Lehr- und Handbücher zu Geld, Börse, Bank und Versicherung

Herausgegeben von Universitätsprofessor Dr. Guido Eilenberger

Bisher erschienene Werke:

Arlinghaus · Balz, Going Public – Der erfolgreiche Börsengang
Averdiek-Bolwin, Die Effizienz von Aktienbörsen
Beike · Barckow, Risk-Management mit Finanzderivaten, 3. Auflage
Beyer, Risikomanagement beim PKW-Leasing
Biermann, Die Mathematik von Zinsinstrumenten, 2. Auflage
Blattner, Internationale Finanzierung
Börner, Strategisches Bankmanagement
Bosch, Finanzmathematik für Banker
Breit · Reinhart, Finanzierung der Unternehmung: Zinsmanagement
Döhring, Gesamtrisiko-Management von Banken
Dross, Genußrechte
Dürr, Investor Relations, 2. Auflage
Eilenberger, Bankbetriebswirtschaftslehre, 7. Auflage
Eilenberger, Betriebliche Finanzwirtschaft, 8. Auflage
Herzberger, Einführung in die Finanzmathematik
Jenkis, Wohnungsbaufinanzierung
Knoppe, Strategische Allianzen
Koch · Umann · Weigert, Lexikon der Lebensversicherung
Meise, Realoptionen als Investitionskalkül
Müller, Wirtschaft und Finanzmärkte
Nadler, Internationale Wohnungsfinanzierung
Putnoki, Grundlagen der Außenhandelsfinanzierung
Thoma, Chaostheorie, Wirtschaft und Börse, 2. Auflage
Thoma, Dynamische Prozesse in der Ökonomie und an den Finanzmärkten
Waschbusch, Bankenaufsicht
Widdel, Theorie und Praxis der Aktienspekulation

Die Mathematik von Zinsinstrumenten

Preise, Kennzahlen, Risikomanagement und Anwendungen von (derivativen) Zinsinstrumenten in der modernen Investmentpraxis

Von
Diplom-Wirtschaftsmathematiker
Bernd Biermann

2., überarbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Biermann, Bernd:
Die Mathematik von Zinsinstrumenten : Preise, Kennzahlen, Risikomanagement
und Anwendung von (derivaten) Zinsinstrumenten in der modernen Investmentpraxis /
Bernd Biermann. – 2., überarb. Aufl.. – München ; Wien : Oldenbourg, 2002
(Lehr- und Handbücher zu Geld, Börse, Bank und Versicherung)
ISBN 3-486-25976-8

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-25976-8

Inhaltsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Z	Zinsbetrag
K	Kapitalbetrag
t	Anzahl der Tage
BP	Basispunkt
i, j, k, l	Laufindices
B	Tagebasis
x	gesuchte Größe
f	Forwardrate oder Anzahl der Monate bis zum nächsten Kupontermin
K_n	Kapital zum Zeitpunkt n
q	Diskontfaktor
q_n	Diskontfaktor zum Zeitpunkt n
$\prod_{l=1}^{n} q_l = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$	Produkt der Zahlen $q_1, q_2, \cdots, q_n$
e	Eulersche Zahl ≈2,718281828
$e^{\delta!}$	Exponentialfunktion
$\ln(\cdot)$	Natürlicher Logarithmus
z	Zinssatz
df	Diskontfaktor
$\sum_{t=1}^{n} q_t = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$	Summe der Zahlen $q_1, q_2, \cdots, q_n$
r	Rendite
GR	Geldmarktrendite
CY	Current Yield
$SYTM$	Simple Yield to Maturity
CF	CashFlow
PTR	Percentage Total Return
DTR	Dollar Total Return
A	Auszahlung
E	Einzahlung
$f = \frac{m}{12}$	Jahresbruch
T	Fälligkeitszeitpunkt
BFR	Bräß/Fangmeyer Rendite
MMR	Moosmüller Rendite
$AIBDR$	AIBD Rendite
$AIBD$	Association of International Bond Dealers

A_i	Annuitäten
T_i	Tilgungen
Z_i	Zinsbeträge
K_i	Kapitalbeträge
SDF	Summe der Diskontfaktoren
SDF^*	Summe der $df_i \cdot (i-1)$
ΔP	Preisdifferenz
$\Delta Rendite$	Renditedifferenz
$\frac{\partial P}{\partial Rendite}$	Ableitung des Preises nach der Rendite
BPV	Basispointvalue
MCF	Makro-Cash-Flow
$ModDur$	Modified Duration
Dur	Duration
w_t	Gewichte
$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 Rendite}$	zweite Ableitung des Preises nach der Rendite
$Konv$	Konvexität
$Konv^*$	angenäherte Konvexität
Z_t	Zinssatz zum Zeitpunkt t, falls der Zinssatz als Zufallsvariable aufgefasst wird
K_t	Barwert des Bonds zum Zeitpunkt t
X_t	relative Zinssatzänderung von Zeitpunkt $t-1$ bis t
$1-\alpha$	Konfidenzniveau
λ	Parameter, der durch das Konfidenzniveau und die Standardabweichung festgelegt wird
EW	Erwartungswert
μ	Erwartungswert
Var	Varianz
σ^2	Varianz
StD	Standardabweichung
σ	Standardabweichung
P	Preis (Barwert) eines Assets
$P(X)$	Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen X

$[VaR] := \begin{bmatrix} Var_1 \\ \vdots \\ Var_m \end{bmatrix}$	VaR Vektor
$[a] := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$	Vektor der relativen Barwertanteile
$[Korr] := \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m,1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$	Korrelationsmatrix
$[Cov] := \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \cdots & \sigma_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m,1} & \cdots & {\sigma_m}^2 \end{bmatrix}$	Varianz-Kovarianz-Matrix
$[\Sigma] := \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}$	Diagonalmatrix, die Standardabweichungen enthält
VaR	Value at Risk
BW_i	Barwert der i-ten Komponente in dem Portfolio
BW	Barwert des Portfolios
$\sigma_{i,j}$	Kovarianz zwischen der Zufallsvariablen X_i und der Zufallsvariablen X_j
$\rho_{i,j}$	Korrelation zwischen der Zufallsvariablen X_i und der Zufallsvariablen X_j
$df_{a;b}$	Diskontfaktor , der CashFlows vom Zeitpunkt b auf den Zeitpunkt a abzinst
$\tau_i = \dfrac{Tage_i}{Basis}$	der Tagefaktor für die i-te Periode
$EDSP$	Exchange Delivery Settlement Price
$N(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$\tau = \dfrac{Tage}{Basis}$	Jahresanteil

