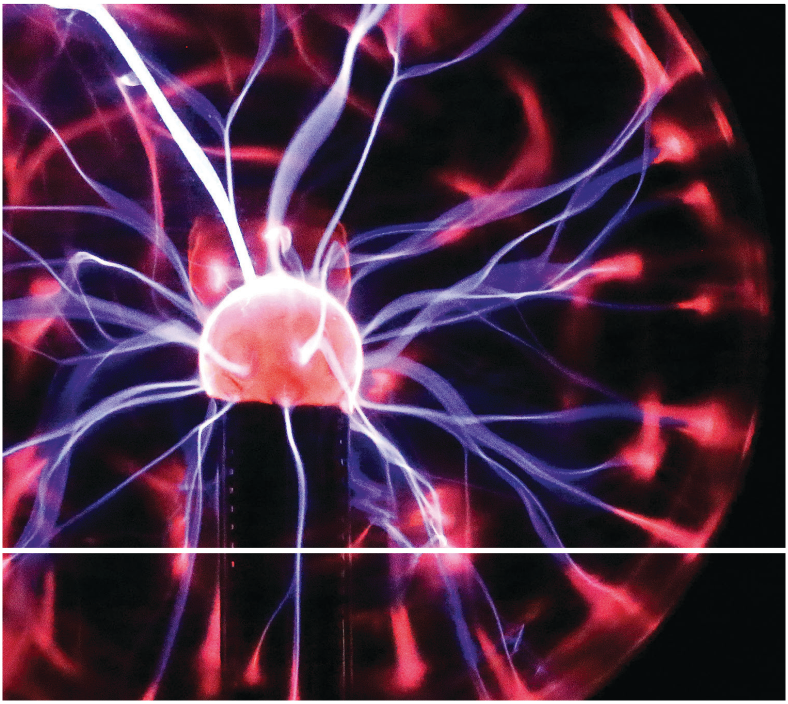
Johannes Rybach

Physik

für das Bachelorstudium



5., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER

Rybach

Physik für das Bachelorstudium

Johannes Rybach

Physik für das Bachelorstudium

5., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER

Der Autor:

Prof. em. Dr. rer. nat. Johannes Rybach

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Der Buchmacher, Arthur Lenner, Windach
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild: © shutterstock.com/MYOUNG GYU KIM
Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47678-3
E-Book-ISBN 978-3-446-47754-4

Vorwort

Weil Physik die grundlegende Naturwissenschaft ist, gehört sie in vielen Studiengängen zu den Basisfächern. Manchen Studierenden flößt ihre thematische Breite und theoretische Tiefe allerdings großen Respekt ein – verständlich bei dem oft lückenhaften Physikunterricht in der Schule.

Zusätzlich hat sich das Studium geändert: Die kompakte Bachelor-Ausbildung verlangt ein intensives Selbststudium, und in den spezialisierten Master-Studiengängen werden anschließend auch an Fachhochschulen wissenschaftliche Grundlagenkenntnisse vorausgesetzt. Darum sind selbsterklärende, also anschauliche und verständliche Lehrbücher immer wichtiger geworden.

Dieses Buch unterstützt Sie, liebe Leserin und lieber Leser, auf vielfältige Weise beim Studium der Physik:

- Die Darstellung ist sprachlich lebendig und begrifflich prägnant. Natürlich gehören auch Gleichungen und Formeln dazu, die jeweils sorgfältig eingeführt und verständlich erläutert werden. Die übersichtliche Gestaltung der Buchseiten und ihr zweifarbiger Druck sollen die Lesbarkeit noch erhöhen.
- Der Stoff ist sinnvoll ausgewählt – auch im Hinblick auf Prüfungen – und übersichtlich strukturiert. Viele rot markierte Verweise (Abschnitt X) betonen außerdem Zusammenhänge und Analogien zwischen den Kapiteln: Diese Verbindungen gehören ja gerade zu den Stärken der Physik.
- Die sogenannte moderne Physik wird in dieser elementaren Darstellung nicht ausgeklammert, denn viele technische Anwendungen nutzen bereits Quanteneffekte oder benötigen die Relativitätstheorie. Der wachsenden Bedeutung optischer Technologien wurde ebenfalls durch ein eigenes Kapitel Rechnung getragen.
- Am Ende jedes Kapitels stehen Testfragen und exemplarische Übungsaufgaben. Sie sollen wichtige Anwendungen der Gesetze demonstrieren und das Verständnis prüfen sowie vertiefen. Die ausführlichen Musterlösungen (im Anhang) vermitteln die typischen Lösungsideen, Lösungsstrategien und Lösungswege für solche Probleme.

In solchen Kästen finden Sie physikalische Gesetze und Definitionen.

In solchen Kästen finden Sie vollständig durchgerechnete Beispiele zur Erläuterung der Gesetze und Gleichungen, und zwar unmittelbar nach ihrer Einführung.

In weiteren Kästen finden Sie zusätzliche Infos. Eilige Leser könnten sie übergehen, aber vielleicht wäre das schade: Sie ergänzen spezielle Aspekte, erläutern bestimmte Anwendungen, und manche sind einfach nur interessant . . .

Klassische Missverständnisse, häufige Denkfehler und typische Verständnisprobleme werden jeweils in diesem Kasten klargestellt.

Dieses Buch ist vollständig in dem Sinne, dass alle wesentlichen Informationen für Studierende mit Physik im Nebenfach darin zu finden sind. Vieles muss aber gerafft oder als Übersicht dargestellt werden; dann verweisen Zitate auf die [Quellen], zum Beispiel Lehr- und Handbücher der Mathematik, Technik oder Chemie. Außerdem sind ergänzende Physikbücher und Aufgabensammlungen im Anhang zusammengestellt.

Vorwort zur 5. Auflage

Als dieses Physik-Lehrbuch erschien, war es das erste für die damals neuen Bachelor-Studiengänge. Inzwischen darf es als Standardwerk für die Physiklehre im Nebenfach gelten, insbesondere im Grundstudium der Ingenieurwissenschaften.

Für die fünfte Auflage unter dem neuen Titel „Physik für das Bachelorstudium“ wurde der Inhalt gründlich überarbeitet und aktualisiert. Neben kleineren Fehlerkorrekturen ergab sich dabei die Gelegenheit, das Layout an den aktuellen Hanser-Standard anzupassen. So werden die durchgerechneten Zahlenbeispiele (Icon „Auge“) und die zusätzlichen Infos (Icon „Pfeil“) in übersichtlichen Kästen dargestellt. Besonders hilfreich sind vielleicht diejenigen mit dem Achtung-Icon: klassische Missverständnisse, häufige Denkfehler und typische Verständnisprobleme werden jeweils an der passenden Stelle im Text klargestellt.

Schließlich sind im Buch einige *Anmerkungen* eingefügt, wie schon an dieser Stelle mein *Dank*: Er gilt vor allem meiner Familie für Verständnis und Geduld, meinen Studierenden für Fragen und Rückmeldungen, und nicht zuletzt Frau Natalia Silakova und Frau Christina Kubiak im Carl Hanser Verlag für die sehr gute Zusammenarbeit.

Unverändert geblieben ist die didaktische Ausrichtung des Lehrbuches: Es wendet sich an Studierende, die ohne Vorkenntnisse in Physik einsteigen müssen, aber motiviert dabeibleiben sollen – im besten Fall sogar mit Freude an neuen Erkenntnissen und interessanten Zusammenhängen. Ihnen allen wünsche ich viel Erfolg bei der Arbeit mit „Physik für das Bachelorstudium“.

Langenfeld, im März 2023 *Johannes Rybach*

Inhalt

Auf *plus.hanser-fachbuch.de* finden Sie zu allen Testfragen und Übungsaufgaben ausführliche Antworten und Lösungen.

1 Einstieg

1.1 Motivation

Aus welchem Grund greifen Sie zu diesem Physikbuch? Möchten Sie nur die Prüfung in einem Nebenfach bestehen? Interessiert Sie ein ganz spezielles Thema wie Wellenoptik oder Atomphysik? Brauchen Sie lediglich Hintergrundwissen für ein technisches Problem?

Leider, so werden Sie dann feststellen, erreicht man in der Physik mit Nachschlagen und Auswendiglernen nicht viel: Alle Gebiete sind miteinander verknüpft, und noch die modernste Quantentheorie baut auf der klassischen Mechanik auf. Genau das ist der Vorteil, sagen die Physiker: Man kommt mit dem Verständnis weniger Prinzipien aus, um die gesamte Vielfalt der Natur zu verstehen. Auch aus diesem Grund ist die Physik die Basis vieler anderer Wissenschaften geworden.

