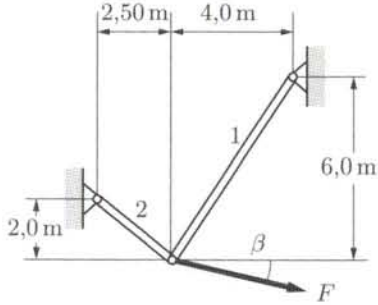

Abb. A3-16

A3-16 Die nach Skizze am Knoten schräg angreifende Kraft ist auf die beiden Stäbe aufzuteilen.

$$F = 25\,\text{kN}; \qquad \beta = 10°$$

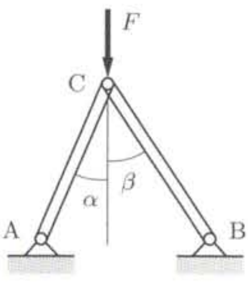

Abb. A3-17

A3-17 Welche Stabkräfte S_1 und S_2 müssen im abgebildeten Stabverband auf das Gelenk C übertragen werden, wenn dort $F_{\text{res}} = 0$ gelten soll? Lösung allgemein und für

$$F = 50{,}0\,\text{kN}; \quad \alpha = 30°; \quad \beta = 45°.$$