Fwd	ForwardZinssatz
d_1	Argument der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
d_2	Argument der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
π	Kreiszahl $\approx 3{,}14159265$
FRA	Forward Rate Agreement
IRR	Internal Repo Rate
CtD	Cheapest to Deliver
IRS	Interest Rate Swap

Vorwort zur zweiten Auflage

Die Einführung des EURO als gesetzliches Zahlungsmittel in Europa sowie die breite Resonanz auf die erste Auflage machten eine Überarbeitung des Buches notwendig. Dabei wurden neben der Währungsumstellung einige wenige sachliche Korrekturen vorgenommen sowie formelle Schwachstellen beseitigt.
Es wäre schön, wenn diese zweite Auflage eine ebenso breite Aufnahme finden würde wie die erste.

Vorwort zur ersten Auflage

In den letzten Jahren traten die Zinsmärkte zunehmend aus dem Schatten der Aktienmärkte:
Der private Investor hat längst gemerkt, daß der Begriff Rentenpapier nicht mehr automatisch eine sichere Anlageform darstellt, falls vor Endfälligkeit ein Liquiditätsbedarf entsteht, denn die Kursschwankungen von Bundesobligationen konnten in den vergangenen Jahren durchaus mit denen von Aktien mithalten.
Der institutionelle Investor sucht immer intensiver nach Finanzierungsinstrumenten und Anlageformen, die auf seine Bedürfnisse in Hinblick auf Rendite und Risiko exakt zugeschnitten sind.
In diesem Zusammenhang haben sich viele Banken und Investmenthäuser aufgemacht, immer wieder neue strukturierte Anlagen zu *erfinden*. Im allgemeinen setzen diese sich zwar aus bereits bekannten Instrumenten zusammen, aber das Zusammenspiel der vertrauten Instrumente kann zu, für den Wissenschafler sehr interessanten, für den Betroffenen jedoch sehr schmerzlichen Effekten führen.
Ein professionelles Handling dieser *High-Tech-Geschäfte* setzt besonderes Know-How voraus, welches von Betriebswirten, Händlern, Mathematikern und Informatikern gleichermaßen getragen werden muß.
Darüberhinaus haben die professionellen Marktteilnehmer, nationale Aufsichtsbehörden und übergeordnete Verbände und Gremien erkannt, daß ein gewisser Standard im Risikomanagement sowohl für das Überleben einzelner als auch für die Stabilität des gesamten, weltweiten, Finanzmarktes unerläßlich ist. Diese Erkenntnis wurde nicht zuletzt durch die großen Verluste bei Metallgesellschaft (1993), den Untergang der Barings Bank (1995) und die enormen Verluste bei Daiwa Bank (1995) bestätigt. Die auf diesem Hintergrund entwickelten Steuerungs- und Kontrollinstrumente setzen dementsprechend ein enormes mathematisches Know-How voraus, welches kaum noch überschaubar ist.
In diesem Kontext soll das vorliegende Buch sowohl dem praktisch orientierten Mathematiker und Informatiker als auch dem mathematisch orientierten Praktiker dienen, indem es einen Überblick über das weite

Feld der *Zinsmathematik* gibt. Dies ist zwar nicht das erste Buch über die Mathematik von Zinsinstrumenten, aber es spricht den *Mathematiker* an, indem es auf die stringente Herleitung von Formeln achtet und interessante Beweise in Form von Übungsaufgaben bereitstellt, die dem Spieltrieb eines jeden Mathematikers entgegenkommen.
Der *Praktiker* hingegen findet eine konsistente Darstellung des gesamten Instrumentariums, welches zum Pricing, zur Risikobeurteilung und damit zum Hedging von Zinsinstrumenten in der modernen Investmentpraxis unerlässlich ist und im zunehmend härter werdenden Wettbewerb der Marktteilnehmer einen entscheidenden Vorteil darstellt.
Der Bogen spannt sich von der einfachen Zinsrechnung über den Aufbau von Zinskurven, Renditeberechnungen und die Berechnung von Risikoparametern bis hin zum Pricing von Bonds, Floatern, Forward-Rate-Agreements, Interest-Rate-Swaps, Zinsoptionen und Zinsfutures.
Die wechselseitige Verbindung der Zinslandschaften verschiedener Währungen wird im Kapitel Deviseninstrumente aufgezeigt.
Im Anhang sind einige für das Verständnis des Buches wichtige mathematische Grundlagen zusammengestellt.
Der Stoff wird schrittweise erarbeitet, jedes Kapitel baut auf den vorigen Kapiteln auf. Die Formeln sind selbsterklärend, indem "sprechende Variablen" benutzt werden, sodaß ständiges Zurückblättern weitestgehend entfällt. Darüberhinaus wird der dargestellte Stoff anhand einer Fülle von Beispielen und Übungen vertieft.
Damit ist dieses Buch sowohl zum Selbststudium als auch zum Nachschlagen bestens geeignet.

An dieser Stelle gilt mein besonderer Dank Frau Dipl. WiMath. Ruth Hilt für ihre Unterstützung.

1. Zinsrechnung

Grundlage der Mathematik von Zinsinstrumenten ist die Berechnung von Zinsen. Wir unterscheiden zwischen der einfachen Zinsrechnung, die keine Zinseszinsen berücksichtigt und im allgemeinen bei Laufzeiten unter einem Jahr Anwendung findet und der Zinseszinsrechnung, die bei mehrperiodigen Laufzeiten, normalerweise über einem Jahr, angewandt wird.