Außerdem hat sich ihre Arbeitsweise als erfolgreich und vorbildlich erwiesen: Aus der Fülle der *Phänomene* werden *Gesetze* abgeleitet und vorzugsweise in der klaren Sprache der *Mathematik* formuliert. Sie bilden den Kern einer *Theorie*, die anschließend durch *Experimente* überprüft wird. So entstehen *Modelle*, die naturgemäß nur Näherungen oder Teilaspekte der Wirklichkeit darstellen. Dennoch ermöglichen sie Vorhersagen für den Ablauf *physikalischer Prozesse* oder sogar für neuartige Phänomene. Auch *technische Anwendungen* können auf dieser Basis entwickelt werden.

Vielleicht müssen Sie sich also gründlicher mit der Physik beschäftigen, als Sie ursprünglich vorhatten. Das wird sich lohnen, denn die Physik vermittelt Kenntnisse und Konzepte, die über das Studium hinaus für eine lange Berufspraxis gültig bleiben.

1.2 Physikalische Größen

Die Physik ist keineswegs „Angewandte Mathematik“ (obwohl der Physiker die Mathematik ständig anwendet): Reine Zahlenwerte ergeben in der Naturbeschreibung keinen Sinn, weil die Eigenschaften von *Dingen* und die Konsequenzen von *realen Vorgängen* beschrieben werden sollen. Gegenstände der Physik sind also **Größen**, die als Produkt eines *Zahlenwertes* und einer *Einheit* (auch: „Maßzahl“ und „Maßeinheit“) dargestellt werden:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

Die beiden Faktoren einer Größe G werden vereinbarungsgemäß durch unterschiedliche Klammern gekennzeichnet:

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

Offensichtlich ist die **Einheit** elementar für konkrete Angaben wie etwa *Messergebnisse*: Die Angabe „100 m“ benennt zum Beispiel eine *Länge* (auch *„Strecke“* oder *„Weg“*) und bezeichnet einhundert Vielfache der Längeneinheit *Meter*. Die Größe „100 s“ gibt dagegen ein *Zeitintervall* an, währenddessen einhundert Mal die Zeiteinheit *Sekunde* verstreicht.

Einheiten

Damit kein Missverständnis entstehen kann: Eine eckige Klammer bedeutet „Die Einheit von ... ist ...“. Für eine Länge gilt zum Beispiel: $[l]$ = m; für ein Zeitintervall $[\Delta t]$ = s. (Manchmal sieht man die *Einheit* statt der Größe in der Klammer; das ist *falsch*.)

1.3 Maßsystem und Standards

Für genaue und überall vergleichbare Größenangaben müssen die Einheiten international definiert und durch *Normale* bzw. *Standards* repräsentiert sein. Das Erstere leistet seit 1960 das **Internationale Einheitensystem** („Système International d'Unités“, darum auch abgekürzt **SI**); mittlerweile ist es in der Europäischen Union und den meisten anderen Staaten sogar gesetzlich vorgeschrieben. Die *Normierung* ist Aufgabe staatlicher Metrologie-Institute (die nicht Wetter-, sondern Messkunde betreiben). In Deutschland hat den gesetzlichen Auftrag dazu die ***Phy**sikalisch-**T**echnische **B**undesanstalt* (PTB) in Braunschweig.

Größen

Verwenden Sie bei Rechnungen *immer* Größen und *vorzugsweise* SI-Einheiten. Das ist nicht nur physikalisch korrekt, sondern bietet bei der Umformung komplizierter Gleichungen auch eine wertvolle Ergebniskontrolle. Viele Beispiele in den folgenden Kapiteln zeigen, dass über die Basiseinheiten auch scheinbar schwierige Zusammenhänge einfach herzustellen sind.

Eine grundlegende Änderung hat das SI im Jahr 2019 erfahren: Sämtliche Einheiten werden seitdem auf *Naturkonstanten* zurückgeführt, die universal und unabhängig von Messmethoden gelten. Insbesondere kann nun auf das „Urkilogramm" (Bild 1.1) verzichtet werden, das seit 1889 unter größter Sorgfalt aufbewahrt wird, aber dennoch rund 50 Mikrogramm (Tabelle 1.3) „leichter" geworden ist. Nach der Ablösung des „Urmeter" im Jahr 1960 ist damit das letzte anschauliche Normal nur noch ein Museumstück.

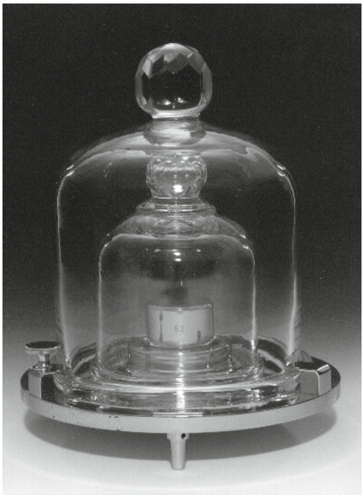


Bild 1.1
Das „Urkilogramm", ein Zylinder aus Platin-Iridium, diente bis 2019 als Massenormal. Trotz sorgfältigster Aufbewahrung unter Glasglocken verlor er an Substanz.

In der Mechanik (Kapitel 2) werden lediglich drei SI-Einheiten benötigt: neben den oben erwähnten Meter und Sekunde noch das *Kilogramm* zur Angabe einer **Masse.** Diese drei werden als *Basiseinheiten* für die entsprechenden **Basisgrößen** bezeichnet.

Kilogramm

Die Basiseinheit der Masse ist *nicht* das Gramm. „g" wurde zwar früher zusammen mit „cm" im *cgs-System* verwendet, aber in *metrischen Systemen* wie dem früheren MKS und dem heutigen SI ist nur das Kilogramm sinnvoll.

Die SI-Einheit der Zeit ist die Sekunde. Sie kann durch „Atomuhren" mit sehr hoher Genauigkeit standardisiert werden. Bild 1.2 zeigt die derzeit modernste „Cäsium-Fontäne" der PTB, zusammen mit ihrem Zwilling, die sich gegenseitig kontrollieren. In einer solchen „Springbrunnenuhr" werden die Cäsiumatome mithilfe von Laserstrahlen extrem gekühlt (Info 3.1) und dadurch verlangsamt, sodass sich die Genauigkeit nochmals deutlich erhöht. Daher beträgt die Gangabweichung inzwischen (Stand 2020) nur 1 Sekunde in 160 Millionen Jahren.

Bild 1.2
Die offizielle Zeitangabe wird in Deutschland von Cäsium-Atomuhren der PTB abgeleitet. Das Bild zeigt das modernste Zwillingspaar mit der höchsten bisher erreichten Genauigkeit.

Die PTB betreibt übrigens auch einen Zeitsender für die Verbreitung des Zeitnormals. Jedermann kann also mit einer „Funkuhr" unmittelbar diesen Standard nutzen. Unter anderem beruht die Präzision der Positionsbestimmung und Navigation auf der Erde – z. B. mit dem Global Positioning System (GPS) – letztlich auf der Genauigkeit von Atomuhren.

Wegen des exakten Zeitnormals ist die Einheit der **Länge** 1 m seit 1983 als die Strecke definiert, die das Licht im Vakuum in der Zeit 1/299 792 458 s zurücklegt. Dazu musste die **Lichtgeschwindigkeit** c_0 als *Naturkonstante* exakt festgelegt werden [CODATA]:

$$\text{Vakuum-Lichtgeschwindigkeit}: c_0 = 299\ 792\ 458 \text{ m/s}$$

Info 1.1: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Dass es sich tatsächlich um eine Konstante handelt, begründete ALBERT EINSTEIN (1879 – 1955) in seiner „Speziellen Relativitätstheorie" (Abschnitt 2.7.4.1). Erstaunlicherweise kann c_0 nicht nur nicht übertroffen werden, sondern bleibt auch bei der Überlagerung von Geschwindigkeiten konstant – das wurde experimentell gezeigt (Info 5.4).

Bei einem materiellen Gegenstand, der mit einer bestimmten, im Vergleich zu c_0 kleinen Geschwindigkeit in Fahrtrichtung aus einem fahrenden Auto geworfen wird, addiert sich selbstverständlich die Fahrzeuggeschwindigkeit zur Wurfgeschwindigkeit. Für das *Licht* der Autoscheinwerfer gilt das aber *nicht*; es breitet sich genauso schnell aus wie bei einem stehenden Auto!

