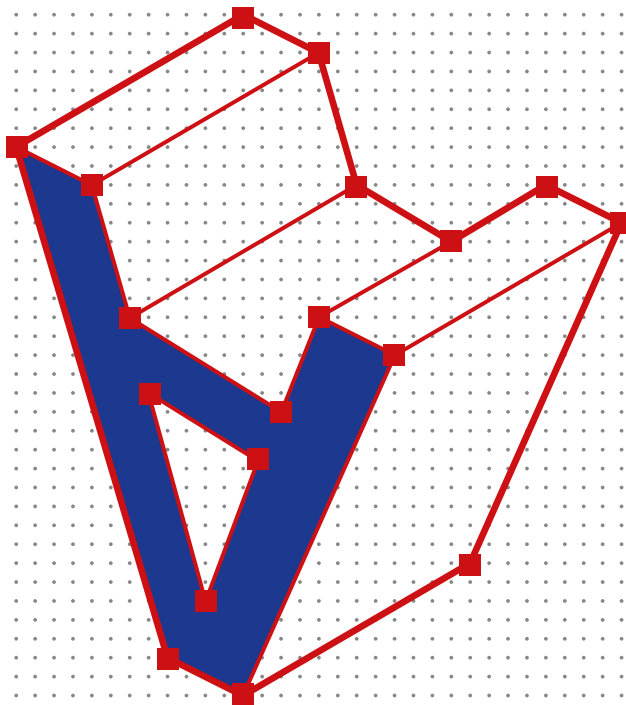


Norbert GRATZL

VON LOGIK ZU METALOGIK

Einführung in die Metatheorie
der Prädikatenlogik



HANSER

Gratzl

Von Logik zu Metalogik

Norbert Gratzl

Von Logik zu Metalogik

Einführung in die Metatheorie der Prädikatenlogik

HANSER



Print-ISBN: 978-3-446-48611-9

E-Book-ISBN: 978-3-446-48643-0

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autoren, Herausgeber und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren, Herausgeber und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Lisa Hoffmann-Bäuml

Herstellung: Liese Richter

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Max Kostopoulos

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen

Printed in Germany

Inhalt

Vorwort	IX
1 Einleitung	1
1.1 Logik, Metalogik, Zentrale Sätze	1
1.2 Aufbau des Buches (Roadmap)	5
1.3 Einführung: Übungen	11
2 Formale Sprache	13
2.1 Alphabet, Grammatik und Formeln	13
2.2 Beweise mittels Induktion	19
2.3 Codierung, Lesbarkeit, Aufzählbarkeit	25
2.4 Formale Sprache: Übungen	28
3 Semantische Methoden	31
3.1 Einige Vorüberlegungen	32
3.1.1 Prädikatenlogische Interpretationen	32
3.1.2 Semantische Vorüberlegungen	34
3.2 Semantische Grundlagen I	37
3.3 Semantische Grundlagen II	42
3.3.1 Logische Wahrheit & logische Falschheit	42
3.3.2 Modell & Kontingenz	51
3.3.3 Logische Folgerung	52

3.3.4	Metatheoreme zur logischen Folgerung (semantisch)	56
3.3.5	Extensionalität (semantisch)	59
3.3.6	Weitere semantische Überlegungen	61
3.4	Zwei Mal Philosophisches	65
3.5	Semantische Methoden: Übungen	67
4	Syntaktische Methoden	71
4.1	Das formale System S	74
4.1.1	Einige Theoreme von S.....	79
4.1.2	Einige Schlussweisen von S.....	82
4.1.3	Herleitbare Schlussregeln von S	83
4.1.4	Extensionalität (syntaktisch)	86
4.2	S elegant: Se	86
4.2.1	Deduktive Äquivalenz	87
4.2.2	Das formale System Se	89
4.3	Ein Mal Philosophisches	93
4.4	Syntaktische Methoden: Übungen	95
5	Widerspruchsfreiheit & Modell	99
5.1	Zwei Versionen von Korrektheit & Vollständigkeit	100
5.2	Korrektheit	105
5.2.1	Erster Beweisansatz: Herleitungshöhe	106
5.2.2	Zweiter Beweisansatz: Endlichkeit von Beweisen	107
5.2.3	Dritter Beweisansatz: Korrektheit, Version 2	108
5.3	Vollständigkeit – Ser (ohne Gleichheit)	110
5.3.1	Teil 1: Henkins Theorem.....	111
5.3.2	Teil 2: Lindenbaums Lemma	115
5.3.3	Anmerkungen zur Existenz von saturierten Mengen	118
5.4	Vollständigkeit von Se (mit Gleichheit)	119
5.5	Ein Caveat	122
5.6	Ausblick auf die Entscheidbarkeit	124
5.7	Widerspruchsfreiheit & Modell: Übungen	126