1.1. Einfache Zinsrechnung

Wir wollen die einfache Zinsrechnung, ihre Anwendung und Problematik an einem Beispiel darstellen:

Beispiel *1.1.1.*:
Ein Kreditnehmer nimmt einen Kredit in Höhe von EUR 100.000.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p.a. auf.
Dies bedeutet, daß er nach Ablauf eines Jahres einen Betrag von EUR 105.000.000,-- an den Kreditgeber zurückzahlen muß.

Der Rückzahlungsbetrag (*Endwert*) setzt sich aus dem aufgenommenen Kapital (*Nominalkapital*) (EUR 100.000.000,--) und der *Zinszahlung* (EUR 5.000.000,--) zusammen. Die Zinszahlung wird berechnet als Funktion des Nominalkapitals (K), der Laufzeit (t) und des Zinssatzes (z).

Zinssätze werden im allgemeinen als *pro Jahres Zinssätze* (*per anno, p.a*) angegeben.

Wenn die Laufzeit t nicht ein ganzes Jahr, sondern nur ein halbes Jahr beträgt, darf der *Zinsbetrag* (Z) bei gleichem Zinssatz z nur halb so hoch sein wie bei einer Laufzeit von einem ganzen Jahr.
Diese Überlegung führt in natürlicher Weise zu der *linearen Zinsformel*, die bei Laufzeiten unter einem Jahr gewöhnlich ihre Anwendung findet:

$$\boxed{Z = K \cdot \frac{z}{100} \cdot \frac{t}{B} = K \cdot z\% \cdot \frac{t}{B} = K \cdot z\% \cdot \tau}$$

Formel *1.1*

Der Term $\frac{t}{B} = \tau$ wird als *Jahresanteil* bezeichnet. B heißt *Tagebasis*. Die Anzahl der Tage t in der Zinsperiode hängt von der *Zinsmethode*, oder der *Day-Count-Convention*, ab.

In der Praxis werden verschiedene Zinsmethoden unterschieden, die sich in der Wahl der Tagebasis und in den Berechnungsmodalitäten der Laufzeit t unterscheiden.
Es finden sich Tagebasen B von 360 Tagen und von 365, zuweilen auch von 366 Tagen. Die Berechnung der Laufzeit t erfolgt entweder nach der *deutschen Methode,* d.h. der Monat wird generell mit 30 Tagen angesetzt, oder nach der *internationalen Methode*, bei der die tatsächliche Anzahl der Kalendertage berücksichtigt wird.
Die verschiedenen Zinsmethoden sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Zinsmethoden				
Bezeichnung	Tage basis	Anzahl der Zinstage	Anwendung	Kurzbezeichnung
Euro-Methode	360	aktuelle Berechnung	Am Euromarkt für fast alle Währungen	act/360
Bond-Methode	360	Monat mit 30 Tagen	Für deutsche Wertpapiere und Sparbücher	30/360
Englische Methode	365	aktuelle Berechnung	Zum Beispiel für die Währungen GBP und BEF	act/365

Tabelle *1.1.*

Neben der Angabe, wie die Anzahl der Tage berechnet wird, ist es in der Praxis auch wichtig festzulegen, was geschieht, wenn ein Datum kein Bankarbeitstag ist. Es haben sich die folgenden Konventionen herausgebildet:

Following:
Falls ein Tag kein Bankarbeitstag ist, wird der nächste Bankarbeitstag genommen.
Modified Following:
Man passt das Datum auf den nächsten gültigen Bankarbeitstag an, sofern dieser im gleichen Monat liegt. Ist dies nicht möglich, nimmt man den vorhergehenden Bankarbeitstag.
Preceding:
Falls ein Tag kein Bankarbeitstag ist, wird der vorhergehende Bankarbeitstag genommen.

Modified Preceding:
Man passt das Datum auf den vorhergehenden gültigen Bankarbeitstag an, sofern dieser im gleichen Monat liegt. Ist dies nicht möglich, nimmt man den folgenden Bankarbeitstag.
End-of-Month:
Die Zahlung erfolgt generell am letzten Bankarbeitstag des entsprechenden Monats.
Second-Day-After:
Falls der Zahlungstag ein Bankfeiertag ist, wird die Zahlung auf den übernächsten Bankarbeitstag verschoben.

Die Höhe des Zinsbetrages hängt linear sowohl von der Höhe des Zinssatzes als auch von der Laufzeit ab. Damit entspricht die obige Berechnung dem kaufmännischen Ansatz des Dreisatzes.

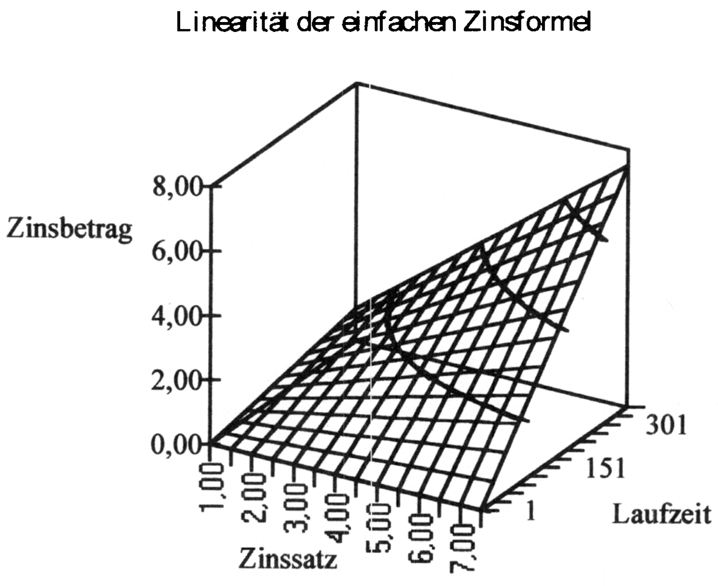

Abbildung *1.1*
In der Praxis ergibt sich immer wieder die Notwendigkeit, einen Zinssatz von einer Zinsmethode in eine andere Zinsmethode umzurechnen.