In der gesamten Physik benötigt man neben den drei mechanischen Basisgrößen des SI nur noch vier weitere. Alle sieben sind mit ihren Einheiten und Bezeichnungen in Tabelle 1.1 zusammengefasst:

Tabelle 1.1 Basisgrößen und Basiseinheiten des SI

Art der Basisgröße	Name der Basiseinheit	Formelzeichen für die Basisgröße	Symbol für die Basiseinheit
Länge	Meter	l	m
Zeit	Sekunde	t	s
Masse	Kilogramm	m	kg
Elektrische Stromstärke	Ampere	I	A
Temperatur	Kelvin	T	K
Lichtstärke	Candela	I_V	cd
Stoffmenge	Mol	n	mol

Falls Sie in der Tabelle so wichtige Größen wie „Kraft" oder „elektrische Spannung" vermissen: Diese sind nicht elementar und können mit ihren Einheiten aus den Basisgrößen *abgeleitet* werden.

Symbole

Manche physikalischen Größen werden je nach Zusammenhang mit *unterschiedlichen Symbolen* bezeichnet. Zum Beispiel kommt die Einheit „Meter" in diesem Buch zusammen mit folgenden Buchstaben vor: *x, y, z* (kartesische Koordinate), *a, b, c* (Seite eines Dreiecks), *r, R* (Kreisradius), *h* (Höhe), *l* (Länge), *d* (Durchmesser oder Abstand) und *s* (Wegstrecke). Andererseits ist die Vielfalt lateinischer Buchstaben begrenzt (griechische werden zusätzlich benutzt, vor arabischen und kyrillischen schrecken die meisten Physiker zurück). Darum können einige Symbole (z. B. *E, n, c*) *unterschiedliche Größen* bezeichnen! Ihre Bedeutung erschließt sich aber jeweils aus dem Zusammenhang.

Beispiel 1.1: Abgeleitete und SI-fremde Einheiten

Das Licht legt pro Sekunde einen Weg von etwa 300 Millionen Metern zurück. (Dies gilt, wie oben angegeben, im Vakuum, z. B. im Weltall. In Luft ist die Strecke unwesentlich geringer. Die Ursache dafür wird in Abschnitt 5.1.1 erläutert.) Die abgeleitete Einheit für die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist also:

$$[c_0] = \mathrm{m} / \mathrm{s}$$

Das gilt für Geschwindigkeiten allgemein. Während allerdings bei Wellen – auch Licht ist eine Wellenerscheinung, siehe Abschnitt 5.4 – häufig das Symbol *c* verwendet wird, ist in der Mechanik das Symbol *v* üblich:

$$[v] = \mathrm{m} / \mathrm{s}$$

Als SI-fremde Maßeinheit, die aber vertraut und anschaulich ist, kann man außerdem „Kilometer pro Stunde" (aber niemals „Stundenkilometer") angeben:

$$1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{(1/1000)\,\mathrm{km}}{(1/3600)\,\mathrm{h}} = 3{,}6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Es gibt etliche andere Einheiten außerhalb des SI, die sogar gesetzlich zulässig sind. Für die Größe *Zeit* sind das neben der *Stunde* („hora") und der *Minute* auch der Tag („dies") und das *Jahr* („annus"):

$$1\,\mathrm{a} = 365\ \mathrm{d} = 365 \cdot 24\ \mathrm{h} = 365 \cdot 24 \cdot 60\ \mathrm{min}$$

Inkonsequenterweise, aber aus verständlichen Gründen haben viele der abgeleiteten SI-Einheiten spezielle Namen bekommen; diese ehren meistens einen verdienten Wissenschaftler. Alle in diesem Buch verwendeten Einheiten-Namen sind in Tabelle 1.2 zusammengestellt.

Zusammengesetzte Einheiten

Manche Produkte von Einheiten tauchen so häufig auf, dass sie wie eine eigene Einheit verwendet werden. Beispiele in Tabelle 1.2 sind „Newtonmeter", „Amperesekunde" und „Voltsekunde", die oft sogar entsprechende Einheitenzeichen bekommen („Nm, As, Vs"). In diesem Buch werden sie der Deutlichkeit halber als Produkt angegeben, wie z. B. (N · m).

Tabelle 1.2 Abgeleitete SI-Einheiten mit selbständigen Namen

Größe	Übliches Symbol bzw. Formelzeichen	Name	Einheiten-zeichen	Beziehung zu anderen SI-Einheiten	Einführung in Abschnitt
Frequenz	f	Hertz	Hz	= 1/s	2.6.1
Kraft	F	Newton	N	= kg · m/s²	2.2.2
Druck	p	Pascal	Pa	= N/m²	2.8.1
Energie, Arbeit	E, W	Joule	J	= N · m = W · s	2.3.1
Leistung	P	Watt	W	= J/s	2.3.5
Elektrische Ladung	Q	Coulomb	C	= A · s	4.1.1
Elektrische Spannung	U	Volt	V	= W/A	4.1.3
Elektrische Kapazität	C	Farad	F	= C/V	4.1.4
Elektrischer Widerstand	R	Ohm	Ω	= V/A	4.2.2
Elektrischer Leitwert	G	Siemens	S	= A/V	4.2.3
Magnetischer Fluss	Φ	Weber	Wb	= V · s	4.4.2
Magnetische Flussdichte	B	Tesla	T	= Wb/m²	4.3.2
Induktivität	L	Henry	H	= Wb/A	4.4.4
(Radio-) Aktivität	A	Becquerel	Bq	= 1/s	6.5.3
Energiedosis	D	Gray	Gy	= J/kg	6.5.3
Äquivalentdosis	H	Sievert	Sv	= J/kg	6.5.3

■ 1.4 Größenordnungen

Der Zahlenwert einer physikalischen Größe kann in der Natur extrem klein oder enorm groß auftreten. Man unterscheidet – relativ grob, aber in einer sinnvollen Stufung – **Größenordnungen** von Zahlenwerten als Potenzen von zehn (10^n). Statt der klassischen Schreibweise oder der Exponentialschreibweise können auch *Vorsätze* (bzw. *Vorsilben*) verwendet werden, wie etwa beim *Kilogramm*:

$$1000\ \text{g} = 10^3\,\text{g} = 1\ \text{kg}$$

Die gebräuchlichsten Vorsätze mit ihren Abkürzungen sind in Tabelle 1.3 zusammengestellt.

Tabelle 1.3 Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Vielfache und Teile

Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hekto	h	10^{2}
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

Häufig sind **Abschätzungen** oder *Überschlagsrechnungen* mit der Genauigkeit einer Größenordnung, also bis auf einen Faktor 10, ausreichend und sinnvoll. Das gilt zum einen für die Kontrolle einer Berechnung, die mit Taschenrechner oder Computer durchgeführt wird: Mit einem kleinen Vorzeichenfehler beim Exponenten liefert die Maschine völlig sinnlose Ergebnisse! Zum anderen kann man oft mit einigen groben Schätzwerten eine Information gewinnen, die sich der exakten Berechnung völlig entzieht.

Info 1.2: FERMI-Probleme

Solche „unmöglichen“ Fragestellungen werden auch als „FERMI-Probleme“ bezeichnet: Der berühmte italienisch-amerikanische Physiker FERMI hat die Sprengkraft der ersten Atombombe (im Juli 1945) offenbar lediglich mithilfe einiger Papierschnipsel abgeschätzt. Er warf sie nach der Explosion (natürlich in sicherer Entfernung) einfach in die Höhe und beobachtete, dass sie von der Druckwelle einige Meter fortgeweht wurden. Das Ergebnis seiner darauf basierenden Überschlagsrechnung stimmte gut – nämlich zumindest in der Größenordnung – überein mit den Resultaten der langwierigen Auswertungen von vielen komplizierten Messapparaturen.

Beispiel 1.2: FERMI-Abschätzung

Aufgabe: Für ein irisches „Buch der Rekorde“ soll das dickste Seilknäuel der Welt aufgewickelt werden. Es muss 4 m dick werden, wobei das Seil 4 mm Durchmesser hat. Welche Seillänge muss für den Rekordversuch zur Verfügung stehen?

