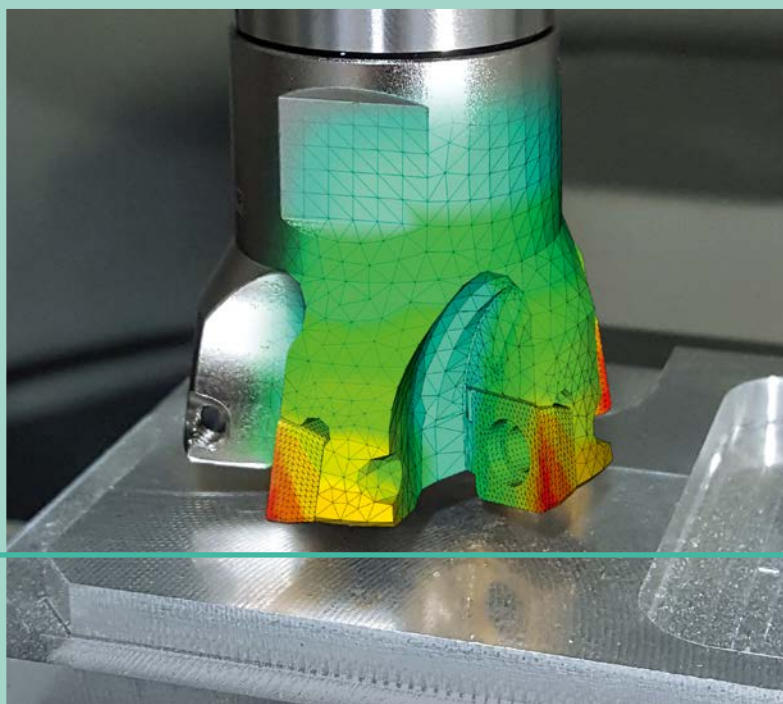


Frank Rieg
Bettina Alber-Laukant
Stephan Tremmel
Reinhard Hackenschmidt



Finite-Elemente-Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen



7., aktualisierte Auflage

HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Dazu gehört auch, dass Bilder oder Tabellen für blinde und sehbehinderte Menschen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht durch zusätzliche beschreibende Texte (Alternativtexte), die in den Daten integriert sind. Die Alternativtexte können von assistiven Technologien (z. B. Screenreadern) vorgelesen werden. Bei der Erstellung dieser Texte kommt eine KI zum Einsatz. Die inhaltliche Verantwortung liegt weiterhin bei den Lektor:innen und Autor:innen.

Rieg / Alber-Laukant / Tremmel / Hackenschmidt
Finite-Elemente-Analyse für Ingenieure



Ihr Plus - digitale Zusatzinhalte!

Auf plus.hanser-fachbuch.de gibt es kostenloses Zusatzmaterial zu diesem Buch. Den Zugangscodes finden Sie am Ende des Werkes.



Blieben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Frank Rieg
Bettina Alber-Laukant
Stephan Tremmel
Reinhard Hackenschmidt

Finite-Elemente-Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen

7., aktualisierte Auflage

HANSER

Über die Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Frank Rieg, ehemaliger Lehrstuhlinhaber und Ordinarius für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Dr.-Ing. Bettina Alber-Laukant, Akademische Oberrätin, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel, Inhaber des Lehrstuhls für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Dipl.-Wirtsch.-Ing. Reinhard Hackenschmidt, ehemaliger Akademischer Direktor, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Print-ISBN: 978-3-446-48416-0

E-Book-ISBN: 978-3-446-48468-9

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Julia Stepp

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Thomas West

Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Inhalt

Vorwort	XIV
Mitarbeiterverzeichnis	XVI
1 Einleitung	1
2 Das grundsätzliche Vorgehen	6
3 Grundlagen	22
3.1 Verschiebungen und Verzerrungen	22
3.1.1 Beim Zugstab	22
3.1.2 Bei der Scheibe	24
3.1.3 Im Raum	29
3.1.4 Bei der Platte	31
3.2 Spannungs-Dehnungs-Relationen	32
3.3 Thermo-mechanische Beanspruchung	41
3.4 Eigenschwingung	45
3.5 Nichtlineare Berechnungen	48
3.5.1 Geometrische Nichtlinearitäten	49
3.5.2 Materialnichtlinearitäten	59
3.6 Kontaktberechnung	62
4 Finite Elemente und Elementmatrizen	68
4.1 Grundlagen von Element-Steifigkeitsmatrizen	70
4.2 Materialmatrizen	74

4.3	B-Matrix	75
4.4	Formfunktionen	76
4.5	Integration	86
4.6	Das Aufbringen von Lasten; Lastvektoren	94
4.6.1	Das grundsätzliche Vorgehen	94
4.6.2	Plattenelemente	97
4.6.3	Volumenelemente	98
4.6.4	Ebener und axialsymmetrischer Spannungszustand	108
4.6.5	Streckenlasten bei Balken	109
4.6.6	Gerbergelenke bei Balken	112
4.7	Eine fertige Element-Steifigkeitsroutine	115
4.8	Wahl der Elementtypen	122
4.9	Einige Bemerkungen über Schalen	130
4.10	Elementmatrizen für Thermoanalyse	143
4.11	Elementmatrizen für Schwingungen	145
4.12	Elementmatrizen der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse	146
5	Compilation, Speicherverfahren und Randbedingungen	158
5.1	Compilation	158
5.2	Speicherverfahren	168
5.2.1	Die Bandspeicherung	171
5.2.2	Das Skyline-Speicherverfahren	175
5.2.3	Das Jennings-Speicherverfahren	176
5.2.4	Speicherung der Nicht-Null-Elemente	183
5.2.5	Zusammenfassung der Speicherverfahren	189
5.3	Randbedingungen	190
5.3.1	Einzel-Kräfte und Einzel-Verschiebungen	190
5.3.2	Flächenlasten bei Platten	193
5.3.3	Lagerungen von Platten	194
5.3.4	Randbedingungen bei Temperaturanalysen	195
5.3.5	Randbedingungen bei Schwingungen	200
5.3.6	Randbedingungen bei der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse	202
5.3.7	Randbedingungen bei Kontaktberechnungen	203

6	Gleichungslöser	214
6.1	Direkte Verfahren	215
6.1.1	Das Cholesky-Verfahren	217
6.2	Kondition und Skalierung	219
6.3	Iterative Verfahren	226
6.3.1	Das Jacobi-Verfahren	229
6.3.2	Das Gauß-Seidel-Verfahren	229
6.3.3	Das SOR-Verfahren und das JOR-Verfahren	230
6.3.4	Das Verfahren der konjugierten Gradienten	231
6.3.5	Das Verfahren der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung	232
6.3.5.1	Vorkonditionierung mit SOR	233
6.3.5.2	Vorkonditionierung mit partieller Cholesky-Zerlegung	234
6.4	Solver für thermomechanische Probleme	244
6.5	Solver für Schwingungsprobleme	244
6.6	Gleichungslöser für die nichtlineare Finite-Elemente-Analyse	255
7	Spannungen und Knotenkräfte	259
7.1	Spannungen	259
7.2	Vergleichsspannungen	267
7.3	Knotenkräfte	274
8	Strukturoptimierung	277
8.1	Dimensionierung	279
8.1.1	CAD-basierte Dimensionierung	279
8.1.2	FE-basierte Dimensionierung	279
8.1.3	Anwendungen der Dimensionierung	279
8.2	Formoptimierung	281
8.3	Topologieoptimierung	283
8.3.1	Überblick	283
8.3.2	Topologieoptimierung mit Z88Arion	284
9	Z88: Grundlagen	286
9.1	Allgemeines	286
9.1.1	Die Z88-Element-Bibliothek im Überblick	287

9.2	Das Open-Source-FE-Programm Z88Adria	300
9.2.1	Die Z88-Module im Überblick	303
9.2.2	Die Ein- und Ausgabe von Z88	306
9.3	Das Freeware-FE-Programm Z88Aurora	310
9.3.1	Die Z88Aurora-Module im Überblick	311
9.3.2	Speicherbedarf von Z88Aurora	315
9.3.3	Die Ein- und Ausgabe von Z88Aurora	316
10	Die Z88-Module	318
10.1	Der lineare Solver Z88R	318
10.1.1	Z88R: Der direkte Cholesky-Solver	320
10.1.2	Z88R: Der Sparsematrix-Solver	320
10.1.3	Z88R: Der direkte Sparsematrix-Solver in Z88Aurora	322
10.1.4	Welchen Solver nehmen?	323
10.1.5	Erläuterungen zur Spannungsberechnung	323
10.1.6	Erläuterungen zur Knotenkraftberechnung	324
10.2	Der Netzgenerator Z88N	324
10.2.1	Vorgehensweise	324
10.2.2	Mathematische Grundlagen	326
10.2.3	Beschreibung eines einfachen Netzgenerators	330
10.2.4	Beschreibung des Netzgenerators Z88N	338
10.3	Der Superelementgenerator in Z88Aurora	341
10.3.1	Verwendung von Z88N in Z88Aurora	341
10.3.2	Tetraederverfeinerer Z88MTV	342
10.3.3	2D-Schalenaufdicker Z88MVS	344
10.4	Plotten	344
10.5	Der DXF-Konverter Z88X	349
10.6	Der 3D-Konverter Z88G	358
10.7	Der Ansys-Konverter Z88ASY	361
10.8	Der ABAQUS-Konverter Z88INP in Z88Aurora	363
10.9	Das Cuthill-McKee-Programm Z88H	365
10.10	Der Step-Import Z88GEOCON (Step) in Z88Aurora	366
10.11	Der STL-Konverter Z88GEOCON (STL) in Z88Aurora	368
10.12	Der Tetraedervernetzer in Z88Aurora	370
10.13	Das Pickingmodul in Z88Aurora	371

10.14	Die Materialdatenbank in Z88Aurora	372
10.15	Die Randbedingungen in Z88Aurora	373
10.16	Die Benutzerunterstützung Spider in Z88Aurora	374
10.17	Das Thermomodul in Z88Aurora	375
10.18	Das Eigenschwingungsmodul in Z88Aurora	378
10.19	Das Modul Z88NL für nichtlineare Berechnungen in Z88Aurora	381
10.20	Das Modul Z88Kontakt für Kontaktberechnungen	385
10.21	Das Modul Z88SNDWCH für Sandwichbauteile	389
11	Eingabedateien erzeugen	390
11.1	Allgemeines	390
11.2	Allgemeine Strukturdaten Z88I1.TXT	392
11.3	Randbedingungsdatei Z88I2.TXT	394
11.4	Flächenlast-Datei Z88I5.TXT	397
11.5	Materialsteuerdatei Z88MAT.TXT	402
11.6	Materialdatei *.TXT	404
11.7	Elementparameterdatei Z88ELPTXT	406
11.8	Integrationsordnungs-Datei Z88INT.TXT	407
11.9	Netzgenerator-Datei Z88NI.TXT	409
11.10	Solversteuerdatei Z88MAN.TXT	413
11.11	Vergleich der Z88-Dateiformate	417
12	Die finiten Elemente von Z88Adria und Z88Aurora	418
12.1	Hexaeder Nr. 1 mit 8 Knoten	418
12.2	Balken Nr. 2 mit 2 Knoten im Raum	421
12.3	Scheibe Nr. 3 mit 6 Knoten	423
12.4	Stab Nr. 4 im Raum	425
12.5	Welle Nr. 5 mit 2 Knoten	426
12.6	Torus Nr. 6 mit 3 Knoten	427
12.7	Scheibe Nr. 7 mit 8 Knoten	429
12.8	Torus Nr. 8 mit 8 Knoten	431
12.9	Stab Nr. 9 in der Ebene	433
12.10	Hexaeder Nr. 10 mit 20 Knoten	434
12.11	Scheibe Nr. 11 mit 12 Knoten	437
12.12	Torus Nr. 12 mit 12 Knoten	440

12.13	Balken Nr. 13 in der Ebene	442
12.14	Scheibe Nr. 14 mit 6 Knoten	443
12.15	Torus Nr. 15 mit 6 Knoten	446
12.16	Tetraeder Nr. 16 mit 10 Knoten	448
12.17	Tetraeder Nr. 17 mit 4 Knoten	452
12.18	Platte Nr. 18 mit 6 Knoten	455
12.19	Platte Nr. 19 mit 16 Knoten	457
12.20	Platte Nr. 20 mit 8 Knoten	460
12.21	Schale Nr. 21 mit 16 Knoten	462
12.22	Schale Nr. 22 mit 12 Knoten	464
12.23	Schale Nr. 23 mit 8 Knoten	466
12.24	Schale Nr. 24 mit 6 Knoten	469
12.25	Balken Nr. 25 mit 2 Knoten im Raum	471
12.26	Element-/Solverübersicht für Z88Aurora V6	474
13	Beispiele	475
13.1	Schraubenschlüssel aus Scheiben Nr. 7	485
13.1.1	Mit Z88Adria	485
13.1.2	Mit Z88Aurora	495
13.2	Kranträger aus Stäben Nr. 4	505
13.2.1	Mit Z88Adria	506
13.2.2	Mit Z88Aurora	512
13.3	Getriebewelle mit Welle Nr. 5	518
13.3.1	Mit Z88Adria	520
13.3.2	Mit Z88Aurora	524
13.4	Biegeträger mit Balken Nr. 13	528
13.4.1	Mit Z88Adria	529
13.4.2	Mit Z88Aurora	534
13.5	Plattensegment aus Hexaedern Nr. 1 und Nr. 10	538
13.5.1	Mit Z88Adria	539
13.5.2	Mit Z88Aurora	547
13.6	Rohr unter Innendruck, Scheibe Nr. 7	550
13.6.1	Mit Z88Adria	551
13.6.2	Mit Z88Aurora	560

13.7	Rohr unter Innendruck, Tori Nr. 8	562
13.7.1	Mit Z88Adria	562
13.7.2	Mit Z88Aurora	569
13.8	Zweitaktmotor-Kolben	571
13.8.1	Mit Z88Adria	572
13.8.2	Mit Z88Aurora	574
13.9	RINGSPANN-Scheibe und Tellerfeder	579
13.9.1	Mit Z88Adria	581
13.9.2	Mit Z88Aurora	585
13.9.2.1	RINGSPANN-Scheibe	585
13.9.2.2	Tellerfeder	585
13.10	Flüssiggas-Tank	587
13.10.1	Mit Z88Adria	587
13.10.2	Mit Z88Aurora	590
13.11	Motorrad-Kurbelwelle	593
13.11.1	Mit Z88Adria	594
13.11.2	Mit Z88Aurora	595
13.12	Drehmoment-Messnabe	599
13.12.1	Mit Z88Adria	600
13.12.2	Mit Z88Aurora	602
13.13	Ebene Rahmen	603
13.13.1	Mit Z88Adria	603
13.13.2	Mit Z88Aurora	623
13.14	Zahnrad	625
13.14.1	Mit Z88Adria	626
13.14.2	Mit Z88Aurora	632
13.15	3D-Schraubenschlüssel	636
13.15.1	Mit Z88Adria	636
13.15.2	Mit Z88Aurora	646
13.16	Kraftmesselement, Scheiben Nr. 7	649
13.16.1	Mit Z88Adria	649
13.16.2	Mit Z88Aurora	659
13.17	Kreisplatte, Platten Nr. 20	660
13.17.1	Mit Z88Adria	661
13.17.2	Mit Z88Aurora	666

13.18	Rechteckplatte mit 16-Knoten-Platten Nr. 19	667
13.18.1	Mit Z88Adria	667
13.18.2	Mit Z88Aurora	672
13.19	Viertaktmotor-Kolben mit Tetraedern Nr. 16	674
13.19.1	Mit Z88Adria	675
13.19.2	Mit Z88Aurora	678
13.20	Automotor-Lüfterrad	681
13.20.1	Mit Z88Adria	682
13.20.2	Mit Z88Aurora	683
13.21	Diesekolben	685
13.21.1	Mit Z88Adria	687
13.21.2	Mit Z88Aurora	688
13.22	Berechnung einer Formzahl	689
13.22.1	Mit Z88Adria	690
13.22.2	Mit Z88Aurora	695
13.23	Zahnfußbeanspruchung	697
13.23.1	Mit Z88Adria	698
13.23.2	Mit Z88Aurora	700
13.24	Vierkantrohr, Schale Nr. 24	703
13.24.1	Mit Z88Adria	704
13.24.2	Mit Z88Aurora	706
13.25	U-Boot aus Schalen Nr. 22	710
13.26	Zahnrad aus Tetraedern Nr. 17	716
13.27	Schwingende Trommel	719
13.28	Modalanalyse Kurbelwelle	724
13.29	Thermomechanische Analyse eines Löffels	727
13.30	Thermische Analyse eines Viertakt-Motorkolbens	734
13.31	Berechnung der Konvektion an einem Rippenbehälter	737
13.32	Nichtlineare Berechnung einer Tellerfeder	742
13.33	Nichtlineare Berechnung eines Scharniers	746
13.34	Materialplastizität einer Kugelkupplung	751
13.35	Import einer STL-Geometrie und Umwandlung in ein Schalenmodell	759
13.36	Trimmen eines Bauteils	763
13.37	Kontaktanalyse einer Zahnstange	765

13.38	Kontaktanalyse eines Augenstabes	772
13.39	Topologieoptimierung eines Schraubenschlüssels	776
13.40	Optimierung eines Radträgers mit dem SKO-Verfahren	780
13.41	Dreipunktbiegeversuch eines Sandwichaufbaus mit Z88Aurora	782
Index	788

Vorwort

Wie bereits in der 1. Auflage verfolgt dieses Buch folgendes Ziel: Es soll einem Studenten der Ingenieurwissenschaften ab dem 3. Semester und dem schon im Beruf stehenden Ingenieur ausgewählte Aspekte der finiten Elemente so vermitteln, dass er dieses Wissen sofort zur Lösung praktischer Probleme umsetzen kann.

Im Buchtitel und im Verlauf dieses Buches sprechen wir von der Finite-Elemente-*Analyse* (FEA) und nicht von der Finite-Elemente-*Methode*, weil dieses riesige Fachgebiet schon lange den etwas zweifelhaften Touch einer Methode hinter sich gelassen hat und heute *das* Ingenieurtool ist, um Tragwerke zu *analysieren*. Natürlich kann man mit diesem Verfahren viel mehr unternehmen, als nur Mechanik zu betreiben. Wärmeflüsse, Elektro- und Magnetfelder, ja eigentlich allgemein Differenzialgleichungen und Randwertaufgaben für verschiedene Felder – all das kann man heute mit der Finite-Elemente-Analyse berechnen und lösen.

Begonnen hat jedoch alles mit der Berechnung von mechanischen Strukturen, weshalb wir uns in diesem Werk auf lineare und nichtlineare Statik, stationäre Wärmeleitung und Eigenschwingungen beschränken möchten. Sehr wesentlich scheint uns der Ingenieuraspekt zu sein, der deshalb nicht umsonst im Buchtitel zur Sprache kommt: Das Vorgehen wurde in den Fünfzigerjahren einigermaßen „intuitiv“ von Flugzeug-Ingenieuren für statische Berechnungen von Flugzeugstrukturen entwickelt. Es ist ein Verfahren von Ingenieuren für Ingenieure.

Wir gehen daher wie folgt vor: Nach einer wirklich einfachen Darstellung des grundlegenden Vorgehens werden wir die wichtigsten Punkte der Elastizitätstheorie, der Technischen Mechanik und der Thermodynamik, soweit sie die FEA betreffen, abhandeln, um mit diesem Wissen an die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrizen zu gehen. Dieses theoretische Wissen ist tatsächlich unabdingbar, um FE-Rechenprogramme gezielt und gekonnt einsetzen zu können. Sodann betrachten wir den Compilationsprozess, die Speicherverfahren und das Lösen der Gleichungssysteme, um die Unbekannten zu berechnen.

Damit Sie Ihr Wissen im Anschluss auch praktisch umsetzen können, steht Ihnen unter plus.hanser-fachbuch.de eine umfangreiche Beispielsammlung zum Download zur Verfügung. Darüber hinaus können Sie sich unter www.feabuch.z88.de zwei FE-Programme herunterladen: das 2025 von Rieg programmierte Open-Source-Finite-Elemente-Programm für statische Berechnungen Z88Adria[®] sowie das weit darüber hinausgehende und komfortable Freeware-Finite-Elemente-Programm Z88Aurora[®], das dann auch nichtlineare Berechnungen, stationäre Wärmeflüsse, Eigenschwingungen und Kontakt beherrscht. Beides sind Vollversionen, mit denen *beliebig große Strukturen* gerechnet werden können. Die Grenzen werden nur durch Ihren Computer hinsichtlich Hauptspeicher und Plattenplatz und Ihr Vorstellungsvermögen gezogen.

Z88Adria[®] und Z88Aurora[®] werden lauffertig für Windows, Linux sowie macOS angeboten. Bei Z88Adria[®] liefern wir auch direkt die Quellen mit, sodass Sie die theoretischen Aspekte im Programmcode studieren und gegebenenfalls erweitern können. Natürlich können Sie so auch nachvollziehen, wie Speicherverfahren, Gleichungslöser usw. in der Rechenpraxis arbeiten. Z88Adria[®] ist durch Ein- und Ausgabe mit Textdateien für den Anwender absolut transparent. Es ist demnach ein FEA-Programm im ganz klassischen und ursprünglichen Sinne. Wir sind davon überzeugt, dass Sie nur mit einem solchen Programm, bei dem Sie jeden Zahlenwert noch selbst kontrollieren können und müssen, das Grundlegende lernen können. Wenn Sie das grundlegende Vorgehen einmal verstanden haben, können Sie mit Z88Aurora[®] arbeiten, das bei uns am Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD mit Förderung durch die Oberfrankenstiftung entwickelt wurde. Z88Aurora steht den kommerziellen FEA-Programmen in *Look and Feel* nicht nach und erlaubt ein sehr professionelles und zeitgemäßes Arbeiten, direkt von CAD-Daten ausgehend. Auf die bekannten kommerziellen FEA-Programme beziehen wir uns hier nicht, weil es davon in kostenloser Form nur sehr stark eingeschränkte Versionen hinsichtlich der Strukturgrößen gibt, mit denen Sie mehrere der folgenden Beispiele gar nicht rechnen könnten. Quellcodes könnten wir dazu auch nicht präsentieren. Kapitel 13 enthält viele Praxisbeispiele, die Sie nach dem Studium der Grundlagen nachrechnen sollten. Die Beispiele sind so gewählt, dass sie schrittweise die verschiedenen Aspekte der Berechnung von Tragwerken und mechanischen Strukturen erläutern. Wie bereits erwähnt, können Sie sich die Beispiele unter plus.hanser-fachbuch.de herunterladen.

Das Buch wurde anlässlich der 7. Auflage vollständig überarbeitet.

Dem Hanser Verlag danken wir für die – wie immer – vorbildliche Ausführung. Außerdem dürfen wir uns ganz herzlich bei unseren Lesern bedanken, die nach wenigen Jahren eine neue Auflage fordern. Auch die Arbeit an dieser Auflage war uns wieder ein Vergnügen und wir hoffen, dass Sie großen Nutzen aus diesem Buch ziehen werden.

Bayreuth, im Januar 2026

Frank Rieg, Bettina Alber-Laukant, Stephan Tremmel und Reinhard Hackenschmidt

Mitarbeiterverzeichnis

Mitarbeiter	Auflage
Dr.-Ing. A. Dörnhöfer, AUDI AG	3. Auflage
Dr.-Ing. M. Frisch, Universität Bayreuth	4. und 5. Auflage
Dr.-Ing., Dipl.-Math. M. Neidnicht, ThyssenKrupp Rothe Erde GmbH	4. und 5. Auflage
Dr.-Ing. C. Wehmann, Daimler Truck AG	4. Auflage
Dr.-Ing. D. Billenstein, OTH Amberg-Weiden	6. Auflage
Dr.-Ing. F. Nützel, OTH Regensburg	6. Auflage
Dr.-Ing. K. Deese, Solarnative GmbH	6. Auflage
Dr.-Ing. S. Hautsch, TenneT Germany	6. Auflage
Dr.-Ing. C. Dinkel, Kernkraftwerk Gösgen-Däniken	6. Auflage
Dr.-Ing. F. Hüter	6. Auflage

1

Einleitung

Während viele Vorgehensweisen in der Technik oft jahrhundertealt sind und beispielsweise die Elastizitätstheorie praktisch geschlossen im 19. Jahrhundert entwickelt wurde, entstand die sogenannte Methode der finiten Elemente erst mit dem Aufkommen der ersten Digitalrechner in Deutschland, in den Vereinigten Staaten und in England während des Zweiten Weltkriegs. Diese ersten Computer, zu denen unter anderem der deutsche *Zuse Z3* von 1941, aber besonders der amerikanische *Harvard Mark I* zählen, dienten zum Berechnen von Geschossbahnen für die Artillerie (vgl. /33/). Gleichzeitig entstand ein neuer Flugzeugtyp, der düsengetriebene Jet. Deswegen bisher nicht gekannte Geschwindigkeiten sorgten für ganz neue Probleme – neuartige Tragflügelkonzepte wie den Pfeilflügel, extrem leichte und dennoch sehr stabile Zellen, die auch in großen Höhen nicht versagen, und die Strahltriebwerke selbst. Es kam daher nicht von ungefähr, dass in den 1950er-Jahren bei *Boeing* in Seattle die Ingenieure *Turner* und *Clough* die Matrizenkraftmethode und die -Matrizenverschiebungsmethode für die statische Berechnung von Zellen und Flügeln entwickelten. Schon Ende der 1940er-Jahre hatte *Argyris* (der später an der TH Stuttgart wirkte und einer der Väter der Finite-Elemente-Methode ist) in England nachgewiesen, dass man Kontinua durch Zerlegen in kleinere Teilbereiche in vereinfachter Form beschreiben kann. Dem gingen die Überlegungen unter anderem von *Hrennikoff* voraus, Kontinua in eine Anordnung von Stäben bzw. Balken zu zerlegen, um damit ebene Spannungszustände und Plattenprobleme abzubilden – in der Literatur „Framework Method“ oder „Gitterrost-Verfahren“ genannt. Der Erste, der den Begriff *Finite-Elemente-Methode* auf einer Konferenz öffentlich benutzte, scheint *Clough* im Jahr 1960 gewesen zu sein.

Wir wiesen schon vorangehend darauf hin, dass es ursprünglich ein *Matrizenkraftverfahren* und ein *Matrizenverschiebungsverfahren* gegeben hat. Während bei Ersterem die gesuchten Unbekannten die Kräfte sind – eigentlich das Vorgehen, das auch in der klassischen Technischen Mechanik üblich ist –, sind die Unbekannten beim

zweiten Vorgehen die Verschiebungen des Systems, was auf den ersten Blick eher ungewöhnlich ist. Lange wurde in Praxis und Wissenschaft darüber gestritten, welche von beiden Vorgehensweisen nun die bessere sei. Heute ist diese Frage entschieden: Alle Großprogrammsysteme arbeiten ausschließlich nach dem Verschiebungsverfahren, weil es sich viel einfacher und geradliniger schematisieren und programmieren lässt.

In der Anfangszeit konnten nur wenige „Privilegierte“ überhaupt Finite-Elemente-Berechnungen ausführen, denn nur sie hatten Zugang zu einem Großcomputer, der damals für die meisten Universitäten und Firmen völlig unbezahlbar war. Als *Rieg* 1978 seine Diplomarbeit, die Berechnung einer Rennwagenkarosserie für die Firma Porsche mit der Finite-Elemente-Methode, anfertigte, stand wenigstens ein brauchbares FE-Programm, *SAP IV* („Structural Analysis Program“) von *Wilson* und *Bathe*, zur Verfügung. Es lief im Batchmode auf der für die damalige Zeit sehr großen Computeranlage der TH Darmstadt, einer IBM 370/168. Die Eingabedaten wurden nicht etwa an einem Terminal eingegeben, sondern auf Lochkarten, die man mit einem IBM-Lochkartenstanzer selbst lochen musste. Irgendwann war der Eingabedatensatz fertig gelocht, und man konnte ihn im Rechenzentrum abgeben. Nachts – und zwar nur nachts wegen der „enormen“ Kernspeicheranforderung von rund 700 KByte – wurde *SAP IV* gestartet und man konnte die Ergebnisse in der Regel am nächsten Tag, auf zentimeterdicken Papierstapeln per Schnelldrucker gedruckt, abholen. Interaktive Grafik? Völlig unbekannt. Plotten auf Papier konnte man immerhin, aber dazu war ein weiteres Programm namens *SAPOST* nötig, das seine Plotanweisungen über Lochkarten erhielt.

Längst ist dies anders geworden, und wenn man heute Bilder von Mainframes der frühen 1980er-Jahre betrachtet, dann meint man, diese Bilder wären auf einem anderen Stern aufgenommen worden. Gerade der *Personal Computer* hat hier in den 1980er-Jahren Bahnbrechendes geleistet. Schon Mitte der 1980er-Jahre konnte man ganz beachtliche FE-Strukturen mit PCs /27/ berechnen, wobei die Grenze damals bei einem nutzbaren Hauptspeicher von ungefähr 500 KByte – diktiert durch DOS – lag. 1985 startete *Rieg* mit der Entwicklung seines FE-Programms *Z88* auf einem IBM AT, damals noch als FORTRAN-Version /28/. Anfang der 1990er-Jahre zeichnete sich der Siegeszug von Windows mit der Version 3.0 ab, und *Rieg* schrieb das bisher ausschließlich in FORTRAN 77 codierte *Z88* komplett in C um /15/, weil man damals nur mit der Programmiersprache C auf vernünftige Weise Windows-Programme erstellen konnte.

Die Situation heute kennt jeder: Jeder Billig-PC vom Lebensmittel-Discounter hat endlich mehr Power – und zwar in vielen Zehnerpotenzen gerechnet – als die IBM 370 Mainframe vor über 50 Jahren, und jeder, wirklich jedermann, kann heute zu Hause umfangreiche Finite-Elemente-Berechnungen auf seinem PC oder Mac durchführen.

Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, ist die Methode der finiten Elemente – oder unserer Meinung nach besser *Finite-Elemente-Analyse* (FEA), da man etwas nachrechnet

und analysiert – im Gegensatz zum methodischen Konstruieren, das eine Synthese ist, im Prinzip außerordentlich einfach. Das Besondere daran ist eigentlich nur das streng formalisierte Vorgehen, das so geeignet für den Computereinsatz ist. Wir gehen in Kapitel 2 bei der Vorstellung des grundlegenden Vorgehens ganz bewusst von der Elastostatik aus und arbeiten zunächst nur mit Stäben und Balken. Stäbe und Balken sind aber natürlich keine 2D- bzw. 3D-Kontinua, weshalb mancher Leser darüber die Nase rümpfen und den gezeigten Weg für dilettantisch halten wird.

Aber halt! Um das grundlegende Vorgehen des *Matrizenverschiebungsverfahrens* zu zeigen, sind diese einfachen (Struktur-)Elemente tatsächlich sehr geeignet, denn finite Elemente für den ebenen Spannungszustand, für den ebenen Verzerrungszustand, für den axialsymmetrischen Spannungszustand, für die Plattenbiegung und für den räumlichen Spannungszustand – um die wichtigsten zu nennen – werden genauso ins Verfahren integriert. Tatsächlich sind auch alle Computerroutinen für das Aufstellen von Element-Steifigkeitsmatrizen ähnlich aufgebaut, wie Sie bei unserem Buch jederzeit anhand der Programmquellen für Z88 in C nachprüfen können. Vergleichen Sie beispielsweise die Subroutine *SHEI88.C* für krummlinige 8-Knoten-Serendipity-Scheiben und -Tori mit der Routine *HEXA88.C* für krummlinige 20-Knoten-Serendipity-Hexaeder für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand.

Am Wort Matrizenverschiebungsverfahren erkennt man übrigens alle relevanten Aspekte: Wir haben es mit teilweise riesigen *Matrizen* zu tun. Zudem werden *Verschiebungen* berechnet, und zwar mit einem schematisierten Verfahren.

Sie ahnen es schon: Man kann sich diesem Verfahren entweder von der Ingenieursseite – wie wir es in Kapitel 2 unternehmen – oder von der streng mathematischen Seite her nähern. Welchen Weg man wählt, hängt sicher vom eigenen Werdegang und den eigenen Vorkenntnissen ab, aber auch davon, welches Ziel man eigentlich verfolgen will. Da das Verfahren der finiten Elemente von Ingenieuren für das Lösen von Ingenieurproblemen entwickelt wurde, halten wir es für angemessen, das Grundlegende ebenfalls aus Ingenieursicht herzuleiten. Das hat außerdem den Vorteil, dass Sie außer den üblichen Mathematikkennntnissen eines Abiturienten nur noch Grundkenntnisse der Matrizenrechnung besitzen müssen. Was allerdings unverzichtbar ist, ist solides Wissen auf dem Gebiet der „starr“ Statik und der Elastostatik. Wer hier nicht sattelfest ist, wird beim Arbeiten mit jedwedem FE-Programm – nicht nur mit Z88Adria oder Z88Aurora – sehr bald auf die Nase fallen und sich gegebenenfalls auch den Hals brechen. Warum? Weil es beim Arbeiten mit der Finite-Elemente-Analyse zwei Hindernisse gibt, die systemimmanent sind. Die erste Falle: das eigentliche Erzeugen des Finite-Elemente-Netztes – wie grob oder wie fein, welche Elementtypen –, das mit sehr viel Erfahrung und Training verbunden ist. Die zweite Falle: die Wahl der Randbedingungen, also wie und wo Lager anzubringen, Kräfte aufzugeben und dergleichen sind. Auch hier ist Erfahrung im Spiel, aber zunächst sind solide Mechanikkennntnisse gefragt: Ein statisch unterbestimmtes System bricht auch beim teuersten Rechenprogramm in sich zusammen.

Doch auch für Ingenieure kann das Herangehen an die Finite-Elemente-Analyse aus streng mathematischer Sicht durchaus sehr spannend und sinnvoll sein. Tatsächlich sind elastostatische Probleme durch Extremalprinzipien darstellbar, z. B. durch das Prinzip vom Minimum der gesamten potenziellen Energie: Unter allen Verschiebungszuständen, die den kinematischen Randbedingungen genügen, minimiert der tatsächliche Gleichgewichtszustand die potenzielle Energie. Diese Funktionale der potenziellen Energie, die sich für Stäbe, Balken, Torsionsstäbe, Scheiben, Platten etc. aufstellen lassen, müssen also stationär werden. Dies kann mit der Methode von *Ritz* erfolgen. Die gewählten Funktionen des Ritz'schen Verfahrens sind gedanklich durchaus mit den Ansatz- bzw. Formfunktionen der Finite-Elemente-Analyse verwandt. Eine der herausragenden Quellen für die Herleitung der diversen Elementsteifigkeitsmatrizen über Funktionale ist das Buch von *Schwarz* /6/, das dem mathematisch interessierten Leser sehr empfohlen werden kann.

Allerdings möchten wir wieder daran erinnern, dass man sich die Finite-Elemente-Analyse nicht durch theoretische Betrachtungen allein erschließen kann. Nur durch umfangreiche Übung und Arbeit am Computer wird man es auf diesem Gebiet zu einer gewissen Meisterschaft bringen. Es erscheint uns daher wichtig, dass Sie die Beispiele des Buches selbst nachvollziehen, sinnvoll abändern und ergänzen – und zwar am Computer. Daher haben wir die theoretischen Kapitel relativ kurzgehalten, damit Sie sich möglichst bald mit den praktischen Aspekten auseinandersetzen können. An den Stellen, an denen wir allerdings der Meinung waren, dass bei anderen Autoren bestimmte Fragen, z. B. die zur Elastizitätstheorie, eher etwas zu kurz kommen, haben wir bewusst keine Kürzungen in Kauf genommen.

Dieses von uns sehr empfohlene Üben am Computer können Sie mit den beiden kostenlosen Programmen *Z88Adria* und *Z88Aurora* (Version 6) vornehmen. *Z88Adria* ist eine völlige Neuentwicklung von *Rieg* für diese Auflage des Buches, wobei die eigentlichen Rechenmodule auf denen der älteren Version *Z88V15OS* basieren. Mit *Z88Adria* können Sie alle linear-statischen Beispiele bis einschließlich Beispiel 24 (Abschnitt 13.24) berechnen. Sie können bei *Z88Adria* den Quellcode studieren und gegebenenfalls erweitern oder abändern, was, wenn man den theoretischen Unterbau der FEA wirklich verstehen will, äußerst sinnvoll ist. Zum reinen Durcharbeiten der zahlreichen von uns bereitgestellten Beispiele brauchen Sie sich selbstverständlich nicht mit den Interna der Programmierung zu befassen. *Z88Adria* und *Z88Aurora* stehen passend für die verschiedenen Betriebssysteme ladefertig auf www.feabuch.z88.de bereit. Ergänzt wird die Software um jeweils etwa 200-seitige Handbücher im PDF-Format, denen Sie Hinweise zur Installation und zum Betrieb entnehmen können. Eine Kurzfassung der Bedienungsanleitungen für einen ersten Start finden Sie in Kapitel 9 und Kapitel 10. *Z88Adria* ist ein ganz klassisches und ursprüngliches FE-Programm, das über Ein- und Ausgabedateien gesteuert wird. Wie alle anderen klassischen Programme ist es zum Studium des grundlegenden Vorgehens sehr geeignet, in der täglichen Arbeit jedoch etwas hölzern und nicht wirklich komfortabel.

Daher kamen unsere ehemaligen Mitarbeiter Dr.-Ing. B. Roith, Dr.-Ing. A. Troll und Prof. Dr.-Ing. Martin Zimmermann im Jahr 2009 auf die Idee, auf den Strukturen des ursprünglichen Z88 aufbauend eine sehr zeitgemäße Bedienoberfläche mit dem Namen Z88Aurora zu schaffen, deren besonderer Fokus darauf liegt, CAD-Dateien im STEP- oder STL-Format direkt einzulesen, das Netz zu erzeugen und sodann interaktiv mit Randbedingungen und Materialien versehen zu können. Sehr schnell schlossen sich weitere Mitarbeiter des Lehrstuhls den Arbeiten an. Im Juni 2010 kam diese erste Version von Z88Aurora heraus und wurde sofort ein voller Erfolg. Sehr bald begann Dr.-Ing. B. Roith mit den Arbeiten an der Nachfolgeversion. Seine Nachfolge trat Dr.-Ing. Markus Zimmermann an, der das System in seiner jetzigen Version 6 zusammen mit Dr.-Ing. B. Alber-Laukant, Prof. Dr.-Ing. S. Tremmel und F. Rieg weitgehend gestaltet hat. Sie werden diese neue Version 6 von Z88Aurora als sehr angenehm und intuitiv im Umgang empfinden, wozu auch ein einmaliges Feature beiträgt, die sogenannte *Spider-Help* von Dr.-Ing. B. Alber-Laukant und Dr.-Ing. B. Roith. *Spider-Help* führt Sie durch den Workflow einer Finite-Elemente-Analyse.

Obwohl wir Z88Aurora V6 und Z88Adria sehr umfangreichen Tests unterzogen haben, wissen Sie, dass Software nie fehlerfrei sein kann. Wenn Sie also Fehler oder Unregelmäßigkeiten entdecken, zögern Sie nicht, uns zu benachrichtigen. Außerdem können Sie immer mal wieder auf unserer Internetseite www.z88.de vorbeischaun, um zu prüfen, ob es Programm-Updates gibt.

Und nun wollen wir mit dem *grundsätzlichen Vorgehen* beginnen, das in Kapitel 2 behandelt wird.

2

Das grundsätzliche Vorgehen

Wir werden nun in ganz kurzer Form das Grundlegende der *Finite-Elemente-Analyse* zeigen und werden auch ganz bewusst eine Reihe von Sachverhalten einfach annehmen, ohne sie zunächst herzuleiten. So behält man den Überblick und sieht nach der Lektüre weniger Seiten, wie einfach an sich das Vorgehen ist. Dass dahinter oft anspruchsvolle Theorien und mathematische Verfahren stehen, sei nicht verschwiegen, aber das werden wir dann, nachdem wir den Gesamtüberblick gewonnen haben, ganz entspannt in Kapitel 3 bis Kapitel 8 betrachten – wobei man diese Kapitel tatsächlich für eine erste Lektüre überspringen kann. Wenn Sie uns über die nächsten Seiten folgen, dann haben Sie in der Tat die *Finite-Elemente-Analyse* im Prinzip verstanden! Alles, was dann kommt, sind nur noch Verfeinerungen und streng genommen Spezialaspekte. Sagen Sie selbst: Ist das nicht hoch motivierend?

Betrachten wir zu Beginn eine ganz einfache Zugfeder aus Stahl, die wir an einem Ende einspannen und am anderen Ende belasten. Das Belasten können wir prinzipiell auf zwei Arten durchführen: Entweder wir geben eine bekannte Kraft von z. B. 100 N auf oder wir ziehen die Feder um einen bestimmten Weg von z. B. 5 mm länger. Für eine Feder gilt das Hooke'sche Gesetz $F = K \cdot U$, das heißt, die Federkraft F ist das Produkt aus Federsteifigkeit K und Federweg U (Bild 2.1).

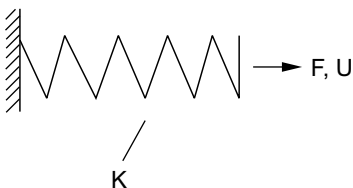


Bild 2.1

Das Hooke'sche Gesetz

Nun verhalten sich die allermeisten Gegenstände des täglichen Lebens wie diese Schraubenfeder, d. h., sie verformen sich linear-elastisch: Kraft F und Weg U sind einander proportional. Jede noch so kleine Kraft bedingt einen Weg bzw. eine Verschiebung bzw. eine Verformung. So hat ein Seil oder ein Zugstab der Länge ℓ , des Querschnitts A und des Elastizitätsmoduls E (Bild 2.2) die Kraft-Weg-Beziehung

$$F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot U$$

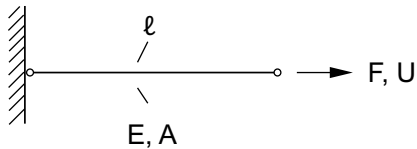


Bild 2.2
Der Zugstab

Wenn man

$$K = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

setzt, dann erkennt man wieder das Hooke'sche Gesetz

$$F = K \cdot U$$

mit $K = \frac{E \cdot A}{\ell}$

Jetzt definieren wir einen Stab ganz allgemein, indem wir an seinem linken Ende eine Verformung U_1 bzw. eine Kraft F_1 und an seinem rechten Ende eine Verformung U_2 bzw. eine Kraft F_2 aufgeben (Bild 2.3).

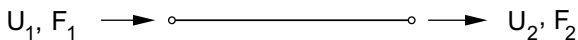


Bild 2.3 Der allgemein definierte Stab

Bilden wir das Kräftegleichgewicht, dann ist

$$F_1 = K \cdot U_1 - K \cdot U_2$$

$$F_2 = K \cdot U_2 - K \cdot U_1$$

Dieser Gleichungssatz dargestellt in Matrizen-Schreibweise ergibt

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Beweis: Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$K \cdot U_1 - K \cdot U_2 = F_1$$

$$-K \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2$$

Den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell \\ -EA/\ell & EA/\ell \end{bmatrix}$$

nennen wir die Element-Steifigkeitsmatrix. Sie gilt hier für einen waagrecht liegenden Stab in der Ebene. Das Gleichungssystem ist normale Matrix-Schreibweise. Das selbe in symbolischer Matrix-Schreibweise (Matrizen und Vektoren in symbolischer Darstellung werden wir ab jetzt **fett-kursiv** schreiben):

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Das ist schon wieder das Hooke'sche Gesetz. Nur stehen statt der Skalare nun Matrizen.

Rechenbeispiel 1

Wir geben die Kräfte F_1 und F_2 auf einen Stab (Bild 2.4).

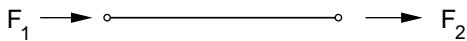


Bild 2.4 Kräfte an einem Stab

mit

$$F_1 = -1000 \text{ N}$$

$$F_2 = +1000 \text{ N}$$

Der Stab habe folgende Kennwerte:

$$\text{Länge } \ell = 1000 \text{ mm}$$

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Querschnittsfläche } A = 100 \text{ mm}^2$$

Damit wird K

$$K = \frac{200.000 \cdot 100}{1000} = 20.000 \text{ N/mm}$$

Diese Zahlenwerte eingesetzt ergibt

$$\begin{bmatrix} 20.000 & -20.000 \\ -20.000 & 20.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ +1000 \end{bmatrix}$$

Nun erfolgt ein Ausmultiplizieren des Gleichungssystems:

$$20.000 \cdot U_1 - 20.000 \cdot U_2 = -1000 \quad (\text{B1})$$

$$-20.000 \cdot U_1 + 20.000 \cdot U_2 = +1000 \quad (\text{B2})$$

Um das 2×2 -Gleichungssystem zu lösen, addieren wir Gleichung (B1) und Gleichung (B2), um eine der beiden Unbekannten zu eliminieren:

$$0 + 0 = 0$$

Das Ergebnis der Addition ist zwar richtig, es liefert aber keine Lösung. Warum? Weil die Gleichungen linear abhängig sind! Ein Beispiel zeigt: Gleichung (B2) mit -1 zu multiplizieren liefert Gleichung (B1). Wann tritt so etwas auf? *Wenn ein System statisch unterbestimmt ist!*



1. Regel der FEA

Ein System darf nie statisch unterbestimmt sein. Es muss immer statisch bestimmt (kinematisch bestimmt) oder beliebig statisch überbestimmt sein.

Also folgt das Festlegen einer Randbedingung (Bild 2.5).

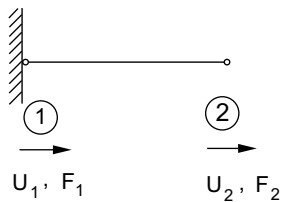


Bild 2.5

Wenn am Punkt 1 ein Festlager ist, dann ist die Verschiebung $U_1 = 0$

F_1 kann als **äußere Kraft** nicht mehr aufgegeben werden, denn das Lager fängt alles ab! Es kann also nur Folgendes noch aufgegeben werden:

- U_2 : eine Verschiebung
- F_2 : eine äußere Kraft

Nun kommt eine sehr grundlegende Unterscheidung, wie wir die Aufgabe angehen: Welche Lösungen suchen wir, Kräfte oder Verschiebungen? Das uns schon bekannte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

würde in der Mathematik so lauten: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Das ist die übliche Darstellung eines linearen Gleichungssystems: \mathbf{A} ist die Koeffizientenmatrix, \mathbf{x} der Lösungsvektor, also die Unbekannten, und \mathbf{b} ist die rechte Seite. Daher gilt:



Vorgabe der äußeren Kräfte und Berechnen der Verschiebungen = **Verschiebungsgrößenverfahren**

Es geht aber auch anders:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}$$

Dabei ist \mathbf{A}^{-1} die Inverse von \mathbf{A} . Daher gilt:



Vorgabe der Verschiebungen und Berechnen der Kräfte = **Kraftgrößenverfahren**

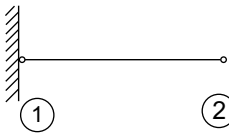
Heute arbeiten praktisch alle FEA-Systeme nach dem Verschiebungsgrößenverfahren:



2. Regel der FEA

FEA = Berechnen der Verschiebungen des Systems

Unsere Aufgabe ist in Bild 2.6 dargestellt.



U_1, F_1

U_2, F_2

Bild 2.6

Festlagerung an Punkt 1

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dabei sind: \mathbf{K} die Gesamt-Steifigkeitsmatrix, \mathbf{U} die Verschiebungen, d. h. die Unbekannten des Systems, und \mathbf{F} die äußeren Kräfte.

Die Gesamt-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} entspricht, weil nur ein einziges Element, der Stab, vorhanden ist, dessen Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{stab} .

Die Randbedingung ist: $U_1 = 0$, eine sogenannte *homogene Randbedingung*. Diese homogenen Randbedingungen werden im Gleichungssystem wie folgt berücksichtigt:



Vorgehen 1: Einbau der homogenen Randbedingung $U_j = 0$

V1.1: Setze in \mathbf{K} Zeile j zu 0

V1.2: Setze in \mathbf{K} Spalte j zu 0

V1.3: Setze Diagonalelement j in \mathbf{K} zu 1

V1.4: Setze Kraft F_j in \mathbf{F} zu 0

Also gilt:

V1.1 und V1.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

V1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

V1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Das Ausrechnen ergibt Folgendes:

$$1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 = 0 \rightarrow U_1 = 0$$

$$0 \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2 \rightarrow U_2 = \frac{F_2}{K}$$

Wie werden die eigentlichen Stabkräfte, also die inneren Kräfte berechnet? Bis jetzt wurden ja nur äußere Kräfte betrachtet.



Vorgehen 2: Knotenkräfte berechnen

V2: Multipliziere die jeweilige Element-Steifigkeitsmatrix des gesuchten Elements mit den berechneten Verschiebungen.

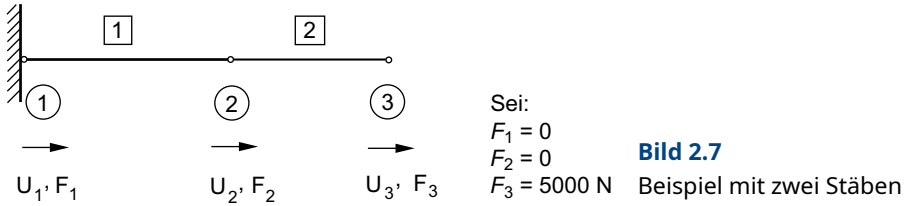
Also gilt:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2/K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Das sind die Stabkräfte am Element, also innere Kräfte. *Actio = Reactio*.

Rechenbeispiel 2 (Bild 2.7)

- Stab 1: $\ell_1 = 500 \text{ mm}$, $E_1 = 206\,000 \text{ N/mm}^2$, $A_1 = 100 \text{ mm}^2$
- Stab 2: $\ell_2 = 400 \text{ mm}$, $E_2 = 206\,000 \text{ N/mm}^2$, $A_2 = 40 \text{ mm}^2$
- daher: $K_1 = 41\,200 \text{ N/mm}$, $K_2 = 20\,600 \text{ N/mm}$



Damit werden folgende Element-Steifigkeitsmatrizen gebildet:

$$\text{Erster Stab} = FE_1: \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^e$$

$$\text{Zweiter Stab} = FE_2: \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2^e$$

Diese beiden Element-Steifigkeitsmatrizen müssen zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix zusammengesetzt werden. Diesen Vorgang nennt man *Compilation*.

Es gilt:

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{k}_i^e$$



3. Regel der FEA

Gesamt-Steifigkeitsmatrix = Summe der Element-Steifigkeitsmatrizen

Hier gilt:

Element 1	Element 2
$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$

Damit wird die Gesamt-Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix}$$

Also wird das Gleichungssystem zunächst

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

Einbau der Randbedingungen: $U_1 = 0$ nach Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist dann

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nunmehr erfolgt ein Rückrechnen der inneren Kräfte nach Vorgehen 2, um die Stabkräfte zu erhalten (Bild 2.8 und Bild 2.9):

Element 1

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5000 \\ +5000 \end{bmatrix}$$



Bild 2.8 Kräfte an den Knoten von Stab 1

Element 2

$$\begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5000 \\ +5000 \end{bmatrix}$$



Bild 2.9 Kräfte an den Knoten von Stab 2

Im Beispiel war eine Kraft F_3 vorgegeben. Nun soll stattdessen eine definierte Verschiebung aufgegeben werden. Das Gleichungssystem sieht zunächst so aus:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Als Nächstes bringen wir die äußeren Kräfte an:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir keine äußeren Kräfte aufbringen, sind sie auch alle logischerweise 0.

Es soll nun eine Verschiebung $U_3 = 0,3641$ mm aufgegeben werden. Da sie von 0 verschieden ist, nennt man sie eine *inhomogene Randbedingung*:



Vorgehen 3: Einbau einer inhomogenen Randbedingung

Die inhomogene RB habe den Wert C_j und gelte am Freiheitsgrad j .

V3.1: Subtrahiere von rechter Seite F den Spaltenvektor, der das Produkt aus C_j und Spalte j von K ist.

V3.2: Wende Vorgehen 1 an.

V3.3: Ersetze F_j durch C_j .

Das versuchen wir an unserem Beispiel.

Schritt V3.1:

$U_3 = 0,3641 = C_j$ d. h. $j = 3$

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0,3641 \cdot 0 \\ 0 - 0,3641 \cdot (-20.600) \\ 0 - 0,3641 \cdot 20.600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7500,46 \\ -7500,46 \end{bmatrix}$$

Schritt V3.2:

Vorgehen 1 anwenden, also Zeile 3 und Spalte 3 in K je 0, Diagonalelement K_{33} zu 1, F_3 zu 0:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7500,46 \\ 0 \end{bmatrix}$$

So wäre aber $U_3 = 0$. Das ist eindeutig falsch. Daher müssen wir nun Folgendes setzen: F_3 zu $C_3 = U_3 = 0,3641$.

Schritt V3.3:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nun wird noch die Randbedingung $U_1 = 0$, also das linke Festlager, eingebaut gemäß Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$... und das stimmt!

Rechenbeispiel 3

Nun erfolgt das Ganze mit einem **Balken** in der Ebene am Beispiel eines Trägers (Bild 2.10).

Das System ist statisch überbestimmt. Das stört uns aber nicht. Einer der großen Vorteile der FEA ist, dass man mit ihr beliebig statisch überbestimmte Systeme berechnen kann. Gegenüber der „Handrechnung“ mit „0“- und „1“- bzw. „2“- ... „n“-System

der Technischen Mechanik, die mit jeder weiteren Überbestimmten sprunghaft aufwendiger wird, steigt der Rechenaufwand bei der FEA praktisch nicht. Daher ist die FEA auch außerordentlich geeignet, um beliebig statisch überbestimmte Stab- und Balkenfachwerke oder Durchlaufträger zu berechnen.

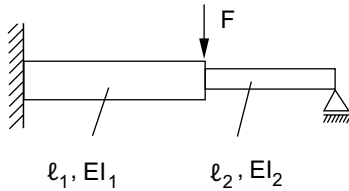


Bild 2.10
Kräfte am Balken

Hingegen müssen Sie bereits bei diesem einfach statisch überbestimmten System bei Berechnung mit der klassischen Technischen Mechanik schon mitdenken: Entweder Sie nehmen das rechte Loslager weg und kompensieren die dann auftretende Verschiebung w mit einer Kraft X , sodass die Verschiebung am rechten Lager wieder 0 wird (Bild 2.11), oder Sie nehmen die Momenteneinspannung am linken Lager weg und kompensieren den nun auftretenden Verdrehwinkel ψ mit einem Moment \hat{X} (Bild 2.12). All diese Überlegungen brauchen Sie beim Einsatz der FEA nicht mehr durchzuführen.

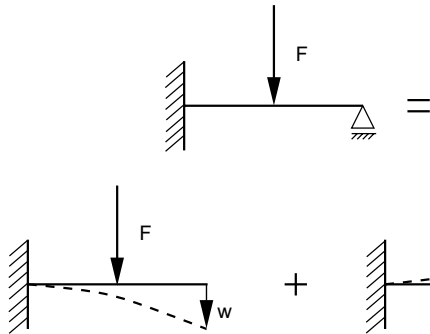


Bild 2.11
Statisch Überbestimmte X als Kraft

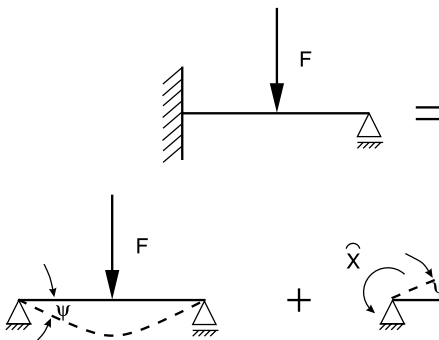


Bild 2.12
Statisch Überbestimmte \hat{X} als Moment

Dafür brauchen wir zunächst einen waagrecht in der Ebene liegenden Balken (Bild 2.13).

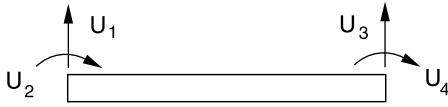


Bild 2.13

Die Verschiebungen und Verdrehungen am Balken

Dessen Element-Steifigkeitsmatrix (wir entnehmen sie momentan einfach der Literatur und glauben sie ohne Nachfragen) ist wie folgt:

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} & \frac{-12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ \frac{-12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

oder

$$K U = F$$

oder

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

Derartige Element-Steifigkeitsmatrizen findet man in der Literatur (/1/ bis /7/) oder liest Kapitel 4.

Manche Autoren stellen den Sachverhalt wie in Bild 2.14 dar.



Bild 2.14

Alternative Darstellung der Verschiebungen und Verdrehungen

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} & \frac{-12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ \frac{-12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Hier wird zwar vordergründig deutlich, dass am Balken Verschiebungen w , Verdrehungen φ , Kräfte F und Momente M wirken, aber die sehr erwünschte schematische Behandlung wird erschwert. Vor allem für die Darstellung

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

ist das völlig ungeeignet. Gerade die Indexform der Matrizen-Schreibweise braucht man zum Programmieren.

Kommen wir zurück zu unserem Beispiel (Bild 2.15).

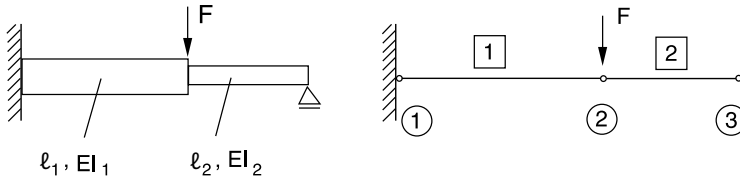


Bild 2.15 Darstellung des Rechenbeispiels 3

Natürlich könnten auch noch die E-Moduln unterschiedlich sein: $E_1 \neq E_2$.

Wir bleiben der Einfachheit halber bei

$$E_1 = E_2 = E = 206.000 \text{ N/mm}^2 = 206 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Balken 1: IPB 100:	$l = 3 \text{ m}$ $I_1 = 450 \text{ cm}^4 = 450 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
Balken 2: I 100:	$l = 2 \text{ m}$ $I_2 = 171 \text{ cm}^4 = 171 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

$F = -5000 \text{ N}$ (wirkt nach unten, siehe folgende Skizze)



4. Regel der FEA

Die FEA ist nicht an feste Maßsysteme gebunden. Die Einheiten können beliebig sein, müssen aber innerhalb der Struktur konsistent sein.



5. Regel der FEA

Es gibt keine genormten Koordinatensysteme und Vorzeichenregeln. Sie variieren von FEA-System zu FEA-System. Die Vorzeichen hängen allein von der Definition der Element-Steifigkeitsmatrizen bzw. der Gesamtstruktur ab.

Da wir die in Bild 2.16 dargestellten Freiheitsgrade definiert hatten ... ist hier die Kraft F negativ einzusetzen.

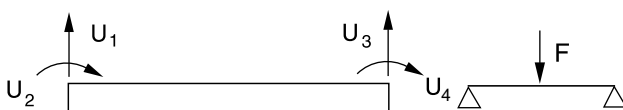


Bild 2.16

Darstellung der definierten Freiheitsgrade

Mit den Zahlenwerten wird K_1^e

$$\begin{bmatrix} 412.000 & -618.000 & -412.000 & -618.000 \\ -618.000 & 1.236.000 & 618.000 & 618.000 \\ -412.000 & 618.000 & 412.000 & 618.000 \\ -618.000 & 618.000 & 618.000 & 1.236.000 \end{bmatrix}$$

und K_2^e wird

$$\begin{bmatrix} 528.390 & -528.390 & -528.390 & -528.390 \\ -528.390 & 704.520 & 528.390 & 352.260 \\ -528.390 & 528.390 & 528.390 & 528.390 \\ -528.390 & 352.260 & 528.390 & 704.520 \end{bmatrix}$$

Die Freiheitsgrade am Gesamtsystem sind in Bild 2.17 dargestellt.

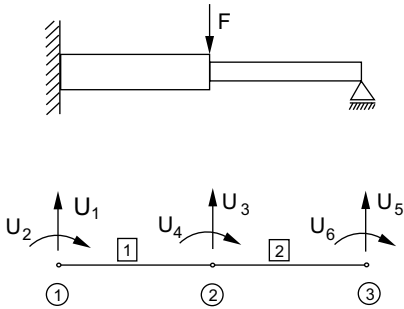


Bild 2.17

Darstellung der Freiheitsgrade im Rechenbeispiel 3

Um den Vorgang der Compilation zu verdeutlichen, legen wir uns ein leeres 6×6-Feld wegen der 6 Freiheitsgrade an (Bild 2.18). Jeder Knoten belegt zwei Zeilen und zwei Spalten, weil hier in diesem Fall ja jeder Knoten wieder jeweils zwei Freiheitsgrade *per definitionem* hat (bei einem „richtigen“ Balken, z. B. Z88-Typ Balken Nr. 2, hätte man 6 Freiheitsgrade pro Knoten: 3 Verschiebungen in X-, Y- und Z-Richtung und drei Rotationen um die X-, Y- und Z-Achse).

Knoten		①		②		③	
		1	2	3	4	5	6
①	1						
	2						
②	3						
	4						
③	5						
	6						

Bild 2.18 Hilfsraster zur Ermittlung der Gesamt-Steifigkeitsmatrix

Für die Element-Steifigkeitsmatrizen legen wir das in Bild 2.19 dargestellte Hilfsraster an.

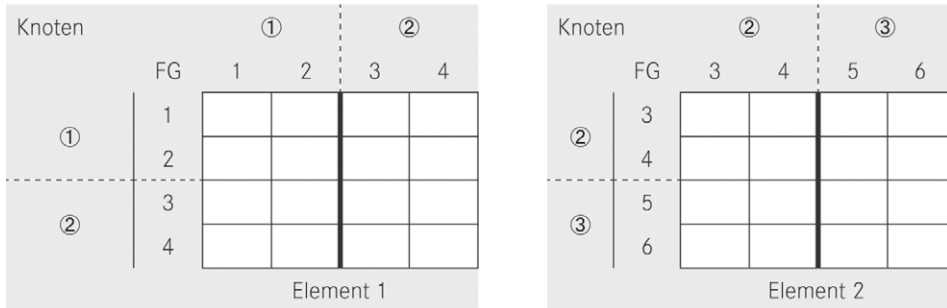


Bild 2.19 Hilfsraster zur Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrizen

Damit wird folgende Gesamt-Steifigkeitsmatrix gebildet:

	1	2	3	4	5	6 = FG
1	412 000	-618 000	-412 000	-618 000	0	0
2	-618 000	1 236 000	618 000	618 000	0	0
3	-412 000	618 000	412 000 + 528 390 = 940 390	618 000 + -528 390 = 89 610	-528 390	-528 390
4	-618 000	618 000	618 000 + -528 390 = 89 610	1 236 000 + 704 520 = 1 940 520	528 390	352 260
5	0	0	-528 390	528 390	528 390	528 390
6 = FG	0	0	-528 390	352 260	528 390	704 520



6. Regel der FEA

Die Element-Steifigkeitsmatrizen sind immer symmetrisch. Die Gesamt-Steifigkeitsmatrix ist immer symmetrisch. Ihre Ordnungen sind die Anzahl der Freiheitsgrade.

Damit können wir nun das Gleichungssystem mit den Kräften, aber noch ohne Lager aufstellen:

412.000	-618.000	-412.000	-618.000	0	0	U_1	=	0
-618.000	1.236.000	618.000	618.000	0	0	U_2	=	0
-412.000	618.000	940.390	89.610	-528.390	-528.390	U_3	=	-5000
-618.000	618.000	89.610	1.940.520	528.390	352.260	U_4	=	0
0	0	-528.390	528.390	528.390	528.390	U_5	=	0
0	0	-528.390	352.260	528.390	704.520	U_6	=	0

Nun erfolgt der Einbau der Lager: $U_1 = 0, U_2 = 0, U_5 = 0$:

1	0	0	0	0	0	U_1	0
0	1	0	0	0	0	U_2	0
0	0	940.390	89.610	0	-528.390	U_3	-5000
0	0	89.610	1.940.520	0	352.260	U_4	0
0	0	0	0	1	0	U_5	0
0	0	-528.390	352.260	0	704.520	U_6	0

Dieses Gleichungssystem rechnen Sie nun mit *MATHEMATICA* oder einem leistungsfähigen Taschenrechner wie z. B. *HP Prime* oder *TI-92* (Sie können aber auch einen 40 Jahre alten *HP 41* oder *TI-59* nehmen; die konnten das auch schon) aus. Die Lösung ist

$$\mathbf{U}^T = (0; 0; -0,01056746; 0,00211904; 0; -0,0089851)$$

Schon an diesem kleinen und wirklich einfachen Beispiel erkennen Sie, dass FEA ohne Computereinsatz mehr oder weniger *useless* ist. Oder möchten Sie das vorangehend aufgeführte 6×6-Gleichungssystem zu Fuß lösen? Tun Sie's einfach einmal und Sie verstehen, was wir meinen.

Aber: Es dürfte klar sein, dass wir selbst mit diesem Primitiv-Balkenelement beliebig komplizierte Durchlaufträger behandeln können (z. B. Lastfall in Bild 2.20).

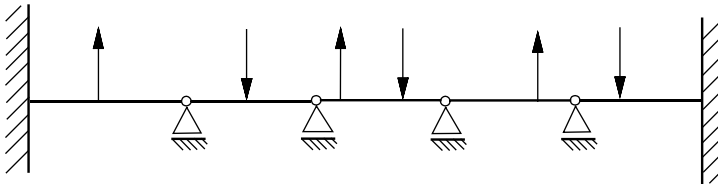


Bild 2.20 Beispiel eines komplexen Lastfalles

Die FEA lässt sich wie folgt zusammenfassen:



Vorgehen 4: Gesamtproblem

V4.1: Definiere eine FE-Struktur.

V4.2: Berechne die Element-Steifigkeitsmatrizen ESM.

V4.3: Compilation: Addiere die ESM zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix.

V4.4: Füge die Randbedingungen ein:

- + Kräfte
- + definierte Verschiebungen ungleich 0
- + Lager, d. h. Verschiebungen gleich 0

V4.5: Löse das Gleichungssystem. Das liefert U .

V4.6: Führe gegebenenfalls Rückrechnungen aus. Das ergibt:

+ innere Kräfte

+ Spannungen



7. Regel der FEA

Die heutige FEA ist eine Verallgemeinerung des Verschiebungsgrößenverfahrens der Mechanik. Das Vorgehen ist streng formalisiert und daher sehr geeignet für einen Computer-Einsatz.



8. und oberste Regel der FEA

Die lineare FEA ist nichts anderes als das Hooke'sche Federgesetz in Matrixform.

Wir haben damit die FEA in ihrem grundsätzlichen Verfahren abgehandelt. So läuft die FEA auch bei kompliziertesten, größten Strukturen der linearen Statik.

Alles Weitere sind nur noch Verfeinerungen. Was sind solche Verfeinerungen?

- Aufstellen von Elementsteifigkeitsmatrizen (ESM) für komplizierte Elemente, besonders Kontinuumselemente (siehe Bild 2.21)
- Spannungsberechnung: Wie ESMs gibt es Spannungsmatrizen:
Element-Spannungsmatrix \cdot berechnete Verschiebungen = Spannungen
- spezielle Speicherverfahren für die teilweise riesigen Gesamt-Steifigkeitsmatrizen
- Konditionierungsverbesserungen für Gesamt-Steifigkeitsmatrizen, z. B. Skalierungen
- spezielle Gleichungslöser für die teilweise riesigen Gleichungssysteme

Diese Fragen werden wir in den folgenden Kapiteln genau untersuchen. Doch das Wesentlichste haben Sie bereits gelernt.

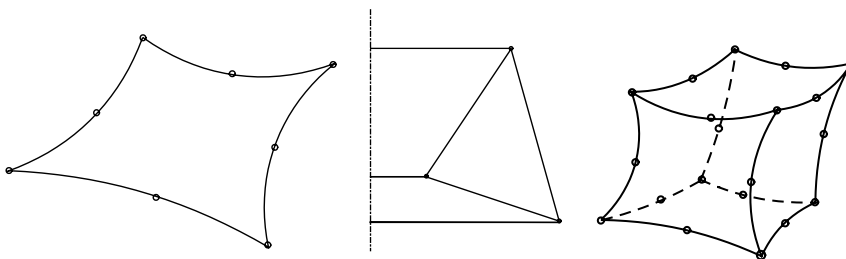


Bild 2.21 Beispiele für Kontinuumselemente

3

Grundlagen

3.1 Verschiebungen und Verzerrungen

3.1.1 Beim Zugstab

Ein Blick in viele Technische-Mechanik- oder auch FEM-Bücher zeigt uns, dass z. B. Folgendes gilt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dies wird oft von der sinnreichen Bemerkung „wie man sofort einsieht“ begleitet. Wir fanden derartige Gleichungen noch nie „sofort einsichtig“. Daher soll die Herleitung der sogenannten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen in diesem Kapitel ausführlich dargestellt werden. Sie sind die Basis für das Verständnis von Kontinuumelementen der FEA. Wir lehnen uns dabei an das ausgezeichnete Buch von *Bickford /10/* an, empfehlen zur Lektüre jedoch auch *Love /8/*, *Timoshenko /9/* und *Schnell et al. /90/*.

Wir gehen von einem einfachen Gummiband aus (das natürlich auch ein Stahlband sein könnte) und ziehen mit einer Kraft F daran (Bild 3.1). Die Ursprungslänge des Gummibandes sei ℓ_0 . Das gedehnte Band habe die Länge ℓ_1 . Die Verlängerung des Bandes heiße $\Delta\ell$.

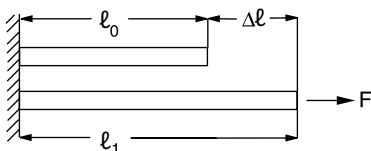
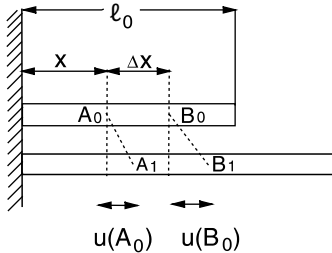


Bild 3.1

Längenänderung eines Stabes durch Krafteinwirkung

Dann definieren wir die Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$, mit $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$ auch $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$.

Um die Dehnung an jedem Punkt betrachten zu können, wählen wir zwei Punkte A und B auf dem Band, die sehr nahe beieinander liegen (Bild 3.2), sagen wir im Abstand Δx .

**Bild 3.2**

Punktuelle Betrachtung der Verschiebungen u an A und B

Gemäß Definition war ja $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0}$. Logischerweise ist dann die Dehnung am Punkt A_0 wie folgt:

$$\varepsilon_x(A_0) = \lim_{A_0 B_0 \rightarrow 0} \frac{A_1 B_1 - A_0 B_0}{A_0 B_0}$$

Dabei sind $A_1 B_1$ die Längen zwischen den Punkten A_1 und B_1 bzw. $A_0 B_0$ die Längen zwischen den Punkten A_0 und B_0 .

Nun ist $A_0 B_0 = \Delta x$ und es gilt:

$$A_1 B_1 = (x + \Delta x + u(B_0)) - (x + u(A_0)) = \Delta x + u(B_0) - u(A_0)$$

Damit wird

$$\varepsilon_x(A_0) = \lim_{A_0 B_0 \rightarrow 0} \frac{A_1 B_1 - A_0 B_0}{A_0 B_0} = \lim_{A_0 B_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x + u(B_0) - u(A_0) - \Delta x}{\Delta x}$$

Die Differenz $u(B_0) - u(A_0)$ können wir mit Δu bezeichnen und so entsteht

$$\varepsilon_x(A_0) = \lim_{A_0 B_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta u - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{A_0 B_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

und im Grenzübergang

$$\varepsilon_x(A_0) = \frac{du}{dx} \quad \text{am Punkt } A_0$$

Oder allgemein gesagt:

$\varepsilon = u'$ „Verzerrungs-Verschiebungs-Funktion“

Das bedeutet: Die Verzerrung (oder Dehnung) ε ist die Ableitung der Verschiebungsfunktion $u(x)$. Also gilt:

$$\varepsilon_x = u' = \frac{du}{dx}$$

3.1.2 Bei der Scheibe

Nachdem wir den eindimensionalen Fall erläutert haben, gehen wir nun zum zwei-dimensionalen Fall über, wie er z. B. bei sogenannten Scheibenproblemen auftritt. Scheibenprobleme spielen in der Ingenieurpraxis – und damit auch in der FEA – eine sehr große Rolle, denn tatsächlich kann man viele Lastfälle auf Scheibenprobleme zurückführen. Hier liegen alle Beanspruchungen **in** der Scheibenebene – bei den ganz anders gearteten Plattenproblemen liegen die Beanspruchungen **senkrecht** zur Plattenebene. Bild 3.3 bis Bild 3.8 zeigen einige typische Scheibenprobleme.

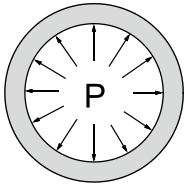


Bild 3.3

Rohr unter Innendruck, z. B. Nabe eines Pressverbandes

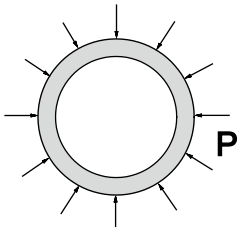


Bild 3.4

Rohr unter Außendruck, z. B. Hohlwelle eines Pressverbandes

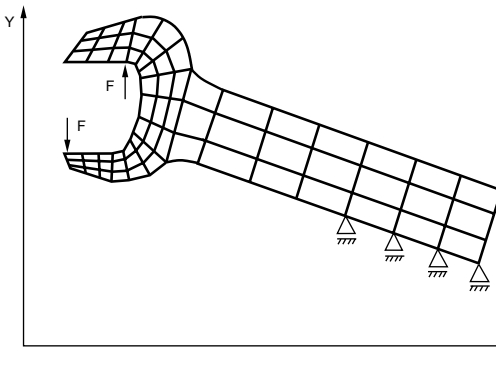


Bild 3.5

Schraubenschlüssel unter Last

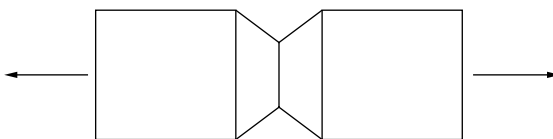
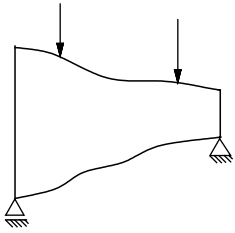
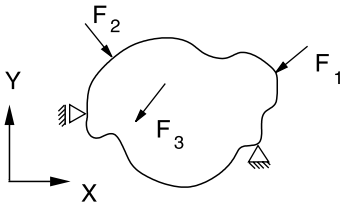


Bild 3.6

Kerbstäbe, z. B. zur Ermittlung der Formzahl α_K

**Bild 3.7**

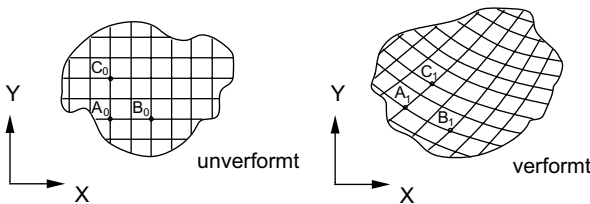
Kompliziert geformte ebene Balken und ebene Rahmen, die man nicht vernünftig mit Balkenelementen abbilden kann

**Bild 3.8**

Ganz allgemeiner Fall

Die Dicke t der Scheibe ist oft konstant, aber sie kann ohne Weiteres variieren, z. B. als $t = t(x, y)$. Man ordnet einfach jedem finiten Scheibenelement eine individuelle Dicke t zu. Das Besondere an Scheibenproblemen ist, dass keine Verschiebungen u , Spannungen σ und Verzerrungen ε in z -Richtung auftreten.

Wir leiten nun die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen für den zweidimensionalen Fall des Scheibenproblems her (Bild 3.9).

**Bild 3.9**

Der zweidimensionale Fall des Scheibenproblems

Die Verschiebungen in der xy -Ebene seien wie folgt:

$$u = u(x, y) \quad \text{in } x\text{-Richtung}$$

$$v = v(x, y) \quad \text{in } y\text{-Richtung}$$

$$w = 0 \quad \text{in } z\text{-Richtung}$$

Wie wir schon wissen, sind die Verschiebungen u und v Funktionen und abhängig vom jeweiligen Ort x, y . Nur in einfachsten Fällen, z. B. bei einem Zugstab mit konstantem Querschnitt, ist die Funktion $u = u(x)$ konstant. Hier im allgemeinen Fall, der eben charakteristisch für FEA-Scheibenprobleme ist, müssen dann beim Betrachten von Ableitungen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{usw.}$$

verwendet werden, da ja u eine Funktion von zwei Veränderlichen ist.

Wir zeichnen nun einen Teilbereich der Scheibe heraus (Bild 3.10).

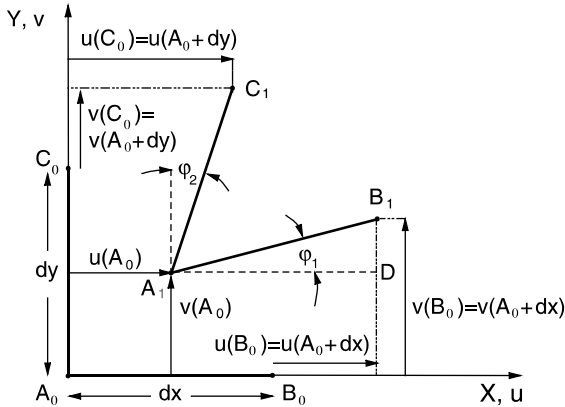


Bild 3.10
Ausschnitt aus der Scheibe

Zu diesem Bild sind einige Erläuterungen nötig. Der später verwendete Ausdruck

$$u(B_0) = u(A_0) + \frac{\partial u(A_0)}{\partial x} \cdot dx$$

entsteht wie folgt: Die Verschiebung u , d. h. in x -Richtung, an der Stelle B_0 entspricht auch der Stelle $A_0 + dx$ auf der x -Achse. Also ist

$$u(B_0) = u(A_0 + dx)$$

Jetzt kommt der eigentliche Trick: Wir entwickeln $u(A_0 + dx)$ in eine Taylor-Reihe. Die Taylor-Reihenentwicklung ist wie folgt definiert, wobei R_n das Restglied ist:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

Auf unsere Bezeichnungen angewandt gilt:

$$u(A_0 + dx) = u(A_0) + \frac{\partial u(A_0)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 u(A_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \dots + R_n$$

Die nichtlinearen Terme können wir vernachlässigen, weil sie mit $dx \rightarrow 0$ schneller gegen 0 gehen als die linearen Terme. Es bleibt

$$u(A_0 + dx) = u(A_0) + \frac{\partial u(A_0)}{\partial x} dx = u(B_0)$$

Genauso wird unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme:

$$v(B_0) = v(A_0 + dx) = v(A_0) + \frac{\partial v(A_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \dots = v(A_0) + \frac{\partial v(A_0)}{\partial x} \cdot d$$

Für die y -Achse ergibt sich

$$u(C_0) = u(A_0 + dy)$$

und als Taylor-Reihe

$$u(A_0 + dy) = u(A_0) + \frac{\partial u(A_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{dy^2}{2} + \dots + R_n$$

Da $\frac{dy^2}{2}$ schneller gegen 0 geht als dy , gilt

$$u(A_0 + dy) = u(A_0) + \frac{\partial u(A_0)}{\partial y} dy = u(C_0)$$

und ebenso

$$v(C_0) = v(A_0 + dy) = v(A_0) + \frac{\partial v(A_0)}{\partial y} d$$

Damit kann die Verzerrung ε am Punkt A_0 in x -Richtung $\varepsilon_x(A_0)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\varepsilon_x(A_0) = \frac{A_1 B_1 - A_0 B_0}{A_0 B_0}$$

Die Strecke wird nach Pythagoras

$$A_1 B_1 = \sqrt{(A_1 D)^2 + (B_1 D)^2} \quad \text{mit} \quad A_1 D = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

und

$$B_1 D = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot d$$

Damit wird die Strecke $A_1 B_1$

$$A_1 B_1 = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2}$$

Umformen:

$$A_1 B_1 = \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + dx^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

$$A_1 B_1 = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \approx dx \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}} \approx dx \left(1 + \frac{2}{2} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Denn es gilt: $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n \varepsilon$ für $|\varepsilon| \ll 1$ (binomischer Satz).

Wir gingen dabei von den Annahmen aus, dass

1. die Verschiebungen klein sind,
2. auch die Ableitungen der Verschiebungen klein sind und somit

3. die Quadrate der Ableitungen zu vernachlässigen sind (vgl. /3/, S. 63), und haben daher die quadratischen Summanden unter der Wurzel vernachlässigt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \approx 0$$

Es bleibt

$$A_1 B_1 = dx \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Damit wird nunmehr

$$\varepsilon_x(A_0) = \frac{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - dx}{dx} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Also gilt: $\varepsilon_x(A_0) = \frac{\partial u}{\partial x}$

Für $\varepsilon_y(A_0)$ gilt ganz analog

$$\varepsilon_y(A_0) = \frac{A_1 C_1 - A_0 C_0}{A_0 C_0}$$

und mithilfe des Satzes von Pythagoras ist wieder

$$A_1 C_1 = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy\right]^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^2}$$

Mit genau demselben Vorgehen wie vorangehend beschrieben entsteht

$$\varepsilon_y(A_0) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Nun fehlt noch die Schubverzerrung am Punkt A_0 in den Richtungen x und y :

$$\gamma_{xy}(A_0) = \text{Winkel } B_0 A_0 C_0 - \text{Winkel } B_1 A_1 C_1$$

Der Winkel $B_1 A_1 C_1$ ist $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2$ und dabei sind die Winkel φ_1 und φ_2 einfach

$$\tan \varphi_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot dx}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot dy}$$

Nun müssen wieder ein paar mathematische Tricks angewendet werden:

- In beiden Gleichungen kann dx bzw. dy gekürzt werden.
- Für kleine Winkel φ gilt: $\tan \varphi \approx \varphi$.

- Da die Ableitungen der Verschiebungen klein sind, sind die Nenner

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

nahezu 1, d. h., die Nenner werden zu 1 und entfallen.

So wird

$$\varphi_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

und in unsere Gleichung

$$\gamma_{xy}(A_0) = \text{Winkel } B_0A_0C_0 - \text{Winkel } B_1A_1C_1$$

eingesetzt:

$$\gamma_{xy}(A_0) = \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\gamma_{xy}(A_0) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Damit werden die Verzerrungs-Verschiebungs-Gesetze für den ebenen Fall

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3.1.3 Im Raum

Diese Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen können ganz leicht auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall erweitert werden, indem man genau die gleichen Betrachtungen für die yz -Ebene und die zx -Ebene anstellt. Sie brauchen also nur die Indizes zu vertauschen.

So entsteht

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Das sind die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen für den dreidimensionalen Fall bei kleinen Verformungen. Wir erinnern uns, dass wir die höheren Taylor-Glieder vernachlässigt haben, also linearisiert haben.

In der Elastizitätstheorie kann man die Deformationskomponenten in einer Deformationsmatrix, genauer sogar einem sogenannten Deformations- oder Verzerrungstensor, zusammenfassen, wobei diese Deformationsmatrix dann Tensoreigenschaften hat, wenn die *halbe Gleitung* eingesetzt wird:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Mit der Definition

$$\varepsilon_{xy} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\gamma_{xz}$$

usw. entsteht

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Das ist der sogenannte *linearisierte Green'sche Verzerrungstensor*.

An dieser Stelle soll die Index-Schreibweise gezeigt werden, weil damit eine viel einfachere programmtechnische Umsetzung möglich ist. Wir schreiben nun

statt	auch	noch besser
ε_x	ε_{xx}	ε_{11}
ε_y	ε_{yy}	ε_{22}
ε_z	ε_{zz}	ε_{33}
ε_{xy}	ε_{xy}	ε_{12}
•	•	•
ε_{zy}	ε_{zy}	ε_{32}

Das Koordinatensystem heißt also nicht mehr x, y, z , sondern $1, 2, 3$.

Damit wird der Green'sche Verzerrungstensor

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Das ist offensichtlich mathematisch viel eleganter, aber für Ungeübte zunächst etwas verwirrend. Doch setzen Sie einfach einmal ein paar Indizes in die vorangegangene Gleichung ein, z. B. $i = 1, j = 1$ oder $i = 2, j = 3$:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$$

3.1.4 Bei der Platte

Die Platte können wir uns zunächst wie gekreuzte Balken vorstellen: Es gibt also nicht nur in x -Richtung eine Biegelinie, sondern auch in y -Richtung. Bild 3.11 zeigt diesen Sachverhalt, wobei wir das Koordinatensystem abweichend von den üblichen Konventionen der Technischen Mechanik mit z positiv nach oben gewählt haben, wie es allgemein in FE-Programmen üblich ist.

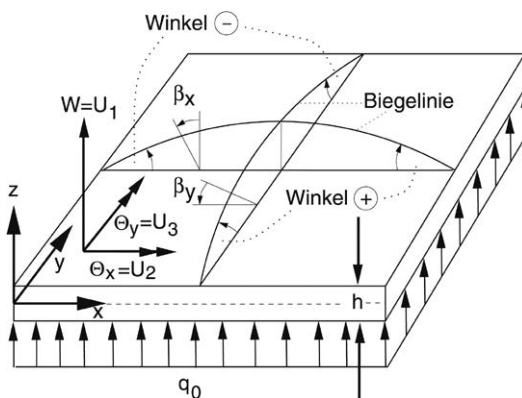


Bild 3.11

Verformungen einer Platte nach FEA-Konvention

Damit sind die Raumrichtungen kompatibel zu den anderen behandelten Spannungszuständen.

Belastet wird die Platte mit einer Gleichflächenlast q_0 . Die Plattendicke ist h . Dabei gehen wir nun nach der Theorie von *E. Reissner* und *R. D. Mindlin* vor:

Dabei wird angenommen, dass Plattenteilchen, die ursprünglich auf einer Linie entlang der z -Richtung über die Plattendicke verteilt lagen, auch nach Verformung der Platte auf einer Linie liegen bleiben, aber diese Linie muss nicht notwendigerweise senkrecht zur verformten Mittellinie sein. Bild 3.12 zeigt dies.

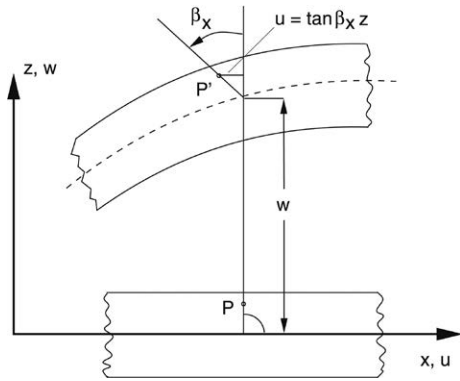


Bild 3.12
Geometrische Größen bei der
Reissner-Mindlin-Theorie

Aus Bild 3.12 erkennt man: $u = \tan \beta_x \cdot z$. Für kleine Winkel gilt: $\tan \varphi \approx \varphi$
Damit wird unter Beachtung der Vorzeichen aus Bild 3.11

$$u = z \cdot \beta_x(x, y), \quad v = -z \cdot \beta_y(x, y), \quad w = w(x, y)$$

Mit den schon aus der Scheibentheorie vorher abgeleiteten kinematischen Beziehungen entsteht

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cdot \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ z \cdot \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{pmatrix}$$

3.2 Spannungs-Dehnungs-Relationen

Wenn wir einen Zugversuch mit z. B. Stahl ausführen, dann ergibt sich aus Messungen das sogenannte Spannungs-Dehnungs-Schaubild (Bild 3.13).

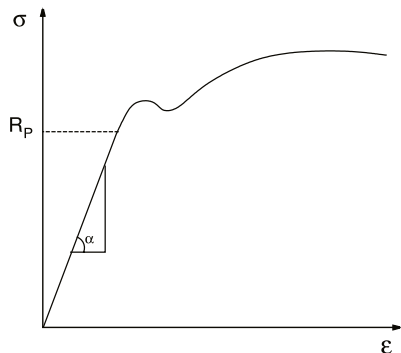


Bild 3.13
Spannungs-Dehnungs-Schaubild

Zwischen σ und ε besteht also bis zur Proportionalitätsgrenze R_p ein linearer Zusammenhang. Das gilt für die meisten metallischen Werkstoffe. Die Steigung der Kurve für lineares Materialverhalten (hier eine Gerade) ist

$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

und wird „Elastizitätsmodul“ E genannt, im Englischen „Young’s Modulus“, d. h.

$$E = \tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

oder

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad F = K \cdot U$$

Das entspricht genau dem Hooke’schen Federgesetz. Solche Werkstoffe heißen dann auch Hooke’sche Materialien. E ist sozusagen Federkonstante des Werkstoffs, und sie wird im Zugversuch ermittelt.

Nun ist ebenfalls aus Experimenten bekannt – aber dieses Experiment können Sie zu Hause mit einem Einweckgummi ausprobieren –, dass ein Zugstab sich quer zur Zugrichtung zusammenzieht. Das nennt man Querdehnung oder Querkontraktion. Einmal angenommen, der Querschnitt des Zugstabs sei rund mit Durchmesser d , dann kann man eine Querdehnung

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

definieren. Das Verhältnis Querdehnung ε_q zu Längsdehnung ε_x nennt man die Querkontraktionszahl ν :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_x}$$

Die Querkontraktionszahl ν heißt im Englischen „Poisson’s ratio“, und man kann zeigen, dass Folgendes gelten muss:

$$-1 \leq \nu \leq 0,5$$

Für alle bekannten homogenen Materialien ist $0 \leq \nu \leq 0,5$ d. h. bei Zug, Querkontraktion und keiner Querdehnung.

Für den technisch sehr wichtigen Stahl gilt

$$\nu_{\text{Stahl}} = 0,3$$

Diesen Wert kann man aber auch für viele andere „normale“ Metalle wie Grauguss, Aluminium usw. anwenden, aber unsere Experimente zeigten, dass sich sogar eine Reihe von technischen Kunststoffen damit ganz brauchbar linear rechnen lässt, obwohl Kunststoffe eher gegen 0,5 tendieren.

Eine andere wichtige elastische Größe ist der sogenannte Schubmodul G , der das Pendant zum Elastizitätsmodul bei Schubbeanspruchung darstellt.

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Zum Vergleich:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Zwischen E und G gibt es eine definierte Beziehung

$$E = 2G(1 + \nu)$$

bzw.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

woraus der „Praktikerwert“ $G \approx \frac{3}{8} \cdot E$ entsteht, denn mit $\nu = 0,3$ für Stahl gilt

$$G = \frac{E}{2,6}, \quad \frac{1}{2,6} \approx \frac{3}{8}$$

Da sich G über vorangehend genannte Gleichung eindeutig aus E bestimmen lässt, müssen bei vielen FEA-Programmen bei linearen Berechnungen nur der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν für isotrope (siehe nachfolgende Ausführungen) homogene Materialien eingegeben werden.

Wir weisen nochmals darauf hin, dass sich Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl nur aus Versuchen, sozusagen phänomenologisch, ermitteln lassen, während die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen „exakte“ Mathematik sind (gleichwohl unter Zuhilfenahme von gewissen Tricks).

Und damit kommen wir zum dreidimensionalen Hooke'schen Gesetz. Ein Hooke'sches Material liegt dann vor, wenn die folgenden Bedingungen zutreffen:

- **Linearität:** Vergrößert man alle Spannungskomponenten um einen gewissen Faktor, dann steigen die Dehnungskomponenten um den gleichen Faktor (Multiplikatивität).
- **Linearität:** Spannungen und Dehnungen können in den jeweiligen Koordinatenrichtungen addiert, d. h. überlagert werden (Additivität = Superpositionsprinzip).
- **Isotropie:** Das Material verhält sich in allen Richtungen gleich, ist also unabhängig von Drehungen des Koordinatensystems.

1. Im eindimensionalen Zugversuch hatten wir

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

oder

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Da ja die Querkontraktionszahl definiert war als

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_x}$$

folgen durch Umformen der Gleichung und Einsetzen von $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

Für Isotropie gilt: $\varepsilon_y = \varepsilon_z$. Durch die Querkontraktion ist die Deformation dreidimensional, obwohl die Belastung eindimensional ist.

2. Wenn wir nun einen Würfel unter die Spannungen σ_x , σ_y und σ_z setzen (Bild 3.14), dann ergibt das Superpositionsprinzip:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

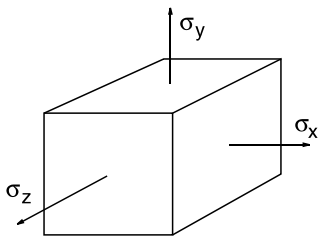


Bild 3.14
Spannungen an einem Würfel

Das heißt, alle drei Spannungsponenten liefern einen Betrag zur jeweiligen Verformung in x -, y - und z -Richtung. Etwas griffiger geschrieben ergibt dies

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

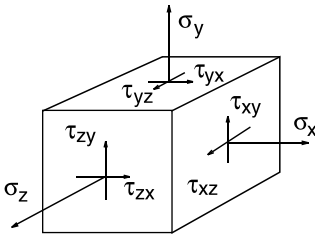
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

3. Die Schubanteile bleiben wie gedacht; hier gibt es keine Superposition, d. h., es gibt keine Kopplung zwischen Schub und Zug (Bild 3.15).

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

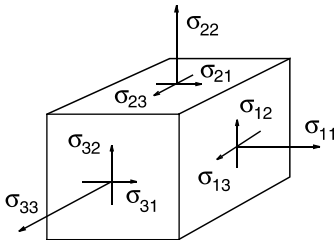
$$2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{yz}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xz}$$

**Bild 3.15**

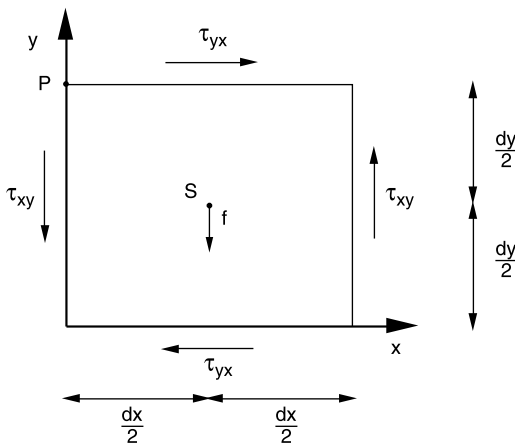
Spannungen im Raum in „üblicher“ Benennung

Die Schubspannungen werden wie folgt bezeichnet (Bild 3.16): Der erste Index gibt die Ebene an, in der die Schubspannung wirkt, der zweite Index die Richtung. Die Fläche wird durch die Flächennormale definiert, die senkrecht auf der Fläche steht.

**Bild 3.16**

Spannungen im Raum in FEA-Benennung

Hier erkennt man sehr schön den Satz von der *Gleichheit der Schubspannungen* (vgl. /9/): $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, d. h. allgemein $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Warum? Betrachten wir Bild 3.17 und bilden die Momentensumme um den Punkt P.

**Bild 3.17**

Gleichheit der Schubspannungen

Dabei ist zu beachten, dass die Normalspannungen keinen Beitrag liefern; sie heben sich gegenseitig auf. Im Grenzfall verschwinden die Beiträge der Volumenkräfte (Gewichtskräfte, Fliehkräfte) zum Moment; dabei ist $f = \rho g$.

$$\overleftarrow{P}: dx \cdot (\tau_{xy} dz dy) - dy \cdot (\tau_{yx} dx dz) - f \cdot dx dy dz \cdot \frac{dx}{2} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Diese sechs Gleichungen schreiben wir nun in Matrizenform, weil das für die FEA viel geeigneter ist, und legen die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen zugrunde:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Wir setzen dabei

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$$

Beachten Sie, dass beim linearisierten Green'schen Verzerrungstensor Folgendes definiert war:

$$\varepsilon_{xy} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

Hier brauchen wir aber die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen.

Auch die Schubspannungen werden nun durchgängig σ_{ij} genannt, wobei gilt:

$\sigma_{\bar{i}, i=j}$ Normalspannungen

$\sigma_{\bar{i}, i \neq j}$ Schubspannungen.

Fassen wir die sechs vorangegangenen Gleichungen in Matrixform zusammen, ergibt sich in üblicher Notation

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$$

und dasselbe in der FEA-Indexnotation

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$$

In symbolischer Matrixschreibweise gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}$$

oder in Indexnotation

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E} \cdot \sum_j M_{ij} \sigma_{jk}$$

Um nun diesen Gleichungssatz nach $\boldsymbol{\sigma}$ aufzulösen, kann man ganz formal Folgendes schreiben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} E$$

Es muss also die Inverse von \mathbf{M} berechnet werden, was sehr mühsam ist. Heute müssen Sie das zum Glück nicht mehr „zu Fuß“ machen, sondern können dies mit Programmunterstützung tun. Nehmen Sie z. B. *MATHEMATICA* und schreiben Sie am Prompt

$$m = \{ \{1, -\nu, -\nu, 0, 0, 0\}, \\ \{-\nu, 1, -\nu, 0, 0, 0\} \\ \{-\nu, -\nu, 1, 0, 0, 0\} \\ \{0, 0, 0, 2[1 + \nu], 0, 0\} \\ \{0, 0, 0, 0, 2[1 + \nu], 0\} \\ \{0, 0, 0, 0, 2[1 + \nu]\} \}$$

Bilden Sie

im = Inverse [m]

imt = Together [im]

und lassen Sie mit

MatrixForm [%]

die Inverse anzeigen. Dieses Invertieren können Sie auch mit einem leistungsfähigen Taschenrechner wie z. B. dem *TI-92* vornehmen. Damit wird der Gleichungssatz nach $\boldsymbol{\sigma}$ aufgelöst:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} E$$

Den Ausdruck $\mathbf{M}^{-1} E$ nennt man die Materialmatrix \mathbf{C} und so ergibt sich

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ausgeschrieben gilt

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

C für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall. Achtung bei $\nu = \frac{1}{2}$!

Eine weitere Schreibweise ist

$$\sigma_{ik} = \sum_j C_{ij} \varepsilon_{jk}$$

Damit sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den allgemeinen, den dreidimensionalen Fall hergeleitet.

Für den Sonderfall des ebenen Spannungszustandes ergeben sich unter Einsetzen von

$$\sigma_{33} = 0 \quad (= \sigma_z)$$

$$\sigma_{31} = 0 \quad (= \tau_{zx})$$

$$\sigma_{23} = 0 \quad (= \tau_{yz})$$

dann

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Mit dem gleichen Vorgehen werden die anderen Spezialfälle wie

- axialsymmetrischer Spannungszustand und
- ebener Verzerrungszustand

hergeleitet. Sie sind in Kapitel 4 tabelliert. Wer sich für diese Grundlagen näher interessiert, dem sei *Betten* /41/ /44/ /45/ unbedingt empfohlen.

Abschließend, da etwas abweichend von den bisherigen Überlegungen, folgt die Materialmatrix \mathbf{C} für die *Reissner-Mindlin*-Platte: Sie setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, d. h. einer Komponente \mathbf{C}_b für den Biegeanteil und einer Komponente \mathbf{C}_s für den Schubanteil, denn die *Reissner-Mindlin*-Platte ist im Gegensatz zur schubstarren *Kirchhoff-Love*-Platte schubelastisch:

$$\mathbf{C}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & B\nu & 0 & 0 & 0 \\ B\nu & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$S = \frac{Ehk}{2(1+\nu)}$$

Der Schubkorrekturfaktor k wird nach *Reissner* wie folgt verwendet (vgl. z. B. *Krätzig/Başar /42/*):

$$k = \frac{5}{6}$$

Abschließend sollen hier noch die Grundgleichungen der Plattentheorie angegeben werden (vgl. Bild 3.18 und Bild 3.19). Wer Näheres darüber wissen möchte, möge das ausgezeichnete Buch von *Gross et al. /39/* konsultieren. Beachten Sie hierbei bitte, dass die Benennungen in der Plattenrechnung abweichend vom Standard sind: Hier bezeichnet beispielsweise M_x das zu σ_x gehörende Moment, während sonst M_x das um die x -Achse drehende Moment darstellt.

$$\text{Querkräfte} \quad Q_x = \int \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int \tau_{yz} dz$$

$$\text{Biegemomente} \quad M_x = \int \sigma_x z dz \quad M_y = \int \sigma_y z dz$$

$$\text{Torsionsmomente} \quad M_{xy} = M_{yx} = \int \tau_{xy} z dz$$

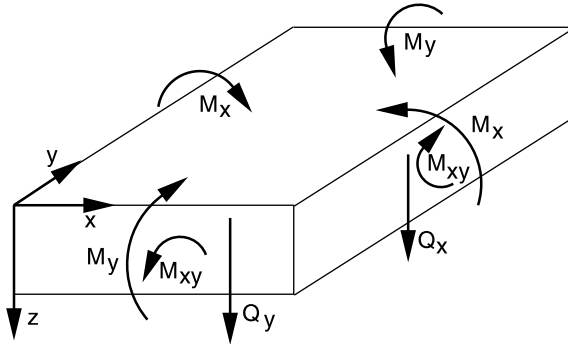


Bild 3.18
Kräfte und Momente an der Platte

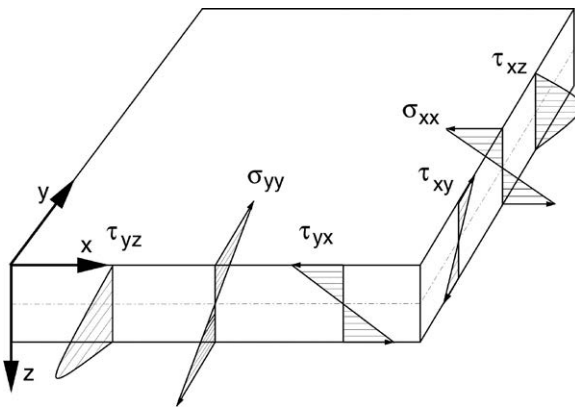


Bild 3.19
Spannungen an der Platte

Für die Spannungen lässt sich bei Rechteckplatten aus isotropem Material Folgendes aussagen (vgl. *Pilkey /38/*). Dort finden sich sehr viele verschiedene Plattenformeln tabelliert:

$$\sigma_x = \frac{12z}{h^3} M_x, \quad \sigma_y = \frac{12z}{h^3} M_y, \quad \tau_{xy} = \frac{12z}{h^3} M_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right], \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

3.3 Thermo-mechanische Beanspruchung

Für die Entwicklung von Bauteilen bzw. Baugruppen ist eine Betrachtung von thermischen Auswirkungen, wie z. B. eine thermo-mechanische Verformung durch Kriechen, mittlerweile vielfach unerlässlich geworden. Denn eines ist vielen aus Erfahrung klar: Bauteile nehmen im Betrieb Wärme auf oder geben diese ab. Und genau das kann wiederum Auswirkungen auf die Verformung und Haltbarkeit haben (*Pahl/*

Beitz /134/). Eine Erweiterung und Weiterentwicklung in der FEA eröffnet somit neue Felder in der Simulation, womit Bauteile und -gruppen die Belastungen im Betrieb besser abbilden können und aus diesem Grund eine genauere Festigkeitsanalyse durchgeführt werden kann.

Die Analyse von thermischen Problemen gehört zum Bereich der Multiphysics bzw. zu den Feld- und Potenzialproblemen. Das bedeutet, es können mit dem Verfahren der Finite-Elemente-Analyse neben Wärmeflüssen, Elektro- und Magnetfeldern oder allgemeinen Differenzialgleichungen auch gekoppelt verlaufende Prozesse (z. B. thermo-mechanisch oder magneto-mechanisch) berechnet und dargestellt werden (vgl. Müller/Groth /135/).

In diesem Abschnitt wird das Hauptaugenmerk auf die stationäre Wärmeleitung mit deren Randbedingungen gelegt. Ein wichtiger Punkt, der auch erwähnt werden muss, ist die mechanische Auswirkung der Temperatur auf ein Bauteil. Die resultierenden thermischen Dehnungen, die aufgrund der Wärmeentwicklung entstehen, ergeben Verschiebungen und Spannungen, die mit einer elastostatischen Problemstellung überlagert werden können.

Die generelle Grundlage von Temperaturberechnungen ist der 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Dieser besagt, dass bei physikalischen oder technischen Prozessen keine Energie verloren gehen kann, sondern nur ihre Erscheinungsform sich ändert. Die Wärmeübertragung oder auch Wärmeleitung ist der Transfer der Energieform Wärme aufgrund einer Temperaturdifferenz. Für eine Berechnung der Wärmeübertragung im stationären Fall gilt das allgemeine Wärmeleitungsgesetz nach Fourier:

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dabei ist q_x die Wärmestromdichte, λ_x die Wärmeleitfähigkeit und T die Temperatur des Körpers jeweils am Punkt der Ortskoordinate x . Dieses Gesetz besagt, dass die Wärmestromdichte proportional zum Temperaturgradienten in Normalenrichtung ist. Das negative Vorzeichen beruht auf der Konvention aus der Thermodynamik und besagt, dass die Wärme in Richtung der abfallenden Temperatur fließt (vgl. von Böckh/Wetzel /136/). Dies kann man sich ganz einfach anschaulich vorstellen: Öffnet man im Winter (wir gehen von einem durchschnittlich kalten Winter in Deutschland aus) das Fenster seiner gut beheizten Wohnung, so wird es relativ schnell kalt. Das liegt daran, dass die Wärme den Drang verspürt, zum Kalten zu „wandern“. Subjektiv hat man das Gefühl, in der Wohnung wird es kälter, und denkt, dass die Kälte von außen in die Wohnung eindringt, aber es ist genau umgekehrt. Die Wärme fühlt sich vom Kalten „angezogen“.

Gehen wir jetzt einen Schritt weiter. Nun fordern wir, die Energie bzw. der Wärmestrom im Inneren eines Körpers muss im Gleichgewicht sein. Dies beschreibt die allgemeine Poisson'sche Gleichung für den Fall der stationären Wärmeleitung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_w = 0$$

Die allgemeingültige Quellgröße q_w ist die pro Volumeneinheit erzeugte Wärmemenge bzw. die Wärmequellendichte eines orthotropen Materials. Orthotrop bedeutet richtungsabhängig. In diesem Fall ist die Wärmeleitfähigkeit der einzige Materialparameter, der orthotrop ist.

Für einen Übertrag der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung in die FEA wird ein Funktional Π gebildet:

$$\Pi = \iiint_V \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) dV - \iiint_V T q_w dV - \iint_A T q_F dA$$

Dabei beschreibt q_F die Wärmestromdichte an der Oberfläche des Körpers. Die Forderung, dass Π stationär wird, mit T als einziger Variable, liefert die Gleichung

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \delta T}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} dV = \iiint_V \delta T q_w dV + \iint_A T q_F dA$$

wobei

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

bzw.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$$

sind und δ „Variation von“ bedeutet. Für eine detailliertere Beschreibung wird hier auf *Bathe /4/* verwiesen. Durch Kürzen und Umformulierung ergibt sich daraus das für die FEA allgemeingültige Elementgleichungssystem

$$\mathbf{K}_{W,elem} T_{elem} = Q_{elem}$$

$\mathbf{K}_{W,elem}$ beschreibt dabei die Elementwärmeleitfähigkeitsmatrix und ist definiert als

$$\mathbf{K}_{W,elem} = \iiint_V \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} dV$$

Der Vektor T_{elem} repräsentiert die gesuchten Knotentemperaturen und Q_{elem} ist der allgemeine Wärmestromvektor. Er beschreibt die effektiven Knotenwärmeströme, die sich aus den thermischen Randbedingungen, d. h. der Wärmequellendichte im Volumen und der Wärmestromdichte an der Bauteiloberfläche, ergeben, und ist definiert als

$$Q_{elem} = \iiint_V \mathbf{N}^T q_w dV + \iint_A \mathbf{N}^T q_F dA$$

Thermo-mechanische Simulation

Zu Beginn von Abschnitt 3.3 haben wir die rein thermische Wärmeleitung betrachtet. Doch das Interessante, die Berechnung der thermo-mechanischen Verschiebung, kennen wir noch nicht. Dies wollen wir jetzt nachholen. Im Allgemeinen treten aufgrund des Temperaturunterschiedes in einem Bauteil Dehnungen und Verformungen auf. Wir erinnern uns kurz an Kapitel 2. Das bereits bekannte allgemeine Hooke'sche Gesetz

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

bestehend aus der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$$

der Verschiebung \mathbf{U} und der Kraft \mathbf{F} sind die Grundlage für die Berechnungen in der Elastostatik. Neben der Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix \mathbf{B} tritt in der Steifigkeitsmatrix die Materialmatrix \mathbf{C} auf, die sowohl den Elastizitätsmodul als auch die Querkontraktion berücksichtigt.

Wie können wir nun die thermo-mechanischen Auswirkungen simulieren? Wir müssten irgendwie die thermische mit der mechanischen Berechnung koppeln (Bild 3.20). Aber wie? Eigentlich ganz einfach: über die thermische Dehnung oder die thermische Verschiebung, die dann als neue Randbedingung in die elastostatische Berechnung eingeht (Stichwort: inhomogene Randbedingungen).

Die thermische Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_{therm}$ wird aus der Temperaturdifferenz ΔT der benachbarten Knoten und dem Proportionalitätsfaktor α , dem Wärmeausdehnungskoeffizient, berechnet.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{therm} = \alpha \Delta T$$

Da wir von isotropem Materialverhalten ausgehen, kann der Wärmeausdehnungskoeffizient als Skalar betrachtet werden. Durch Umformulieren von

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{therm} = \mathbf{B}\mathbf{u}_{therm}$$

ergibt sich die thermische Verschiebung \mathbf{u}_{therm} wobei mit \mathbf{B} , wie vorangehend erwähnt, die partiellen Ableitungen der Formfunktionen der Elastostatik, die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix, bezeichnet ist. Aus der thermischen Verschiebung wird dann wiederum eine thermische Kraft berechnet:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_{therm} = \mathbf{F}_{therm}$$

Die Gesamtkraft ergibt sich schließlich aus der Summe der einzelnen Kräfte der Elementanzahl i .

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{i,elem}$$

Dieser Kraft kann man nun die Kraft aus der statisch-mechanischen Rechnung überlagern, sofern man das möchte, und wiederum in das Hooke'sche Gesetz einfügen, womit man letztendlich die thermo-mechanischen Verschiebungen und Spannungen berechnen kann.

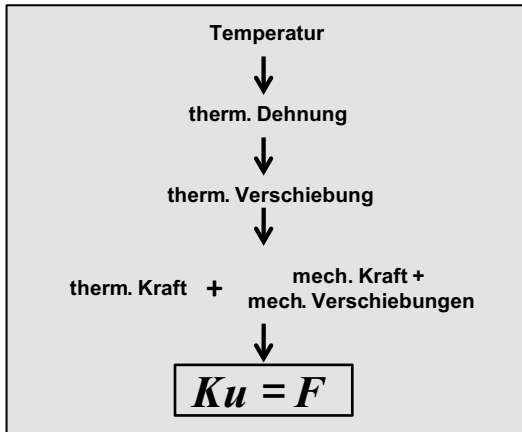


Bild 3.20

Kopplung thermisch-mechanische Simulation

3.4 Eigenschwingung

Gerade im Maschinenbau sind Bauteile häufig schwingenden Belastungen ausgesetzt. So schwingt beispielsweise jede Komponente im Antriebsstrang eines Autos zumindest mit der Drehzahl des Motors – Verbindungen mit umliegenden Bauteilen oder die Trägheitskräfte des Teils selbst haben dann immer eine wechselnde Last zur Folge. Um unter diesen Umständen trotzdem noch Aussagen über die mechanische Tragfähigkeit machen zu können, werden in der Praxis häufig zwei verschiedene Analysen durchgeführt, die beide zum Erfolg führen müssen. Zunächst muss natürlich, genau wie bisher auch, die statische Tragfähigkeit nachgewiesen werden, wozu die übliche Finite-Elemente-Analyse der elastostatischen Mechanik zum Einsatz kommt. Wenn dies geschehen ist, sollte eine sogenannte Modalanalyse durchgeführt werden, um zu prüfen, ob eine sogenannte Eigenfrequenz des Bauteils im Frequenzband der schwingenden Kraft liegt. Wenn das der Fall ist, ist Vorsicht geboten! Denn Eigenschwingungen haben die Eigenschaft, dass sie sich quasi selbstständig aufrechterhalten. Unter Vernachlässigung von Dämpfungseffekten stehen die Kräfte durch die elastische Deformation und die Massenkräfte infolge der Trägheit genau im Gleichgewicht, es bedürfte also nicht einmal einer kontinuierlichen Anregung, damit das Bauteil seine Bewegung fortsetzt. Natürlich kann man die dämpfenden Materialeigenschaften nicht einfach ignorieren – allerdings kann eine länger anhaltende zyklisch wirkende Kraft in der Praxis durchaus zu ansteigenden Schwingungsamplitu-

den führen. Auf dem Sprungbrett am Schwimmbecken in Bild 3.21 macht man sich das zu Nutze; beim berühmten Fall der Opernsängerin und des zerspringenden Wein-
glases wird allerdings die technische Problematik dieses Zusammenhangs deutlich.

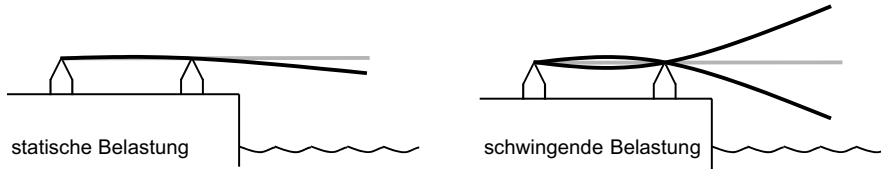


Bild 3.21 Elastische Verformung eines Sprungbretts beim Betreten (links) und beim Schwungholen für den Sprung (rechts)

Mathematische Modellierung

Wie auch in der Einführung in die Elastostatik in Kapitel 2 soll die Systemgleichung für schwingfähige Körper zunächst im Eindimensionalen hergeleitet werden. Stellen wir uns dazu eine punktförmige Masse m vor, deren Verschiebung $u(t)$ von einer Federgleichung $r(t) = k \cdot u(t)$ bestimmt wird (Bild 3.22). Die Größe $r(t)$ bezeichne hier eine äußere Kraft, die wie auch die Verschiebung als zeitabhängig angenommen wird. Die Eigenschaften Steifigkeit k und Masse m (und eigentlich auch Dämpfung), die im Prinzip alle einem einzelnen gewöhnlichen Zugstab zugeordnet sind, wurden hier zur besseren Übersichtlichkeit bewusst getrennt.

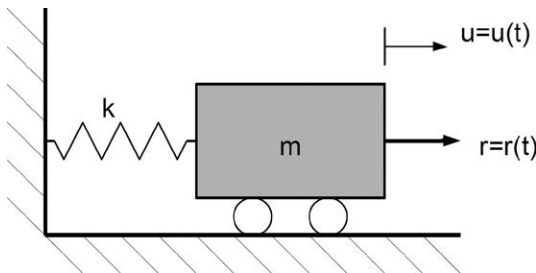


Bild 3.22
Einfaches Feder-Masse-Schwinger-
system

Wenn sich die Masse nun seitlich nach rechts bewegt, folgt nach dem zweiten Newton'schen Axiom für die Trägheits- bzw. Massenkraft $F_{Masse} = m \cdot a$. Sie wirkt entlang der Bewegungsrichtung, also hier ebenfalls nach rechts. Ein einfaches Aufstellen der Kräftebilanz am Massenpunkt liefert

$$F_{Feder} + F_{Masse} + r = 0$$

denn auch die Federkraft wirkt hier (noch) nach rechts. Das Einsetzen der bereits bekannten Zusammenhänge sowie der üblichen Schreibweise

$$a = \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}$$

führt zur gewünschten Systemgleichung für den Einmassenschwinger:

$$k \cdot u + m \cdot \ddot{u} + r = 0$$

Wie bereits erwähnt, sind die Frequenzen, die es in erster Linie zu vermeiden gilt, die der sogenannten freien Eigenschwingung. Sie charakterisieren Schwingungen, bei denen sich der Einfluss der Federkraft und der Trägheitsterm gerade die Waage halten. Eine kontinuierliche äußere Anregung $r(t)$ ist also hier gar nicht notwendig für eine dauerhafte Schwingung; sie wird bei freien Eigenschwingungen zu null gesetzt – übrig bleibt eine gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL) mit konstanten Koeffizienten:

$$k \cdot u(t) + m \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 0$$

Aus der Mathematik sind Ansatzfunktionen für die allgemeine Lösung bekannt, die schon einen zyklischen Bewegungsverlauf erahnen lassen:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Größe \hat{u} bezeichnet dann die Amplitude, ω die sogenannte Kreisfrequenz der Schwingung. Deren Einheit ist rad/sec und kann mit $f = \omega / (2 \cdot \pi)$ in Hertz umgerechnet werden. Durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die DGL erhält man schließlich die Eigenfrequenz des Einmassenschwingers.

$$k \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) - m \cdot \hat{u} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$$

und umgeformt:

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Um diese Erkenntnisse nun auch im FE-Kontext nutzen zu können, sollen in der DGL die einzelne Federkonstante k durch die fertig compilierte Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die einzelne Punktmasse m durch eine sogenannte Massenmatrix \mathbf{M} ersetzt werden. Die Verschiebung u wird analog nun vektoriell und enthält zeilenweise die gewohnte Anordnung der Knotenverschiebungen in x -, y - und z -Richtung.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{M} \cdot \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Ansatzfunktion behält dann immer noch ihre Gültigkeit. Aber was geschieht anschließend beim Einsetzen zur Berechnung der Eigenfrequenzen?

$$0 = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = (\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

Das ist ein *Eigenwertproblem* – und somit nicht mehr durch lineare Gleichungssysteme zu lösen! Nun soll es noch in die übliche Standardform $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \lambda \cdot \boldsymbol{\varphi}$ umgeschrieben werden, damit es für numerische Lösungsverfahren leicht zu verarbeiten ist. Dazu behilft man sich mit einem Trick: Man zerlegt nämlich zunächst die Massenma-

trix mittels des Cholesky-Verfahrens aus Abschnitt 6.1 und setzt die Faktorisierung $M = L \cdot L^T$ statt M in die Gleichung ein.

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \omega^2 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

Nun wird von links (die Reihenfolge der Faktoren spielt bei Matrix-Multiplikationen ja durchaus eine Rolle) mit L^{-1} multipliziert

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \omega^2 \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{u}} = \omega^2 \cdot \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

und noch $\hat{\mathbf{u}}$ durch den neuen Vektor $\mathbf{L}^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ substituiert:

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L}^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

Das Ergebnis ist wie gewünscht: Links steht eine Matrix ($\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^{-T}$) mal dem Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}$, rechts steht ein Eigenwert (ω^2) mal dem Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}$. Sogar die Symmetrie der Matrix (K und M sind von Haus aus symmetrisch) ist erhalten geblieben, was den Berechnungsaufwand und die Abspeicherung wiederum positiv beeinflusst. Für die technische Interpretation der Berechnungsergebnisse werden die Eigenwerte ω^2 anschließend in Eigenfrequenzen umgerechnet. Die Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}$ repräsentieren nach der Rücktransformation mit $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{L}^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ die sogenannten Eigenschwingungsformvektoren, die Aufschluss über die Verformung infolge der jeweiligen Schwingungsfrequenz geben. Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit der numerischen Behandlung des Eigenwertproblems (EWP) befassen.

Die vorgestellte Herleitung ist übrigens nicht der einzige Weg, die DGL mit der Ansatzfunktion in ein EWP zu überführen. Man findet in der Literatur (z. B. in /127/) auch andere – algebraisch einfachere – Umformungen. Diese eignen sich jedoch häufig nicht sonderlich gut für die programmtechnische Umsetzung. Wie in Abschnitt 4.11 sichtbar wird, hält sich der numerische Aufwand für die soeben hergeleitete EWP-Matrix in engen Grenzen, was mit der vorteilhaften Struktur der Massenmatrix zusammenhängt.

3.5 Nichtlineare Berechnungen

Die bisherigen Betrachtungen gingen immer von linearen Beziehungen aus, beispielsweise bei der Definition der Dehnungen oder bei dem Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen. Meistens ist diese Annahme völlig ausreichend, in bestimmten Anwendungen der Technik ist es jedoch erforderlich, auch nichtlineares Verhalten zu berücksichtigen. Stets sollte aber zunächst eine lineare FE-Berechnung durchgeführt werden, die später zur Beurteilung der Ergebnisse der nichtlinearen Analyse herangezogen werden kann. Denn ein großes Problem der Nichtlinearität ist das mögliche Vorhandensein mehrerer Lösungen, aus denen die richtige ausgewählt werden muss. Meistens findet sich die technisch-physikalisch sinnvolle Lösung mit-

hilfe der linearen Analyse, mit analytischen Nebenrechnungen oder Plausibilitätsprüfungen nach gesundem Ingenieurverstand.

Generell wird in der Literatur zwischen drei verschiedenen Arten von Nichtlinearitäten unterschieden /120/:

- geometrische Nichtlinearitäten
- physikalische Nichtlinearitäten (Materialnichtlinearitäten)
- Nichtlinearitäten aufgrund von Randbedingungen

3.5.1 Geometrische Nichtlinearitäten

Die geometrische Nichtlinearität begründet sich auf Steifigkeitsveränderungen der Struktur, die infolge großer Verschiebungen auftreten. Typisches Beispiel ist die elastische Verformung einer Tellerfeder, wie sie in Bild 3.23 gezeigt ist. Insbesondere bei großem Verhältnis von Stülphöhe zu Dicke ergibt sich eine stark nichtlineare Federkennlinie, die in der FEA allein durch Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten bestimmt werden kann /139/.

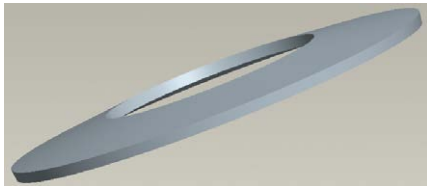


Bild 3.23

Modell einer Tellerfeder, Darstellung in Creo Parametric

Die geometrische Nichtlinearität kann unter Verwendung spezieller Verzerrungsmaße rechnerisch bestimmt werden. Diese Maße unterscheiden sich von der technischen Verzerrung oder Dehnung ϵ dadurch, dass keine Kleinwinkelnäherungen bei der Definition getroffen werden. Vertreter sind beispielsweise die Lagrange'sche Verzerrung λ oder die Euler'sche Verzerrung η , die sich bei Formulierung der Kinematik in materiellen (Lagrange'schen) oder räumlichen (Euler'schen) Koordinaten ableiten lassen. Weiteres Beispiel ist die Hencky'sche Dehnung, die ein logarithmisches Dehnungsmaß darstellt und in speziellen Bereichen wie der Umformtechnik zum Einsatz kommt. Eine Übersicht der wichtigsten Dehnungsmaße gibt Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1 Verschiedene Dehnungsmaße

Dehnungsmaß	Symbol
Technische Dehnung	ϵ
Lagrange'sche Dehnung	λ
Euler'sche Dehnung	η

Für die Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten ist die Unterscheidung von materiellen und räumlichen Koordinaten notwendig. Materielle Koordinaten werden im Folgenden groß geschrieben, räumliche Koordinaten klein. Die nachstehende Gleichung zeigt den Ortsvektor eines Punktes im unverformten Zustand (\mathbf{X}) und im verformten Zustand (\mathbf{x}).

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Verdeutlichung betrachten wir ein Beispiel: Bild 3.24 zeigt einen Punkt im Bauteil, einmal im unverformten Bauteil und einmal im verformten Bauteil. Die Lage dieses Punktes im unverformten Bauteil wird durch den Ortsvektor \mathbf{X} beschrieben, die Lage im verformten Bauteil durch den Ortsvektor \mathbf{x} . Bei der Formulierung in materiellen Koordinaten werden nun alle Größen auf den unverformten Zustand bezogen, entsprechend bei räumlichen Koordinaten alle auf den verformten Zustand.

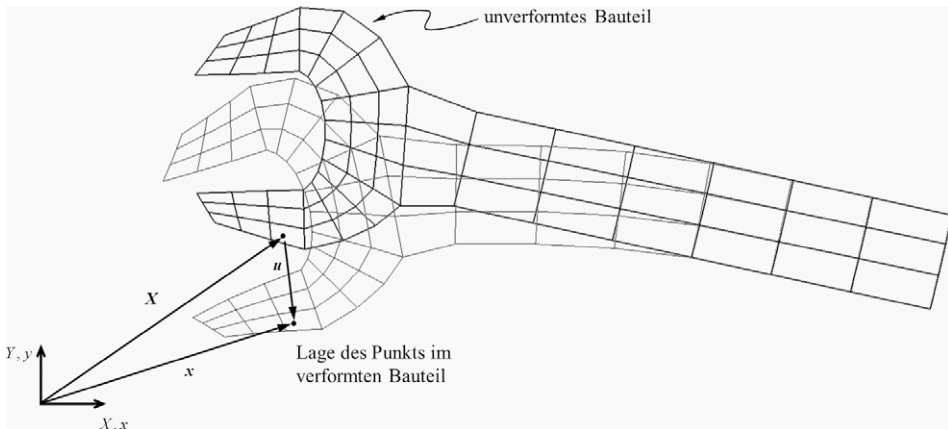


Bild 3.24 Koordinaten eines Punktes im unverformten und im verformten Bauteil

Tabelle 3.2 Lagrange'sche (materielle) und Euler'sche (räumliche) Beschreibungsweise

Beschreibungsweise	Ortskoordinaten	Beispiel: Verschiebungsfeld
Lagrange (LG)	X	$u^{LG} = u^{LG}(X)$
Euler (EU)	x	$u^{EU} = u^{EU}(x)$

Gemäß Tabelle 3.2 ist also z. B. das Verschiebungsfeld bei Lagrange'scher Beschreibung eine Funktion der unverformten Koordinaten. Betrachten wir dazu ein eindimensionales Zahlenbeispiel. Wir betrachten einen Punkt mit den Koordinaten $X = 2$. Im verformten Zustand habe dieser die Koordinaten $x = 5$. Das Verschiebungsfeld sei in der materiellen Beschreibungsweise durch

$$u^{LG} = 2 + \frac{1}{2} \cdot X$$

gegeben. An der Stelle $X = 2$ muss sich hier eine Verschiebung von 3 ergeben. Die Kontrolle ergibt

$$u^{LG}(2) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 3$$

Das Verschiebungsfeld in räumlichen Koordinaten sei gemäß der nachfolgenden Formel zu berechnen.

$$u^{EU} = 1 + \frac{2}{5} \cdot x$$

Hier muss sich nun definitionsgemäß die Verschiebung von 3 an der Stelle $x = 5$ ergeben. Die Kontrolle zeigt

$$u^{EU}(5) = 1 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 3$$

Dieses Beispiel macht auch deutlich, warum die Verschiebungsfunktionen durch ihren hochgestellten Index verschieden bezeichnet sind: Es sind unterschiedliche Funktionen.

Da wir fortan nur noch in materiellen Koordinaten arbeiten, lassen wir den hochgestellten Index allerdings weg. Im Folgenden wird zur Veranschaulichung die Lagrange'sche Verzerrung auf geometrischem Weg definiert (Bild 3.25).

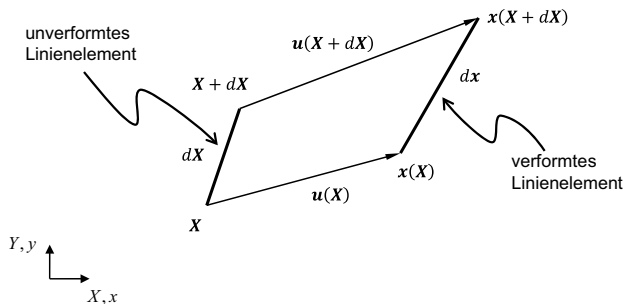


Bild 3.25

Geometrische Interpretation des Lagrange'schen Verzerrungsmaßes

Dazu betrachten wir ein beliebig aus unserem Bauteil herausgegriffenes Linienelement der infinitesimal kleinen Länge $dL = \sqrt{dX \cdot dX + dY \cdot dY + dZ \cdot dZ}$. Dieses sei durch einen Vektor

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$$

gemäß Bild 3.25 beschrieben. Die Endpunkte des Linienelements sind charakterisiert per Koordinaten \mathbf{X} und $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$. Durch die Belastung findet eine Verformung statt. Es gibt eine Starrkörperbewegung, die sich aus Verschiebung und Verdrehung des Linienelements zusammensetzt, sowie eine Längenänderung. Für die Verzerrung ist ledig-

lich die Längenänderung relevant, aufgrund des vektoriellen Charakters betrachtet man daher das Skalarprodukt, welches dem Quadrat der Länge entspricht:

$$dL^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}$$

Im verformten Zustand, wenn die Koordinaten der Endpunkte $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$ sind, kann das Quadrat der Länge wie folgt berechnet werden:

$$dL^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$$

Hier benötigen wir für das weitere Vorgehen eine Taylor-Entwicklung der Koordinate $\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$, die das verformte Linienelement oder später das verformte Bauteil beschreibt.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir für die Länge des verformten Linienelements einen Ausdruck, der von der Länge des unverformten Linienelements abhängt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

Die Größe \mathbf{F} nennt man Deformationsgradient; sie stellt gewissermaßen eine Transformationsmatrix dar, die zwischen Größen (wie vorangehend der Länge eines Linienelements) im Unverformten und im Verformten vermittelt/120/. Schließlich dient bei der Lagrange'schen Dehnung nicht wie bei der technischen Dehnung die Längenänderung, sondern die Änderung der Längenquadrate zur Definition. Der Grund ist eine einfachere mathematische Behandlung, denn anderenfalls kämen „unhandliche“ Wurzeln vor. Die Änderung der Längenquadrate ist

$$\begin{aligned} dl^2 - dL^2 &= d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \\ &= (\mathbf{F} d\mathbf{X})^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}\} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

Die Änderung der Längenquadrate hängt also ab von dem ursprünglichen (unverformten) Linienelement, dargestellt durch $d\mathbf{X}^T$ und $d\mathbf{X}$, und der Größe $\{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}\}$. Ein Quotient aus der Längenquadratänderung und dem Quadrat der ursprünglichen Länge lässt sich aufgrund des Matrizencharakters der Symbole nicht bilden, dennoch entspricht der Term $\{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}\}$ einer Relation dieser beiden Größen und kann damit als Maß für die Verzerrung herangezogen werden. Dementsprechend erfolgt die Definition der Lagrange'schen Dehnung:

$$\lambda = \frac{1}{2} \{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \right\}$$

Setzt man in diese Gleichung den Zusammenhang zwischen den Ortskoordinaten der unverformten Struktur, denen der verformten Struktur und dem Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

oder

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ein, so kann der gesuchte Ausdruck für λ erhalten werden.

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right\}$$

Bei Formulierung der Koordinaten \mathbf{X} des unverformten Zustands als Funktion der Koordinaten \mathbf{x} des verformten Zustands (also umgekehrt zu Bild 3.25) kann auf ähnlichem Wege das Euler'sche Verzerrungsmaß $\boldsymbol{\eta}$ abgeleitet werden. Hier sei nachfolgend nur das Ergebnis gezeigt.

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\}$$

Prinzipiell kann sowohl in Lagrange'schen als auch in Euler'schen Koordinaten weitergearbeitet werden; jedoch entscheiden wir uns im Folgenden für die Lagrange'sche oder materielle Beschreibungsweise, weil diese aus Ingenieursicht praktischer ist. Bisher haben wir die Verzerrung λ bzw. $\boldsymbol{\eta}$ als 3×3-Matrix geschrieben. Da beide Größen wie die technische Dehnung symmetrisch sind, ist es für die Finite-Elemente-Analyse sinnvoll und effizient, diese genau wie die technische Dehnung als sechsdimensionale Vektoren zu schreiben. Wenn wir die FE-Notation gleich der im gesamten Z88-System realisierten wählen, ergibt sich folgende Schreibweise:

$$\lambda: = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{33} \\ 2 \cdot \lambda_{12} \\ 2 \cdot \lambda_{23} \\ 2 \cdot \lambda_{31} \end{pmatrix}$$

Das Verzerrungsmaß steht damit, als Nächstes muss ein Spannungsmaß eingeführt werden. Davon gibt es insgesamt 16 Stück /121/, jedoch ist die Auswahl nicht frei, sondern muss ein zueinander arbeitskonjugiertes Paar aus Verzerrungs- und Spannungsmaß ergeben /121/. Für den hier vorliegenden Fall ist die 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannung \mathbf{S} zu wählen /41/. Diese basiert auf der Definition von Scheinkräften und macht es deswegen nötig, für die Aufstellung der Kräftebilanz zunächst die 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannung \mathbf{P} zu verwenden. Betrachten wir dazu ein beliebig aus unserem

Bauteil herausgegriffenes, infinitesimal kleines Volumenelement $dV = dX \cdot dY \cdot dZ$ gemäß Bild 3.26. Die Seitenkanten des unverformten Volumenelements sollen parallel zu den Koordinatenachsen liegen; die des verformten liegen dann zwingend nicht mehr parallel.

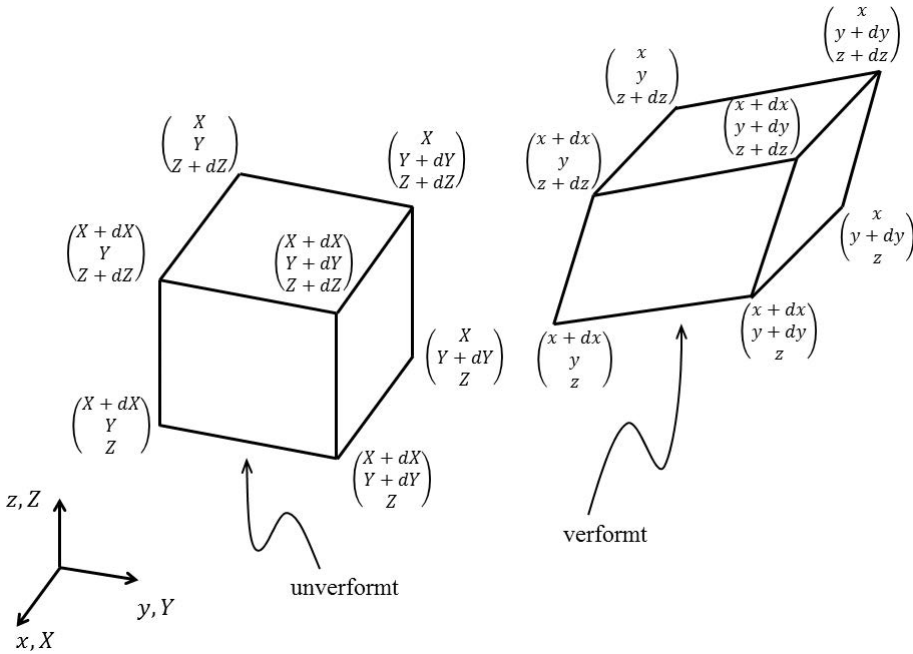


Bild 3.26 Volumenelement, Lage der Eckpunkte

Der Übersichtlichkeit halber zeigt erst Bild 3.27 die Kräfte, die auf die einzelnen Seitenflächen wirken. Dabei sind ebenso aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich die Kräfte der positiven Seitenflächen, also der Flächen, deren Normalenvektoren in positive Koordinatenrichtungen zeigen, eingezeichnet.

Der Index der jeweiligen (infinitesimalen) Kraft in Bild 3.27 kennzeichnet nicht die Richtung der Kraft, sondern die Seitenfläche, zu der sie gehört. Schließlich benötigen wir noch die Normalenvektoren der einzelnen Seitenflächen – diese sind in Bild 3.28 zu sehen. Ähnlich zur Bezeichnung der Koordinaten stehen auch hier Kleinbuchstaben für die Größen des verformten Bauteils und Großbuchstaben für die Größen des unverformten Bauteils.

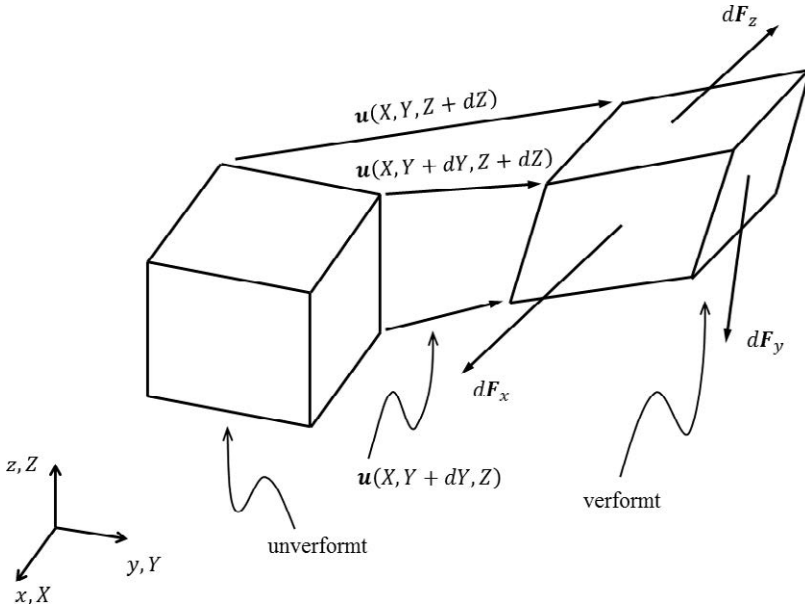


Bild 3.27 Kräfte der positiven Seitenflächen

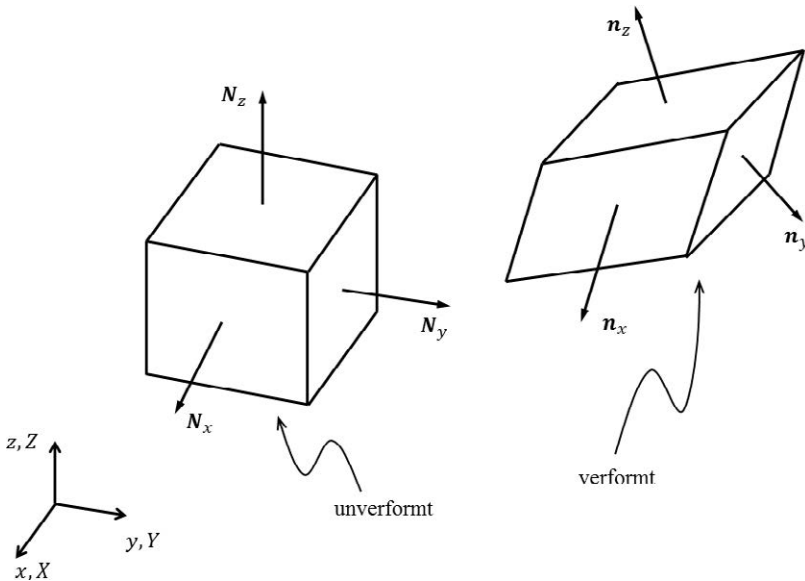


Bild 3.28 Lage der Normalenvektoren der Seitenflächen (nur bei positiven Seitenflächen gezeigt)

Die 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannung bezieht die Kräfte auf die unverformte Struktur, daher erhält man den Spannungsvektor \mathbf{T} (nicht zu verwechseln mit dem sechsdimensionalen Spannungsvektor der FE-Notation) durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit dem Normalenvektor \mathbf{N} der unverformten Struktur.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \mathbf{P} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \mathbf{N}$$

Diese Beziehung werden wir gleich für die Ableitung der für die Finite-Elemente-Analyse notwendigen schwachen Form der Kräftebilanz gebrauchen. Zunächst stellen wir aber die Kräfte- oder Impulsbilanz am Volumenelement auf, wenden also das 2. Newton'sche Axiom („ $F = m \cdot a$ “) an:

$$d\mathbf{F}_x(X + dX, Y, Z) + d\mathbf{F}_y(X, Y + dY, Z) + d\mathbf{F}_z(X, Y, Z + dZ) - d\mathbf{F}_x(X, Y, Z) - d\mathbf{F}_y(X, Y, Z) - d\mathbf{F}_z(X, Y, Z) = dm \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Da wir uns ausschließlich für statische Berechnungen interessieren, haben wir den Trägheitsterm auf der rechten Seite gleich null gesetzt. Ganz allgemein lassen sich die Kräfte \mathbf{F} mithilfe des Spannungsvektors \mathbf{T} berechnen:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T} d\mathbf{A}$$

In dieser Gleichung ist $d\mathbf{A}$ das Flächenelement der unverformten Fläche, z. B. $d\mathbf{A} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}$. Dadurch kann folgender Zusammenhang gewonnen werden:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_x(X + dX, Y, Z) \cdot dY \cdot dZ + \mathbf{T}_y(X, Y + dY, Z) \cdot dX \cdot dZ + \mathbf{T}_z(X, Y, Z + dZ) \cdot dX \cdot dY \\ & - \mathbf{T}_x(X, Y, Z) \cdot dY \cdot dZ - \mathbf{T}_y(X, Y, Z) \cdot dX \cdot dZ - \mathbf{T}_z(X, Y, Z) \cdot dX \cdot dY = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Mit der bereits eingeführten Relation zwischen Spannungsvektor und 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen lässt sich der nachfolgende Ausdruck erhalten.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X + dX, Y, Z) N_x \cdot dY \cdot dZ + \mathbf{P}(X, Y + dY, Z) N_y \cdot dX \cdot dZ + \mathbf{P}(X, Y, Z + dZ) N_z \cdot dX \cdot dY \\ & - \mathbf{P}(X, Y, Z) N_x \cdot dY \cdot dZ - \mathbf{P}(X, Y, Z) N_y \cdot dX \cdot dZ - \mathbf{P}(X, Y, Z) N_z \cdot dX \cdot dY = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Da wir eingangs die Koordinatenrichtungen derart gewählt haben, dass sie parallel zu den Kanten des Volumenelements liegen, zeigen die Normalenvektoren genau in die jeweilige Normalenrichtung.

$$N_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Betrachtungen gelten trotzdem für beliebige Anordnungen des Koordinatensystems, da ein infinitesimales Volumenelement vorliegt, dessen Orientierung, die ohnehin lediglich für gedankliche Betrachtungen relevant ist, letztendlich egal ist und daher immer parallel zu den Koordinatenrichtungen gedreht werden kann.

Schließlich wird wieder eine Taylor-Entwicklung gebraucht:

$$\mathbf{P}(X + dX, Y, Z) = \mathbf{P}(X, Y, Z) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X} dX$$

$$\mathbf{P}(X, Y + dY, Z) = \mathbf{P}(X, Y, Z) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Y} dY$$

$$\mathbf{P}(X, Y, Z + dZ) = \mathbf{P}(X, Y, Z) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} dZ$$

Setzen wir dies ein und führen außerdem noch die Matrix-Vektor-Multiplikationen aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial X} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial X} \\ \frac{\partial P_{31}}{\partial X} \end{pmatrix} \cdot dX \cdot dY \cdot dZ + \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} \\ \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} \end{pmatrix} \cdot dX \cdot dY \cdot dZ + \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot dX \cdot dY \cdot dZ = \mathbf{0}$$

Die Längen des Volumenelements kürzen sich heraus.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial X} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial X} \\ \frac{\partial P_{31}}{\partial X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} \\ \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Die so erhaltene Gleichung ist die starke oder lokale Form der Kräftebilanz. Für die Finite-Elemente-Analyse müssen wir von dieser Gleichung noch die schwache Form ableiten. In der Technischen Mechanik und der Mathematik wird an dieser Stelle gern die Divergenz eingeführt; in diesem Zusammenhang verwenden einige Autoren die Großschreibung Div oder DIV des Differenzialoperators, um den Bezug auf die Lagrange'schen Koordinaten zu symbolisieren /120/ /121/.

$$\text{DIV}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$$

Da diese Schreibweise bei Matrizen allerdings nicht eindeutig ist, werden wir sie fortan nicht einsetzen.

Als Nächstes benötigen wir etwas Variationsrechnung, um zu der schwachen Form der Kräftebilanz zu kommen. Wir verwenden daher die virtuelle Verschiebung

$$\delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{pmatrix}$$

welche definitionsgemäß (infinitesimal) klein, beliebig gewählt und gedacht ist. Mit dieser multiplizieren wir die lokale Form der Kräftebilanz einfach skalar durch und erhalten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial X} + \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial X} + \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{31}}{\partial X} + \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{pmatrix} = 0$$

Die Gleichung werten wir nun an verschiedenen Stellen aus und summieren auf – sprich, wir integrieren.

$$\iiint_V \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial X} + \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial X} + \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_{31}}{\partial X} + \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{pmatrix} dV = 0$$

Etwas anders geschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P_{11}}{\partial X} + \frac{\partial P_{21}}{\partial X} \delta v + \frac{\partial P_{31}}{\partial X} \delta w + \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} \delta u + \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} \delta v + \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} \delta w + \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \delta u \right. \\ \left. + \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \delta v + \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \delta w \right) dV = 0 \end{aligned}$$

Als Nächstes kommt ein mathematischer Taschenspielertrick zur Anwendung: Wir wenden die Produktregel rückwärts an.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} (P_{11} \delta u) + \frac{\partial}{\partial X} (P_{21} \delta v) + \frac{\partial}{\partial X} (P_{31} \delta w) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{12} \delta u) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{22} \delta v) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{32} \delta w) \\ + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{13} \delta u) + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{23} \delta v) + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{33} \delta w) = \frac{\partial P_{11}}{\partial X} \delta u + \frac{\partial P_{21}}{\partial X} \delta v + \frac{\partial P_{31}}{\partial X} \delta w + \frac{\partial P_{12}}{\partial Y} \delta u \\ + \frac{\partial P_{22}}{\partial Y} \delta v + \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} \delta w + \frac{\partial P_{13}}{\partial Z} \delta u + \frac{\partial P_{23}}{\partial Z} \delta v + \frac{\partial P_{33}}{\partial Z} \delta w + P_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial X} + P_{21} \frac{\partial \delta v}{\partial X} + P_{31} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \\ + P_{12} \frac{\partial \delta u}{\partial Y} + P_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial Y} + P_{32} \frac{\partial \delta w}{\partial Y} + P_{13} \frac{\partial \delta u}{\partial Z} + P_{23} \frac{\partial \delta v}{\partial Z} + P_{33} \frac{\partial \delta w}{\partial Z} \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial X} (P_{11} \delta u) + \frac{\partial}{\partial X} (P_{21} \delta v) + \frac{\partial}{\partial X} (P_{31} \delta w) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{12} \delta u) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{22} \delta v) + \frac{\partial}{\partial Y} (P_{32} \delta w) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{13} \delta u) + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{23} \delta v) + \frac{\partial}{\partial Z} (P_{33} \delta w) - P_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial X} - P_{21} \frac{\partial \delta v}{\partial X} - P_{31} \frac{\partial \delta w}{\partial X} - P_{12} \frac{\partial \delta u}{\partial Y} \right. \\ \left. - P_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial Y} - P_{32} \frac{\partial \delta w}{\partial Y} - P_{13} \frac{\partial \delta u}{\partial Z} - P_{23} \frac{\partial \delta v}{\partial Z} - P_{33} \frac{\partial \delta w}{\partial Z} \right) dV = 0 \end{aligned}$$

Auf die Terme mit positivem Vorzeichen kann der Gauß'sche Integralsatz angewendet werden /118/.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(P_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial X} + P_{21} \frac{\partial \delta v}{\partial X} + P_{31} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + P_{12} \frac{\partial \delta u}{\partial Y} + P_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial Y} + P_{32} \frac{\partial \delta w}{\partial Y} + P_{13} \frac{\partial \delta u}{\partial Z} + P_{23} \frac{\partial \delta v}{\partial Z} \right. \\ \left. + P_{33} \frac{\partial \delta w}{\partial Z} \right) dV = \underbrace{\iint_{\delta V} \delta(\delta u \delta v \delta w) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}}_T N dA \end{aligned}$$

Nach einigen Schritten Variationsrechnung unter Berücksichtigung der Definition der Lagrange'schen Dehnung und des Deformationsgradienten sowie Beachtung der

Momenten- bzw. Drallbilanz ergibt sich schließlich die nachfolgende, schwache Form der Kräftebilanz.

$$\iiint_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \delta \lambda_{ij} dV = \iint_A \sum_{i=1}^3 T_i \delta u_i dA$$

In dieser Gleichung findet sich das Prinzip der virtuellen Arbeit wieder, welches in Abschnitt 4.1 genauer beschrieben wird. Die 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen \mathbf{S} können wie folgt umgerechnet werden [121]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

Darin bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}$ die Cauchy-Spannungen, die auch als wahre Spannungen bezeichnet werden, da sie die Kraft auf die verformte Querschnittsfläche beziehen. \mathbf{J} ist die Determinante des Deformationsgradienten.

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da$$

In dieser Gleichung ist da das Flächenelement der verformten Fläche, \mathbf{n} der zugehörige Normalenvektor (vgl. Bild 3.28) und $d\mathbf{F}$ die Kraft.

Am Ende übertragen wir auch das Spannungsmaß \mathbf{S} , welches aufgrund der Drehimpulsbilanz symmetrisch ist, auf die in Z88 realisierte FE-Notation und führen den sechsdimensionalen Spannungsvektor ein.

$$\mathbf{S}: = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{pmatrix}$$

Die schwache Form der Kräftebilanz bekommt dadurch folgende Gestalt:

$$\iiint_V \sum_{i=1}^6 S_i \delta \lambda_i = \iint_A \sum_{i=1}^3 T_i \delta u_i dA$$

Diese Gleichung ist Ausgangspunkt für die Ableitung der Elementmatrizen bei nicht-linearen Analysen und damit die Grundlage für Abschnitt 4.12.

3.5.2 Materialnichtlinearitäten

Eine gezielte konstruktive Ausnutzung eines Werkstoffes ist nur durch die genaue Kenntnis dessen mechanischer Eigenschaften möglich. Diese sind gerade bei Werkstoffen mit nichtlinearem Materialverhalten stark vom Herstellungsprozess, den Um-

gebungsbedingungen und den eintretenden Lastfällen abhängig und zumeist innerhalb eines Bauteiles nicht homogen. Materialien, welche für strukturmechanische Berechnungen verwendet werden können, weisen vier Arten des Materialverhaltens auf:

- elastisch
- plastisch
- viskoelastisch
- viskoplastisch

Wenn zu jeder Verformung eine eindeutige Dehnung zugeordnet werden kann, ist das Material *elastisch*. Dabei kann der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung linear (linear-elastisch) oder nichtlinear (hyperelastisch) sein. Das Material verhält sich wie eine Feder. Das Bauteil reagiert auf eine äußere Last mit einer Verformung und speichert die aufgewendete Energie. Diese wird bei Entlastung unmittelbar freigesetzt. Die Belastungsgeschwindigkeit ist bei elastischen Materialien nicht von Bedeutung.

Sobald ein Bauteil mit einer bleibenden, nicht reversiblen Verformung auf eine Belastung reagiert, ist das Materialverhalten *plastisch*. Dabei wird die Verformungsenergie in Wärme umgewandelt. Der Vorgang der irreversiblen Verformung wird als Fließen bezeichnet. Die Verformung ist zeitunabhängig und nur von der Belastungshöhe abhängig. Viele Metalle verhalten sich erst elastisch und ab der sogenannten Fließgrenze plastisch. Dieses Verhalten bezeichnet man als elastisch-plastisches Materialverhalten. Dabei geht der elastische Teil der Verformung nach Entlastung wieder zurück, der plastische Anteil bleibt bestehen.

Viskoelastische und *viskoplastische* Materialien verhalten sich zeitabhängig. Die Verformung ist abhängig von der Dauer der Belastung und ist entweder reversibel (Viskoelastizität) oder irreversibel (Viskoplastizität). Kunststoffe (Polymerwerkstoffe) sind Materialien, die sowohl elastisches als auch plastisches und viskoses Verhalten zeigen. Dies resultiert aus dem organischen Aufbau der Kunststoffe, welcher durch rheologische und thermische Einflüsse während des Herstellungsprozesses beeinflusst wird. Dies macht die Festigkeitsberechnung schwierig.

Trotz dieser nachteiligen mechanischen Werkstoffeigenschaften sind Bauteile aus Kunststoffen kostengünstig mit hohem Automatisierungsgrad, selbst bei komplexen Geometrien, produzierbar. Bei der schrittweisen Substitution von Metallen durch Kunststoffe stehen neben Kosteneinsparungen besonders das geringe spezifische Gewicht und die niedrige Wärmeleitfähigkeit von Polymerbauteilen im Vordergrund.

Auf den ersten Blick erscheint die Verwendung von Materialgesetzen, die den nicht-linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung abbilden, in der Finite-Elemente-Analyse von nicht-linearen Materialien zwingend notwendig. Trotzdem sind linear-elastische Berechnungen viel schneller und einfacher durchzuführen.

Betrachtet man etwa das Verhalten nichtlinearer Werkstoffe bis zur dauerhaft plastischen Verformung, existiert bei Beachtung gewisser Randbedingungen ein linearer Bereich der Materialeigenschaften. Selbst über dieses Gebiet hinaus kann die Rechnung mit E-Modul und Querkontraktionszahl so lange erfolgen, bis der dadurch verursachte Fehler in der bestehenden Anwendung nicht mehr toleriert werden kann. Durch reversible zeitabhängige (viskoplastische) Verformungen kann ein Bauteil Überlastungen ausgleichen. Dies ist ebenfalls für die lineare Auslegung günstig. Vertiefende Arbeiten /107/ zeigten, dass bei kleinen Dehnungen und unter der Voraussetzung, dass Temperatur, Belastungsart und -geschwindigkeit in der Norm liegen, lineare Berechnungen verlässliche Ergebnisse liefern.

Selbst bei der Verwendung eines nichtlinearen Materialgesetzes existieren bis zu einem konkreten „Umschaltwert“, welcher im linearen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Beziehung liegt, nur lineare Berechnungsergebnisse. Bis zu diesem Zeitpunkt ist eine lineare Berechnung genauso aussagekräftig wie eine nichtlineare. Oberhalb dieses Punktes existieren teils erhebliche Unterschiede in den Ergebnissen bezüglich Spannung und Dehnung. Der Fehler, der durch ein bewusstes Ignorieren des nichtlinearen Zusammenhangs begangen wird, muss kritisch abgeschätzt werden (Bild 3.29). Je stärker anisotrop ein Material, desto größer ist demzufolge der resultierende Fehler.

Das Vorgehen zur linearen Berechnung von nichtlinearen Materialien sollte wie folgt vorstattengehen: Anhand der resultierenden Spannungen einer ersten Überschlagsrechnung mit der FEA sollte man sich verdeutlichen, welches Materialverhalten bei dieser auftretenden Belastung vorherrscht, lineares oder bereits nichtlineares Verhalten.

Danach ist die resultierende Ungenauigkeit, also der auftretende Fehler durch die lineare Berechnung, zu berücksichtigen und es sind gegebenenfalls Sicherheiten mit einzubeziehen. Mit dieser Vorgehensweise können gute Abschätzungen in sehr kurzer Zeit getroffen werden.

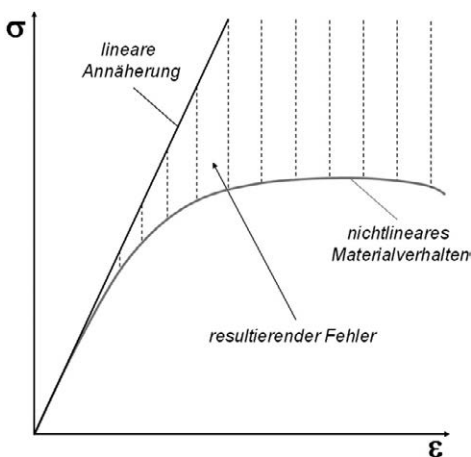


Bild 3.29

Resultierender Fehler aus der Verwendung einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung trotz nichtlinearem Materialverhalten

Faserverstärkte Polymere lassen sich beispielsweise durch Kenntnis der Faserorientierung und trotz der vorhandenen Anisotropie im Material hinreichend linearisiert berechnen, da die meisten auftretenden Belastungen notgedrungen im elastischen Bereich des Materials stattfinden. Dies resultiert aus den materialtypischen geringen vertretbaren Dehnungen, die bei faserverstärkten Materialien ohne katastrophalen Bruch erreichbar sind. Vergleichsrechnungen zeigten, dass bei der Verwendung von linearen Berechnungen und Materialmodellsimulationen keine nennenswerten Unterschiede bei kleinen Verformungen gefunden werden konnten. Die anisotropen Eigenschaften faserverstärkter Kunststoffe lassen sich nur mit gekoppelten Struktur- und Prozesssimulationen, in welchen die Faserorientierung darstellbar ist, berücksichtigen. Für die Abschätzung, welches Modell zur Berechnung gewählt werden sollte, ist der Rechenaufwand für Materialmodellberechnungen oder gekoppelte Struktur- und Prozesssimulationen nicht zu unterschätzen. Sowohl die Prozesssimulation als auch die Berechnung mithilfe eines Materialmodells dauert etwa 6- bis 8-mal länger als eine lineare Berechnung. Dasselbe gilt in verstärktem Maße für den notwendigen Arbeitsspeicher.

Allgemein gilt, dass die Ergebnisse einer Simulation umso näher an den tatsächlichen Gegebenheiten liegen, je exakter die verwendeten Parameter (Materialparameter, Struktur, Randbedingungen, Diskretisierung) sind /107/.

In Z88Aurora sind derzeit sechs nichtlineare Materialmodelle integriert:

- linear-elastisches Materialverhalten: Hooke (St. Venant) oder Hencky
- elastisch-plastisches Materialverhalten: von Mises
- elastisch-plastisches Materialverhalten, andere Querkontraktionszahl im plastischen Bereich: Wehmann
- Schaum: Simplefoam oder Hyperfoam

3.6 Kontaktberechnung

Die bisher isolierte Betrachtung von einzelnen Bauteilen ist oftmals aufgrund der fehlenden Interaktion mit benachbarten Komponenten nicht realitätsnah, weshalb komplexe numerische Simulationen von Baugruppen herangezogen werden müssen /62/. Die Abbildung der gegenseitigen Wechselwirkung entspricht dabei einer nichtlinearen Randbedingung, da sich abhängig von den Zustandsgrößen der Status zwischen den Kontaktzonen (offen oder geschlossen) während des Rechenlaufes ändern kann. Dieser technisch-physikalische Effekt lässt sich in nahezu jedem technischen System – beispielsweise einer Zahnradpaarung oder einem Kettentrieb – beobachten, weshalb dessen Berücksichtigung für die Ergebnisgüte einer Finite-Elemente-Analyse eine große Rolle spielt. Der berechenbare Detaillierungsgrad reicht dabei je nach Modellierungsvariante von der alleinigen Abbildung des globalen Systemverhaltens bis hin

zur Auflösung lokaler Reibungskräfte innerhalb der Kontaktzone /150/. Diese (un)erwünschte Kraftübertragung zwischen den einzelnen Komponenten wird im Wesentlichen durch die vorherrschenden geometrischen Verhältnisse – also den aktuellen Verformungszustand der Körper – beschrieben, die aus der Hauptgleichung der Finite-Elemente-Analyse $KU = F$ resultieren.

Die nachfolgend physikalisch formulierte Rechtfertigung dieser Gleichung, die sich dabei aus Extremalprinzipien ergibt, erleichtert später die Beschreibung einer Kontaktberechnung.

Prinzip vom Minimum des Gesamtpotenzials

Die Energieformulierung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotenzials ist bei Problemen der Strukturmechanik häufig die Grundlage für die Näherungslösung des unbekanntem Verschiebungszustandes /83/. Das Gesamtpotenzial eines Systems Π_0 kann dafür allgemein in der Elastostatik als die Summe des inneren Potenzials Π_{int} (oder auch Formänderungs- bzw. Verzerrungsenergie) und des Potenzials der äußeren Kräfte Π_{ext} angegeben werden /149/ /45/:

$$\Pi_0 = \Pi_{int} + \Pi_{ext}$$

Formelmäßig ergeben sich für das innere und äußere Potenzial des mechanischen Feder-Modells aus Bild 2.1 bzw. Bild 2.2 folgende Beziehungen /148/:

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2}KU^2$$

$$\Pi_{ext} = -FU$$

Die grafische Darstellung dieser Energieformulierungen bezüglich der Zustandsgröße U (Bild 3.30) veranschaulicht das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotenzials, nach welchem gilt, dass der Potenzialausdruck bei einem linear-elastischen Problem von allen geometrisch möglichen (zulässigen) Verschiebungszuständen für die exakte Lösung U ein Minimum ($\Pi_0 \rightarrow Min.$) annimmt /152/ /83/.

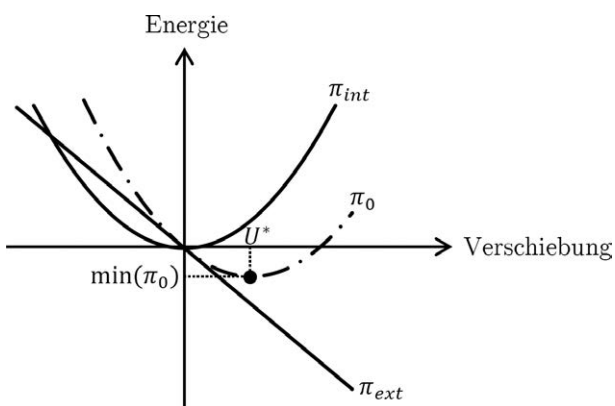


Bild 3.30

Schematische Darstellung der Energieformulierungen des mechanischen Feder-Modells aus Bild 2.1 in Anlehnung an /142/

Die äquivalenten, mathematischen Bedingungen hierzu lauten /2/ /4/:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial U} = KU - F = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial U^2} = K > 0$$

Die somit vom Gesamtpotenzial abgeleitete Gleichgewichtsbedingung, welche das Federsystem beherrscht, kann auf ein einzelnes FE-Stabelement und aufgrund der skalaren, additiven Eigenschaft der Formänderungsenergie ($\Pi_{\text{int}} = \sum \Pi_{\text{int}}^e$) ebenfalls auf das gesamte FE-Modell übertragen werden /4/ /45/ /145/:

$$\Pi_0 = \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \rightarrow \text{Min.}$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial U} = \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Die Lösung der erhaltenen Hauptgleichung einer Finite-Elemente-Analyse liefert dementsprechend im Falle linear-elastischen Verhaltens den Verschiebungszustand des Systems, der das elastische Potenzial minimiert.

Wechselwirkung von Festkörpern

Die von der Finite-Elemente-Analyse unabhängige, allgemeine Formulierung der Wechselwirkung zwischen Kontaktkörpern basiert im Falle von Festkörpern auf der Undurchdringlichkeitsbedingung, nach der die gegenseitige Durchdringung von Körpern verboten ist /152/. Die Einhaltung dieser Bedingung steht in Korrelation zu dem Abstand g_N zwischen den Kontaktpartnern, welcher je nach Vorzeichen und Wert die drei Kontaktstatus „kein Kontakt“ ($g_N > 0$), „idealer Kontakt“ ($g_N = 0$) und (unzulässige) „Durchdringung“ ($g_N < 0$) definiert. Die Erweiterung des mechanischen Zugfedermodells aus Bild 2.1 um ein starres Hindernis, welches die maximale Ausdehnung der Feder auf den Initialabstand $g_{N,0}$ beschränkt (Bild 3.31 links), veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den möglichen Kontaktstatus und der Abstandsfunktion (hier: $g_N = g_{N,0} - U$) /151/. Die Verschiebungslösung des durch die Kontaktgleichungen beschränkten Federsystems ergibt sich nach dem eben beschriebenen Prinzip vom Minimum des Gesamtpotenzials aus dessen Energieformulierung (Bild 3.31 rechts), bei der allerdings der Lösungsraum – also die geometrisch möglichen (zulässigen) Verschiebungszustände – nach oben begrenzt ist.

Die Lösungsfindung muss daher als Folge der Ungleichungsbedingungen schrittweise durch eine inkrementell-iterative Lastaufgabe erfolgen, sodass im möglichen Kontaktfall ($g_N = 0$) eine entsprechende Zwangsbedingung (hier: $U = g_{N,0}$) aktiviert und zum Gesamtpotenzial Π_0 (Abschnitt 5.3.7) hinzugefügt werden kann.