Beispiel ***1.1.2.*****:**
Der Zinssatz gemäß *BondMethode* (*30/360*) liegt bei einer Laufzeit vom 1.6.96 bis 1.6.97 bei 4% p.a. Wie hoch muß der äquivalente Zinssatz nach den Zinsmethoden *act/360* bzw. *act/365* sein?

Der äquivalente Zinssatz nach der Zinsmethode act/360 muß nach Ablauf der Laufzeit zu demselben Zinsbetrag führen, wie er sich mit 4% nach der *BondMethode* ergibt. Es muß also folgende Beziehung gelten:

$$Kapital \cdot 4\% \cdot \frac{360}{360} = Kapital \cdot z\% \cdot \frac{365}{360}$$

Damit ergibt sich: $$4\% \cdot \frac{360}{360} \cdot \frac{360}{365} = z\% = 3{,}945\%$$

Der äquivalente Zinssatz für die Zinsmethode *act/365* berechnet sich analog.

Umrechnen von Zinssätzen von einer Zinsmethode in eine andere						
Zinssatz	Von	Bis	Laufzeit		Basis	Zins
			Bond	act		betrag
4,000%	01.06.96	01.06.97	360		360	4,000
3,945%	01.06.96	01.06.97		365	360	4,000
4,000%	01.06.96	01.06.97		365	365	4,000

Tabelle *1.2.*

1.2. Zinseszinsrechnung

Die einfache Zinsrechnung betrachtet nur einperiodige Situationen. Die Verallgemeinerung der Zinsrechnung auf mehrere Perioden führt direkt zur *Zinseszinsrechnung.*

Beispiel *1.2.1.*:
Zwei Kreditnehmer nehmen je einen Kredit in Höhe von EUR 100.000.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p.a. Die Laufzeit soll drei Jahre betragen. Die Tilgung erfolgt am Ende der Laufzeit in einer Summe.
Der erste Kreditnehmer zahlt seine Zinsen nach jedem Jahr.
Der zweite Kreditnehmer läßt von der Bank die jeweiligen Zinsen am Ende eines jeden Jahres mitfinanzieren. Die Zinszahlung erfolgt also in einer Summe am Ende der Laufzeit.
Die Entwicklung der beiden Kredite zeigen folgende Tabellen:

Kreditnehmer 1						
Von	Bis	Kredit betrag	Zinssatz	Zins betrag	Tilgung	Zahlung
01.06.96	01.06.97	100.000	5,00%	5.000	0	5.000
01.06.97	01.06.98	100.000	5,00%	5.000	0	5.000
01.06.98	01.06.99	100.000	5,00%	5.000	100.000	105.000
			Summen:	15.000	100.000	115.000

Kreditnehmer 2						
Von	Bis	Kredit betrag	Zinssatz	Zins betrag	Tilgung	Zahlung
01.06.96	01.06.97	100.000	5,00%	5.000	0	0
01.06.97	01.06.98	105.000	5,00%	5.250	0	0
01.06.98	01.06.99	110.250	5,00%	5.513	100.000	115.763
			Summen:	15.763	100.000	115.763

Zinseszinseffekt: 763

Tabelle *1.3.*

Der analoge Fall tritt ein, wenn ein Anleger über die ihm zustehenden Zinsen nach Gutschrift nicht verfügt, sondern mit dem Kapital wieder-anlegt.
Diese Sichtweise lässt sich folgendermaßen formalisieren:

Sei K_n das Kapital am Ende der Periode n, Z_n die Zinszahlung am Ende der Periode n, z_n sei der Zinssatz für die Periode n. Ferner kürzen wir den Term $(1 + z_n\%)$ durch q_n ab.
Dann gilt:

$$K_n = K_{n-1} + Z_{n-1} = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{z_n}{100}$$

$$K_n = K_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{z_n}{100}\right) = K_{n-1} \cdot q_n$$

Mittels *vollständiger Induktion* läßt sich zeigen, daß gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{l=1}^{n} q_l$$

Falls die Zinssätze für alle Perioden gleich sind, $z_l \equiv z$ für alle l, dann gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Diese Formeln berechnen das Endkapital nach n Perioden unter der Voraussetzung, daß zu Beginn ein Anfangskapital in Höhe von K_0 Geldeinheiten angenommen wird. Die zugrundegelegte Periodenlänge beträgt 1 Jahr, die Zinsmethode ist *30/360.*
Eine Anpassung auf unterjährige Perioden und eine andere Zinsmethode erhält man durch Anpassung von q_n:

$$q_n = \left(1 + \frac{z_n}{100} \cdot \frac{t_n}{Basis}\right)$$

Formel *1.2*

(Bezeichnungen wie im Kapitel *Einfache Zinsrechnung*)

Beispiel *1.2.2.*:
Ein Investor legt EUR 100.000,-- in einem 3-Monats-Festgeld zu 3% p.a. an, verlängert inclusive Zinsen um 6 Monate zu einem Zinssatz von 3,25% und schließlich verlängert er inclusive Zinsen um einen Monat zu 2,75%.
Zinsmethode: *30/360.*
Mit diesen Angaben gilt:

$$q_1 = \left(1 + \frac{3}{100} \cdot \frac{90}{360}\right) = 1{,}0075$$

$$q_3 = \left(1 + \frac{2{,}75}{100} \cdot \frac{30}{360}\right) = 1{,}0022917$$

$$q_2 = \left(1 + \frac{3{,}25}{100} \cdot \frac{180}{360}\right) = 1{,}01625$$

Damit liegt das Endvermögen nach 10 Monaten bei
$100.000 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}01625 \cdot 1{,}0022917 = 102.621{,}83$ EUR.