Lösung: Das Volumen des Seils kann durch einen *Zylinder* angegeben werden, dessen Höhe der gesuchten Seillänge entspricht. Dieses Volumen setzt man für eine Abschätzung der Maximallänge einfach gleich dem angestrebten *Kugelvolumen*. (Wegen der Wickel-Lücken wird der Bedarf etwas geringer sein, aber eine exakte Rechnung ist eben unmöglich.)

$$\pi r^2 l_{\max} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow l_{\max} = \frac{4R^3}{3r^2}$$

Mit r = 2 mm und R = 2 m ergibt sich:

$$l_{\max} = \frac{4\cdot(2\,\mathrm{m})^3}{3\left(2\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\right)^2} = \frac{8\,\mathrm{m}^3}{3\cdot10^{-6}\ \mathrm{m}^2} \approx 2{,}7\cdot10^6\ \mathrm{m}$$

Die *Größenordnung* der Seillänge beträgt also 10^6 m = 1000 km.

Tabelle 1.4 Einige Größenordnungen in SI-Einheiten

Masse unserer Galaxis (Milchstraßensystem)	10^{41} kg
Masse der Erde	10^{25} kg
Masse eines Menschen	10^{2} kg
Masse des Wasserstoffatoms (H)	10^{-27} kg
Durchmesser unserer Galaxis	10^{21} m
Durchmesser der Erde	10^{7} m
Größe eines Menschen	10^{0} m
Durchmesser des H-Atomkerns (Proton)	10^{-15} m
Alter der Erde (ca. ¼ des Universums)	10^{17} s
Lebenserwartung eines Menschen	10^{9} s
Periode zwischen Herzschlägen	10^{0} s
Flugzeit des Lichtes durch ein Proton (hypothetisch)	10^{-24} s
Lichtjahr (Strecke, die in 31 536 000 s mit c_0 zurückgelegt wird)	10^{16} m

Beispiel 1.3: Rechnen mit c_0

Aufgaben: Berechnen Sie die Flugzeit des Lichtes t_P für eine Strecke, die dem Durchmesser des Wasserstoff-Atoms entspricht (Tabelle 1.4)! Wie bestimmt man andererseits die Längeneinheit „Lichtjahr", die in der letzten Zeile dieser Tabelle angegeben ist?

Lösungen: Mit der Definition der Geschwindigkeit aus Beispiel 1.1 und dem abgerundeten Zahlenwert für c_0 aus Abschnitt 1.3 erhält man für t_P:

$$t_P = \frac{d_P}{c_0} = \frac{10^{-15}\,\text{m}}{3 \cdot 10^8\,\text{m}/\text{s}} = 3{,}3 \cdot 10^{-24}\ \text{s}$$

Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Obwohl die Einheit „Lj" bzw. „ly" im Internationalen Einheitensystem nicht enthalten ist, wird sie in der Astronomie viel verwendet. Ihre Berechnung ergibt:

$$1\text{Lj} = c_0 t = 3 \cdot 10^8\,(\text{m}/\text{s}) \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365\,\text{s} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$$

1.5 Messgenauigkeit

Im physikalischen Laborpraktikum stößt man wie bei jeder technischen Messung auf ein scheinbar unbefriedigendes Phänomen: Wenn zum Beispiel die Fallzeit einer Kugel zehnmal mit einer Stoppuhr bestimmt wird, so sind oft alle zehn Messergebnisse verschieden. Welches ist denn nun die „richtige" Fallzeit; welches Ergebnis ist „wahr"?

Richtig und wahr ist vor allem, dass jede Messung mit *Fehlern* behaftet und darum „unsicher" ist: Dem „wahren Wert" kann man sich prinzipiell nur so gut wie möglich annähern. Diese **Messunsicherheit** hat nichts mit *echten* Fehlern zu tun (wie dem Einsatz einer Sanduhr oder dem verzögerten Uhrenstopp nach längerer Kaffeepause). Auch bei größter Sorgfalt können *systematische Messfehler* auftreten (z. B. dass die Uhr zu schnell läuft) – diese muss man erkennen, und abstellen oder korrigieren.

Die zweite Kategorie stellen *zufällige* bzw. *statistische* Fehler dar (z. B. können die Reaktionszeiten bei jeder einzelnen Messung anders sein, aber rein zufällig mal kleiner und mal größer). Ihre mathematische Behandlung liefert das plausible Ergebnis, dass bei solchen „normal verteilten" Messwerten (s. u.) x_i der arithmetische **Mittelwert** $\overline{x}$ aus allen n Messungen dem „wahren Wert" am nächsten kommt:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=\ldots n} x_i}{n} \tag{1.1}$$

Aber auch Messwerte in einem Intervall um den Mittelwert herum sind „richtig" und werden bei einer Fortsetzung der Messreihe mit einer gewissen (zu größeren Abweichungen abnehmenden) Wahrscheinlichkeit auftreten! Dieses Intervall (der „*Vertrauensbereich*") lässt sich bestimmen, wenn man die benötigte Wahrscheinlichkeit (das „*Vertrauensniveau*") vorgibt; üblich sind z. B. 68,3 % oder 95,0 %. Zur Berechnung benötigt man zunächst die **Standardabweichung der Einzelmessung**:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \tag{1.2}$$

Sie kann als ein Maß für die *Streuung* der Messwerte interpretiert werden, wenn die Messung (n – 1)-mal *wiederholt* wird. Sind die Messwerte „normal verteilt", so liegen sie symmetrisch um den Mittelwert. Die **Normalverteilung** nach C. F. Gauss (1777–1855) für sehr viele Messungen (mathematisch formuliert: $n \to \infty$) wird von der *Glockenkurve* in Bild 1.3 beschrieben. Sie hat ihr Maximum, also den am häufigsten gemessenen Wert, beim Mittelwert $\overline{x}$, und in das Intervall $\overline{x} \pm s_x$ fallen 68,3 % der Messwerte. Anders formuliert: Wenn man sehr häufig misst, ist der Vertrauensbereich für ein Vertrauensniveau von 68,3 % gerade durch die Standardabweichung s_x gegeben.

Um nun zum Vertrauensbereich für kleinere (und im Laborpraktikum zumutbare) Anzahlen n zu gelangen, wird die Standardabweichung des Mittelwertes $\Delta\overline{x}$ gebildet und noch mit dem sogenannten t-Faktor multipliziert; das ergibt die **statistische Messunsicherheit**:

$$u_x = t \cdot \Delta\overline{x} = \frac{t}{\sqrt{n}} s_x \tag{1.3}$$

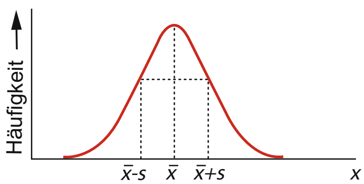


Bild 1.3
Die Gausssche Normalverteilung wird durch die Glockenkurve dargestellt.

Der t-Faktor berücksichtigt sowohl die Anzahl der Messungen n als auch das gewünschte Vertrauensniveau. Natürlich steckt dahinter wiederum mathematische Statistik, aber im Physiklabor darf man t einfach in Mathematik- oder Praktikumsbüchern nachschlagen [Schäfer, Walcher]. Anschaulich ist $\Delta\overline{x}$ bzw. u_x ein Maß für die *Zuverlässigkeit* des Mittelwertes. Das wird vor allem deutlich, wenn in einem Diagramm das Intervall $\overline{x} \pm s_x$ als *Fehlerbalken* symmetrisch zum Messwert eingezeichnet wird. Zahlenangaben sind oft leichter zu interpretieren, wenn man die statistische Messunsicherheit *relativ* zum Mittelwert angibt, zum Beispiel in Prozent.

Beispiel 1.4: Mittelwert und Vertrauensbereich

Aufgabe: Die Fallzeit t_F einer Kugel wird zehnmal mit einer einfachen Stoppuhr gemessen: 1,21 s; 1,20 s; 1,23 s; 1,19 s; 1,21 s; 1,22 s; 1,2 s; 1,24 s; 1,20 s; 1,18 s; dabei sollen die *systematischen* Messfehler vernachlässigbar sein. Geben Sie das Ergebnis des Experimentes für ein Vertrauensniveau von 95 % an!

Lösung: Das wahrscheinlichste (dem „wahren" Wert am besten entsprechende) Ergebnis ist der Mittelwert (Formel 1.1):

$$\bar{t}_F = \frac{1{,}21 + \ldots + 1{,}18}{10}\ \mathrm{s} = 1{,}209\,\mathrm{s}$$

Die Standardabweichung (Formel 1.2) ist hier:

$$s_t = \sqrt{\frac{(1{,}21 - 1{,}209)^2 + \ldots + (1{,}18 - 1{,}209)^2}{9}}\ \mathrm{s} = 0{,}0179\,\mathrm{s}$$

Bei dem geforderten Vertrauensniveau und $n = 10$ beträgt der t-Faktor 2,23. Damit ist die Messunsicherheit (Formel 1.3):

$$u_t = \frac{2{,}23 \cdot 0{,}0179}{\sqrt{10}}\ \mathrm{s} = 0{,}0126\,\mathrm{s}$$

Das Messergebnis einschließlich der sinnvoll abgerundeten statistischen Messunsicherheit lautet also:

$$t_F = (1{,}209 \pm 0{,}013)\,\mathrm{s}$$

Der relative Fehler beträgt demnach ± (0,013 / 1,209) = ± 0,0108 = ± 1,08 %. Für ein Vertrauensniveau von 68,3 % würde sich übrigens ein nur etwa halb so großes Vertrauensintervall ergeben; dann dürfte ja auch fast ein Drittel der Messwerte außerhalb liegen.

Die Statistik bzw. Fehlerrechnung ist keine physikalische Disziplin, aber notwendiges Handwerkszeug für physikalische Messungen. Das Handwerk wird natürlich noch aufwendiger, wenn *zwei* oder mehr gemessene Größen voneinander *abhängig* sind. Das kommt häufig vor, und dann wird eine *Regressionsanalyse* erforderlich, die bei grafischer Darstellung zu einer *Ausgleichskurve* führt. Auch der Fall, dass eine gesuchte Größe aus der Mehrfach-Messung mehrerer Einzelwerte ermittelt wird und *Fehlerfortpflanzung* auftritt, erfordert höheren mathematischen Aufwand (sowie ggf. Nachschlagen in den oben zitierten Büchern).

Als Konsequenz aus der begrenzten Genauigkeit physikalischer Größen ist es notwendig, Zahlenangaben auf **signifikante Stellen** zu beschränken. Auch für den Mittelwert aus wenigen, vielleicht ungenauen Messungen liefert ein Taschenrechner ja acht oder zwölf Stellen. Wenn aber schon die zweite Stelle bei jeder Einzelmessung verschieden ausfällt, darf man beim Mittelwert höchstens die dritte oder vierte angeben – je nach Vertrauensbereich. Ansonsten wird eine *Scheingenauig-*

keit vorgespiegelt, die nutzlos und sogar unseriös ist. Andererseits verlangt die Konvention, dass auch „glatte Zahlen“ mit allen signifikanten Stellen angegeben werden müssen, um ihre *tatsächliche* Genauigkeit zu dokumentieren.

Beispiel 1.5: Signifikante Stellen

Aufgabe: Wie zuverlässig – also auf wie viele Stellen genau – sind die folgenden Angaben:

2574 µm; 1,999 kg; 5700 kg; 0,027 35 s; 20,00 mm; 0,000 855 2 s?

Lösung: Alle sind auf vier Stellen genau. Dies gilt auch für die letzte, denn: 0,000 855 2 s = 855,2 µs.

Die manchmal zitierte „Zahl der Stellen hinter dem Komma“ ist unmaßgeblich!

Hinweis: Bei Rechenoperationen bestimmt natürlich der ungenauere Term die signifikanten Stellen des Ergebnisses, z. B.:

$$3{,}9 \cdot 10^3 \text{ m} + 0{,}7931 \text{m} \approx 3{,}9 \text{km}$$

Fehlerrechnung

Die Fehlerrechnung ist besonders fehlerträchtig in Bezug auf Symbole und Definitionen – es fängt ja schon damit an, dass der Begriff „Fehler“ falsch ist. In vielen Darstellungen werden auch unterschiedliche Symbole verwendet, oder gleiche Symbole mit unterschiedlicher Bedeutung. In dieser Situation tut eine *Norm* gut (genau dazu ist sie auch da). Für die „Grundlagen der Messtechnik“ gilt DIN 1319, Teile 1 – 4.

1.6 Vektoren und Koordinaten

Viele physikalische Größen haben über Zahlenwert und Einheit hinaus eine weitere wichtige Eigenschaft: eine *Richtung*. Während diese Angabe für eine Masse m offensichtlich keinen Sinn ergibt (m ist ein *Skalar*), kann z. B. ein Weg im dreidimensionalen Raum sehr unterschiedlich zurückgelegt werden. Die Strecke $\vec{s}$ muss demnach durch einen *Vektor* beschrieben werden (meistens, wie auch in diesem Buch, mit einem Pfeil über dem Symbol gekennzeichnet). Grafisch wird $\vec{s}$ tatsächlich durch einen Pfeil dargestellt, dessen Spitze die Richtung und dessen Länge seinen Betrag $|\vec{s}|$ angibt (also das Produkt aus Zahlenwert und Einheit).

Für Vektoren gelten natürlich andere Rechenregeln als für Skalare. So erfolgt ihre Addition nicht arithmetisch, sondern *geometrisch*: In Bild 1.4 sind beispielsweise zwei Strecken dargestellt, deren Länge gleich, deren Richtung jedoch senkrecht zueinander orientiert ist. Die Vektorsumme kann grafisch durch Aneinanderreihen der Pfeile und Verbinden des ersten Pfeilanfangs mit dem zweiten Pfeilende konstruiert werden. Bei Strecken wird der resultierende Vektor auch „Verschiebung" genannt (Beispiel 1.6). Eine Alternative zur zeichnerischen Addition ist die Parallelogramm-Methode, die vor allem bei der Addition von Kräften sehr anschaulich ist (Abschnitt 2.2.3).

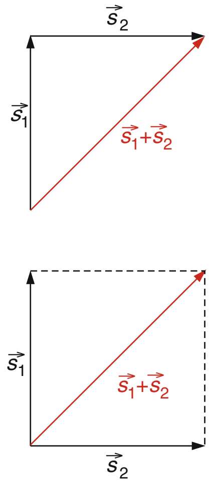


Bild 1.4
Die Addition von Vektoren erfolgt geometrisch durch Aneinanderreihen (oben) oder durch die Parallelogramm-Methode (unten, im Spezialfall Rechteck).

Beispiel 1.6: Verschiebung

Aufgabe: Ein Wanderer legt zunächst 1 km in nördlicher und dann dieselbe Strecke in östlicher Richtung zurück (Bild 1.4). Wie groß ist danach die „Verschiebung", d. h. seine Entfernung zum Ausgangsort?

Lösung: Diese Strecke (im Alltag auch die „Entfernung in Luftlinie" genannt) kann wegen des rechten Winkels zwischen den Vektoren sehr einfach nach dem Satz des Pythagoras („Nützliche mathematische Beziehungen" im Anhang) berechnet werden:

$$\left|\vec{s}_1+\vec{s}_2\right| = \sqrt{\left|\vec{s}_1\right|^2+\left|\vec{s}_2\right|^2}$$
$$= \sqrt{(1\,\text{km})^2+(1\,\text{km})^2} \approx 1{,}4\ \text{km}$$

Kompliziertere Vektoradditionen verlangen entweder eine zeichnerische Lösung (unüblich) oder die Addition der Vektorkomponenten (s. u.).

Die *Subtraktion* wird einfach als Addition eines negativen Vektors (mit umgekehrter Richtung) vorgenommen. Leicht ist auch die *Multiplikation mit einem Skalar* einzusehen: Sie ändert nur den Betrag (die „Pfeillänge") des Vektors. Die Multiplikation zweier Vektoren kann dagegen entweder einen Skalar („inneres Produkt") oder wieder einen Vektor ergeben („Kreuzprodukt"). Die Erläuterung erfolgt in diesem Buch mittels der typischen physikalischen Größen „Arbeit“ und „Drehmoment“ (Abschnitt 2.3.1 sowie Abschnitt 2.5.1).

Um die Lage des Vektors im Raum anzugeben, benutzt man meistens ein *kartesisches* (rechtwinkliges) *Bezugssystem* mit den **Koordinaten** x, y und z wie in Bild 1.5. (Oft, wie bei vielen Aufgaben in diesem Buch, genügen aber auch nur eine oder zwei Dimensionen zur Beschreibung eines physikalischen Problems.) Die Projektion auf die drei Achsen liefert die **Komponenten** des Vektors. Mit ihnen werden *mathematische* Vektoroperationen (wie die rechnerische Addition) durchgeführt. Für Vektoradditionen im *dreidimensionalen* Raum – wenn etwa der Wanderer aus Beispiel 1.6 aus irgendeinem Grund vom Boden abhebt – wird der Satz des PYTHAGORAS erweitert und auf die Komponenten des Vektors angewandt:

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \tag{1.4}$$

Häufig verringert es den Schreibaufwand, wenn die Koordinaten eines Vektors in eine Spalte untereinander geschrieben werden („Matrix-Schreibweise“):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Rechenoperationen für die einzelnen Komponenten können dann *zeilenweise* durchgeführt werden.

Der in Bild 1.5 ebenfalls dargestellte **Einheitsvektor** hat selbst den Betrag 1. Er ergänzt somit den Betrag einer Größe zu einem Vektor:

$$\vec{e} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z \tag{1.6}$$

$$\vec{s} = \left|\vec{s}\right| \cdot \vec{e} = s \cdot \vec{e} \tag{1.7}$$

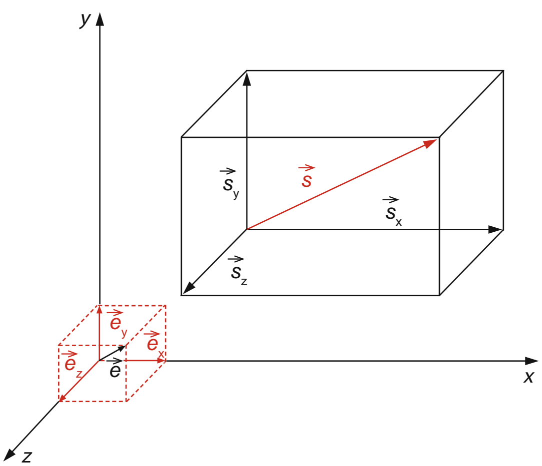


Bild 1.5
Die Komponentendarstellung eines Vektors.

In Zusammenhängen, die keine explizite Vektordarstellung erfordern, wird in diesem Buch nur der *Betrag* eines Vektors angegeben. (Perfektionisten können den Einheitsvektor wie im rechten Teil von Formel 1.7 jeweils gedanklich ergänzen.)

Eine besondere Bedeutung in der *Mechanik* hat der **Ortsvektor** $\vec{r}$; er beschreibt mathematisch die Lage (und Bewegung) eines Punktes P im Raum (Bild 1.6). Physikalisch ist das häufig ein kleines Teilchen, das als *Massenpunkt* betrachtet wird (Abschnitt 2.1). Der Ortsvektor kann alternativ mittels seines Betrages und der beiden Winkel δ und φ auch in räumlichen *Polarkoordinaten* angegeben werden, die bei rotationssymmetrischen Problemen wie Kreisbewegungen praktisch sind (Abschnitt 2.4.1).

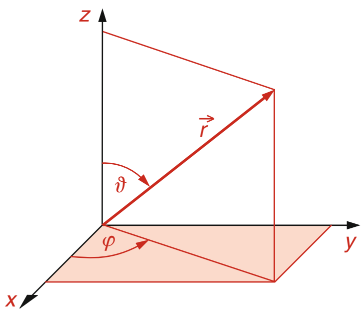


Bild 1.6
Der Ortsvektor gibt die Lage eines Punktes in Bezug auf ein Koordinatensystem an. Sowohl die kartesischen Koordinaten (x, y, z) als auch Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, δ, φ sind gebräuchlich.

Verschiebung

Die *Verschiebung* ist zu unterscheiden vom *Gesamtweg*. Sie ist immer ein Vektor (bzw. in *einer* Dimension eine Differenz, z. B. $\Delta x = x_2 - x_1$), während der Weg krummlinig sein kann. (Am besten beschreibt man solche Wege mit dem Ortsvektor.) Wenn der Wanderer aus Beispiel 1.6 nach langem Umherirren versehentlich wieder am Ausgangspunkt ankommt, war der insgesamt zurückgelegte Weg groß, aber die Verschiebung null.

Zusammenfassung: Einstieg

- *Physikalische Größen* bestehen aus Zahlenwert und Einheit.
- Das *Internationale Einheitensystem* (SI) verwendet 7 Basisgrößen und entsprechende Basiseinheiten; sie sind durch *Normale* definiert.
- Grundlegend (und für die gesamte Mechanik ausreichend) sind *Masse* (kg), *Zeit* (s) und *Länge* (m); andere Größen bzw. Einheiten werden abgeleitet.

- *Größenordnungen* (10^n) sind für Abschätzungen sinnvoll und oft ausreichend.
- Die (grundsätzlich unvermeidliche) *Messunsicherheit* setzt sich aus systematischen und zufälligen Fehlern zusammen. Erstere müssen korrigiert werden, Letztere sind als Vertrauensbereich Bestandteil des Messergebnisses (das nur mit den *signifikanten Stellen* angegeben werden darf).
- Viele physikalische Größen haben eine Richtung im Raum und werden als *Vektoren* dargestellt; diese können in einem kartesischen Koordinatensystem durch ihre Komponenten in Richtung der x-, y- und z-Achsen angegeben werden.

Testfragen zu Kapitel 1

1. Wie lauten die Basiseinheiten der Mechanik?
2. Mit welcher Naturkonstante wird die Einheit „m“ definiert?
3. Die Lebenserwartung von Studierenden beträgt mittlerweile ca. 100 Jahre. Wie viele Sekunden sind das?
4. Ihr Professor kündigt an, er wolle die Vorlesung heute auf ein Mikrojahrhundert ausdehnen. Wie lange wird er Sie belehren?
5. Welche räumliche Ausdehnung hat ein Laserpuls von einer Picosekunde Dauer?
6. Ein Hörsaal von 15,52 m Länge und 8,13 m Breite soll einen neuen Bodenbelag erhalten. Geben Sie den Flächenbedarf
   a) physikalisch sinnvoll,
   b) handwerkergerecht an!
7. Wie viele Tennisbälle (d = 6 cm) passen in einen Rucksack, der 20 Liter fasst?
8. Die Masse der Sonne beträgt ungefähr $2 \cdot 10^{30}$ kg; sie besteht im Wesentlichen aus Wasserstoffatomen mit der Masse $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Schätzen Sie ihre Anzahl ab!
9. Welche Verteilung der Messwerte erhalten Sie, wenn Sie tausendmal die Fallzeit eines Balles messen?
10. Welche Typen von Fehlern können bei Messreihen auftreten?

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

A1.1: Flugzeug-Verschiebung

(zu Abschnitt 1.6)

Ein Flugzeug fliegt zunächst 40 Kilometer nach Norden, schwenkt dann um 60° nach Nordwest und legt nochmals 70 km zurück.

a) Wie groß ist seine Verschiebung?

b) Unter welchem Winkel (vom Flughafen aus gesehen) liegt das Ziel? (Zeichnerische und rechnerische Lösung!)

A1.2: Laufzeit-Messung

(zu Abschnitt 1.3, Abschnitt 1.5)

Bei einer Mondlandung (Bild 1.7) wurde ein Lichtreflektor aufgebaut. Damit kann die Entfernung des Mondes von der Erde (l = 384 Mm) mit einem Laserpuls exakt gemessen werden.

a) Wie weit entfernt vom Laser muss der Pulsempfänger aufgebaut werden? (Beide sollen sich am Äquator befinden.)

b) Wie groß ist die Unsicherheit der Abstandsmessung Δl, wenn die Laufzeit auf Δt_l = 1 ns genau bestimmt werden kann?

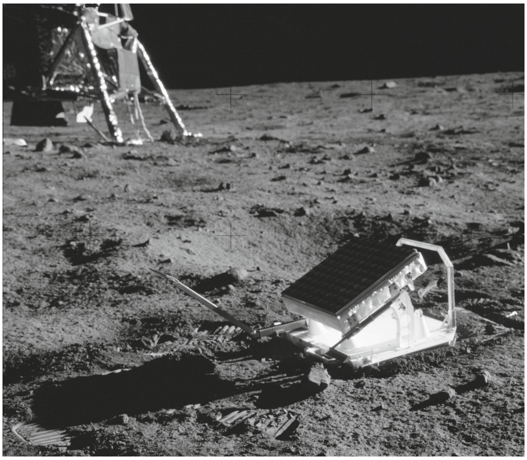


Bild 1.7
Mondoberfläche mit Lichtreflektor

A1.3: Jahr-Abschätzung

(zu Abschnitt 1.5)

Eine für Überschlagsrechnungen nützliche Abschätzung ist: 1 a = $\pi \cdot 10^7$ s. Welchen relativen Fehler nimmt man dabei in Kauf?

A 1.4: Erdradius

(zu Abschnitt 1.4)

Sie liegen am Strand unmittelbar an der Wasserlinie. Ein 2 m hohes Motorboot verschwindet in 5 km Entfernung hinter dem Horizont. Welchen Radius hat die Erde?

A 1.5: Reifenabrieb

(zu Abschnitt 1.4)

Wenn Fermi hätte abschätzen wollen, wie viel Reifengummi *bei jeder Umdrehung* eines Autorades auf der Straße bleibt: Wie wäre er (ohne Taschenrechner) vorgegangen?

A 1.6: Digitale Speicher

(zu Abschnitt 1.4)

Ein *Byte* entspricht in der digitalen Datentechnik einer Folge von 8 *Bit*, also Binärziffern mit dem Wert 0 oder 1. Man kann damit einen Buchstaben, eine Ziffer oder ein Sonderzeichen speichern.

a) Wie viele Zeichen sind darstellbar?

b) Wie viele Druckseiten mit 2000 Zeichen kann man auf digitalen Speichermedien jeweils pro GByte unterbringen?

c) Wie viele Bücher?

2 Mechanik

Die Mechanik stellt den klassischen und sinnvollen Zugang zur gesamten Physik dar. In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe eingeführt, die in allen weiteren (auch den „moderner“ erscheinenden) gültig und wichtig sind.

2.1 Kinematik

Kinematik kann etwas banal mit „Bewegungslehre“ übersetzt werden – und zwar als „reine Lehre“, da nach den *Ursachen* der Bewegung erst im folgenden Kapitel „Dynamik“ gefragt wird. Auch die Einflüsse der körperlichen Ausdehnung und der Struktur bewegter Körper werden vernachlässigt, indem man *Massepunkte* untersucht. Je nach Größenordnung der Bewegungsbahn kann das eine gute Näherung für ein Elementarteilchen sein, für den Schwerpunkt eines Autos, oder sogar für einen Himmelskörper. Allerdings werden *Kreisbewegungen* auf ein folgendes Kapitel verschoben (Abschnitt 2.4) und zunächst nur **Translationen** behandelt.

2.1.1 Eindimensionale Bewegungen

Alle wesentlichen Charakteristika einer Massenpunkt-Bewegung lassen sich bereits in *einer* Dimension, also entlang einer Geraden, darstellen. Das Koordinatensystem aus Bild 1.5 reduziert sich damit zu einer Achse, wie in Bild 2.1 gezeichnet.

Bild 2.1
Eindimensionales Koordinatensystem (z. B. zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung eines Autos).

2.1.1.1 Geschwindigkeit

Als anschauliches Beispiel soll die Fahrt eines Autos entlang einer geraden Straße untersucht werden. Es befindet sich zu der Zeit t_1 an der Stelle s_1 und zu einem späteren Zeitpunkt t_2 am Ort s_2 (statt der Koordinatenbezeichnungen x, y oder z im dreidimensionalen Raum genügt hier das Symbol s für die Streckenlänge). Der zurückgelegte Weg ist offensichtlich die Differenz $\Delta s = s_2 - s_1$ der Abstände zum Ursprung vor und nach der Fahrt. (In diesem Fall ist der Weg des Autos identisch mit seiner *Verschiebung*; Abschnitt 1.6).

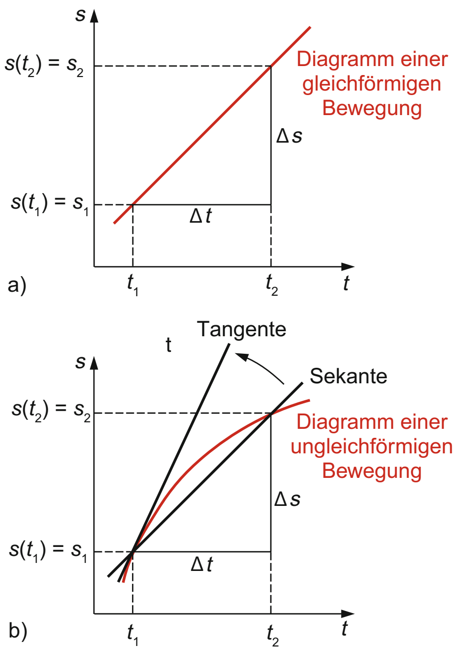


Bild 2.2
Weg-Zeit-Diagramme einer gleichförmigen (oben) und einer ungleichförmigen Bewegung (unten).

Das Verhältnis von Δs zur verstrichenen Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ wird in einem **Weg-Zeit-Diagramm** dargestellt, das mathematisch nichts anderes ist als der *Graph* der Funktion $s(t)$. Eine **gleichförmige Bewegung** wie in Bild 2.2 (oben) wird durch eine *Gerade* beschrieben; sie stellt einen *linearen* Zusammenhang zwischen s und t dar: In jeweils gleichen Zeitintervallen Δt werden exakt gleiche Strecken Δs zurückgelegt; insofern sind die eingezeichneten Intervalle *repräsentativ* für das Verhältnis $\Delta s/\Delta t$. Dieser Quotient gibt mathematisch die *Steigung* der Geraden an (als *Steigungsdreieck*) und physikalisch die *Geschwindigkeit*:

$$v_{\text{gleichförmig}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.1}$$

Demgegenüber beschreibt die gebogene Kurve in Bild 2.2 (unten) eine **ungleichförmige Bewegung**. Man kann ihren Verlauf im Weg-Zeit-Diagramm durch eine

Gerade (wie oben) annähern, die sie dann zweimal als *Sekante* schneidet. So erhält man die *Durchschnittsgeschwindigkeit v.* Will man jedoch die *Momentangeschwindigkeit* – z. B. genau zum Zeitpunkt t_1 – wissen, so muss die Sekante zur *Tangente* an die Kurve werden. Deren Steigung gibt nun (gewissermaßen mittels eines infinitesimal kleinen Steigungsdreiecks, dessen Seitenverhältnis vom Differenzenquotienten zum *Differenzialquotienten* wird) die universelle Definition der **Momentangeschwindigkeit**:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \tag{2.2}$$

Differenziale

In der Mathematik bezeichnen Differenziale wie „ds" in Formel 2.2 symbolisch einen Grenzwert; sie sind als „unendlich kleine Differenzen" zu verstehen und treten vor allem als *Differenzialquotienten* auf. In der Physik wird mit solchen Größen durchaus wie mit endlichen gerechnet; sie werden interpretiert als „so kleine Intervalle, dass die Regeln der Differenzialrechnung gelten". Andererseits lassen sich dann sogar die Regeln der Bruchrechnung weiter anwenden.

Wieder mathematisch gesprochen handelt es sich um eine *Differenziation*. Der Grenzwert („limes") stellt die *Ableitung* der Funktion $s(t)$ nach der Zeit t dar, wobei dies wegen des häufigen Auftretens aus Bequemlichkeit – aber immerhin nach einem Vorschlag des großen Physikers Isaac Newton (1643–1727) – auch durch einen Punkt über der Größe gekennzeichnet werden kann.

Beispiel 2.1: Durchschnittsgeschwindigkeit

Aufgabe: Auf Ihrer Autobahnfahrt über 40 km dürfen Sie 100 km/h fahren. Die Hälfte der Strecke besteht aber aus Baustellen mit Begrenzung auf 60 km/h. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit?

Lösung: Achtung, nicht vorschnell „80 km/h" raten! Die korrekte Berechnung erfolgt mit der Definition der gleichförmigen Geschwindigkeit (Formel 2.1):

$$\overline{v} = \frac{s_{\text{gesamt}}}{t_{\text{gesamt}}}$$

Die gesamte Fahrzeit ermittelt man ebenfalls mit Formel 2.1:

$$t_{\text{gesamt}} = \frac{s_{\text{Baustelle}}}{v_{\text{Baustelle}}} + \frac{s_{\text{AB}}}{v_{\text{AB}}} = \frac{20\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} + \frac{20\,\text{km}}{100\,\text{km/h}} = 0{,}533\,\text{h}$$

Die Lösung ist also:

$$\overline{v} = \frac{40\,\text{km}}{0{,}53\ \text{h}} = 75{,}0\ \text{km/h}$$

Beispiel 2.2: Momentangeschwindigkeit

Aufgabe: Bei einem Experiment wird die Zeitabhängigkeit des zurückgelegten Weges eines Teilchens durch die komplizierte Funktion

$$s(t) = 2t^3 - 11t^2 + 3t + 5$$

beschrieben. Wie hoch ist die Geschwindigkeit nach drei Sekunden?