6	Konsequenzen & Anwendungen	129
6.1	Erweiterung der Sprache & der Semantik	130
6.2	Korrektheit & Beweisbarkeit	133
6.3	Konservative Erweiterungen	134
6.4	Die Existenz von Nicht-Standardmodellen	137
6.5	Die Größe von Modellen	140
6.6	Elementare Äquivalenz & Isomorphie	145
6.7	Der Interpolationssatz von Craig	147
6.8	Relative Interpretierbarkeit & relative Widerspruchsfreiheit	149
6.9	Konsequenzen & Anwendungen: Übungen	151
7	Platons Bart: Kleine Einführung in die Freie Logik	153
7.1	Wie spricht man über Nicht-Existierendes?	154
7.1.1	Zugang 1 – Eine opulente Ontologie	154
7.1.2	Zugang 2 – Eine minimalistische Ontologie	155
7.2	Negative Freie Logik: Semantische Methoden	157
7.3	Negative Freie Logik: Syntaktische Methoden	161
7.3.1	Ein paar Theoreme von SN	161
7.3.2	Metatheoreme zur logischen Folgerung (syntaktisch)	163
7.3.3	Metalogische Überlegungen: Korrektheit & Vollständigkeit	163
7.4	Negative Freie Logik: Eine Kennzeichnungstheorie	165
7.4.1	Historischer Abriss	165
7.4.2	Ein systematischer Ansatz	167
7.4.3	Abschluss & Ausblick	169
7.5	Platons Bart: Übungen	171
8	Coda	175
8.1	Ein Blick zurück	175
8.2	Philosophische Logiken	176
8.3	Tarski, Gödel, Gentzen: Grenzen	180
8.3.1	Ich bin nicht wahr – (Tarski)	180
8.3.2	Ich bin nicht beweisbar – (Gödel)	181
8.3.3	Ich kann meine Widerspruchsfreiheit (fast) beweisen – (Gentzen)	185

9	Musterlösungen	187
9.1	Musterlösungen: Einleitung	187
9.2	Musterlösungen: Formale Sprache	190
9.3	Musterlösungen: Semantische Methoden	194
9.4	Musterlösungen: Syntaktische Methoden	200
9.5	Musterlösungen: Widerspruchsfreiheit & Modell	205
9.6	Musterlösungen: Konsequenzen & Anwendungen	208
9.7	Musterlösungen: Platons Bart	213
	Literatur	217
	Autor	221
	Index	223

Vorwort

Zueignung

Dieses Buch richtet sich an alle, die schon etwas von Logik gehört haben und jetzt mehr darüber wissen wollen – wirklich mehr. Es ist jedoch kein bis ins letzte Detail formalistisches Werk, das ohne einen Funken Prosa auskommt. Wenn Sie das erwarten, ärgern Sie sich nicht, legen Sie das Buch weg! Dieses Buch ist genau genug, aber für manche sicherlich zu gesprächig. – An alle, die sich an klaren Gedanken erfreuen: Lesen Sie weiter!

Anfängerinnen und Anfänger sind ebenso willkommen. Seien Sie aber gewahr: An manchen Stellen könnte es etwas hurtig zugehen.

Auch wenn Sie nie vorhaben, eine *Theorembeweiserin* zu werden, so schadet es sicherlich nicht, ein paar Methoden zur Hand zu haben, um sich selbst und selbständig zu überlegen, ob etwa ein Argument folgerichtig (logisch gültig) ist. Was Ihnen logisches Denken eröffnet, ist etwas mehr Klarheit und damit etwas mehr Autonomie. Sapere aude! Ja, die Logik ist ein Anfang in ein selbständiges und damit auch kritisches Denken. Schärfen Sie Ihren Geist!

Mein besonderer Dank gilt Daniel Misselbeck-Wessel, Diego, Elio La Rosa, Jonas Raab, Marcus Rossberg, Michael Kurt Hermann, Nils Kürbis, Nina Tod und Xanthippe für ihre wertvollen Anregungen und die Unterstützung während der Entstehung dieses Buches. Ebenso danke ich den Teilnehmenden meiner Kurse, deren reges Interesse maßgeblich zur Entstehung dieses Bandes beigetragen hat.

Ebenso möchte ich mich herzlich bei Frau Lisa Hoffmann-Bäumel und Frau Sophia Zschache vom Hanser Verlag bedanken, die mir stets mit Rat und Tat zur Seite standen und dieses Projekt professionell begleitet haben.

1

Einleitung

Lernziele

- Zentrale Bausteine der Klassischen Logik.
- Einige zentrale Fragestellungen der Metalogik.
- Sie kennen die grundlegende Entsprechung zwischen semantischer Folgerung ($\models$) und syntaktischer Herleitbarkeit ($\vdash$) in der Klassischen Logik.
- Sie kennen zwei Formulierungen der kritischen Sätze der Metalogik (Korrektheit und Vollständigkeit).
- Sie wissen, wie das Buch aufgebaut ist.

Nach diesem Kapitel finden Sie Übungen. Durch das Lösen dieser können Sie Ihr Verständnis des Inhalts aktiv überprüfen und festigen.

Los geht's!

1.1 Logik, Metalogik, Zentrale Sätze

Beginnen wir mit einer Frage, die Sie gestellt haben könnten:

Was soll das Buch?

Dieses Buch bietet eine konzise Einführung in die Metalogik der Klassischen Logik, genauer gesagt der Prädikatenlogik erster Stufe. Doch was verstehen wir unter **Klassischer Logik**? Wie fast alle Logiken lässt sie sich sowohl semantisch als auch syntaktisch charakterisieren. Eine semantische Charakterisierung beruht auf drei grundlegenden Prinzipien:

Prinzip der Bivalenz

Jede Formel ist unter jeder Interpretation entweder *wahr* oder *falsch* – aber niemals beides und niemals keines von beidem.

Existenzvoraussetzung 1

Jeder singuläre Term (jeder Name) muss etwas in einem Gegenstandsbereich (alternative Bezeichnungen: in der Domain bzw. dem Universum der Interpretation) bezeichnen. Leere Namen sind nicht erlaubt.

Existenzvoraussetzung 2

Der Gegenstandsbereich (die Domain, das Universum) einer Interpretation ist niemals leer. Sofern es mindestens einen Namen gibt, folgt Existenzvoraussetzung 2 aus Existenzvoraussetzung 1.

Diese auf den ersten Blick unscheinbaren Prinzipien haben weitreichende Konsequenzen.

Nach der üblichen Vorgehensweise können Formeln einer formalen Sprache die logische Struktur von Aussagesätzen einer natürlichen Sprache repräsentieren. Nehmen wir an, die Formel $P(c)$ repräsentiere den Aussagesatz 'Diego ist ein Hund'. Das **Prinzip der Bivalenz** besagt nun, dass $P(c)$ unter jeder Interpretation entweder wahr oder falsch sein muss. Daraus folgt direkt, dass die Formel $P(c) \vee \neg P(c)$ ('Diego ist ein Hund oder es ist nicht der Fall, dass Diego ein Hund ist', kürzer: 'Diego ist ein Hund oder Diego ist kein Hund') unter *jeder* Interpretation wahr sein muss – sie ist eine **logische Wahrheit**. Wir können auch sagen: Diego ist in der Extension des Ausdrucks 'ist ein Hund'; wobei unter der *Extension* eines Prädikats (hier: 'ist ein Hund') die Menge aller Dinge eines Gegenstandsbereichs (Universums/einer Domain) zu verstehen ist, auf die der Ausdruck zutrifft.

Betrachten wir ein zweites Beispiel: 'Wenn Diego ein Hund ist, dann gibt es Hunde.' In der Klassischen Logik ist die entsprechende Formel, ' $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$ ', ebenfalls eine logische Wahrheit. Warum? Wegen der **Existenzvoraussetzungen**! Wenn die Formel ' $P(c)$ ' überhaupt als wahr bewertet wird, muss der Name ' c ' (Diego) auf ein Objekt im Universum der Interpretation verweisen. Wenn dieses Objekt in der Extension von 'Hund' liegt, gibt es trivialerweise etwas, das ein Hund ist. Andererseits: Wenn ' $P(c)$ ' unter einer Interpretation falsch ist, dann ist wegen der Wahrheitsbedingung für Implikationsformeln die Formel ' $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$ ' unter dieser Interpretation wahr. Weitergedacht heißt das: ' $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$ ' ist sowohl wahr, wenn ' $P(c)$ ' wahr ist, als auch wenn ' $P(c)$ ' unter einer Interpretation falsch ist. Wegen des Prinzips der Bivalenz gibt es keine weiteren Fälle. Also gilt: ' $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$ ' ist logisch wahr.

Formeln fallen aber nicht einfach so vom Himmel, sondern sind Teil einer formalen Sprache. Wir widmen dem Aufbau einer **formalen Sprache** ein ganzes Kapitel – zugegebenermaßen werden in diesem auch andere Dinge angesprochen. Eine formale Sprache bildet die Grundlage für die Entwicklung einer formalen Semantik und von formalen Systemen.

Wie wir in diesem Buch zeigen werden, entsprechen sich in der Klassischen Logik die syntaktische Herleitbarkeitsrelation und die semantische Relation der logischen Folge hervorragend, nachgeradezu *optimal*. Das bedeutet insbesondere: Alles, was in einem formalen System beweisbar ist, ist auch logisch wahr. Umgekehrt gilt auch: Alles, was logisch wahr ist, ist auch in einem formalen System beweisbar. Folglich sind die beiden logischen Wahrheiten, die wir gerade entdeckt haben – $P(c) \vee \neg P(c)$ und $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$ – auch **Theoreme**, die sich formal herleiten/beweisen lassen.

Logiken, die insbesondere die Existenzvoraussetzungen der Klassischen Logik in Frage stellen, werden als *Freie Logiken* bezeichnet und sind Gegenstand eines späteren Kapitels.

Der **syntaktische Zugang** zur (mittlerweile) Klassischen Logik war historisch gesehen der erste. Gottlob Frege gelang in seiner *Begriffsschrift* von 1879 [Fre79] – wenn auch in einer anderen Notation – der Durchbruch. Frege ging von einer (damals) neuartigen, logischen Satzanalyse aus und schuf, wie sich später zeigte, das erste **korrekte** und **vollständige** System der Prädikatenlogik erster Stufe.

Was ist Metalogik?

In der Klassischen Logik, so haben wir schon festgestellt und werden wir sehen, entsprechen sich die semantische Folgerungsrelation und die syntaktische Herleitbarkeitsrelation exakt. Alles, was logisch wahr ist (wie unsere beiden Beispiele), ist auch in einem formalen System beweisbar. Untersuchungen solcher Zusammenhänge sind paradigmatische Themen der **Metalogik**. Sie ist die Disziplin, die nicht *in* der Logik argumentiert, sondern *über* die Logik. In der Metalogik oder **Metatheorie** analysieren wir die Eigenschaften von formalen Systemen (auch von formalen Sprachen und formalen Semantiken). Typische metalogische Fragen sind: Ist unser System widerspruchsfrei? Oder: Können wir alles, was logisch wahr ist, auch beweisen?; und umgekehrt: Ist alles, was beweisbar ist, auch logisch wahr? Allgemeiner können wir fragen: Wenn eine Formel aus einer Formelmenge (auch: Prämissen- bzw. Annahmемenge) in einem formalen System herleitbar ist, folgt die Formel aus der Formelmenge auch semantisch?

Zusammenfassend sei gesagt: Die Metalogik ist die Disziplin, die Logik selbst zum Gegenstand der Untersuchung macht. Sie entsteht auch aus dem intellektuellen Bedürfnis, unser formales Handwerkszeug – das Beweissystem – zu rechtfertigen. Wir werden eine präzise semantische Definition von logischer Folge angeben; unser Hauptziel in der Metalogik ist es, mathematisch exakt zu beweisen, dass unser formales Kalkül logische Folge adäquat abbildet. Genau dieser Beweis der Adäquatheit – der Nachweis, dass unser syntaktisches Herleitungsverfahren weder zu wenig noch zu viel herleitet – ist das Zentrum dieser Einführung in die Metalogik der Klassischen Logik.

Zielsetzung des Buches

Das Kernanliegen dieses Buches besteht darin, ein tiefes und klares Verständnis von zwei zentralen Sätzen der Metalogik zu erarbeiten: dem **Vollständigkeitssatz** und dem **Korrektheitssatz**.

Sie stellen die fundamentale Verbindung zwischen der semantischen Welt der logischen Folgerung und der syntaktischen Welt der Herleitbarkeit her. Im Folgenden sei Γ eine Formelmengende einer (noch näher zu bestimmenden) formalen Sprache, A sei eine Formel eben dieser.

Vollständigkeit (Version 1)

Wenn aus einer Formelmengende Γ eine Formel A logisch folgt (wir werden das später so schreiben: $\Gamma \models A$), dann ist A aus Γ auch (in einem formalen System, FS) herleitbar (wir werden das später so schreiben: $\Gamma \vdash_{\text{FS}} A$).

Korrektheit (Version 1)

Wenn eine Formel A aus Γ herleitbar ist ($\Gamma \vdash A$), dann folgt A aus Γ auch logisch ($\Gamma \models A$). Beide Sätze haben auch eine zweite Version:

Vollständigkeit (Version 2)

Wenn eine Formelmengende Γ widerspruchsfrei/konsistent ist, dann hat Γ ein Modell.

Korrektheit (Version 2)

Wenn eine Formelmengende Γ ein Modell hat, dann ist Γ widerspruchsfrei/konsistent.

Falls Sie noch da sind, haben Sie die erste Hürde bereits genommen! Wir wollen uns nun so weit in die Materie vertiefen, dass uns diese Fachtermini vertraut werden und wir ganz locker (und präzise) mit ihnen arbeiten können.

Aus Korrektheits- und Vollständigkeitssatz (in beiden Versionen) ergibt sich sofort (wobei Γ und A immer zu einer formalen Sprache relativiert sind):

Adäquatheitssatz (Version 1)

Eine Formel A folgt logisch aus einer Formelmengende Γ genau dann, wenn (kurz gdw.) A aus Γ (in einem formalen System) herleitbar ist.

Adäquatheitssatz (Version 2)

Eine Formelmengende Γ ist widerspruchsfrei/konsistent gdw. Γ ein Modell hat.

Das war jetzt sehr viel Inhalt in sehr komprimierter Form.

Raucht Ihnen der Kopf?

Wir gehen das alles Schritt für Schritt mit zahlreichen Beispielen und Übungen an und zwar so:

1.2 Aufbau des Buches (Roadmap)

Um diese zentralen Resultate systematisch darzustellen und zu beweisen, folgt das Buch einem klaren, schrittweisen Aufbau:

Kapitel 2: Formale Sprache

Jede formale Untersuchung beginnt mit der exakten Definition ihrer Sprache. Dieses Kapitel legt daher das Fundament für alle weiteren Entwicklungen, indem es die Syntax der prädikatenlogischen Sprache $\mathcal{L}$ präzise festlegt. Wir definieren zuerst die grundlegenden Bausteine – das **Alphabet** – und legen dann in einer **Grammatik** die Regeln fest, nach denen diese Bausteine zu sinnvollen Ausdrücken zusammengesetzt werden.

Im Zentrum steht die induktive Definition einer **wohlgeformten Formel**, die es uns erlaubt, jede beliebige Zeichenreihe zu überprüfen, ob sie eine wohlgeformte Zeichenreihe bzw. Zeichenkette unserer Sprache ist. Als ein erstes metalogisches Resultat werden wir beweisen, warum jede Formel eine gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern aufweisen muss. Das dazu benötigte Beweisprinzip ist eine Version von **Induktion**. Schließlich führen wir das Konzept der **Codierung** ein, eine Variante der Gödel-Nummerierung. Diese kluge Technik erlaubt es uns nicht nur, Formeln als Ziffern darzustellen, sondern auch, alle Formeln unserer unendlichen Sprache systematisch aufzuzählen – eine entscheidende Voraussetzung für den späteren Vollständigkeitsbeweis.

Kapitel 3: Semantische Methoden

In diesem Kapitel entwickeln wir die formale Semantik für unsere Sprache. Unser Ziel ist es, semantische Begriffe präzise zu definieren. Was bedeutet es, dass etwa eine *Formelmenge ein Modell hat* oder eine *Formel logisch wahr ist*? Das Kapitel ist in zwei Hauptteile gegliedert:

Semantische Grundlagen I: Interpretation und Wahrheit

Dieser Teil legt die Grundlage, indem er die folgenden Konzepte einführt:

- Die formale Definition einer **prädikatenlogischen Interpretation** $\mathfrak{I}$.
- Die rekursive Definition der **Wahrheitsrelation** $\mathfrak{I} \models A$ (gelesen als ‘ A ist wahr unter der Interpretation $\mathfrak{I}$ ’, oder ‘ A ist wahr in $\mathfrak{I}$ ’).
- Das **Prinzip der Bivalenz**, welches besagt, dass jede Formel in jeder Interpretation entweder wahr oder falsch ist.
- Das **Koinzidenzlemma**, auch bekannt als Prinzip der lokalen Determination – kurz gesagt: Der semantische Wert eines Ausdrucks ist bestimmt durch die in ihm vorkommenden syntaktischen Teile und deren Interpretation.

Semantische Grundlagen II: Zentrale Begriffe und Folgerungen

Aufbauend auf dem Wahrheitsbegriff definieren wir die zentralen Konzepte der Semantik:

- Die Begriffe: **logische Wahrheit**, **logische Falschheit** (Kontradiktion), **Kontingenz** sowie **Modell** und **Gegenmodell**.
- Das Konzept der **logischen Folgerung**, notiert als $\Gamma \models A$.
- Wichtige Eigenschaften der Folgerungsrelation, wie zum Beispiel **Monotonie** und **Transitivität**, aber auch etwa **Vollständige Fallunterscheidung** und **Konditionaler Beweis**.

Kapitel 4: Syntaktische Methoden

Nachdem wir uns ausführlich mit der Semantik beschäftigt haben, wenden wir uns nun den syntaktischen, beweistheoretischen Methoden zu. In diesem Kapitel werden wir:

- Ein formales System, das **Schlussweisenkalkül** S , einführen; dieses Kalkül basiert auf Grundschlussweisen und Grundschlussregeln. Dieses Schlussweisenkalkül ist eine Variante eines Systems, das in Johannes Czermaks (leider unveröffentlichtem) Manuskript [Cze78] entwickelt wurde. Die strukturellen Eigenschaften der Herleitbarkeitsrelation treten in einem Schlussweisenkalkül sehr schön hervor.
- Einen präzisen **Herleitungsbegriff** definieren.
- **Theoreme und weitere Schlussregeln** innerhalb des formalen Systems herleiten, um dessen Funktionsweise zu demonstrieren.
- Ein schlankeres System S_e entwickeln und beweisen, dass beide Systeme **deduktiv äquivalent** sind.

Die parallelen Entwicklungen in den Kapiteln zu den semantischen und syntaktischen Methoden legen bereits nahe, dass zwischen beiden Methoden ein starker Zusammenhang besteht. Genau diese Verbindung zwischen logischer Folgerung und Herleitbarkeit werden wir im folgenden Kapitel entwickeln.

Kapitel 5: Widerspruchsfreiheit & Modell

Dies ist das Zentrum dieses Buches. Wir beweisen die zentralen Metatheoreme der Logik: den **Korrektheitssatz** und den **Vollständigkeitssatz**. Die Beweise werden sehr ausführlich und nachvollziehbar (**down to earth**) entwickelt. Die Gliederung des Kapitels folgt dieser Strategie:

- Zuerst wird der einfachere Beweis der **Korrektheit** durch Induktion über die Herleitungshöhe geführt. Tatsächlich werden wir den Korrektheitssatz auf verschiedene Arten beweisen.
- Danach folgt der anspruchsvollere Beweis der **Vollständigkeit** nach der berühmten **Methode von Henkin**.
- Um die Komplexität zu reduzieren, wird der Henkin-Beweis zunächst für ein System *ohne* Gleichheit geführt und erst im Anschluss auf ein System *mit* Gleichheit erweitert.

Kapitel 6: Konsequenzen & Anwendungen

Dieses Kapitel untersucht einige der wichtigsten Konsequenzen, die sich aus den metalogischen Resultaten der Korrektheit und Vollständigkeit ergeben. Die Themen umfassen:

- Die formale Sprache wird um **Konstanten und Funktionszeichen** erweitert und es wird skizziert, wie die Beweise (von Korrektheit und Vollständigkeit) daran angepasst werden können.
- Wir betrachten die **Bedeutung der Korrektheit** für den Nachweis der Nichtherleitbarkeit von Formeln durch die Methode der Gegenmodelle.
- Danach wird das Konzept einer **konservativen Erweiterung** eingeführt und bewiesen, dass die Hinzufügung der Gleichheit zu unserer Logik eine solche ist.
- Als Beispiel für eine formale Theorie wird die **Peano-Arithmetik (PA)** eingeführt. Mithilfe des **Kompaktheitssatzes** beweisen wir die Existenz von **Nicht-Standardmodellen der Arithmetik**.
- Anschließend zeigen wir den **Satz von Löwenheim-Skolem** und seine (paradoxe?) Konsequenz für die axiomatische Mengenlehre (ZFC), bekannt als **Skolems Paradoxon**.
- Gut zum Thema passend definieren wir **elementare Äquivalenz** und **Isomorphie**.
- Abschließend werfen wir Schlaglichter auf **Interpolationssatz von Craig**, **Definierbarkeit nach Beth** und auf **relative Interpretierbarkeit und relative Widerspruchsfreiheit**.

Kapitel 7: Platons Bart – Kleine Einführung in die Freie Logik

Wir haben bereits von Existenzvoraussetzungen gesprochen. In diesem Kapitel wird anhand des klassischen philosophischen Problems von Platons Bart eine Familie von nichtklassischen Logiken eingeführt: die sogenannten **Freien Logiken**.

Freie Logiken können als eine Variation der Klassischen Logik betrachtet werden, die deren Existenzvoraussetzungen explizit macht und hinterfragt. Im Speziellen betrachten wir die **Negative Freie Logik**, deren semantische These besagt, dass einfache/elementare Sätze mit nicht-bezeichnenden Termen (z. B. 'Pegasus ist ein geflügeltes Pferd') falsch sind.

Wir entwickeln diese Logik semantisch und syntaktisch, wobei viele der Beweise als Übungsaufgaben für die nun geübte Leserin verbleiben. Das Kapitel schließt mit der Untersuchung von **bestimmten Kennzeichnungen** (definite descriptions) und einer formalen Theorie dazu ab.

Der didaktische Zweck dieses Kapitels liegt darin, die in diesem Buch entwickelten metalogischen Methoden auf ein neues System anzuwenden. Es kann und sollte erneut nach Korrektheit und Vollständigkeit gefragt werden – eine schöne Gelegenheit für die Leserin, ihr Verständnis zu erproben und zu vertiefen.

Kapitel 8: Coda

Dieses abschließende Kapitel dient als Coda zu unserer Wanderung durch die Metalogik. Es wirft einen Blick zurück auf das Erreichte und fasst die Korrektheit und Vollständigkeit nochmals konzise zusammen.

Gleichzeitig dient es als Ausblick und wirft ein Schlaglicht auf einige der vielen wichtigen Themen, die in diesem Buch nicht behandelt werden konnten. Dazu gehören:

- Ein kurzer Überblick über weitere **philosophische Logiken** jenseits der Klassischen und Freien Logik.
- Eine Andeutung der berühmten **Grenzen formaler Systeme**, wie sie durch die Sätze von **Tarski** (Undefinierbarkeit der Wahrheit), von **Gödel** (Unvollständigkeit) und **Gentzen** (Widerspruchsfreiheit der Arithmetik) aufgezeigt wurden.

Kapitel 9: Musterlösungen

Im Kapitel Musterlösungen finden Sie einige detaillierte Lösungen, Lösungsstrategien, und Lösungsskizzen für ausgewählte Übungsaufgaben aus den vorhergehenden Kapiteln, um das Selbststudium zu unterstützen. Erproben Sie sich vorher, bevor Sie sich auf die Präsentation stürzen!

Je nach Interesse können Sie das Buch auch selektiv lesen. Wenn Sie primär an den Beweisen der Korrektheit und Vollständigkeit interessiert sind, konzentrieren Sie sich auf die Kapitel zu Sprache, Semantik, Syntax und den entsprechenden metalogischen Resultaten.

Methodische Vorbemerkungen

Ein paar Worte zum Stil und zu den Voraussetzungen dieses Buches sind angebracht, um Erwartungen zu klären:

- **Philosophische Begriffe:** Wir verwenden manche Ausdrücke wie ‘Begriff’ oder ‘Konzept’ relativ naiv – wohlwissend, dass dazu in der Philosophie mehr gesagt werden müsste. Unser Fokus liegt auf der formalen Analyse.
- **Umgang mit Anführungszeichen (Use vs. Mention):** Wir sind bei der Unterscheidung zwischen der Gebrauchs- und der Erwähnungsebene bisweilen pragmatisch. Korrekterweise müssten wir immer dann Anführungszeichen verwenden, wenn wir *über* einen sprachlichen Ausdruck sprechen, anstatt ihn zu verwenden. Man müsste also schreiben:

Die Formel ‘ $P(c)$ ’ ist wahr unter bzw. in einer prädikatenlogischen Interpretation.

Da dies den Lesefluss jedoch oft stört, verzichten wir an vielen Stellen auf die Anführungszeichen, im Vertrauen darauf, dass der Kontext unmissverständlich klar macht, wann eine Formel erwähnt und wann sie gebraucht wird.

Eine allgemeine Anmerkung: Sie werden feststellen, dass in vielen Logikbüchern Anführungszeichen konsequent oben gesetzt werden (als einfache ‘...’). Dies ist eine bewusste typografische Entscheidung. Anführungszeichen sind in der Logik

ein technisches Hilfsmittel zur Kennzeichnung von Erwähnungen von sprachlichen Ausdrücken. Sie teilen zwar das Aussehen mit den Anführungszeichen in nicht-logischen Texten, aber nicht deren Funktion (wie z. B. die Kennzeichnung direkter Rede). Die einheitliche Setzung oben dient dazu, diese technische Funktion visuell von der Alltagssprachlichen zu unterscheiden.

- **Formeln vs. Formelschemata:** Ähnliches gilt für die Unterscheidung von Formeln und Formelschemata. Auch hier vertrauen wir darauf, dass die Leserin erkennt, wann ein Formelschema und wann eine spezifische Instanz (Formel) gemeint ist.
- **Voraussetzungen:** Ein gutes Einführungsbuch enthält oft ein Übersetzungsmanual von der natürlichen in die formale Sprache. Da es hier um andere Inhalte geht, wird eine grundlegende Vertrautheit mit diesem Prozess vorausgesetzt. Ebenso verzichten wir auf eine grundlegende Einführung der Wahrheitstafeln für Junktoren.
- **Genau dann, wenn:** Zu den Schreibweisen ‘gdw.’ Beziehungsweise ‘gdw.’ gilt das Folgende: Wir schreiben immer dann ‘gdw.’, wenn wir ein definitorische Äquivalenz meinen ansonsten verwenden wir ‘gdw.’ im Sinne einer Äquivalenz.
- **Terminologie: Axiom, Theorem, These**

In der Rede über formale Systeme werden die Begriffe *Axiom*, *Theorem* und *These* oft verwendet. Wir legen für dieses Buch den folgenden Sprachgebrauch fest:

- Ausgangspunkt unserer formalen Systeme sind **Grundschlussweisen**. Manche Autoren bevorzugen Axiome.
- **Theorem:** Ein Theorem ist eine Formel (oder ein Schluss ohne Prämissen), die innerhalb des formalen Systems nach dessen Regeln **hergeleitet** wurde. Wir werden auch zu logischen Wahrheiten ab und an Theorem sagen.

Hinweis zur Metalogik: Der Ausdruck ‘Theorem’ findet auch in der Metalogik Gebrauch (z. B. etwa: Löwenheim-Skolem-Theorem). Hier hat er eine pragmatische Funktion und hebt die Wichtigkeit einer bewiesenen metatheoretischen Aussage hervor, im Gegensatz zu einem (oft) einfacheren *Lemma* oder *Korollar*.

Noch kurz zur Frage: Soll ich mehr Logikbücher lesen? Einfache Antwort: Ja, unbedingt! Jedes Buch erfordert Zeit und Ausdauer, aber je mehr Sie studieren, desto mehr intellektuelle Freude werden Sie haben. Bedenken Sie jedoch, dass jede Autorin und jeder Autor einen eigenen Zugang hat und sich Terminologie, Aufbau und Durchführung unterscheiden können und werden. Logisches Arbeiten erfordert ein großes Maß an Disziplin und Kreativität. Ist beides gegeben, steht einem freudigen Forscherleben weniger im Wege.

Zu diesem Forscherleben gehört aber auch der Mut zur Lücke. Mir ist bewusst, dass es unzählige wichtige Themen in der Klassischen Logik und ihrer Metalogik gibt, die in diesem Buch nicht einmal angesprochen werden. Dem ist so – und das ist eine bewusste Entscheidung. Dieses Buch konzentriert sich auf einen klaren Pfad, in der Hoffnung, diesen so verständlich wie möglich zu beleuchten.

Übrigens folgen alle Kapitel im Wesentlichen dem Aufbau dieses Kapitels.

Persönliches Wort

Und noch etwas Persönliches: Auch wenn die Logik nur notwendige Wahrheiten zum Thema habe und die mathematische Welt abstrakt und zwingend sei, so ist die Logik als Disziplin doch ein menschliches Produkt. Das Denken über Logik ist faszinierend und lebendig. Nicht so lebendig wie Ihre Katze oder mein Hund Diego, aber doch eine unaufhörliche Suche nach dem, was der Fall ist.

Wir benutzen oft griechische Buchstaben; hier ist eine Übersicht dazu:

Symbol (klein)	Name	Symbol (groß)
α	Alpha	A
β	Beta	B
γ	Gamma	Γ
δ	Delta	Δ
ϵ	Epsilon	E
ζ	Zeta	Z
η	Eta	H
θ	Theta	Θ
ι	Iota	I
κ	Kappa	K
λ	Lambda	Λ
μ	My	M
ν	Ny	N
ξ	Xi	Ξ
$\omicron$	Omikron	O
π	Pi	Π
ρ	Rho	P
σ	Sigma	Σ
τ	Tau	T
υ	Ypsilon	Y
ϕ, φ	Phi	Φ
χ	Chi	X
ψ	Psi	Ψ
ω	Omega	Ω

1.3 Einführung: Übungen

1. Was sind typische Fragestellungen der Logik im Gegensatz zur Metalogik?
2. Kennen Sie schon Prädikate im logischen Sinne? Wenn ja, wie unterscheiden sie sich von Prädikaten einer natürlichen Sprache und im Sinn deren Grammatik?
3. Was sind die zentralen Existenzvoraussetzungen der Klassischen Logik? Wie können solche den Aufbau eines formalen Systems, einer formalen Semantik beeinflussen?
4. Oben steht: Als ein erstes metalogisches Resultat werden wir beweisen, warum jede Formel eine gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern aufweisen muss. Warum ist das ein metalogisches Resultat?
5. Betrachten Sie die beiden Beispielsätze aus der Einleitung:

a. 'Diego ist ein Hund oder Diego ist kein Hund.' $(P(c) \vee \neg P(c))$

b. 'Wenn Diego ein Hund ist, dann gibt es Hunde.' $(P(c) \rightarrow \exists x P(x))$

Wie wirken die genannten drei Prinzipien (Bivalenz; Existenzvoraussetzung 1: Namen bezeichnen; Existenzvoraussetzung 2: Domain ist nicht leer) zusammen, damit sowohl a. als auch b. als logische Wahrheiten ausgezeichnet sind bzw. a. und b. überhaupt in der Sprache der Prädikatenlogik formalisiert werden können?

6. Was soll das alles? Sind Sie schon auf Sätze gestoßen wie:
 - Dieser Satz ist nicht wahr.
 - Alle Münchner lügen, sagt ein Münchner.
 - Der Barbier rasiert alle und nur diejenigen Männer, die sich nicht selbst rasieren.
 Warum sind diese *merkwürdig*? (Tipp: Denken Sie daran, dass wir später die Grenzen formaler Systeme diskutieren werden: Welches Problem deutet sich hier an?)
7. **Knifflig:** Vielleicht kommen Sie später darauf zurück. Es gibt starke Zusammenhänge zwischen den Konzepten der logischen Folge, Modell-haben und Herleitbarkeit, Widerspruchsfreiheit. Vor diesem Hintergrund: Können Sie die Richtigkeit der folgenden Äquivalenzen begründen?
 - a. $\Gamma \models A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kein Modell hat.
 - b. $\Gamma \vdash A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg A\}$ widerspruchsvoll ist.