Beispiel *1.2.3.*:
Der Treasurer einer Bank hat vor einem Jahr einen Kredit in Höhe von EUR 100 Mio zu 5% an eine andere Bank gegeben. Die Gesamtlaufzeit liegt bei 3 Jahren. Die Refinanzierung erfolgte für das erste Laufzeitjahr mit 4%. Für das zweite Jahr refinanziert er sich zu 4,50%.
Frage: Wie hoch darf der Refinanzierungssatz in einem Jahr höchstens sein, damit der Treasurer keinen Verlust macht auf dieses Geschäft? Der Einfachheit halber sei die Zinsmethode *30/360* angenommen.

Ohne Berücksichtigung von Zinseszinsen liegt der auch als *Break-Even-Satz* bezeichnete maximale Refinanzierungssatz bei 5,5%, denn es ist lediglich die folgende Gleichung aufzulösen:
$4\% + 4{,}5\% + z\% = 5\% + 5\% + 5\%$

Auf der linken Seite stehen die Zinsaufwendungen, auf der rechten Seite die Zinserträge.

Mit Berücksichtigung der Zinseszinsen ergibt sich folgende Gleichung:

$$q_1 \cdot q_2 \cdot (1 + z\%) = q^3$$

mit

$$q_1 = 1{,}04$$

$$q_2 = 1{,}045$$

$$q = 1{,}05$$

Auflösen nach x ergibt einen maximalen Refinanzierungssatz von 6,5168% für das dritte Jahr.

Das bewußte Eingehen der Fristeninkongruenz von Engagement und Refinanzierung bezeichnet man als *Fristentransformation*.

Die Zinssätze, die für Perioden gelten, die mit der aktuellen Kassevaluta beginnen, nennt man *Spot(Zins)sätze* oder *Spotrates*. Zinssätze, die für zukünftige Perioden Gültigkeit haben, nennt man *Forward(Zins)sätze* oder *Forwardrates*.
Der im letzten Beispiel berechnete Zinssatz ist ein Forwardsatz. Der bekannte Zinssatz in Höhe von 4,5% ist ein Spotsatz.
Ein Forwardsatz, der für eine Periode gilt, die in drei Monaten beginnt und in sechs Monaten endet wird oftmals kurz als (3x6)-Forwardsatz bezeichnet.
Analog deckt ein (12x15)-Forwardsatz eine Periode ab, die in 12 Monaten beginnt und in 15 Monaten endet. Siehe hierzu auch das Kapitel FRA.

Üblicherweise werden Zinssätze auf einer jährlichen Basis quotiert, das heißt, daß die Zinszahlungen jährlich erfolgen. Eine Umrechnung auf halbjährliche Zinszuschlagstermine muß den Zinseszinseffekt berücksichtigen.

Beispiel *1.2.4.*:
Der Zinssatz für einen einjährigen Kredit über EUR 100 Mio liege bei 4,00% (*30/360*) bei jährlicher Zinszahlung, Tilgung am Ende der Laufzeit. Wenn der Kreditnehmer die Zinsen halbjährlich zahlen möchte, muß der Nominalzins etwas unter 4,00% liegen. Denn wenn die Bank statt am Ende der Laufzeit 4 Mio halbjährlich 2 Mio bekommen würde, würde sie einen Wiederanlagegewinn, einen Zinseszinsgewinn, erwirtschaften, den sie dem Kunden weitergeben sollte.

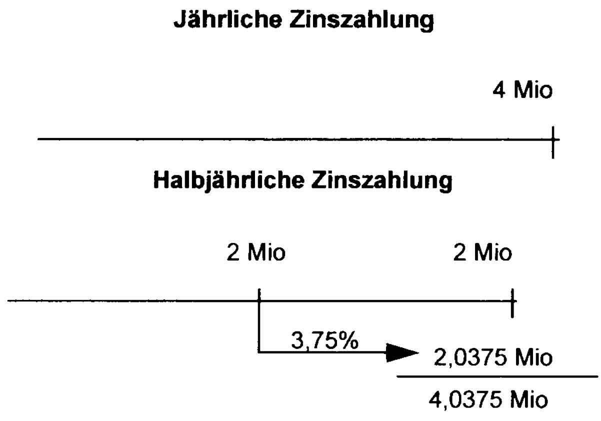

Abbildung *1.2*

Bei einem Zinssatz von 3,75% für die Anlage der Zinsen auf ein halbes Jahr erwirtschaftet die Bank einen Ertrag von EUR 37.500,--. Zum Ende der Laufzeit des Kredites hat sie also insgesamt EUR 4.037.500,-- Zinsvorteil aus dem Kredit erwirtschaftet, dies entspricht einer Nominalverzinsung von 4,0375% p.a.

Setzt man einen *Wiederanlagezins* in Höhe des aktuellen Kreditzinses voraus, kann man aus dem jährlichen Zinssatz den halbjährlichen Zinssatz $x\%$ aus folgender Beziehung berechnen:

$$\left(1 + z\% \cdot \frac{T}{Basis}\right) = \left(1 + x\% \cdot \frac{t}{Basis}\right)^2$$

Hier steht z für den jährlichen Zinssatz, T für die Anzahl der Tage im Jahr, t für die Anzahl der Tage im halben Jahr.
Hinweis: Bei der Anwendung dieser Formel und der Verallgemeinerung auf vierteljährliche oder gar monatliche Zinstermine ist darauf zu achten, daß die Prämisse der Wiederanlage zum Kreditzinssatz im allgemeinen nicht zutreffen wird.

Ein weiteres Problem wird in folgendem Beispiel deutlich:

Beispiel *1.2.5.*:
Angenommen, ein Kredit über EUR 100 Mio läuft ein Jahr mit einem Nominalzins von 6,00% (*30/360*).
Ein zweiter Kredit über EUR 200 Mio läuft nur ein halbes Jahr, ebenfalls zu 6,00% (*30/360*).