Lösung: Die Funktion wird nach der Zeit abgeleitet; nach den Regeln der Differenzialrechnung (Anhang) erhält man:

$$\dot{s} = 3 \cdot 2t^2 - 2 \cdot 11t^1 + 1 \cdot 3t^0 + 0 = 6t^2 - 22t + 3$$

Für t = 3 s ergibt sich also:

$$\dot{s} = v = (54 - 66 + 3)\,\mathrm{m/s} = -9\ \mathrm{m/s}$$

Das Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit –9 m/s „rückwärts" (wegen des Minuszeichens entgegen der s-Achse des Bezugssystems).

2.1.1.2 Beschleunigung

Zeitliche Änderungen der Geschwindigkeit werden als *Beschleunigungen* bezeichnet (auch die mit negativem Vorzeichen, die bei einer Bremsung auftreten). Für die **Momentanbeschleunigung** a gilt (analog zu $v = \dot{s}$):

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \ddot{s} \qquad (2.3)$$

Mathematisch betrachtet ist a also die zweite Ableitung des Weges und die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Physikalisch ergibt sich als SI-Einheit: $[a]$ = m/s^2.

Noch häufiger als Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit („gleichförmige Bewegungen") kommen in der Natur solche mit konstanter Beschleunigung vor („gleichmäßig beschleunigte Bewegungen"). Statt des Differenzialquotienten kann dann wieder ein Differenzenquotient für beliebige Intervalle benutzt werden.

$$a_{\text{gleichmäßig}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

Beispiel 2.3: Gleichmäßige Beschleunigung

Aufgabe: Mithilfe eines sehr guten Automatikgetriebes kann eine Limousine innerhalb von 7 Sekunden „ruckfrei" eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreichen. Wie groß ist die Beschleunigung?

Lösung: Für dieses Zahlenbeispiel muss – wie bei fast allen Berechnungen – in die entsprechenden SI-Einheiten umgerechnet werden:

$$a = \frac{100\,\mathrm{km}/\mathrm{h}}{7\mathrm{s}} = \frac{100\left(1000\,\mathrm{m}/3600\ \mathrm{s}\right)}{7\mathrm{s}} = \frac{\left(100/3.6\right)\mathrm{m}/\mathrm{s}}{7\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

In Abschnitt 2.1.1.4 zeigt sich, dass eine solche Beschleunigung noch erheblich übertroffen werden kann, wenn die *Fallbeschleunigung* wirkt: Aus guten Gründen sollte *dieser* Fall bei Automobilen allerdings vermieden werden.

2.1.1.3 Bewegungsgleichung

Im Sonderfall *gleichmäßig beschleunigter* Bewegungen (a = const.) kann sogar aus der Beschleunigung für jeden Zeitpunkt die Geschwindigkeit und der zurückgelegte Weg berechnet werden, und zwar mithilfe der Integralrechnung.

Info 2.1: Integralrechnung

Die Umkehrung der Differenziation – mit deren Hilfe oben die Zeitfunktionen $v(t)$ aus $s(t)$ und $a(t)$ aus $v(t)$ bestimmt wurden – ist die *Integration*. Sie bestimmt die *Stammfunktion* zu einer abgeleiteten Funktion, hier also $s(t)$ aus $v(t)$ bzw. $v(t)$ aus $a(t)$. So wie die grafische Darstellung der Ableitung die *Tangente* an die Kurve für einen bestimmten Zeitpunkt ist, so kann man als grafische Veranschaulichung des Integrals die *Fläche* unter einer Kurve betrachten, bei einem *bestimmten Integral* zwischen den *Integrationsgrenzen*, also in einem Zeitintervall.

Die in diesem Buch benötigten Integrale, auch das der Funktion $f(x) = x^n$, sind im Anhang zusammengestellt.

Mit der Vorstellung, dass jeweils über „unendlich viele" Geschwindigkeitsänderungen dv und Zeitintervalle dt „summiert" – also integriert – wird, ist die Berechnung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für a = const. leicht nachvollziehbar:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}v = a\mathrm{d}t \Rightarrow \int \mathrm{d}v = \int a\mathrm{d}t = a\int \mathrm{d}t$$

Für die Geschwindigkeit erhält man also nach der Integration:

$$v\left(t\right) = at + C$$

Die Integrationskonstante C für dieses *unbestimmte Integral* erweist sich (wenn man $t = 0$ setzt) als die *Anfangsgeschwindigkeit* v_0, von der aus v wegen der Beschleunigung a mit der Zeit t anwächst (oder, für $a < 0$, sich verringert):

$$v(t) = v_0 + at \tag{2.5}$$

Der Weg in Abhängigkeit von der Zeit wird analog berechnet:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}s = v\mathrm{d}t \Rightarrow \int \mathrm{d}s = \int v\mathrm{d}t$$

Mit Formel 2.5 folgt daraus:

$$\int \mathrm{d}s = \int (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0 \int \mathrm{d}t + a \int t\mathrm{d}t$$

In diesem Fall ist die Integrationskonstante der *Anfangsweg* s_0. Den Ausdruck für den *Weg* als Funktion der Zeit nennt man eine **Bewegungsgleichung (für konstante Beschleunigung)**:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.6}$$

Beispiel 2.4: Bewegungsgleichung

Aufgabe: Welchen Weg legt die Limousine aus dem Beispiel 2.3 während der Beschleunigungsphase zurück? Welche Strecke ist zwei Sekunden später hinzugekommen, wenn a auf 3 m/s² verringert wird?

Lösung: Beim Start sind sowohl die Anfangsgeschwindigkeit v_0 auch der Anfangsweg s_0 null (der Ursprung des Koordinatensystems wird in den Startpunkt gelegt). Dann ergibt das Zahlenbeispiel für Formel 2.6:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (7\,\mathrm{s})^2 = 98\,\mathrm{m}$$

Die nächste Berechnung beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit 100 km/h. Weil der *zusätzlich* zurückgelegte Weg gefragt ist, wird $s_0 = 0$ gesetzt:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 + \frac{\left(\frac{100}{3{,}6}\right)\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} + 0 = 61\,\mathrm{m}$$

2.1.1.4 Der freie Fall

Das wichtigste Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der *freie Fall* – der in dem Sinne „frei“ ist, dass die Luftreibung vernachlässigt werden kann. Dann gilt für alle Körper unabhängig von ihrer Masse und Form die *Fallbeschleunigung* g. Auf der Erde (daher heißt sie auch *Erdbeschleunigung*) beträgt ihr Wert im Mittel:

$$g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Erdbeschleunigung

Richtung *und* Größe der Erdbeschleunigung bleiben (an demselben Ort) immer gleich. Das gilt auch für einen nach oben geworfenen Körper, der langsamer wird und im Umkehrpunkt sogar ruht. (Sonst würde er dort stehenbleiben!)

Die Ursache des Falls ist eine *Kraft*, die einerseits von der Masse des Fallkörpers, andererseits aber von der Masse des anziehenden Körpers abhängt (Abschnitt 2.7.2). Daher ist die Fallbeschleunigung auf anderen Planeten, Monden etc. unterschiedlich. Auf der Erde beeinflussen lokale Dichteunterschiede den Zahlenwert von g.

Die häufig zitierten *Fallgesetze* ergeben sich unmittelbar aus der Bewegungsgleichung (Formel 2.6) mit $a = g$, $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ (durch geeignete Wahl des Koordinatenursprungs).

Beispiel 2.5: Freier Fall

Aufgabe: Wie lange dauert der Sprung von einem 10 m hohen Sprungbrett im Schwimmbad, und mit welcher Geschwindigkeit taucht der Springer ins Wasser ein?

Lösung: Die *Fallzeit* beträgt nach Formel 2.6 mit $s = h$:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \qquad t = \sqrt{2h/g}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m} / 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \qquad = 1{,}43\,\mathrm{s}$$

Die *Geschwindigkeit* beim Eintauchen ist dann:

$$v = gt = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}43\,\mathrm{s} = 14\,\mathrm{m/s}$$

In der aus dem Alltag vertrauten Einheit km/h beträgt der Zahlenwert:

$$v = (3600/1000) \cdot 14\,\mathrm{km/h} \approx 50\,\mathrm{km/h}$$