Wie hoch ist der Nominalzinssatz bei vierteljährlicher Zinszahlung?
Die Anwendung obiger Formel führt zu:

$$\left(1+6\%\cdot\frac{360}{360}\right)=\left(1+z\%\cdot\frac{90}{360}\right)^4 \Rightarrow z\%=5{,}8696\%$$

Wendet man diesen Zinssatz auf den Kredit an und stellt alle *CashFlows* tabellarisch dar, ergibt sich folgendes Bild:

Nominalbetrag: 100 Mio , Zinssatz: 5,86954%

Periode	Nominalbetrag in Mio	Zinszahlung in Mio	Endwert in Mio
1	100,0000	1,4674	
2	101,4674	1,4889	
3	102,9563	1,5108	
4	104,4671	1,5329	106,0000

Nominalbetrag: 200 Mio, Zinssatz: 5,86954%

Periode	Nominalbetrag in Mio	Zinszahlung in Mio	Endwert in Mio
1	200,0000	2,9348	
2	202,9348	2,9778	205,9126

Tabelle *1.4.*

Es fällt auf, daß der Zinseszinseffekt, der in der obigen Formel berücksichtigt ist, bei einer Gesamtlaufzeit von nur einem halben Jahr nicht zur vollen Wirkung kommt, und der Endwert des Kredites nicht die notwendigen EUR 206 Mio erreicht.

In der folgenden Tabelle ist ein Kredit mit vierteljährlicher Zinszahlung einem Kredit gleicher Laufzeit aber jährlicher Zinszahlung gegenübergestellt. Nach Ablauf eines jeden Jahres sind die Endwerte jeweils gleich, die CashFlowStrukturen also wirtschaftlich gleichwertig.
Im letzten halben Jahr kommt jedoch der Zinseszinseffekt wieder nicht zur vollen Wirkung, die Bank macht somit einen kleinen Zinseszinsverlust.

	Nominal: 100 Mio Zinssatz: 5,8694% viertelj.			Nominal: 100 Mio Zinssatz: 6,0000% jährlich		
Periode	Nominal betrag in Mio	Zins zahlung in Mio	Endwert in Mio	Nominal betrag in Mio	Zins zahlung in Mio	Endwert in Mio
1	100,000	1,467		100,000	0,000	
2	101,467	1,489		100,000	0,000	
3	102,956	1,511		100,000	0,000	
4	104,467	1,533	106,000	100,000	6,000	106,000
5	100,000	1,467		100,000	0,000	
6	101,467	1,489		100,000	0,000	
7	102,956	1,511		100,000	0,000	
8	104,467	1,533	106,000	100,000	6,000	106,000
9	100,000	1,467		100,000	0,000	
10	101,467	1,489	102,956	100,000	3,000	103,000

Tabelle *1.5.*

Beispiel *1.2.6.*:
Ein Kunde vereinbart mit seiner Bank eine Geldanlage über ein Jahr. Der Zinssatz liegt bei 9,00% p.a. *30/360*, jährlich nachschüssige Zinsgutschrift.
Er fragt nach folgenden Konditionen:

1. Halbjährliche Zinsgutschrift.
2. Monatliche Zinsgutschrift.
3. Tägliche Zinsgutschrift
4. Stetige Verzinsung.

Nach der Formel aus **Beispiel *1.2.4.*** muß der entsprechende Zinssatz nach folgender Formel berechnet werden:

$$\left(1 + 9{,}00\% \cdot \frac{360}{360}\right) = \left(1 + z\% \cdot \frac{1}{n}\right) \quad \text{mit} \quad n = \begin{cases} 2 \\ 12 \\ 360 \\ \infty \end{cases}$$

Damit ergeben sich die folgenden Zinssätze:

n	x%
1	9,00%
2	8,81%
12	8,65%
360	8,62%
99.999.999	8,62%

Tabelle *1.6.*

Unterstellt man für das Jahr beispielsweise 99.999.999 Zinszuschlagstermine, hat man sich der stetigen Verzinsung numerisch schon sehr gut genähert. Aus mathematischer Sicht kann der Aufzinsungsfaktor der stetigen Verzinsung jedoch durch eine Grenzwertüberlegung "exakt" angegeben werden. Es gilt nämlich:

$$\boxed{\left(1 + x\% \cdot \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{x\%}}$$

Formel *1.3*

Wobei *e* die *Eulersche Zahl* bezeichnen soll (e ≈ 2,718281828).

Damit ergibt sich folgende Gleichung für die *stetige Verzinsung*:

$$\left(1 + 9{,}00\% \cdot \frac{360}{360}\right) = e^{z\%} \qquad bzw. \quad \ln(1{,}09) = z\% = 8{,}6177696\%$$

(Zu den *Potenzgesetzen*, dem *natürlichen Logarithmus* $\ln(\cdot)$ und der Eulerschen Zahl siehe Anhang.)

1.3.Zerozinsen, Diskontfaktoren, Spotrates, Forwardrates

Ein *Zerozinssatz* ist ein Zinssatz, der den Zinseszinseffekt bei mehrperiodigen Anlagestrategien explizit berücksichtigt, bzw. die Auszahlung von zwischenzeitlichen Zinsen explizit ausschließt.
Diese Zerozinssätze sind für Laufzeiten bis zu einem Jahr mit den am Markt beobachteten Spotzinssätzen identisch. *Spotzinssätze* sind Zinssätze, die für eine Periode Gültigkeit haben, die mit der aktuellen Spotvaluta beginnt. Bei Laufzeiten über einem Jahr kann man die entsprechenden Zerozinssätze berechnen und eine Zerozinskurve aufbauen. Dies zeigen wir im Kapitel Zerozinskurve genauer.
In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Vorteilen und einigen ersten Anwendungen von Zerozinssätzen befassen.

Beispiel *1.3.1.*:
Ein Kreditnehmer möchte einen Kredit in Höhe von EUR 100 Mio aufnehmen und inclusive Zinseszinsen nach drei Jahren zurückführen. Der entsprechende Zero(Zins)satz liegt bei 4% p.a.
Dann ist die Zahlung nach drei Jahren folgendermaßen zu berechnen:
$100 \cdot (1+4\%)^3 = 112{,}4864$

Der Kreditnehmer muß also zur Kreditfälligkeit EUR 112.486.400,-- zahlen. In diesem Betrag sind alle angefallenen Zinsen und Zinseszinsen enthalten.

Der Betrag von EUR 112,4864 Mio ist der *Endwert* des CashFlows von EUR 100 Mio unter dem zugrundegelegten Zerosatz.

Den Faktor $(1+4\%)^3$ nennt man *Aufzinsungsfaktor*.

Beispiel *1.3.2.*:
Ein Kunde erwartet in fünf Jahren einen Zahlungseingang in Höhe von EUR 120 Mio. Wie hoch darf ein Kredit heute sein, damit er komplett inclusive Zinseszinsen aus dem erwarteten CashFlow zurückgeführt werden kann? Der Zerosatz für fünf Jahre liegt bei 4,5%.
Sei der Kreditbetrag mit K abgekürzt, dann muß gelten:

$$K\cdot(1+4{,}5\%)^5=120 \qquad \text{bzw} \qquad K=120\cdot\frac{1}{(1+4{,}5\%)^5}=96{,}2941$$

Der Kunde kann also einen Kredit in Höhe von EUR 96.294.100,-- aufnehmen und nach fünf Jahren mit dem erwarteten CashFlow zurückführen.

In diesem Beispiel haben wir den *Barwert* des CashFlows von EUR 120 Mio unter dem zugrundegelegten Zinssatz berechnet.

Der Bruch $\frac{1}{(1+4{,}5\%)^5}$ wird *Diskontfaktor* oder *Abzinsungsfaktor* genannt.

Der *Endwert* eines CashFlows nach einer gegebenen Haltedauer ist der Wert, auf den er anwächst, wenn er inclusive Zinseszinsen mit dem für die Haltedauer gültigen Zerosatz angelegt wird.

Der *Barwert* eines zukünftigen CashFlows ist der heutige Wert dieses CashFlows.
Das Berechnen eines Endwertes nennt man *Aufzinsen*.
Das Berechnen eines Barwertes heißt *Diskontieren* oder *Abzinsen*.

Es ist leicht einzusehen, daß Barwerte *additiv* sind: Der Barwert einer Folge von CashFlows ist gleich der Summe der einzelnen Barwerte.
Der Endwert einer Folge von CashFlows ist hingegen nur dann additiv, wenn sich die einzelnen Endwerte auf denselben Zeitpunkt beziehen.

Ein *Forwardsatz (Forwardzinssatz* oder *Forwardrate)* ist ein Zinssatz, der einen Zeitraum abdeckt, der in der Zukunft, nach der aktuellen Spotvaluta, beginnt. Dazu folgendes Beispiel:

Beispiel ***1.3.3.*****:**
Der Zerosatz für 3 Jahre liege bei 4%.
Der Zerosatz für 5 Jahre liege bei 4,5%
In drei Jahren erwarten wir einen Geldeingang in Höhe von EUR 100 Mio, in fünf Jahren erwarten wir einen Eingang von EUR 90 Mio.
Heute haben wir einen Kreditbedarf von EUR 161,12 Mio.
Der Barwert der EUR 100 Mio liegt bei EUR 88,9 Mio $\left(100 = x \cdot 1{,}04^3\right)$, der Barwert der EUR 90 Mio liegt bei EUR 72,22 Mio.
Wir können also heute einen Kredit von EUR 88,9 Mio für drei Jahre aufnehmen und einen Kredit von EUR 72,22 Mio für 5 Jahre aufnehmen. Damit ist unser kompletter Kreditbedarf gedeckt. Man kann auch sagen, der Barwert der beiden CashFlows liegt bei EUR 161,12 Mio $\left(161{,}12 = 88{,}9 + 72{,}22\right)$.
Der Barwert des Kredites und der beiden Cash-Inflows liegt bei 0, da Zahlungseingänge mit einem positiven Vorzeichen, Zahlungsausgänge aber mit einem negativen Vorzeichen versehen werden und der Barwert des Kredites gerade seiner Nominalhöhe entspricht.

Beispiel ***1.3.4.*****:**
Es sei folgende Situation gegeben:
Zerosatz für 2 Jahre: 3,5%.
Zerosatz für 3 Jahre: 4,0%.
Dann muß der Forwardsatz vom zweiten bis zum dritten Jahr bei 5,007% liegen.
Denn:

$$(1 + 3{,}5\%)^2 \cdot (1 + z\%) = (1 + 4{,}0\%)^3$$

bzw

$$(1 + z\%) = \frac{(1 + 4{,}0\%)^3}{(1 + 3{,}5\%)^2} \Rightarrow z\% = 5{,}007\%$$

Eine Vertiefung der Berechnung von Forwardrates folgt in den Kapiteln FRA und IRS.

1.4. Übungen

Übung *1.1.*:
Ein Investor legt EUR 100.000,-- nach folgendem Plan an:
Vom 10.10.96 bis 10.01.97 zu 3,50%
Vom 10.01.97 bis 10.06.97 zu 3,25%
Vom 10.06.97 bis 10.12.97 zu 3,10%

1. Wie hoch sind seine Zinserträge nach den Tagemethoden *act/360* und *30/360*?
2. Wie lauten die Diskontfaktoren für die einzelnen Perioden?
3. Wie hoch ist der Zerozinssatz vom 10.10.96 bis 10.12.97 nach der Tagemethode *act/360*?
4. Wie hoch ist sein Endvermögen unter Berücksichtigung von Zinseszinsen?

Übung *1.2.*:

1. Berechnen Sie den Barwert der folgenden CashFlows unter Berücksichtigung der angegebenen Zerozinssätze:

Von	Bis	Cash-Flows	Zerosatz	Laufzeit in Jahren
10.10.96	10.10.97	200.000,00	3,50%	1
10.10.96	10.10.98	300.000,00	4,00%	2
10.10.96	10.10.99	400.000,00	4,50%	3

Tabelle *1.7.*

2. Welchen Preis würden Sie für diese CashFlows maximal zahlen?
3. Was könnte man tun, wenn der Preis für diese CashFlows bei EUR 800.000,-- liegen würde?

Übung 1.3.:
Gegeben ist folgende Zinssituation (*act/360*):

Monate	Von	Bis	Zinssatz	Tage
1	12.04.96	12.05.96	3,000	30
3	12.04.96	12.07.96	3,250	91
6	12.04.96	12.10.96	3,750	183
9	12.04.96	12.01.97	4,000	275
12	12.04.96	12.04.97	4,125	365

Tabelle *1.8.*

1. Ergänzen Sie die entsprechenden Diskontfaktoren.
2. Berechnen Sie die Forwardrate vom 12.10.96 auf den 12.4.97.

Übung *1.4.*:
(Berechnen von *Durchschnittszinssätzen*)
Ein Festgeld wird auf 6-Monatsbasis regelmäßig verlängert. In den letzten drei Perioden erzielte der Anleger die folgenden Zinssätze: 3,00%, 5,00%, 7,00%. Der Einfachheit halber sei die Zinsmethode *30/360* vorausgesetzt. Welche durchschnittliche Verzinsung erreichte der Anleger, wenn die folgenden Prämissen gelten:

1. Entnahme der Zinszahlungen direkt nach Gutschrift.
2. Wiederanlage der Zinszahlungen direkt nach Gutschrift.

2. Zinskurven

In diesem Kapitel wollen wir die verschiedenen Formen und Arten von Zinskurven einführen.

2.1. Zerozinskurve

Die *Zerozinskurve* stellt einen Zusammenhang zwischen der Höhe eines *Zerozinssatzes* und seiner Laufzeit her. Sie ermöglicht es deshalb, für einen bestimmten Zeitpunkt einen Zerozinssatz zu berechnen, der dann zum Beispiel zum Abzinsen eines CashFlows herangezogen werden kann. Die Zerozinskurve stellt die Grundlage für das Pricing von Zinsinstrumenten dar.
Sie wird zuweilen auch einfach *Zinsstrukturkurve* oder *Spot-Yield-Curve* genannt.

Beispiel ***2.1.1.:***
Gegeben sei ein Bond mit einem Kupon von 10% (BondBasis) und einer Laufzeit von genau 3 Jahren.
Der Zerosatz für ein Jahr liege bei 5%, der Zerosatz für 2 Jahre bei 7%, der Zerosatz für 3 Jahre bei 9%, jeweils auf BondBasis quotiert.
Der Preis des Bonds errechnet sich dann als Summe der Barwerte der einzelnen CashFlows des Bonds:

$$\text{Preis} = 10 \cdot \frac{1}{(1+5\%)} + 10 \cdot \frac{1}{(1+7\%)^2} + (10+100) \cdot \frac{1}{(1+9\%)^3} = 103{,}198$$

Das Problem liegt jedoch im Aufbau der Zerozinskurve. In Deutschland existiert kein liquider Markt für Zerobonds. Die Renditen von Zerobonds, die Zerozinssätze, sind also nicht direkt am Markt beobachtbar. Da aber jedes Zinsinstrument auf Basis der Zerozinskurve bewertet werden kann, muß sich auch aus den Preisen dieser Zinsinstrumente die Zerozinskurve berechnen lassen.
Für die Laufzeiten bis zu einem Jahr ist dies auch kein Problem, da unterjährig die beobachtbaren Depotsätze, Zinssätze im Interbankenmarkt, bekannt sind und bereits Zerozinssätze sind. Bei Laufzeiten über einem Jahr sind zumeist jährliche Zinszahlungen vereinbart, die rechnerisch eliminiert werden müssen, um Zerozinssätze zu erhalten.
Das Vorgehen, um aus den beobachtbaren Zinssätzen Zerozinssätze zu berechnen, basiert auf der Überlegung, die im vorherigen Beispiel bereits vorgestellt wurde, im Wesentlichen dreht man das Pricing eines Wertpapiers nur um:

Angenommen, es existiert ein Wertpapier, welches bei 100% notiert und jährlich einen bestimmten Kupon K zahlt. Dieses Wertpapier werde nach einer Laufzeit von T zu 100% getilgt. Dann ist der Kupon *am Markt*, da das Wertpapier keinen Auf- oder Abschlag hat.
Seien die Zerozinssätze für Laufzeiten bis T-1 bekannt, dann gilt für den Zerosatz z für die Laufzeit T):

$$100 = K \cdot DF_1 + \ldots + K \cdot DF_{T-1} + (K+100) \cdot \frac{1}{(1+z\%)^T}$$

$$\Leftrightarrow \quad 100 = K \cdot \sum_{t=1}^{T-1} DF_t + (100+K) \cdot \frac{1}{(1+z\%)^T}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{100 - K \cdot \sum_{t=1}^{T-1} DF_t}{(100+K)} = \frac{1}{(1+z\%)^T}$$

bzw.

$$\boxed{z\% = \left(\frac{100+K}{100 - K \cdot \sum_{t=1}^{T-1} DF_t} \right)^{\frac{1}{T}} - 1}$$

Formel *2.1*

Aus der obigen Formel ist ersichtlich, daß der Zerosatz für den Zeitpunkt T erst berechnet werden kann, wenn die Zerosätze für die Zeitpunkte *1* bis *T-1* bereits bekannt sind. Das Verfahren ist iterativ und wird als *Bootstrapping* bezeichnet.

Zu derselben Formel kommt man auch über eine andere Überlegung:

Beispiel ***2.1.2.*****:**
Angenommen, der einjährige Zerozinssatz sei bekannt (=4%). Es existiere am Markt ein Wertpapier mit zweijähriger Laufzeit, welches zu 100% notiert und auch zu 100% getilgt wird. Der Kupon sei wieder mit K bezeichnet (K=5%). Dann sieht die CashFlow-Struktur dieses Wertpapiers folgendermaßen aus: