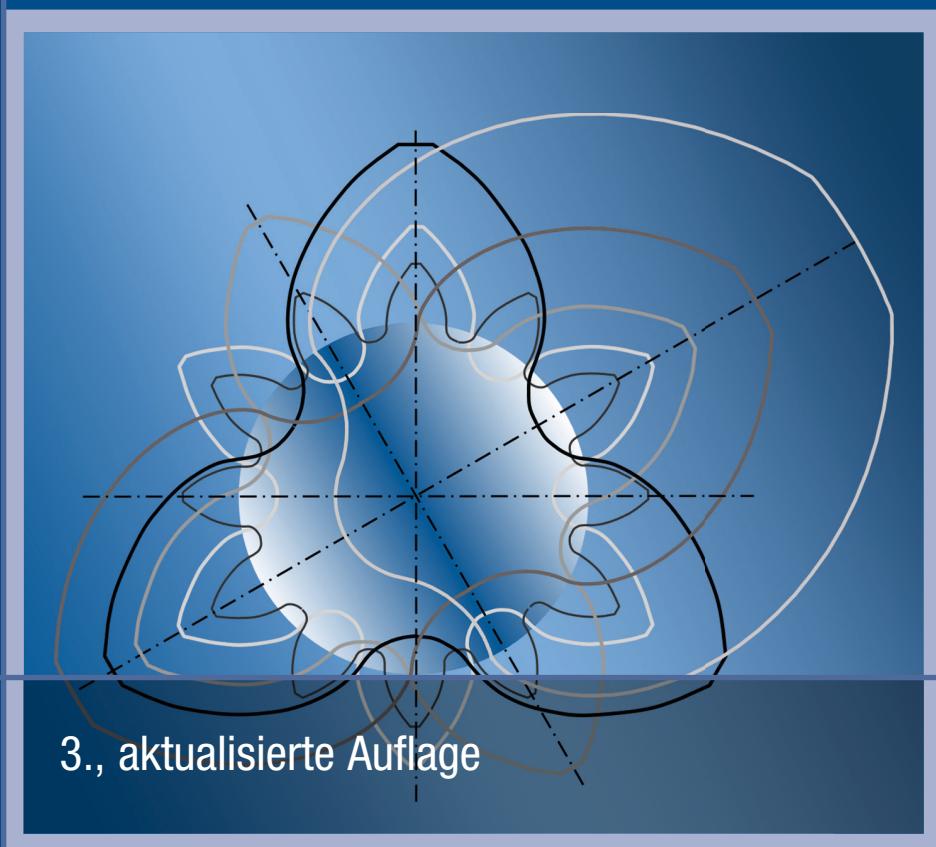


Heinz Linke
Jörg Börner

Stirnradverzahnung

Berechnung – Werkstoffe – Fertigung



3., aktualisierte Auflage

HANSER

Linke/Börner (Hrsg.)
Stirnradverzahnung



bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Heinz Linke (Hrsg.)
Jörg Börner (Hrsg.)

Stirnradverzahnung

Berechnung – Werkstoffe – Fertigung

3., aktualisierte Auflage

Mit Beiträgen von
Jörg Börner, Heinz Linke, Eckhard Röhle, Iris Römhild,
Michael Senf, Wolfgang Sonntag, Alfred Spengler,
Falk Spirling, Gerhard Tripp, Steffen Wengler

HANSER

Die Herausgeber:

Prof. em. Dr.-Ing. habil. Heinz Linke, Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion, TU Dresden

Dr.-Ing. Jörg Börner, ZF Friedrichshafen AG

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht, auch nicht für die Verletzung von Patentrechten, die daraus resultieren können.

Ebenso wenig übernehmen Autor und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2023 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Julia Stepp

Herstellung: Arthur Lenner, *Der Buchmacher*, München

Titelmotiv: © Jörg Börner

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Coverrealisation: Max Kostopoulos

Satz: Jörg Börner

Druck und Bindung: Druckerei Hubert & Co. GmbH und Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-47036-1

E-Book-ISBN: 978-3-446-47442-0

In Erinnerung an
Richard Stribeck, Karl Kutzbach,
Enno Heidebroek und Stefan Fronius

Bestimmt für
Studenten, junge Ingenieure
und Naturwissenschaftler
als Grundlage für
ein erfolgreiches Studium,
eine innovative Produktentwicklung
und weiterführende Forschungsarbeiten

Vorwort

zur dritten Auflage

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage sind mehr als 10 Jahre vergangen. Die Bedeutung von Stirnradgetrieben für technisch anspruchsvolle Produkte und der Bedarf an ihnen in der täglichen Anwendung haben sich keinesfalls verringert, auch wenn sie oft zum „alten Eisen“ gezählt werden. Einiges hat sich in den Anwendungsbereichen geändert, z. B. durch den Elektroantrieb in der Fahrzeugtechnik, und durch die globale Orientierung an ISO-Normen. Wesentliches aber ist geblieben. Hierzu zählt nicht zuletzt die Faszination des Ingenieurs am Zusammenwirken verschiedenster Fachgebiete, wie Technische Mechanik, Fertigungstechnik, Tribotechnik, Konstruktion, Akustik und Informatik.

Nach jahrzehntelanger, vertrauensvoller Zusammenarbeit erschien eine gemeinsame Herausgabe des Buches durch Heinz Linke und Jörg Börner geboten. Die vorliegende 3. Auflage stellt den gegenwärtigen Stand des Fachgebiets für die praktische Getriebeentwicklung dar. Es wurden alle dafür erforderlichen inhaltlichen Präzisierungen, Überarbeitungen und Ergänzungen vorgenommen. Darüber hinaus erfolgten sprachliche Korrekturen sowie eine Vereinheitlichung des Layouts. Da dieser Tage eine immer stärkere Tendenz zum Home-Office besteht, möge das Buch auch außerhalb der Hochschule und der Betriebsstätte ein nützliches Hilfsmittel sein.

Der Malstrom der Zeit wird eine tiefergehende Aktualisierung des Buches in folgenden Auflagen erforderlich machen. Neben der stärkeren Berücksichtigung der Fortschritte in der Rechentechnik sowie neuer Methoden wird eine kontinuierliche Aufbereitung erfolgen müssen, die der Vorstellungswelt und dem kreativen Denken des Ingenieurs gerecht wird. Eine künstliche Intelligenz kann dies zwar zunehmend unterstützen, aber nicht vollständig ersetzen.

Dresden, August 2022

Heinz Linke

Friedrichshafen, August 2022

Jörg Börner

Über die Herausgeber

Heinz Linke wurde 1935 in Chemnitz geboren. Nach der Grundschule erlernte er den Beruf Vorrichtungsbauer und arbeitete anschließend im Motorradwerk Zschopau als Werkzeugmacher. Von 1952 bis 1955 studierte er an der Fachschule für Maschinenbau Schmalkalden Werkzeugmaschinenbau und nahm anschließend eine Tätigkeit als Berechnungsingenieur im VEB Entwicklungsbau Pirna auf. Dort war er vor allem in der Festigkeitsberechnung von Baugruppen der Gasturbinen und Strömungstriebwerke aktiv. Während dieser Arbeit studierte er an der TU Dresden im Fernstudium Strömungstechnik und widmete sich zunehmend Entwicklungs- und Forschungsaufgaben. 1968 promovierte er auf dem Gebiet Antriebsdynamik. 1971 begann Dr. Linke seine Tätigkeit an der TU Dresden am Lehrstuhl Maschinenelemente. 1973 wurde er zum Dozenten für Konstruktionstechnik und nach seiner Habilitation 1979 zum ordentlichen Professor für Konstruktionstechnik (Konstruktionslehre/Maschinenelemente) berufen.



(Konstruktionslehre/Maschinenelemente) berufen. Neben Lehre und Forschung gehörte auch die Entwicklung einer einheitlichen Norm für die Tragfähigkeitsberechnung von Verzahnungen im RGW (damals um die Sowjetunion zusammengesessenes Wirtschaftsgebiet) zu seinen Aufgaben. In der Folgezeit wurden unter seiner Verantwortung die Grundlagen von DIN 743 zur Belastbarkeit von Wellen und Achsen und die Richtlinie VDI 2737 zur Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Hohlradern/Innenverzahnungen bearbeitet.

Prof. Linke ist Oversea-Member der US-amerikanischen Normenvereinigung AGMA.

Auf dem Gebiet der Berechnung von Maschinenelementen, insbesondere Zahnradgetrieben, besitzt Prof. Linke über 60 Jahre Erfahrung. Er veröffentlichte seine Forschungsergebnisse und Erfahrungen in zahlreichen Beiträgen in Zeitschriften und auf nationalen und internationalen Tagungen.



Jörg Börner wurde 1960 in Elsterwerda geboren. Von 1980 bis 1985 studierte er Grundlagen des Maschinenbaus an der Technischen Universität Dresden in der Vertiefungsrichtung Konstruktionslehre. Von 1985 bis 1989 war er als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente der TU Dresden tätig und promovierte 1989 zum Thema „Modellreduktion für Antriebssysteme mit Zahnradgetrieben zur vereinfachten Berechnung der inneren dynamischen Zahnkräfte“. Bis 1997 hat er am Institut für Maschinenelemente der TU Dresden vor allem Berechnungsprogramme für die Last- und Spannungsverteilung an Verzahnungen und deren Optimierung entwickelt. Dazu gehörte auch ein verbesserter Berechnungsansatz für die Spannungskonzentration im Zahnfuß. Nach einem zwischenzeitlichen Studienaufenthalt am GearLab von Prof. Houser an der Ohio State University in Columbus/Ohio arbeitete Dr. Börner von 1997 bis 2000 als Berechnungsingenieur in der Getriebeentwicklung von Caterpillar Inc. in Peoria/Illinois, USA.

Seit 2000 ist er als Experte für den Entwurf und die Nachrechnung von Verzahnungen in der Verzahnungsentwicklung der ZF Friedrichshafen AG in Friedrichshafen tätig. Schwerpunkt seiner Arbeit ist auch hier die Weiterentwicklung von Berechnungssoftware für Zahnräder auf der Basis theoretischer Analysen sowie von Erfahrungen aus dem Test und Einsatz von ZF-Produkten. Seine Erfahrungen und neue Berechnungsansätze wurden in mehreren Beiträgen auf Tagungen präsentiert sowie in Fachzeitschriften veröffentlicht.

Autorenverzeichnis

Dr.-Ing. Jörg Börner ZF Friedrichshafen AG	Abschnitt 5.3, 6.2, 6.3, Anlagen: 5, 9
Prof. em. Dr.-Ing. habil. Heinz Linke TU Dresden, Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion	Abschnitt 1, 2, 3.1, 3.2, 4, 5.1, 5.2, 6.1, 6.5.1, 6.5.2, 6.5.3, 6.5.6, 6.5.7, 7.2, 9.1, Anlagen
Dr.-Ing. Eckhard Röhle ehemals TU Dresden, Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion	Abschnitt 3.3
Prof. Dr.-Ing. Iris Römhild HTW Dresden, Professur für Konstruktion und Antriebstechnik	Abschnitt 7.1, 7.3
Dr.-Ing. Michael Senf ehemals TU Dresden, Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion	Abschnitt 6.4, Anlage 3.2
Dipl.-Phys. Dipl.-Ing. (FH) Wolfgang Sonntag ehemals TU Dresden, Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion	Abschnitt 6.5.4, 6.5.5, 6.6, Anlagen: 13, 14
Dr.-Ing. Alfred Spengler (†) ehemals Bergakademie Freiberg	Abschnitt 7.4, 9.3, 10.3, Anlagen: 11, 12
Dr.-Ing. Falk Spirling Ingenieurbüro Antriebstechnik Dr.-Ing. Spirling, Dresden	Abschnitt 6.7
Dipl.-Ing. Gerhard Tripp ehemals A. Friedr. Flender AG, Bocholt	Abschnitt 10.1, 10.2, Anlage 15 (in der ersten Auflage von Prof. W. Thyssen verfasst)
Dr.-Ing. Steffen Wengler Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Fertigungstechnik und Qualitätssicherung	Abschnitt 8, 9.1, Anlage 3.2

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
Über die Herausgeber	IX
Autorenverzeichnis	XI
1 Überblick, allgemeine Grundlagen	1
1.1 Entwicklung der Verzahnung.....	1
1.1.1 Entwicklung der Anwendung der Zahnräder/Zahnradgetriebe.....	1
1.1.2 Entwicklung der Verzahnungsgeometrie	7
1.1.3 Entwicklung der Tragfähigkeitsberechnung.....	12
1.1.3.1 Zahnfußbeanspruchung.....	12
1.1.3.2 Zahnflankenbeanspruchung – Grübchen.....	16
1.1.3.3 Fressbeanspruchung	18
1.2 Aufgaben und Einteilung der Getriebe und Verzahnungen.....	19
1.3 Verzahnungsgesetz für Stirnradverzahnungen	25
1.4 Grundbeziehungen.....	31
1.4.1 Übersetzung	31
1.4.2 Wirkungsgrad.....	34
1.4.3 Drehmomente.....	35
1.5 Symbole und Symbolerklärungen	36
2 Geometrie der Verzahnung	37
2.1 Geometrie der Geradverzahnung	37
2.1.1 Geometrie der Verzahnung eines Stirnrades	37
2.1.1.1 Evolvente.....	37
2.1.1.2 Bezugsprofil	47
2.1.1.3 Grundgrößen der Verzahnung eines Stirnrades	50
2.1.2 Geometrie der Verzahnungspaarung – Geradverzahnung.....	58
2.2 Geometrie der Schrägverzahnung	72
2.2.1 Erzeugung und grundlegende Eigenschaften.....	72
2.2.2 Grundgrößen der Verzahnung eines Stirnrades - Schrägverzahnung	81
2.2.3 Geometrie der Verzahnungspaarung – Schrägverzahnung	85
2.3 Ergänzungen zur Geometrie	89
2.3.1 Allgemeines zur Zahnfußgeometrie	89
2.3.2 Zahnfußgeometrie der Außenverzahnung bei Herstellung mit Wälzfräser oder Hobelkamm bei beliebigem Werkzeugprofilwinkel.....	89
2.3.2.1 Zahnfußdicke der Außenverzahnung.....	89
2.3.2.2 Krümmungsradien der Zahnfußübergangskurve der Außenverzahnung bei Herstellung mit Wälzfräser oder Hobelkamm.....	91
2.3.3 Zahnfußgeometrie bei Herstellung mit Schneidrad – Außen- und Innenverzahnung	95
2.3.3.1 Zahnfußdicke	95
2.3.3.2 Krümmungsradien der Zahnfußübergangskurve.....	97
2.3.4 Vergleichende Untersuchungen zur Zahnfußgeometrie.....	97
2.4 Symbole und Symbolerklärungen	99

3 Eingriffsstörungen	101
3.1 Überblick	101
3.2 Eingriffsstörungen bei Außenverzahnungen.....	101
3.2.1 Eingriffsstörung durch zu kleine Überdeckung.....	101
3.2.2 Eingriffsstörungen in nicht-evolventischen Bereichen.....	104
3.3 Eingriffsstörungen bei Innenverzahnungen	106
3.3.1 Vorbetrachtung	106
3.3.2 Eingriffsstörungen im theoretischen Eingriffsgebiet – Zahnfußeingriffsstörungen	108
3.3.2.1 Zahnfußeingriffsstörung am Ritzel	108
3.3.2.2 Zahnfußeingriffsstörung am Schneidrad des Erzeugungsgetriebes	111
3.3.2.3 Zahnfußeingriffsstörung am Hohlrad.....	111
3.3.3 Eingriffsstörungen außerhalb des regulären Zahneingriffsgebietes.....	114
3.3.3.1 Zahnkopfeingriffsstörung	114
3.3.3.2 Vorschubeingriffsstörung und radiale Einbaustörung.....	116
3.3.3.3 Passive Eingriffsstörung am Erzeugungsinnenradpaar	120
3.3.4 Hinweise zur Auslegung von Innenradpaaren und zur Werkzeugauswahl.....	121
3.3.4.1 Allgemeine Gesichtspunkte für den Entwurf von Innenradpaaren.....	121
3.3.4.2 Profilverschiebung zur Vermeidung von Eingriffsstörungen an Innenradpaaren	123
3.3.4.3 Wahl des Schneidrades zur Erzeugung der Innenverzahnung	125
3.4 Symbole und Symbolerklärungen.....	128
4 Evolventische Sonderverzahnungen	129
4.1 Arten und Möglichkeiten.....	129
4.2 Auslegung.....	133
4.3 Symbole und Symbolerklärungen.....	139
5 Tragfähigkeit – Einführung, Ausgangswerte	140
5.1 Schadensfälle.....	140
5.2 Möglichkeiten des Tragfähigkeitsnachweises.....	149
5.3 Belastungshäufigkeitsfunktion	151
5.3.1 Belastungsverlauf am Zahn.....	151
5.3.2 Erfassung des Belastungsverlaufes im Lastkollektiv	152
5.3.3 Experimentelle Ermittlung von Lastkollektiven.....	153
5.3.4 Erfassung von Lastkollektiven in der Tragfähigkeitsberechnung.....	155
5.3.5 Typische Lastkollektive, Besonderheiten.....	159
5.4 Symbole und Symbolerklärungen.....	161
6 Tragfähigkeit / Laufverhalten Außenverzahnung und Innenverzahnung .	162
6.1 Geschwindigkeiten.....	162
6.1.1 Gleitgeschwindigkeit.....	162
6.1.2 Spezifisches Gleiten.....	165
6.1.3 Gleitfaktor.....	166
6.1.4 Summengeschwindigkeit.....	167
6.2 Zahnsteifigkeit.....	167
6.2.1 Grundlegendes.....	167
6.2.2 Zahnsteifigkeitsanteile.....	168
6.2.3 Zahnsteifigkeitsberechnung	169
6.2.4 Näherungsweise Zahnsteifigkeitsberechnung nach ISO 6336-1 (DIN 3990-1).....	170
6.2.5 Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.2.....	171
6.3 Kräfte am Zahn.....	172
6.3.1 Grundsätzliches	172
6.3.2 Kräfte am Zahn aus Nutzleistung	172

6.3.2.1	Kraftzerlegung am Zahn	172
6.3.2.2	Definition der Nutzleistung für die Zahnbelastung	177
6.3.3	Äußere dynamische Zusatzkräfte	177
6.3.4	Innere dynamische Zusatzkräfte.....	181
6.3.4.1	Ursachen und Verlauf.....	181
6.3.4.2	Mechanisches Ersatzmodell	184
6.3.4.3	Mathematisches Berechnungsmodell	188
6.3.4.4	Parameter des Schwingungssystems	189
6.3.4.5	Schwingungsberechnung.....	193
6.3.4.6	Besonderheiten des Schwingungsverhaltens	195
6.3.4.7	Experimentelle Ermittlung	196
6.3.4.8	Ermittlung des Dynamikfaktors K_v entsprechend ISO 6336-1, DIN 3990-1	197
6.3.5	Resultierende Belastung - praktisches Vorgehen, Vernachlässigungen	201
6.3.6	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.3	202
6.4	Lastverteilung bei Verzahnungen.....	203
6.4.1	Grundproblem	203
6.4.2	Allgemeiner Berechnungsansatz.....	204
6.4.3	Verfahren der Einflusszahlen.....	205
6.4.3.1	Grundbeziehungen.....	205
6.4.3.2	Ermittlung der Verformungseinflusszahlen	206
6.4.3.3	Berechnung der Lastverteilung und Analyse von Besonderheiten.....	215
6.4.4	Erfassung der Lastverteilung für die Zahnflanken- und Zahnfußtragfähigkeits- berechnung durch Lastverteilungsfaktoren	219
6.4.4.1	Stirnfaktor $K_{H\alpha}$	220
6.4.4.2	Breitenfaktor $K_{H\beta}$	221
6.4.4.3	Vereinfachte Lastverteilungsfaktoren.....	222
6.4.4.4	Ermittlung der Kontaktlinienabweichung	226
6.4.4.5	Ermittlung der wirksamen Kontaktlinienabweichung für Berechnungen.....	229
6.4.5	Maßnahmen zur Verbesserung des Breitenlastverhaltens	230
6.4.6	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.4	236
6.5	Tragfähigkeitsnachweis	237
6.5.1	Zahnflankentragfähigkeit - Grübchen und Schäden bei Maximalbeanspruchung	237
6.5.1.1	Grundlagen	237
6.5.1.2	Zahnflankenpressung.....	241
6.5.1.3	Grübchenfestigkeit und Einflüsse	246
6.5.1.4	Sicherheit gegen Grübchenbildung; zulässige Beanspruchung	248
6.5.1.5	Sicherheit gegen bleibende Verformung, Anriss oder Sprödbruch der Randschicht bei maximaler Belastung.....	249
6.5.2	Zahnfußtragfähigkeit	250
6.5.2.1	Grundlagen - Kerbwirkung.....	251
6.5.2.2	Zahnfußspannung bei Vollrädern.....	263
6.5.2.3	Zahnfußfestigkeit und Einflüsse	270
6.5.2.4	Sicherheit gegen Ermüdungsbruch.....	275
6.5.2.5	Sicherheit gegen bleibende Verformung Anriss oder Sprödbruch.....	276
6.5.2.6	Zahnfußtragfähigkeit bei elastisch gestaltetem Zahnkranz	278
6.5.3	Praktisches Vorgehen beim Grundnachweis der Tragfähigkeit.....	294
6.5.3.1	Vorgehen beim Nachweis der Flankentragfähigkeit - Grübchen und Schäden bei Maximalbelastung (Methodischer Ablauf).....	294
6.5.3.2	Zahnfußtragfähigkeit - Ermüdungsbruch und Schäden bei Maximalbelastung (Methodischer Ablauf).....	297
6.5.4	Schmierfilmdicke	301
6.5.4.1	Berechnung der Schmierfilmdicke.....	301

	6.5.4.2 Zahnflankenschäden und Schmierstoffeinfluss.....	304
6.5.5	Fresstragfähigkeit.....	305
	6.5.5.1 Einführung	305
	6.5.5.2 Schadensbeschreibung und Einflussgrößen zur Fresstragfähigkeit.....	305
	6.5.5.3 Ansätze zur Berechnung der Fresstragfähigkeit.....	306
	6.5.5.4 Fresstragfähigkeit nach der Blitztemperatur	307
	6.5.5.5 Fresstragfähigkeit nach der Integraltemperatur.....	312
	6.5.5.6 Praktische Berechnung der Fresstragfähigkeit nach dem Integraltemperaturverfahren.....	313
	6.5.5.7 Testverfahren zur Fresstragfähigkeit.....	317
6.5.6	Graufleckentragfähigkeit	319
6.5.7	Verschleißtragfähigkeit	323
6.5.8	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.5.....	326
6.6	Leistungsverluste/Wirkungsgrad, Getriebeerwärmung, Schmierung	330
	6.6.1 Leistungsverluste	330
	6.6.1.1 Gesamtverluste - Übersicht.....	330
	6.6.1.2 Verzahnungsverluste.....	330
	6.6.1.3 Lagerverluste.....	336
	6.6.2 Getriebewirkungsgrad	341
6.6.3	Wärmebilanz - Wärmetragfähigkeit.....	342
	6.6.3.1 Vorbetrachtungen	342
	6.6.3.2 Wärmeabgabe durch das Gehäuse	344
	6.6.3.3 Wärmeabgabe durch den Kühlkreislauf	345
	6.6.3.4 Ergänzungen zur Wärmebilanz	345
6.6.4	Schmierung und Kühlung	356
	6.6.4.1 Schmierstoffauswahl.....	356
	6.6.4.2 Schmier- und Kühlsysteme.....	360
6.6.5	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.6.....	365
6.7	Geräuschverhalten	367
	6.7.1 Grundlagen.....	367
	6.7.1.1 Einführung und wichtige akustische Begriffe	367
	6.7.1.2 Rechenoperationen mit Pegelwerten.....	372
6.7.2	Mechanische Geräuschenstehung	373
	6.7.2.1 Grundgleichung, Schallausbreitung.....	373
	6.7.2.2 Körperschallanregung	375
	6.7.2.3 Erregerfrequenzen.....	378
	6.7.2.4 Übertragungs- und Abstrahlverhalten von Getriebegehäusen.....	379
	6.7.2.5 Bestimmung der Gesamtschallleistung	384
6.7.3	Messtechnische Ermittlung der Schallleistung.....	384
	6.7.3.1 Luftschall-Messverfahren	384
	6.7.3.2 Körperschall-Messverfahren.....	386
	6.7.3.3 Normen.....	386
6.7.4	Schallleistungspegel von Zahnradgetrieben.....	388
	6.7.4.1 Erwartungswerte nach VDI 2159 [6.7/121].....	388
	6.7.4.2 Vergleiche mit weiteren Literaturquellen	389
	6.7.4.3 Einfluss geräuschrelevanter Parameter.....	390
	6.7.4.4 Grenzwerte der Schallemission.....	391
6.7.5	Beispiele von Schallleistungspegeln diverser Maschinen	392
6.7.6	Konstruktive Maßnahmen zur Geräuschminderung	393
	6.7.6.1 Vorschriften	393
	6.7.6.2 Grundprinzipien zur Geräuschminderung	394
	6.7.6.3 Beeinflussung der Anregung des Zahneingriffs bei Stirnradverzahnungen ..	395

6.7.6.4	Beeinflussung der Körperschallanregung an der Lagerstelle	401
6.7.6.5	Gestaltung des Getriebegehäuses	404
6.7.6.6	Schallschutzkapseln	410
6.7.6.7	Antischall	412
6.7.7	Körperschall und Diagnose	412
6.7.8	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 6.7	414
7	Auslegung von Verzahnungen und Getrieben	416
7.1	Stufenzahl und Aufteilung der Gesamtübersetzung	416
7.1.1	Vorbetrachtungen	416
7.1.2	Auslegung für minimale Masse	416
7.2	Überschlägige Bestimmung der Abmessungen	420
7.2.1	Überschlagskriterium Zahnflankentragfähigkeit (Grübchen)	420
7.2.2	Überschlagskriterium Zahnfußtragfähigkeit	422
7.3	Wahl und Aufteilung der Profilverschiebung	423
7.3.1	Kriterien und Tendenzen	423
7.3.2	Empfehlungen	431
7.4	Werkstoffauswahl - Festigkeitswerte	435
7.4.1	Grundlagen der Werkstoffwahl und Grundwerte der Werkstofffestigkeit	435
7.4.1.1	Allgemeine Grundlagen	437
7.4.1.2	Stahlauswahl nach der Härbarkeit	440
7.4.2	Werkstoffe für Zahnräder ohne Randschichtverfestigung - Grundlagen	444
7.4.2.1	Zahnräder aus unlegierten Stählen sowie Stahlguss und unlegierten Gusseisensorten im Gusszustand	444
7.4.2.2	Zahnräder aus bainitischem Gusseisen	450
7.4.2.3	Zahnräder aus AFP-Stählen	451
7.4.2.4	Zahnräder aus vergüteten Stählen und aus vergüteten Eisengusswerkstoffen	452
7.4.3	Werkstoffe für Zahnräder mit Randschichtverfestigung - Grundlagen	454
7.4.3.1	Randschichtgehärtete Zahnräder	454
7.4.3.2	Einsatzgehärtete Zahnräder	456
7.4.3.3	Carbonitrierte Zahnräder	466
7.4.3.4	Aufgestickte Zahnräder	466
7.4.3.5	Nitrierte/Nitrocarburierte Zahnräder	467
7.4.3.6	Borierte Zahnräder	471
7.4.3.7	Beschichtete Zahnräder	472
7.4.3.8	Zahnräder aus speziellen Eisenwerkstoffen	472
7.4.4	Festigkeitswerte für Zahnräder	473
7.4.4.1	Zahnräder aus unlegierten Stählen sowie Stahlguss und unlegierten Gusseisensorten	473
7.4.4.2	Zahnräder aus bainitischem Gusseisen	473
7.4.4.3	Zahnräder aus AFP-Stählen	474
7.4.4.4	Zahnräder aus vergüteten Stählen und vergüteten Eisengusswerkstoffen	474
7.4.4.5	Randschichtgehärtete Zahnräder	477
7.4.4.6	Einsatzgehärtete Zahnräder	480
7.4.4.7	Carbonitrierte Zahnräder	487
7.4.4.8	Aufgestickte Zahnräder	487
7.4.4.9	Nitrierte/Nitrocarburierte Zahnräder	488
7.4.4.10	Gesinterte Zahnräder	495
7.4.4.11	Zahnräder aus thermoplastischen Werkstoffen	497
7.4.5	Vergleich der Dauerfestigkeitswerte	497
7.4.6	Wöhlerlinien	501
7.4.7	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 7.4	501

8	Sicherung der Qualität von Stirnradverzahnungen	503
8.1	Einführung	503
8.1.1	Normung	503
8.1.2	Toleranzsystem.....	503
8.1.3	Getriebe-Passsystem.....	506
8.2	Messtechnische Grundlagen	506
8.2.1	Grenzabweichungen, Grenzabmaße und Toleranzen.....	506
8.2.2	Istmaße und Istabweichungen	507
8.2.3	Bezogenheit von Messgrößen bzw. Messverfahren.....	507
8.2.4	Unsicherheit der Messergebnisse.....	508
8.3	Qualitätskenngrößen	509
8.3.1	Flankenabweichungen.....	509
8.3.1.1	Vorbemerkungen	509
8.3.1.2	Abweichungen des Stirnprofils	512
8.3.1.3	Abweichungen der Flankenlinie.....	514
8.3.1.4	Abweichungen der Erzeugenden.....	516
8.3.1.5	Fräseralmessung	516
8.3.1.6	Abweichungen der Flankenfläche	517
8.3.1.7	Messung modifizierter Flanken.....	518
8.3.1.8	Schränkung	520
8.3.1.9	Welligkeit	521
8.3.1.10	Toleranzfeld (K-Diagramm)	522
8.3.2	Teilungsabweichungen.....	522
8.3.2.1	Kreisteilungsabweichungen.....	522
8.3.2.2	Eingriffsteilungsabweichung.....	524
8.3.3	Rundlaufabweichung.....	525
8.4	Passkenngrößen.....	525
8.4.1	Flankenspiel	525
8.4.2	Zahndicke.....	526
8.4.3	Zahndickenprüfmaße.....	527
8.4.3.1	Vorbemerkungen	527
8.4.3.2	Zahnweite	528
8.4.3.3	Radiale Prüfmaße für die Zahndicke.....	529
8.4.3.4	Sehnen	531
8.4.3.5	Zweiflankenwälz-Achsabstand.....	531
8.4.3.6	Kopfkreisdurchmesser bei überschnittenen Zylinderrädern	532
8.5	Wälzabweichungen.....	532
8.5.1	Vorbemerkungen	532
8.5.2	Einflanken-Wälzprüfung	532
8.5.3	Zweiflankenwälzprüfung.....	534
8.5.4	Abweichungen an Radpaaren im Getriebe.....	534
8.5.4.1	Achslageabweichungen des Radpaares	534
8.5.4.2	Wälzabweichung von Werkradpaaren.....	535
8.6	Tragbild	535
8.7	Rauheitsmessung	536
8.8	Geräusch.....	537
8.9	Einsatz von Verzahnungslehren	537
8.10	Symbole und Symbolerklärungen.....	537
9	Zeichnungsangaben	539
9.1	Überblick	539
9.2	Geometrische Angaben	539

9.3	Angaben zur Wärmebehandlung und zum Beschichten	543
9.3.1	Angaben zur Wärmebehandlung.....	543
9.3.2	Angaben zum Beschichten	547
9.3.2.1	Hartstoffbeschichten.....	550
9.3.2.2	Galvanisch aufgebrauchte Schichten.....	550
9.3.2.3	Chemisch aufgebrauchte Schichten.....	550
9.4	Symbole und Symbolerklärungen	550
10	Fertigung von Stirnradverzahnungen.....	551
10.1	Allgemeiner Fertigungsprozess für Stirnräder.....	551
10.2	Allgemeine Gliederung der Verfahren der Zahnformgebung.....	553
10.2.1	Verfahren der Zahnformgebung.....	553
10.2.2	Urformende Herstellung von Stirnrädern.....	554
10.2.3	Umformende und zerteilende Zahnformgebung	555
10.2.4	Spanende Zahnformgebung durch Werkzeuge mit geometrisch bestimmter Schneide	560
10.2.4.1	Technologische Grundlagen.....	560
10.2.4.2	Wälzhobeln.....	565
10.2.4.3	Wälzstoßen.....	566
10.2.4.4	Wälzschälen.....	569
10.2.4.5	Wälzfräsen.....	570
10.2.4.6	Profilfräsen.....	574
10.2.4.7	Wälzschaben.....	575
10.2.4.8	Profilräumen	577
10.2.5	Spanende Zahnformgebung durch Werkzeuge mit geometrisch unbestimmter Schneide	578
10.2.5.1	Technologische Grundlagen.....	578
10.2.5.2	Diskontinuierliches Wälzschleifen mit tellerförmigen Schleifkörpern	582
10.2.5.3	Diskontinuierliches Wälzschleifen mit Doppelkegel-Schleifkörper	583
10.2.5.4	Kontinuierliches Wälzschleifen	585
10.2.5.5	Diskontinuierliches Profilschleifen	587
10.2.5.6	Kontinuierliches Profilschleifen	589
10.2.5.7	Wälzhonen.....	590
10.2.5.8	Wälzlappen.....	592
10.2.5.9	Gleitschleifen.....	593
10.2.6	Prüfen geschliffener Stirnräder auf Schädigung der Randzone	594
10.2.7	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 10.1 und 10.2.....	605
10.3	Wärmebehandlung.....	605
10.3.1	Fertigungsgerechte Wärmebehandlung.....	606
10.3.1.1	Normalglühen	607
10.3.1.2	Perlitisieren.....	608
10.3.1.3	Weichglühen.....	608
10.3.1.4	Spannungsarmglühen.....	609
10.3.2	Beanspruchungsgerechte Wärmebehandlung.....	609
10.3.2.1	Vergüten.....	610
10.3.2.2	Bainitisieren.....	613
10.3.2.3	Randschichthärten	614
10.3.2.4	Einsatzhärten	620
10.3.2.5	Carbonitrieren	631
10.3.2.6	Nitrieren/Nitrocarburieren.....	633
10.3.2.7	Borieren.....	639
10.3.2.8	Beschichten	639
10.3.3	Symbole und Symbolerklärungen zu Abschnitt 10.3	645

Anlagenverzeichnis	646
Literaturverzeichnis	710
Sachwortverzeichnis	742

1 Überblick, allgemeine Grundlagen

1.1 Entwicklung der Verzahnung

1.1.1 Entwicklung der Anwendung der Zahnräder/Zahnradgetriebe

Dieser einleitende Rückblick soll helfen, die heutigen Entwicklungen dieses Fachgebietes richtig einzuordnen und den dazu erforderlichen Abstand vom jetzigen „Tun und Treiben“ zu gewinnen. Die genialen Leistungen der großen Wissenschaftler, Techniker und Erfinder vergangener Jahrzehnte wecken auch auf diesem Gebiet Bewunderung und Ehrfurcht, aber auch Begeisterung für dieses reizvolle Gebiet der Technik, was für uns und künftige Generationen noch ausreichend zu lösende Probleme enthält. Ihr Herangehen, Mut und ihre Gedankentiefe sind uns Anregung und Beispiel technischer Leistungen.

Zur Geschichte des Getriebebaues und der Zahnräder gibt es Spezialliteratur, z. B. *G. Matschoss* [1/1] und *Graf. v. Seherr-Thoss* [1/2]. Hier soll und kann deshalb nur eine kurze Zusammenfassung auf der Basis dieser und anderer Werke erfolgen. Dazu zählt auch die Darstellung von *K. Kutzbach* „Grundlagen und neuere Fortschritte der Zahnradherstellung“, die einen ausgezeichneten Einblick in die damalige Fertigungstechnik gibt (1925) [1/3]. Sie bietet noch heute viel Interessantes, auch Anregungen für aktuelle Probleme, obwohl sie bereits der Geschichte zuzuordnen ist.

Die genaue Geburtsstunde des Zahnrades lässt sich nicht angeben. Zahnradähnliche Gebilde, vor über 4000 Jahren als Schmuckstücke verwendet, legen Zeugnis von früh gefertigten Exemplaren ab. In dieser Zeit sollten diese vermutlich Sonnen darstellen. Symbolhaften Wert für den Maschinenbau besitzt das Zahnrad noch heute als Firmenlogo und Emblem von Vereinigungen. Zu den ersten überlieferten Anwendungen zählt der *antike Instrumentenbau*. 1901 wurde bei einer griechischen Insel ein aus dem 1. Jahrhundert vor der Zeitrechnung stammendes Gerät gefunden [1/2].

Ab Ende des 13. Jahrhunderts kamen die Zahnräder zunächst durch den Bau von *Räderuhren* häufiger zur Anwendung. Ein derartiges Räderwerk zeigt Bild 1/1. Es ist das Uhrenwerk des Himmelsglobusses von *H. Diepel*, siehe auch [1/4].

Ein Wasserhebewerk beschrieb *Philon* 230 vor der Zeitrechnung und lieferte damit den Hinweis auf die Existenz von Zahnrädern. Aus späterer Zeit sind uns die großartigen Beschreibungen der Bergbaumaschinen von *G. Bauer*, genannt *Agricola*, dem Arzt, Bürgermeister (von Chemnitz) und Bergbaukundigen überliefert [1/5]. Bild 1/2 gibt einen Eindruck von der Verwendung derartiger Zahnräder bei der Wasserhebung (Entwässerung) im Bergbau mit Tretantrieb und Bild 1/3 zeigt die Förderung von Trinkwasser aus einem Brunnen durch Antrieb mittels Pferdekraft (Göpelantrieb).

Holz diente als Werkstoff für diese Zahnräder. Triebstockverzahnung und auswechselbare Zähne waren kennzeichnende Konstruktionsmerkmale. Bild 1/4 zeigt einen derartigen auswechselbaren Holzzahn im verschlissenen Zustand.

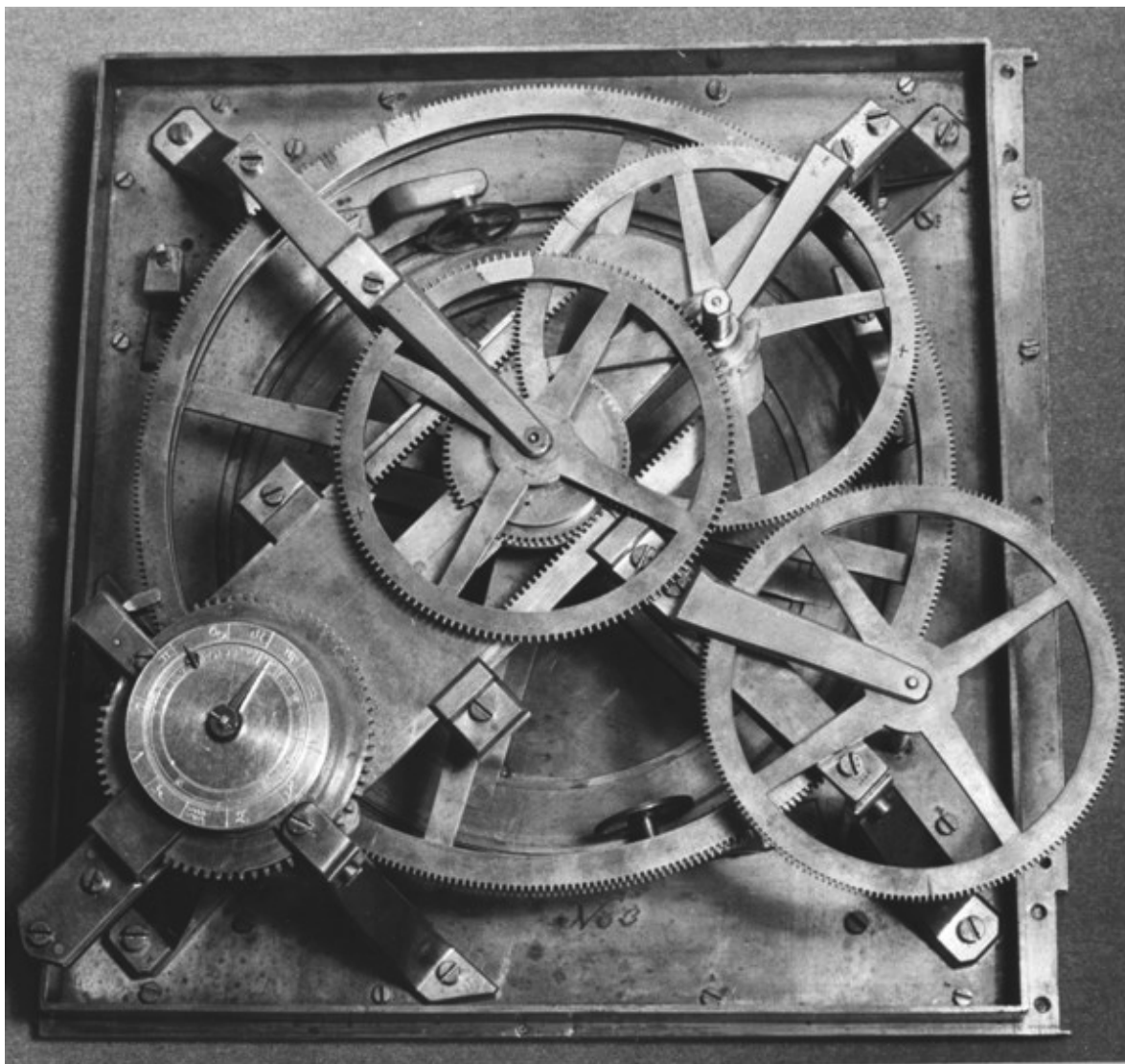


Bild 1/1 Planetenlaufwerk/Kalenderwerk des Himmelsglobusses von H. Diepel (um 1565), Mathematisch-Physikalischer Salon, Zwinger, Dresden

Beschreibungen von Wassermühlen sind von dem römischen Architekten und Baumeister *Marcus Vitruvius Pollio* aus seinem zwölfbändigen Werk um 24 v. u. Z. bekannt. Der Mühlenbau gab der weiteren Entwicklung der damaligen (Zahnrad-) Getriebetechnik starke Impulse. Die abgeleiteten Regeln waren natürlich empirisch und die Darstellung, z. T. für unser heutiges Empfinden sehr originell, wie die Textprobe (Bild 1/5) und der Ausschnitt (Bild 1/6) aus dem Buch des Professors für Mathematik an der Universität Frankfurt/Oder und Oberbaudirektors in Braunschweig, *L. Chr. Sturm* „Vollständige Mühlenbaukunst“ (1718, 1. Auflage) [1/8] zeigen. Den Wassermühlen, als den ältesten Kraftmaschinen, folgten seit dem 9. Jahrhundert die *Windmühlen*. Nachdem die Windkraft als überholt angesehen wurde, erlangten die Windkraftwerksanlagen im 20. Jahrhundert eine Wiedergeburt. Sie stellen hohe Anforderungen an den heutigen Getriebebau.

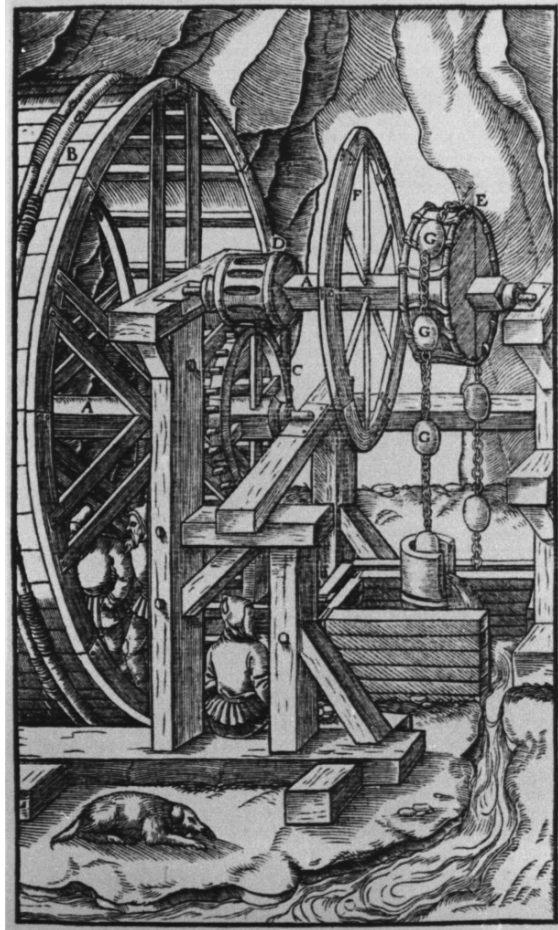


Bild 1/2 Wasserhebung mit Tretantrieb
(Heinzekunst), *G. Agricola*, 1556 [1/5], [1/6]



Bild 1/3 Wasserförderungsanlage mit Göpelantrieb;
Brunnenanlage Augustusburg, Sachsen (etwa 1575)



Bild 1/4 Verschlissener Holzzahn eines
Göpelantriebes

Anhang/ Von Auftheilung der Ramm-Räder und Getriebe.

Es hat des berühmten Simon Stevins Sohn / sehr ingenieuse Arten beschrieben / Ramm-Rad und Getriebe wohl in einander zu passen / und verdient es die Sache wohl / daß man es so genau suche als möglich ist. Aber alle seine Arten sind so beschaffen / wenn sie nicht eben mit so mathematicischer Accuratezze aufgearbeitet werden / welches doch sich schwerlich thun läßet / daß denn dieselbe ärger stocken / als ganz gemein schlecht aufgearbeitete. Hier aber auf der XIV. Tab. wird ein schon vielfältig practicirter Modus gewiesen / der vollkommen gute Dienste thut / und von jedem geübten Müller oder Zimmermann mit dem Hobel leicht kan gemacht werden. Denn auf der Schnitz-Banck gearbeitete Rämme und Stäbelsind nichts als eitel Sauerrey. So ist nun in der 1. Fig. ein Stück von einem Getriebe vorgestellt / welches in ein Stück von einem Stern-Rad / und auf der andern Seite in ein Stück von einem Ramm-Rad eingreiffet.

Bild 1/5 Textprobe aus „Vollständige Mühlenbaukunst“, L. Chr. Sturm [1/8]

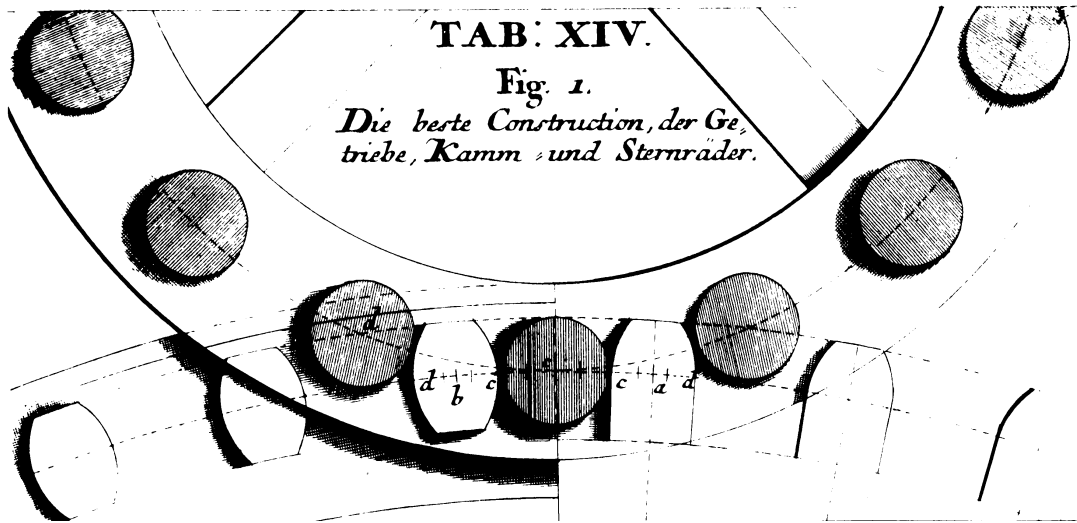


Bild 1/6 Zahnradpaarung, L. Chr. Sturm [1/8]

Bewundernswert vielseitig sind auch hier die Leistungen von *Leonardo da Vinci*. Seinen Vorschlägen folgend bauten die Holländer Windmühlen mit drehbarem Dach und wurden führend auf diesem Gebiet. Leonardo da Vinci schlug auch bereits eine Einrichtung zum Walzen von Stahl mit einem Rädervorgelege vor, die aber erst viel später gebaut werden konnte. Von ihm ist der Entwurf einer Feilenhaumaschine bekannt, die über ein Getriebe angetrieben wird. Entwürfe von Zahnradpaarungen sind erhalten, Bild 1/7 ([1/9]).

Bei *Hebezeugen* spielten Zahnräder sehr früh eine große Rolle. Bereits 250 v. u. Z. soll mit Hilfe der von Archimedes gebauten Zahnradwinde mit Schneckenantrieb ein großes Kriegsschiff während des Punischen Krieges mit wenigen Sklaven zu Wasser gebracht worden sein. Von Ramelli ist uns die Darstellung eines Flaschenzuges mit als Stirnrad- und Winkeltrieb ausgebildeten Zahnrädern überliefert [1/10].

Die weitere Entwicklung des Werkzeugmaschinenbaus, vor allem die Erfindung der *Leitspindel-drehbank* durch *H. Maudsley* (1800), führte ebenfalls zu einem steigenden Bedarf an Zahnrädern und deren erhöhten Genauigkeiten.

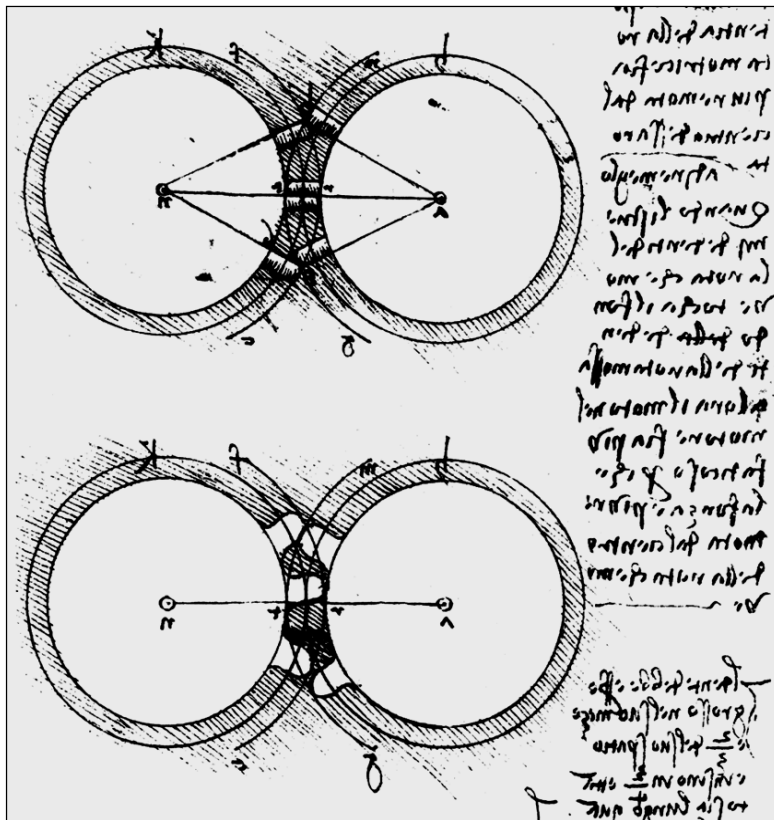


Bild 1/7 Stirnradpaar, *Leonardo da Vinci* (um 1500, Madrid Codex)

Durch die Entwicklung der Kraftmaschinen stiegen die zu übertragenden Leistungen und Drehmomente beträchtlich. *J. Watt* wählte 1782 das Umlaufgetriebe, um die hin- und hergehende Bewegung bei seiner Dampfmaschine in eine drehende zu verwandeln. Als Schiffsantrieb besaß die Dampfmaschine für die inzwischen auch erfundene Schiffsschraube eine viel zu kleine Drehzahl. Bei dem 1839 von *I. K. Brunel* gebauten Ozeandampfer „Great Western“ mit Schiffsschraube musste ein Getriebe zur Übersetzung ins Schnelle eingesetzt werden. Die umgekehrte Situation entstand, als gegen Ende des 19. Jahrhundert die Dampfturbine angewendet wurde. Ihre viel zu hohe Drehzahl musste durch ein Reduziergetriebe verringert werden.

Bekannt ist auch die Turbinenlokomotive von Krupp (1924 entwickelt von *R. Lorenz*), die bei 6800 min^{-1} eine Leistung von 2800 PS abgab. Durch ein Reduziergetriebe erfolgte eine Drehzahlherabsetzung auf $n = 300$ bis 400 min^{-1} .

Die zunehmende Nutzung von *Elektromotoren* und *Verbrennungskolbenmotoren* (Otto, Diesel) erforderte schließlich eine immer breitere Anwendung und Entwicklung von Zahnradgetrieben, da bisher die wirtschaftlichste Lösung nur in Ausnahmefällen im Direktbetrieb besteht.

Während 1909 ein Schiffsturbogetriebe mit einer Leistung $P = 6000 \text{ PS}$, Drehzahl $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ und einer Übersetzung $i = 5$ eine absolute Spitzenleistung darstellte (gebaut von Pittsburger Westinghouse Machine Co.) werden heute als Höchstwerte Leistungen in der Größenordnung von $P = 100000 \text{ kW}$ und Drehzahlen von $n = 150000 \text{ min}^{-1}$ erreicht (Tab. 1/1).

Erstaunlich bleiben trotzdem auch aus jetziger Sicht viele Leistungen, z. B. das einstufige Stirnradgetriebe von *E. Sykes* (1921) mit $i = 63$ ($z_1 = 1, z_2 = 63$), das bei einer Drehzahl von $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$ eine Leistung von $P = 10 \text{ PS}$ übertrug [1/2].

Tabelle 1/1 Erreichte Grenzwerte ausgeführter Getriebe

Getriebe	Leistung P in kW		Max. Drehzahl n in min^{-1}	Wälzgeschwindigkeit v in m/s		Übersetzung i		Wirkungsgrad (η) in %		Volumen/Leistung dm^3/kW	Gewicht/Leistung kg/kW
	normal	extrem		normal	extrem	normal	extrem	von	bis		
Zahnrad- getriebe	2000	150000	150000	80	200	1...800	1000	97	99,5	0,5 ... 0,2	2,0 ... 0,1
	5000	35000	(20000)	80	100	3 ... 13	(3...35) ¹⁾	98	99,5	0,4 ... 0,15	1,0 ... 0,2
	500	4000	50000	40	120	1 ... 5	8	97	99	0,8 ... 0,4	2,5 ... 0,2
	300	1000	20000	30	50	4 ... 8	1 ... 50	50	<90	1,0 ... 0,5	3,0 ... 0,7
	1000	3000									
Kegelrad- Stirnrad- Getriebe	90 ⁴⁾	1000 ⁴⁾	30000 ⁴⁾	25 ⁴⁾	70	5 ... 50	1 ... 300	20 ²⁾	97 ²⁾	0,6 ... 0,2	4,5 ... 2,0
Reibradgetriebe	20	200	10000	25	50	1 ... 6	10	90	98	20 ... 2	80 ... 8
Zugmittel- getriebe	200	3000	10000	10	40	1 ... 6	10	97	98	2 ... 0,5	10 ... 4
	150	3000	200000	60	120	1 ... 5	20	96	98	4 ... 0,5	6 ... 1,5
	100	4000	6000	30	40	1 ... 10	15	93	94	3 ... 0,4	5 ... 1
	100	(400)	30000	40	70	1 ... 10	12	96	98	1 ... 0,25	4 ... 1
Hydraulik- getriebe	200	1000	10000 ³⁾			... 7		85	90		1,3 ... 1,7
	1000	10000	5000			1 ... 5		85	90		0,5 ... 1,5

1) hoch übersetzend bis 10^6 ,2) η fallend mit steigender Übersetzung,

3) Abtrieb,

4) die serienmäßig hergestellten Getriebe haben im Allgemeinen kleinere Werte.

Die *Leistungselektronik* hat einige Getriebe verdrängt. Bei Werkzeugmaschinen stellt der durch den Motor verwirklichte stufenlose Antrieb mit der Verwendung des durch Frequenzumrichter gesteuerten Drehstrom-Asynchronmotors oder des geregelten Gleichstrommotors die moderne Lösung anstelle vorher verwendeter Schaltgetriebe dar. Auch die Wechselräder sind durch den „elektronischen Zwanglauf“ (elektronische Steuerung) entfallen.

Andererseits ist aber durch die Entwicklung der Technik der Bedarf an Zahnradgetrieben weiter stark gewachsen. Insbesondere dort, wo hohe Drehmomente auf ein anderes, meist niedrigeres Drehzahlniveau zu bringen sind, stellt die Kombination Motor-Getriebe die wirtschaftlichste Lösung dar. Bei Baggern, Kraftfahrzeugen, Schienenfahrzeugen, Kettenfahrzeugen, Schiffen und Turboanlagen wird somit auch künftig die Baugruppe Zahnradgetriebe eine große Bedeutung besitzen. Ihre richtige Auslegung und die Weiterentwicklung der Berechnungs- und Entwurfsmethoden fordern auch künftig die Ingenieure in ihrem Können. Die Informatik stellt dabei eine neue Qualität in den verfügbaren Hilfsmitteln dar.

1.1.2 Entwicklung der Verzahnungsgeometrie

Nach und neben der Entwicklung der Grundlagen der Bewegungslehre u. a. durch *Chr. Huygens* (1633 bis 1673; Begriff Evolute und Evolvente), *G. W. v. Leibniz* (1646 bis 1716; Entstehung der Evolvente), *J. Bernoulli* (1667 bis 1748; Momentanachse), *L. Euler* und *I. B. D'Alembert* (1707 bis 1783 bzw. 1717 bis 1783; Sätze zur Kinematik) bildete sich die Verzahnungslehre heraus. Als Begründer der *wissenschaftlichen Verzahnungslehre* gilt *Ph. de La Hire* (1640 bis 1718; 1695: „Traite de Mecanique“) [1/2]. Er entwickelte als erster eine Verzahnung mit konstanter Übersetzung nach einem Regelwerk. Für eine gegebene Zahnflanke gab er den Weg zur Ermittlung der Gegenflanke an. Er erwähnte auch bereits die Erzeugbarkeit durch Rollkurven.

Von *Ch.-E.-L. Camus* (1699 bis 1768) wurde die Rollkurve zur Erzeugung einer Paarverzahnung angewandt. Er entdeckte auch das Gleiten in Zahnflanken als Ursache der Reibung und des Verschleißes.

Die Evolvente als Zahnform wurde zuerst von *L. Euler* behandelt (ab 1752). Er bewies, dass die Wälzbewegung von Zahnflanken eine Überlagerung von Gleit- und Rollbewegungen ist, leitete Regeln zur Ausführung der Verzahnungen ab, entwickelte zeichnerische Verfahren und gab eine Gleichung zur Bestimmung der Entfernung des Krümmungsmittelpunktes der beim Abrollen erzeugten Kurve vom Wälzpunkt an. Diese Gleichung ist entsprechend ihren Erfindern *L. Euler* und *F. Savary*, der sie 1845 noch einmal ableitete, unter dem Namen *Euler-Savarysche Gleichung* in der Kinematik bekannt (siehe auch Abschnitt 2.3.2.2).

Trotz dieser beachtlichen Leistungen blieb die praktische Ausführung der Verzahnungen noch lange tief in Empirie versunken. Der vorhandene theoretische Schatz musste erst gehoben werden. Neben anderen großen Technikern, leisteten *R. Willis* (1800 bis 1875) und *K. Kutzbach* (1875 bis 1942) auf dem Gebiet Hervorragendes.

Eine Verbesserung der Verzahnungsgeometrie wurde durch die notwendige Verwendung des Werkstoffes „Metall“ bei den neu entwickelten Kraftmaschinen, wie Dampfmaschine, Dampfturbine, Verbrennungskolbenmotor, Elektromotor, unumgänglich. Mit dem festeren Werkstoff war ein Einlaufen in dem bisher im Mühlenbau gekannten Maße nicht mehr möglich.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzte sich die *Evolventenverzahnung* durch. Entscheidend waren die fertigungstechnischen Vorteile wie Unempfindlichkeit gegen Achsabstandsänderungen und Möglichkeiten der Profilverschiebung.

Diese Vorteile wurden frühzeitig u. a. von *R. Willis*¹⁾, *J. L. Weißbach*²⁾, *F. Redtenbacher*³⁾, *C. v. Bach*⁴⁾, *G. B. Grant*⁵⁾ und *J. R. Brown*⁶⁾ erkannt (siehe auch Tabelle 1/2).

J. Weißbach vertrat z. B. bereits 1851 [1/27] die Ansicht: „Die Evolventenverzahnung ist jedenfalls die vollkommenste aller Zahnradkonstruktionen“.

Die *Zahnradberechnung* erhielt entscheidende Impulse durch *M. Fölmer* (1873 bis 1941). Er legte den Grundstein für die weitverbreitete Theorie, die vor allem durch *K. Kutzbach*, Professor an der Technischen Hochschule Dresden, weiterentwickelt wurde.

In den USA war es Professor *E. Buckingham* (geb. 1887), der für die Verbreitung moderner Berechnungsmethoden sorgte. Er führte die Bezeichnung $\text{inv } \alpha$ ein ($\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha$).

Kutzbach fasste den Stand der *Zahnradherstellung* von 1925 in „Grundlagen und neuere Fortschritte der Zahnradherzeugung“ zusammen [1/3]. Die geschichtliche Entwicklung des Wälzverfahrens ist ebenfalls in einer anderen Arbeit von *Kutzbach* wiedergegeben [1/15]. Ältere Probleme der Zahnradfertigung zeigt u. a. eine Veröffentlichung von *H. Fischer* „Das Erzeugen der Zahnform für Räder“; (VDI-Zeitschrift 1898, Seite 11 bis 16) und von *T. Ritterhaus* (VDI-Zeitschrift 1898, Seite 165 bis 166).

Kutzbach schaffte Klarheit in den Bezeichnungen und entwarf eine Berechnungsvorschrift für *profilverschobene Verzahnungen* (DIN 870, 1931). Dabei wurde der Unterschied zwischen der Profilverschiebungssumme $(x_1 + x_2) \cdot m$ und der Achsabstandsänderung $(a - a_a)$ durch eine Näherungsbeziehung erfasst.

Ergänzende Angaben zur Entwicklung der Verzahnungsgeometrie enthält Tab. 1/2.

Der 1917 gegründete *Deutsche Normenausschuss* förderte in seiner folgenden Arbeit die erforderliche Vereinheitlichung, Verbreitung und Anwendung neuer Methoden entscheidend. Es sei hierzu DIN 780 (Modulreihe; 1923), DIN 867 (Zahnform für Stirnräder und Kegelräder/Bezugsprofil, $\alpha = 20^\circ$, 1927; siehe Bild 1/8), DIN 868 (Zahnräder, Begriffe, Bezeichnungen, Kurzzeichen; 1928) und DIN 870 (Profilverschiebung bei Evolventenverzahnung; 1931) genannt.

Die Entwicklung war aber keineswegs abgeschlossen. *M. Bergsträsser* bearbeitete die Evolventengeometrie neu und riet 1952 davon ab, weiterhin die Näherungsgleichungen nach DIN 870 zu benutzen. Er gab exakte Gleichungen auf der Basis der Evolventenfunktionen an. In der Folgezeit setzten sich die direkten Beziehungen zwischen Betriebseingriffswinkel und Summe der Profilverschiebungsfaktoren vollständig durch (siehe Abschnitt 2.1.2 und 2.2.3). Profilverschiebung wurde zunehmend zur günstigen Beeinflussung der Beanspruchung eingesetzt.

Um diese Untersuchung nicht dem mit „vielen“ Dingen beschäftigten Konstrukteur zu überlassen, wurden Richtlinien sowohl für die Wahl der Summe der Profilverschiebungsfaktoren als auch für deren Aufteilung geschaffen, was in DIN 3992 (Profilverschiebung bei Stirnrädern mit Außenverzahnung) Ausdruck fand. Aufgrund der z. Z. neu geschaffenen Grundlagen zur genaueren Tragfähigkeitsberechnung von Verzahnungen ist die Zeit für eine Überprüfung und eventuellen Neufassung dieser Richtlinien gekommen.

Ein bedeutendes Problem stellte auch die Festlegung der zulässigen geometrischen Abweichungen (das Toleranzsystem) dar. Nachdem bereits in einigen Firmen interne Vorschriften bestanden, begannen 1936 unter der Leitung von Professor *O. Kienzle* (an der TH Berlin) systematische Untersuchungen. Einbezogen in die Problematik waren auch Professor *G. Berndt* (TH Dresden) und *Dr. Bürger* (Physikalische Technische Reichsanstalt Berlin-Charlottenburg).

¹⁾ Willis; 1800 bis 1875; Prof. in Cambridge

²⁾ Weißbach; 1806 bis 1871; Prof. für Mathematik und Mechanik an der Bergakademie in Freiberg

³⁾ Redtenbacher; 1809 bis 1863; Prof. in Karlsruhe

⁴⁾ v. Bach; 1847 bis 1931; Prof. in Stuttgart

⁵⁾ Grant; 1849 bis 1917; USA, Begründer der amerik. Zahnradmaschinenindustrie

⁶⁾ Brown; 1810 bis 1876; USA, Werkzeughersteller

Tabelle 1/2 Entwicklungen der Zahnradgeometrie von Beginn des 19. Jahrhunderts bis zum Beginn der Normenarbeit in Deutschland (Auswahl)

Buchanan, Robert (Engl. Ingenieur; 1770 bis 1816)	<ul style="list-style-type: none"> entwickelte die Lehre von Camus für den Maschinenbau weiter; formulierte einen Vorläufer des Verzahnungsgesetzes (1808)
White, James (Engl. Techniker)	<ul style="list-style-type: none"> erfand die Doppelschräg- bzw. Pfeilverzahnung Patentanmeldung für Schrägverzahnung (1808) Anmerkung: Die Idee zur Schrägverzahnung erhielt J. White von stufenartig (nur eine halbe Teilung) gegeneinander versetzten Zahnhälften
Hawkins, John Isaac (Engl. Arzt und Ingenieur; 1772 bis 1865)	<ul style="list-style-type: none"> erkannte (1837) die Unempfindlichkeit der Evolventenverzahnung gegen Achsabstandsänderung Mehrfacheingriff und damit Belastungsteilung Vorteile der Evolventenzähne im Gleiten gegenüber Epizykloiden
Willis, Robert (Englischer Wissenschaftler; Professor in Cambridge; 1800 bis 1875)	<ul style="list-style-type: none"> praktisch anwendbare Verzahnungslehre (1841); Grundlegende Definitionen (diametral & circular pitch, Flankenspiel, Eingriffswinkel) Satzräder („set of wheels“) konstanter Eingriffswinkel der Satzräder (15° vorgeschlagen) Vorteile der Evolventenverzahnung vorausgesagt
Saxton, Joseph (USA)	<ul style="list-style-type: none"> (etwa 1840) erste Zahnradfräsmaschine nach dem Wälzverfahren
Reuleaux, Franz (Deutscher Wissenschaftler/Kinematiker; Professor in Zürich und Berlin; 1829 bis 1905)	<ul style="list-style-type: none"> Verfahren zur Konstruktion der Gegenflanke bei gegebener Flanke auf Grund der Bewegungsgesetze (1865) genauere Definition der „Eingriffslinie“ bevorzugt Evolventenverzahnung (1862)
Sang, Edward (Schottischer Wissenschaftler; 1805 bis 1891)	<ul style="list-style-type: none"> „Eine Zahnstange ist ein Zahnrad von unendlichem Radius“ (1852)
Wiebe, Carl Hermann (Deutscher Wissenschaftler, Professor in Berlin; 1818 bis 1881)	<ul style="list-style-type: none"> Präzisierung des Grundgesetzes der Verzahnung (Evolventenverzahnung): Normale, Berührungspunkte, Tangente, Krafrichtung (1861)
Plücker, Julius (Deutscher Professor der Mathematik und Physik in Bonn; 1801 bis 1868)	<ul style="list-style-type: none"> begründete die Schraubentheorie (Theorie der Schrägverzahnung, Schnecken- und räumlicher Verzahnungen) (1868)
Saalschütz, Luis (Deutscher Dozent für Mathematik und Mechanik in Königsberg)	<ul style="list-style-type: none"> gab erste deutschsprachige Zeitschrift „Zur Theorie der Evolventenverzahnung“ (Königsberg; 1870) heraus; Verzahnungsgesetz und Eigenschaften der Evolventenverzahnung
Pfauter, Hermann (Deutscher Ingenieur; 1854 bis 1914)	<ul style="list-style-type: none"> Erfindung des allgemeinen Schraubwälzverfahrens (Chemnitz; 1897)
Schiebel, Adalbert (Professor für Maschinenelemente in Prag; 1872 bis 1931)	<ul style="list-style-type: none"> Definition des Sprunges bei Schrägverzahnung (Sprungüberdeckung) (1913) detaillierte Angaben zum Zahnreibungsverlust (1913) Wertetabelle für Evolventenfunktion (1922)
Lasche, Oscar (Deutscher Ingenieur; 1868 bis 1923)	<ul style="list-style-type: none"> korrigierte Verzahnung durch Änderung der Zahnhöhen bei konstanter Aufteilung der Teilkreisteilung auf die Zahndicken (1899) (spätere AEG-Verzahnung)
Maag, Max (Schweizer Ing.; 1883 bis 1960)	<ul style="list-style-type: none"> kombinierte Anwendung von Profilverschiebung und Eingriffswinkeländerung (1908) Anwendung (erste oder eine der ersten) der Evolventenfunktion (1908)
Fölmer, Max (Deutscher Ingenieur; 1873 bis 1941)	<ul style="list-style-type: none"> weitere Einführung der Evolventenfunktion breite Anwendung der Profilverschiebung bei konstantem Werkzeug (Wälzfräsen. Begriffe: Vau-Rad, Vau-Getriebe ... (1919)) Klärung der Fragen zur Vermeidung von Unterschnitt (1919)

Für Zahnräder der Feinwerktechnik entstand bereits 1942 ein Toleranzsystem, welches auch auf den Maschinenbau ausgedehnt wurde. 1952 erfolgte dann die Herausgabe von DIN 3962 (Toleranzen für Stirnradverzahnungen nach DIN 867, zulässige Einzelfehler) und 1953 DIN 3963 (Toleranzen für Stirnradverzahnungen nach DIN 867, zulässige Flankenrichtungsfehler, zulässige Sammelfehler, Zahndickenabmaße). Diese Normungsarbeiten sind vor allem mit dem Namen *A. Budnick* verbunden [1/13].

Bei den weiterführenden Arbeiten, z. B. DIN 3961 (1978) und im RGW (ST RGW 641; 1977) unterschied man grundsätzlich zwischen Qualitäts- und Passsystem [1/20]. Die Qualitätskenngrößen sind Funktionsgruppen (bei ST RGW 641: „Kinematische Genauigkeit“, „Laufgleichmäßigkeit“, „Flankenberührung“) zugeordnet. Führend bei diesen Arbeiten im *RGW* war *B. A. Taiz* (Moskau). Wesentliche Aktivitäten gingen auch von *H. Weinhold* (Magdeburg) und *W. Krause* (Dresden) aus.

Bei den kontinuierlich laufenden Arbeiten für ISO und nachfolgend für DIN zu den Verzahnungstoleranzen, Tragfähigkeiten und anderen Empfehlungen geht es u. a. um genauere und zusätzliche Angaben, die Präzisierung des Geltungsbereiches, eine Korrektur verschiedener Zahlenwerte und um eine feinere Stufung.

Bis zur Gegenwart werden auch Evolventenverzahnungen mit nicht standardisiertem *Bezugsprofil* verwendet. Zunächst war dieses durch noch vorhandene Werkzeuge begründet. Somit bestanden vor allem die 15° - und $14,5^\circ$ -*Verzahnung* zunächst weiter. Zugunsten eines geringeren Geräusches bzw. größerer Tragfähigkeit und geringerer Verluste werden Bezugsprofile mit $\alpha \neq 20^\circ$ (z. B. $\alpha = 15^\circ$, $17,5^\circ$ bzw. 28°) verwendet, insbesondere bei Hochverzahnungen mit vergrößerter Zahnhöhe und $\alpha = 15$ oder $17,5^\circ$. Ziel der Verwendung von Profilen mit $\alpha < 20^\circ$ sind Profilüberdeckungen $\varepsilon_\alpha \approx 2$ zugunsten eines geringeren Getriebegeräusches, z. B. bei Kraftfahrzeugen.

Bezugsprofile mit $\alpha > 20^\circ$ finden auch bis in die Gegenwart Verwendung, wenn die Zahnfuß- und die Zahnflankenbeanspruchung maßgebend sind. Durch kleinere Zahnhöhen sind bei $\alpha \gg 20^\circ$ insbesondere bei Schrägverzahnungen wesentlich kleinere Verluste erreichbar. Durch Verzahnungen mit unsymmetrischem Profil ergeben sich weitere Tragfähigkeitssteigerungen.

Schließlich erzeugen Protuberanzwerkzeuge, die zur Vermeidung von Schleifabsätzen eingesetzt werden, ebenfalls vom Normal-Bezugsprofil (DIN 867) abweichende Endkonturen im Zahnfußbereich (Restunterwühlung, vergrößerte Zahnfußtiefe) und ergeben mit besonderen, elliptischen Zahnfußübergangskurven und Kugelstrahlen die größten Fußtragfähigkeiten. Die Bestrebungen, die Verzahnungsdaten möglichst optimal festzulegen, führten zu *evolventischen Sonderverzahnungen* und Empfehlungen zur Profilverchiebung. Es wurde versucht, im großen Bereich der Möglichkeiten Klarheit zu schaffen. Hier sei vor allem für die historisch bedeutsamen Arbeiten *H. Winter* genannt, der in den 50er Jahren wesentliche Verzahnungssysteme untersuchte [1/11].

Die Bemühungen durch *nicht-evolventische Verzahnungen* die bisher erreichbaren Tragfähigkeiten zu übertreffen, führten nicht zum Erfolg. Allerdings ergeben die Profilmodifikationen z. T. einen wesentlichen Einfluss auf die Tragfähigkeit und stellen eigentlich bereits nicht-evolventische Verzahnungen dar, allerdings mit relativ kleinen, in der Größenordnung der Zahnverformung liegenden Abweichungen zur Evolvente.

In die Betrachtungen wurde die Innenverzahnung meist nicht einbezogen. Durch die Einführung einer negativen Zähnezahl gehen aber nahezu sämtliche Gleichungen für die Außenverzahnung automatisch in die bisher für Innenverzahnung verwendeten Gleichungen über (DIN 3993, geometrische Auslegung von zylindrischen Innenradpaaren). Zu den Besonderheiten der Innengetriebe zählen jedoch die verschiedenartigen Interferenzerscheinungen, die insbesondere bei kleinen Zähnezahldifferenzen auftreten. Zusammenfassend liegen hierzu die Untersuchungen von *G. Schreier* [4] und aus späterer Zeit DIN 3993 vor. Die neueren Untersuchungen zur räumlichen Verzahnungsgeometrie auf mathematischer Grundlage stammen u. a. von *F. L. Litvin* [13].

Um die Entwicklung der Technik gezielt, rasch und mit gesetzlichem Charakter zu fördern, wurden in der DDR (seit etwa 1949) eigene Normen bzw. Standards unter dem Symbol TGL ... herausgegeben (bis 1956 Abkürzung für „Technische Normen, Gütevorschriften und Lieferbedingungen“, ab 1956 allgemeines Symbol für Normen/Standards).

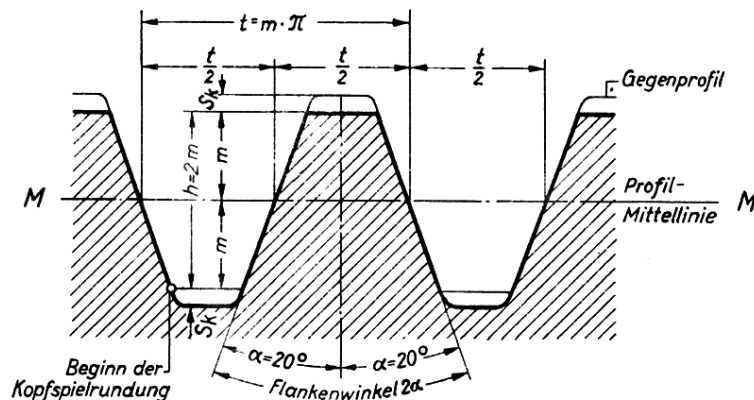
DK 621.833

Deutsche Normen

Juli 1927

Zahnform

für Stirnräder und Kegelräder

DIN
867**Zahnstangenprofil als Bezugsprofil (mit Gegenprofil)**

Die Flanken sind Geraden (Evolventenverzahnung)

Eingriffswinkel $\alpha = 20^\circ$ (= halber Flankenwinkel)Gemeinsame Zahnhöhe $h = 2 \cdot m$ (m = Modul = Durchmesserdivision)In der Profilmittellinie MM (bei Flankenspiel 0) Zahndicke = Zahnücke = $\frac{t}{2}$ (t = Umfangsteilung)

Die Kopfspielrundung beginnt dort, wo das Gegenprofil aufhört (Form der Rundung abhängig vom Herstellungsverfahren).

Kopfspeil $S_k = 0,1 \cdot m$ bis $0,3 \cdot m$ (abhängig vom Herstellungsverfahren und von Sonderbedürfnissen).

Für Flankenspiel und Flankeneintrittspiel ist Normung bzw. Angabe der Passung vorbehalten.

Modulreihe siehe DIN 780

Begriffe, Bezeichnungen, Kurzzeichen siehe DIN 868

Genehmigung des Deutschen Normenausschusses, Berlin W 15, gestattet. Copyright by Deutscher Normenausschuss

Bild 1/8 Zahnform für Stirnräder und Kegelräder nach der ursprünglichen Fassung der Norm DIN 867 von 1927 (Abdruck erfolgte mit freundlicher Genehmigung des DIN)

1962 beschloss die XVI. Tagung des RGW (ehemaliger „Rat für gegenseitige Wirtschaftshilfe“) die Bildung einer Ständigen Kommission des Rates für Standardisierung (SKS) mit dem Sitz in Berlin und die Bildung eines Institutes des Rates für Standardisierung in Moskau. Diese Gremien überarbeiteten und vereinheitlichten für den RGW-Bereich auch nahezu sämtliche Verzahnungsstandards, die bis etwa 1990 Wirksamkeit besaßen. Das Symbol für diese Standards war *ST RGW* ... und für die darauf aufbauenden Standards der DDR *TGL RGW*

1988 wurde die DDR ein Mitglied der 1946 gegründeten *ISO*, die aus der 1926 gebildeten *ISA* hervorging, und begann ebenfalls im TC 60 von *ISO* mitzuarbeiten (Technisches Komitee; Zahnräder/Zahnradgetriebe). Mit der erneuten Hinwendung zu *DIN* ab 1989 wurde einer historischen Entwicklung und wirtschaftlichen Notwendigkeit entsprochen. Einen Überblick zu Normen enthält Anlage 17.1.

Nicht-evolventische Verzahnungen werden heute nur noch in Ausnahmefällen verwendet. Bekannt sind die *Zykloidenverzahnung* und ihre Sonderformen (Cyclo-Getriebe, VBB-Verzahnung [2]), die *Kreisbogenverzahnung* (Uhren), die *Triebstockverzahnung* (große Drehkränze, Hebezeuge) und ebenfalls aus Kreisbögen gebildet, die *Wildhaber-Novikov-Verzahnung* (in der UdSSR im Getriebebau serienmäßig angewendet) und die *Sym-Marc-Verzahnung* (in Japan ausgeführt) [2].

1.1.3 Entwicklung der Tragfähigkeitsberechnung

1.1.3.1 Zahnfußbeanspruchung

In früherer Zeit existierten zunächst „*Rezepte*“. Sie waren durch Erfahrung begründet und führten auch meist zu brauchbaren Konstruktionen, wenn die verwendeten Materialien (Werkstoffe), die Drehzahl- und Drehmomentbereiche beibehalten wurden. Als Beispiel soll *R. Buchanan* (siehe [1/2], Seite 262) genannt werden, der für Räder von Wassermühlen noch 1808 die Regel angibt „*Man mache die Zähne so viel Zoll breit, als die Zahl der Pferdestärken beträgt, der sie Widerstand leisten sollen*“.

Eine der ersten rechnerischen Regeln zur Ermittlung der Zahnabmessungen aufgrund der *Biegebeanspruchung* stammt von den Leidener Naturforscher *P. van Muschenbroek* (1692 bis 1761). Er stellte 1729 eine Gleichung für die relative „Festigkeit“ des Materials auf:

$$Q = m \frac{BH^2}{L} \quad (1/1)$$

Q Last H Dicke
 L Länge m Werkstoffkonstante
 B Breite

Sehr früh ging der Engländer *Th. Tredgold* von dem sehr wesentlichen Einfluss der *Breitenlastverteilung* aus. 1822 veröffentlichte er eine Beziehung für die Zahndicke, die er unter der Annahme ableitete, dass infolge von Abweichungen oder eines Fremdkörpers die gesamte Zahnkraft auf der äußersten Zahnecke wirkt (Bild 1/9).

Er erhielt eine Beziehung, die sich besonders für gusseiserne Räder lange bewährte:

$$d = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{H}{v}} \quad (1/2)$$

d Zahndicke (in Zoll)
 v Teilkreisgeschwindigkeit (Fuß/Sekunde)
 H Leistung (Pferdestärke)

Von ähnlichen Annahmen gingen später auch *C. v. Bach* (Bild 1/10, [1/30]) und *F. Grashof* (Textprobe in Bild 1/11 [1/29]) aus. Als Abnutzungsgrenze setzte *Tredgold* ein Drittel der Zahndicke.

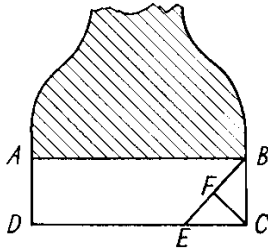


Bild 1/9 Annahme der Zahnbelastung durch *Tredgold* (1822), nach [1/2]

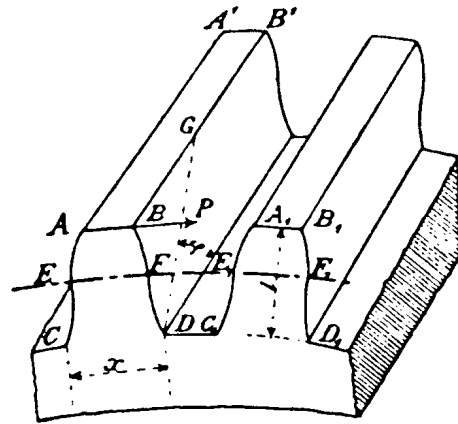


Bild 1/10 Annahme der Zahnbelastung analog *Tredgold* durch *C. v. Bach* [1/30]

F. Grashof

Uebrigens kann sich bei ungenauer Lagerung der Wellen, mangelhafter Ausführung der Räder oder beim Dazwischenkommen eines kleinen Körpers der noch ungünstigere Fall ereignen, dass der Druck sich an einer Zahnecke concentriert und dieselbe abbrechen droht, am wahrscheinlichsten in einer Bruchfläche, welche unter 45° gegen die Stirnfläche des Zahnes geneigt ist. Diesem Fall entspricht die Maximalspannung

Bild 1/11 *Grashof* zur Annahme des Kraftangriffs (Textprobe aus [1/29])

Für die Festigkeitswerte formulierte *F. Releaux* 1869 in heutiger Schreibweise

$$\sigma_{zul} = \frac{K}{\sqrt[3]{v}} \tag{1/3}$$

σ_{zul} zulässige Spannung, K Konstante, v Umfangsgeschwindigkeit

Er erkannte auch als erster, dass es zweckmäßig ist, mit einem Breitenverhältnis b/t zu rechnen (b Zahnbreite, t Zahnteilung).

Sehr wesentlich beeinflusste die praktische Berechnung der wegen seiner Verdienste für den Maschinenbau geadelte *C. v. Bach*. Er ging zunächst vom gleichen Ansatz wie *Tredgold* aus, brachte die Beziehung aber schließlich in die bekannte Form

$$P = kbt \tag{1/4}$$

P Zahnkraft t Teilung
 k Belastungszahl b Zahnbreite

Zur Berücksichtigung der *Abnutzung* der Zähne empfiehlt *Bach* die gleiche Beziehung (1/4), die für den Verschleiß vor ihm von *W. A. H. v. Kankelwitz* aufgestellt wurde [1/16]. Gl. (1/4) gab *Bach* eigentlich nur für Gussräder an und empfahl für die Belastungszahl k drehzahlabhängige Werte (Verschleiß).

Die Einfachheit der Gl. (1/4) und die Erfassung von zwei unterschiedlichen Schadensarten (Zahnbruch, Verschleiß) war dem Praktiker angenehm, wirkte aber durch Verdeckung des physikalischen Gehaltes erschwerend für die Weiterentwicklung.

Nachdem *O. Lasche*, angeregt durch die steigenden Anforderungen der Elektromotorenindustrie, den Fall des ungünstigen Breitentrags nach *Tredgold* für genaue Ausführungen einen Fall Lastangriff am Zahnkopf bei gleichmäßiger Lastverteilung hinzugefügt hatte (1899), entwickelte *Karl Kutzbach* die Berechnung weiter. Er setzte neben Kraftangriff am Zahnkopf und gleichmäßiges Breitentragen ausreichende Zahnfußrundungen voraus (Bild 1/12).

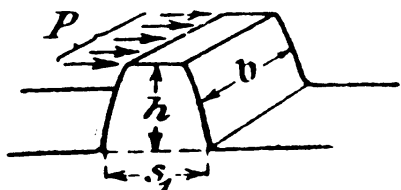


Bild 1/12 Annahme der Zahnbelastung nach *Kutzbach* (Hütte, 24. Ausgabe, 1923)

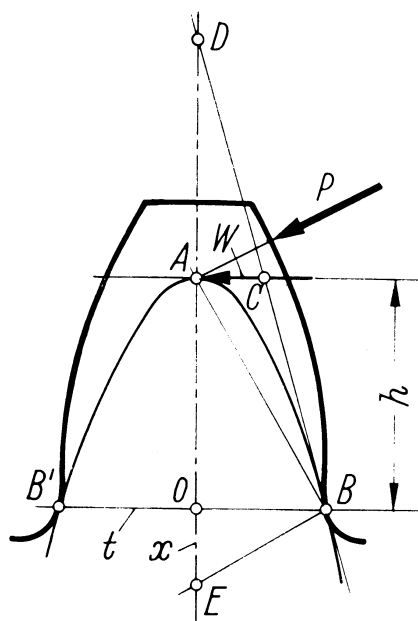


Bild 1/13 Annahme zur Berechnung der Zahnfußbeanspruchung nach *Lewis* (1892); Parabel gleicher Festigkeit (nach [1/2])

Massenkräfte berücksichtigte er ebenfalls durch Beiwerte im Festigkeitswert (1923). Normalerweise empfiehlt er auch $b = 2t$ (b Zahnweite, t Zahnteilung).

M. ten Bosch von der ETH Zürich wies darauf hin, dass infolge der Profilüberdeckung die volle Zahnkraft nicht am Zahnkopf angreift, empfiehlt aber noch lange, da Teil- und Profilverfäher auftreten, aus Sicherheitsgründen mit Kopfangriff zu rechnen. Er berücksichtigte die Biege- und Druckspannung [1/28].

Sehr nachhaltig wurde die Zahnfußtragfähigkeitsberechnung von dem US-Amerikaner *C. Lewis* beeinflusst.

Er ermittelte 1892 den Zahnfußquerschnitt für die Berechnung der Zahnfußbeanspruchung, indem er eine Parabel gleicher Festigkeit (bekannt seit 1638 durch *Galileo Galilei*) in den Zahn legte (Bild 1/13). Da er von physikalischen Überlegungen ausging, wirkte seine Methode überzeugend und fand weitverbreitet lange Anwendung.

Der Engländer *H. E. Merrit* wies ebenfalls darauf hin, dass die volle Zahnkraft infolge der Profilüberdeckung nicht am Zahnkopf angreift und legte als Angriffspunkt entsprechend der jetzigen Berechnung den äußeren Einzeleingriffspunkt fest.

Die Ermittlung des Zahnfußquerschnittes mit Hilfe der Lewis-Parabel ersetzte *H. Hofer* [1/17] durch eine 30°-Tangente an die Zahnfußkurve (Bild 1/14). Obwohl von rein physikalischen Überlegungen im Ansatz abgewichen wurde, erwies sich diese Annahme im Rahmen der übrigen Voraussetzungen als noch zulässig und ermöglichte die Beurteilung grundsätzlicher Einflüsse. Es ergab sich daraus die Schlussfolgerung, dass durch Profilverschiebung hinsichtlich der Zahnfußbeanspruchung eine wesentliche Tragfähigkeitssteigerung möglich ist und deshalb bei $z = 10$ bis 30 nur profilverschobene Verzahnungen verwendet werden sollten. Dieses erwies sich später in der erhofften Größe bei Ermüdungsbeanspruchung als nicht zutreffend.

Bereits 1925 bestimmte der Schweizer Ingenieur *V. Baud* als erster die *Kerbwirkung* spannungsoptisch. Seine Ergebnisse wurden 1926 von *St. Timoshenko* ausgewertet. Er führte einen relative Spannungskonzentrationsfaktor ein. In heutiger Schreibweise würde dieser lauten:

$$Y_{S\text{rel}} = \frac{1,6}{Y_S} \quad (1/5)$$

$$Y_S = 1 + \frac{0,15 S_{Fn}}{Q_{Fn}} \quad (1/6)$$

Obwohl Ergebnisse zum Kerbeinfluss seit 1925 vorlagen und auf einen wesentlichen Einfluss hindeuteten, die amerikanische Norm 1946 zur Tragfähigkeitsberechnung den Kerbeinfluss aufnahm (*Dolan* und *Broghamer*), blieb in Deutschland und vielen Ländern die Änderung der Kerbwirkung noch lange Zeit unberücksichtigt.

Da die Kerbwirkung vom Schubspannungsanteil abhängt, konnte man insbesondere bei Pulsatorversuchen auch eine Hebelarmabhängigkeit der ertragenen Nennspannung beobachten.

G. Niemann und *H. Glaubitz* versuchten diesem zu entsprechen, indem sie eine Vergleichsnennspannung aus Biege-, Druck- und (mittlerer) Schubspannung berücksichtigten und den Beiwert zur Erfassung der Schubspannung mit $a = 2,5$ einführten (Bild 1/15 und Gl. (1/7)) [1/18]. Damit sollte die ertragbare Spannung unabhängig vom Hebelarm sein. Sie stellten die Beziehung auf

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_b - \sigma_d)^2 + (a\tau)^2} \quad \text{mit } a = 2,5 \quad (1/7)$$

Nachdem bei der Berechnung von Wellen und stabförmigen Gebilden die Kerbspannungslehre längst fest verankert war, wandte man sich auch bei Verzahnungen diesem Problem wieder zu. Durch Messungen mit Hilfe von Dehnmessstreifen bestimmte *M. Hirt* abhängig von der Fußausrundung und dem Hebelarm die Spannungskonzentrationsfaktoren [1/25], die zur Basis der Gleichungen von ISO 6336 und DIN 3990 wurden. Dem RGW-Standard ST RGW 5744-86 und der Neuauflage von TGL 10545 (1989) lagen an der TU Dresden durchgeführte Berechnungen auf der Basis des Singularitätenverfahrens zugrunde (Beispiel im Bild 1/16).

Diese Werte liegen etwas tiefer als nach DIN und ISO [1/20], [1/21] (ca. 10 % geringer). Es erfolgten auch Untersuchungen zu Verzahnungen mit Schleifabsätzen und Innenverzahnungen [1/22], [1/23].

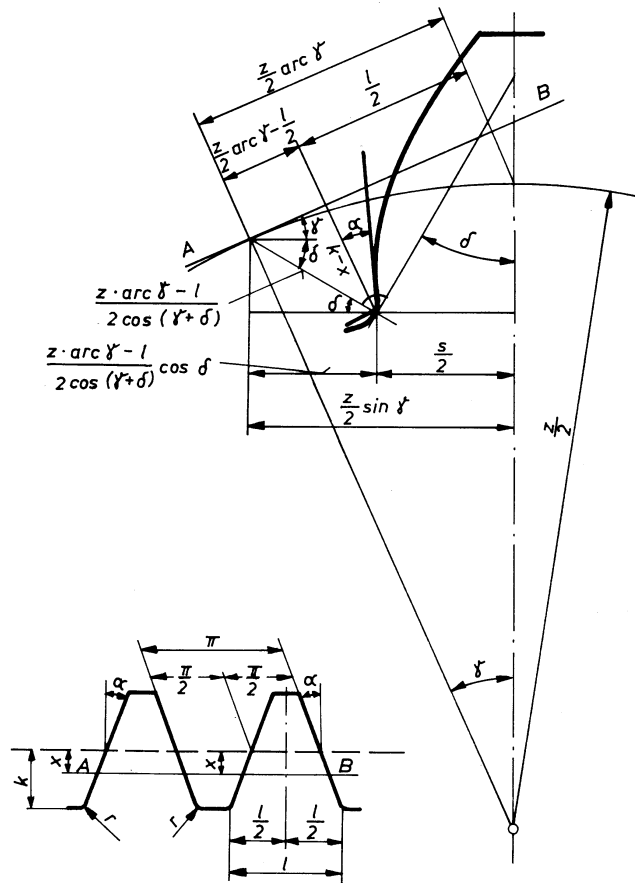


Bild 1/14 Annahme zur Ermittlung der Zahnfußbeanspruchung nach *Hofer* (1942), 30°-Tangente an der Zahnfußkurve [1/17]

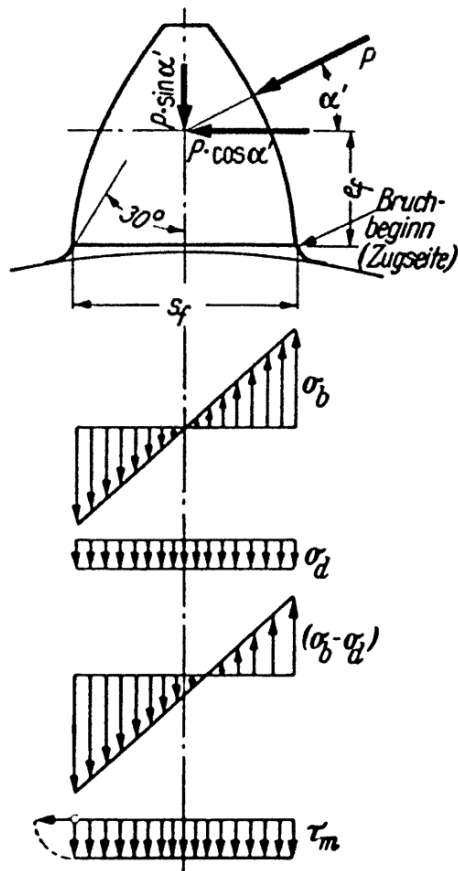


Bild 1/15 Zahnfußspannung (Niemann und Glaubitz)

Parallel hierzu wurde an der Klärung weiterer Zusammenhänge gearbeitet.

St. Fronius untersuchte u. a. die Verzahnungsabweichungen [1/19] und förderte die experimentellen Arbeiten bedeutend. Ziel der Weiterentwicklung der Tragfähigkeitsberechnung war es, neben der Kerbwirkung vor allem die Zusatzbeanspruchung infolge dynamischer Zahnkräfte und Änderung der Lastverteilung zu erfassen. In den ISO-Normen ist dieser Trend dokumentiert. *H. Winter* (TU München) erwarb sich dabei grundlegende Verdienste in einer langjährigen Forschungsarbeit und schwierigen internationalen Abstimmung.

Im RGW wurde aufbauend auf ISO eine eigene Berechnungsgrundlage geschaffen (ST RGW 5744-86). Mit ihr sind besonders die Namen *Reschetow*, *Kudrjawzew*, *Sablonski*, *Filipowitsch* (ehemals UdSSR), *Svoboda* (ehemals CSSR), *Erney* (Ungarn) und *Arnaudow* (Bulgarien) verbunden. Die federführende Bearbeitung lag bei der DDR (TU Dresden). ST RGW 5744-86 war auch die Basis des neuen Tragfähigkeitsstandards TGL 10545 (1989) der ehemaligen DDR, ebenfalls ausgearbeitet von der TU Dresden.

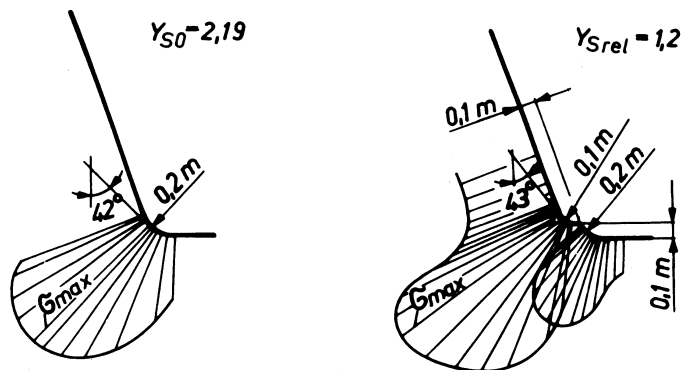


Bild 1/16 Spannungsverteilung in der Zahnfußkurve ohne und mit Schleifabsatz, berechnet nach dem Singularitätenverfahren [1/20], [1/21];

$$Y_S = Y_{SO} \cdot Y_{Srel}$$

1.1.3.2 Zahnflankenbeanspruchung – Grübchen

Die Grundlage für die Berechnung der Grübchenbeanspruchung bildet die Ableitung von *H. Hertz* (1881). *A. Föppl* erkannte die Bedeutung dieser Theorie, bearbeitete sie, trug sie Technikern vor und veröffentlichte sie 1897 neu. Von seinem Sohn, *L. Föppl*, wurde die Theorie weiterentwickelt (1936), die Spannungen im Inneren der Körper berechnet und damit die Kenntnisse zum Beanspruchungsfall der Berührung walzenförmiger Körper wesentlich erweitert.

Veranlasst durch fehlende Werte für die zulässige Belastung bei Wälzlagern, führte *R. Stribeck* umfangreiche Versuche bei Punkt- und Linienkontakt durch (1898/99). Er bestätigte und erweiterte die Anwendung der Hertz'schen Theorie und erhielt für die Praxis verwertbare Grenzbelastungen. Speziell bei Linienkontakt (Rolle gegen Ebene) erhielt er den Zusammenhang

$$P = k_1 DL \quad (1/8)$$

P Belastung
 D Rollendurchmesser
 L Rollenbreite (Länge)
 k_1 zulässige spezifische Belastung
 (Verformungsgrenzwert; Beanspruchungswert)

Mit *R. Stribeck* gelten die grundlegenden Untersuchungen zum „Hertz'schen“ Kontakt als abgeschlossen. *C. v. Bach* gebührt das Verdienst, die Verbreitung der Hertz'schen Gleichungen bedeutend gefördert zu haben, indem er sie 1908 in das Ingenieur Taschenbuch „Hütte“ aufnahm.

Eine Anwendung der nach *H. Hertz*, *A. Föppl*, *L. Föppl* und *R. Stribeck* vorliegenden Erkenntnisse auf Zahnräder erfolgte relativ spät. Als erster brachte *E. Videcky* (1908, Budapest) die Hertz'schen Gleichungen im Zusammenhang mit Zahnrädern. Er untersuchte für das Verschleißproblem die Zahnverformung und die Hertz'sche Pressung längs der Eingriffslinie.

Die Bach'sche Formel (1/4) erwies sich für Gusseisen bei den früheren Anforderungen durchaus geeignet. Um auch für Stahl eine für die steigenden Anforderungen sich bewährende Beziehung anzuwenden, greift *K. Wissmann* auf die Hertz'sche Beziehung zurück, indem er sie auch zur Beurteilung des Verschleißes für zutreffend hielt. Er bezeichnete den *Einzeleingriffspunkt* als maßgebend für die Beurteilung der Flankenbeanspruchung und gab 1908 an

$$p^2 = 0,175 \frac{F_N}{b} \cdot \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (1/9)$$

p Hertz'sche Pressung
 F_N Zahnnormalkraft
 b Zahnbreite
 E Elastizitätsmodul
 ρ Krümmungsradius (Profil)
 (Symbole teilweise in heutige Schreibweise geändert)

Bei den ersten Anwendungen wurde die Kontaktbeanspruchung jedoch meist in der von *Stribeck* geprägten Form benutzt (*Stribeck'sche Wälzpressung*). Hierzu zählen die Beziehungen von *Buckingham* (1920), *Kutzbach* (1926), *Niemann* (1938); (siehe auch [1/26] weiterhin *A. K. Thomas* [12], *H. Trier* [11], *G. Schreier* [4]).

Die *Stribeck'sche Wälzpressung* k für Zahnräder ist

$$k = \frac{F_N}{b \rho_m} \quad (1/10)$$

$$\text{mit } \rho_m = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1/11)$$

ρ Krümmungsradius (Profil) F_N Zahnnormalkraft b Zahnbreite

Zur Hertz'schen Pressung p besteht die Beziehung

$$k = \frac{2,86p^2}{E} \quad (1/12)$$

E Elastizitätsmodul

Von *Niemann* wurde der zulässige Wert ausgehend von dem Gedanken der Abnutzung abhängig von der Lebensdauer in Stunden angegeben ($k_{zul} = k_{5000} \varphi$; φ abhängig von Betriebsstunden) [1/26].

In jetziger Betrachtungsweise trennen wir klar zwischen Verschleiß, der infolge der Verbesserung der Schmierung und Steigerung der Härte der Werkstoffe nur noch in Ausnahmefällen entscheidend ist, und der Grübchentragefähigkeit. Die Forschung auf diesem Gebiet bemüht sich weitere Einflüsse zu erfassen. Hierzu gehören neben Welligkeit und Rauheit, die Schubbeanspruchung und Temperaturspannung in Verbindung mit dem hydroelastischen Schmierzustand (Schubspannung) und die sich der Flankenbeanspruchung überlagernde Biegebeanspruchung oberhalb des Zahnfußbereiches. Der Schmierfilm bewirkt im Allgemeinen nur geringe Abweichungen in der Größe der Hertz'schen Pressung.

Die sich überlagernde Schubspannung und die infolge der örtlichen Erwärmung entstehende Temperaturwechselspannung bedingen weitere Einflüsse, die z. Z. noch nicht befriedigend erfasst werden. Auch die Welligkeit und Rauheit sind wesentliche Einflussgrößen.

Ihre Berücksichtigung muss nach künftigen Entwicklungen auf statistischer Basis erfolgen.

Beziehungen zur Hertz'schen Pressung, ergänzt durch Schub, sind in Abschnitt 6.5.1.1 angegeben. Aussagen zu den elasto-hydrodynamischen Effekten findet man in Abschnitt 6.5.4.1.

1.1.3.3 Fressbeanspruchung

Mit der Steigerung der übertragenen Leistung pro Raumeinheit wuchs auch die Größe der Verluste und die *Getriebeerwärmung*. Insbesondere die Luftfahrtindustrie brachte neue Anforderungen und Schadensfälle. Fressen wurde nun öfter beobachtet, und es entwickelte sich das Bestreben, diese Erscheinung in der Berechnung zu berücksichtigen. *H. Hofer* (Zahnradfabrik Friedrichshafen) setzt die durch $d \cdot b$ entstehende Fläche zur übertragenen Leistung bzw. Verlustleistung ins Verhältnis. Dieses wurde als *Wärmestauwert* (bzw. als Größe für Fresssicherheit) bezeichnet (1926):

$$S_a = \frac{z_1 m b}{20N} \quad (1/13)$$

z_1	Zähnezahl (Ritzel)	b	Zahnbreite in mm
m	Modul in mm	N	Leistung in PS

Damit wurde noch nicht an die für die Ermittlung des Verschleißes bereits wesentlich früher durchgeführten Arbeiten u. a. durch *Poncelet* (1826), *Weißbach* (1852), *Bach* (1881), *Stribeck* (1894) und *Schiebel* (1911) angeschlossen. Diese hatten die Reibungsarbeit genauer, u. a. abhängig von $(1/z_1 + 1/z_2)$ bzw. den Wälzkreisradien abgeleitet. Die später (1941) für den Wärmestauwert S_a angegebene Gleichung hatte dann auch die Form

$$S_a = \frac{z_1 m b}{10VN} \geq 1 \frac{\text{mm}^2}{\text{PS}} \quad (1/14)$$

Mit dem Verlustgrad

$$V = 14,1 \frac{|z_2| \pm z_1}{z_1 z_2} \quad (1/15)$$

(-)	für Innenradpaare mit Index = 2 für das Hohlrads		
m_n	Normalmodul	b	Zahnbreite
z_1	Zähnezahl (Ritzel)	N	übertragene Leistung

Aus zahlreichen Auswertungen von Fressschäden und Bewährungen in Betrieb befindlicher bogenverzahnter Kegelrad-Hinterachsenantriebe entwickelte der Amerikaner *J. O. Almen* (1935) eine neue Formel. Er fand, dass das Produkt aus Hertz'scher Pressung und Gleitgeschwindigkeit maßgebend sei. Später (1943) ergänzte er dieses Produkt noch um den größten Abstand des Berührungspunktes auf der Eingriffslinie vom Wälzpunkt (PVT-Formel genannt; siehe auch [6]).

$$F_A = p_a v_{ga} g_a \tag{1/16}$$

$$F_A \leq F_{A \text{ Grenz}} \tag{1/17}$$

p_a Hertz'sche Pressung am Zahnkopf v_{ga} Gleitgeschwindigkeit am Zahnkopf
 g_a Abstand des Kopfeingriffspunktes vom Wälzpunkt; Teileingriffsstrecke

Der Kennwert F_A wurde am Kopf des Ritzels und des Rades berechnet. Die Formel von *Almen* bewährte sich vor allem bei kleineren Flugzeuggetrieben [6].

Eine bis z. Z. benutzte Gleichung stellte der Holländer *H. Blok* (1937) auf [1/24]. Er ging von der Massentemperatur und einer im Eingriff an der Berührungsstelle entstehenden örtlichen Temperaturerhöhung, dem Temperaturblitz (Blitztemperaturhypothese), aus. Auf theoretischer Grundlage erhält er eine Gleichung, die die Größe des Temperaturblitzes t_B unter der Annahme des Versagens der Schmierschicht ausdrückt (siehe auch [6] und Abschnitt 6.5.4.2).

$$t_B = 0,83 \frac{\mu F_t |v_{T1} - v_{T2}|}{b(f_1 \sqrt{v_{T1}} + f_2 \sqrt{v_{T2}}) \sqrt{b_H}} \leq t_{B \text{ max}} \tag{1/18}$$

μ Reibungszahl	b Zahnbreite
F_t Umfangskraft	f $\sqrt{\lambda \gamma c}$
v_T tangentielle Geschwindigkeit der Zahnflanke senkrecht zur Eingriffslinie ($v_{T1} - v_{T2} = v_g$)	λ Wärmeleitfähigkeit
v_g Gleitgeschwindigkeit	γ spezifisches Gewicht
	c spezifische Wärme
	b_H halbe Breite der Hertz'schen Abplattung

Der Grenzwert $t_{B \text{ max}}$ ist von der Werkstoff-Schmierstoff-Kombination abhängig. Die Blok'sche Beziehung hat den unbestreitbaren Vorteil, dass sie auf theoretischen Ableitungen aufbaut, weshalb sie bis heute einen festen Platz in der Zahnradberechnung hat.

Obwohl man in der Folgezeit einen Einfluss des hydroelastischen Zustandes auf $t_{B \text{ Grenz}}$ feststellte, blieb die Blok'sche Hypothese die Grundlage der Fresstragfähigkeitsberechnung. In Abschnitt 6.5.4.2 werden das Berechnungsverfahren und weitere Entwicklungen (Integraltemperaturmethode) näher erläutert.

1.2 Aufgaben und Einteilung der Getriebe und Verzahnungen

Nach der historischen Übersicht im vorherigen Abschnitt sollen nun Aufgaben und Einteilung der Getriebe und Verzahnungen zusammenfassend herausgestellt werden.

Getriebe sind Bestandteil des *Antriebes*. Sie waren, sind und werden auch künftig in vielen Fällen erforderlich sein, da der Motor allein nicht allen Forderungen und Kennlinien entsprechen kann.

Eine Verzahnung kann für die heutigen Forderungen im Allgemeinen nicht mehr isoliert betrachtet werden. Die umgebenden Bauteile beeinflussen durch ihr Verformungs- und Schwingungsverhalten die Tragfähigkeit bedeutend. Im Hinblick auf die Zusatzbelastungen durch erzwungene und parametererregte Schwingungen und die meist vorliegende Nichtlinearität muss zumindest anfangs das Gesamtsystem betrachtet werden. Es wird deshalb hier auch von den Aufgaben der Getriebe im Antrieb ausgegangen und dann erst die Einteilung der Getriebe und Verzahnungen vorgenommen.

¹⁾ Der Faktor 0,83 in Gl. (1/18) wurde später in 1,11 geändert. Damit wurde eine Ellipse berücksichtigt, die besser als eine Parabel der Form der Pressungsverteilung entspricht. Gleichzeitig entspricht das dem Zustand, dass anstatt der halben Abplattungsbreite b_H die gesamte Abplattungsbreite $2b_H$ unter der Wurzel im Nenner verwendet wurde.

Die *Aufgaben des Getriebes* sind:

- Änderung kinematisch-dynamischer Größen, z. B. Drehzahl, Drehrichtung, Drehmoment,
- Änderung der Lage des Abtriebes zum Antrieb, z. B. Achsabstand, Winkellage zwischen An- und Abtrieb (geometrische Anpassung),
- Änderung der Kennlinien/Erzeugung bestimmter Kennlinien, z. B. stufige Anpassung der Motorkennlinie an die Hyperbel.

Bei *abstrakter Betrachtung* besteht ein Getriebe mindestens aus einem

- Antriebsglied (Antriebswelle),
- Abtriebsglied (Abtriebswelle),
- Gestell (Gehäuse).

Über diese 3 Grundelemente kann man sich von außen auf das Getriebe drei *Momente* eingeleitet denken (siehe Bild 1/37). Wegen

$$\sum_{j=1}^3 M_j = M_{\text{an}} + M_{\text{ab}} + M_G = 0 \quad (1/19)$$

ist aufgrund des Gestellmomentes M_G eine Drehmomentänderung $|M_{\text{an}}| \neq |M_{\text{ab}}|$ zu erreichen. Darin unterscheidet sich ein Getriebe rein mechanisch betrachtet von einer Kupplung, bei der kein Gestellmoment M_G vorhanden ist und demzufolge bei einer Kupplung immer $M_{\text{an}} = -M_{\text{ab}}$ beträgt (siehe Abschnitt 1.4.3).

Die *Einteilung der Getriebe* kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Eine sehr allgemeine und gut charakterisierende Unterscheidung ist

- *ungleichmäßig übersetzende Getriebe* ($i \neq \text{konstant}$),
- *gleichmäßig übersetzende Getriebe* ($i = \text{konstant}$).

Ein Beispiel für ungleichmäßig übersetzende Zahnradgetriebe zeigt Bild 1/17.

Infolge der bei $i \neq \text{konstant}$ vorliegenden Drehwinkelbeschleunigungen am Abtrieb bei konstanter Bewegung des Antriebes entstehen Schwingungen. Bei einigen Antrieben ist diese Erscheinung beabsichtigt. Für den Antrieb nach Bild 1/17a beträgt die mittlere Übersetzung $|i_M| = 1$. Die momentane Übersetzung i ist (siehe Abschnitt 1.4.1)

$$i = \omega_1 / \omega_2 = -r_2 / r_1$$

$$i = -2(a'/b')^2 \left(1 + \sqrt{1 - (b'/a')^2 \cos \varphi_1} \right) + 1 \quad (1/20)$$

Neben der genannten Einteilung der Getriebe nach kinematischen Gesichtspunkten (ungleichmäßig und gleichmäßig übersetzende Getriebe) wird nach weiteren Kriterien unterschieden, z. B.

- Bauart (Standgetriebe, Planetengetriebe),
- Verwendungszweck (Kraftfahrzeuggetriebe, Turbogetriebe, Krangetriebe),
- Änderungsmöglichkeiten der Übersetzung (schaltbare und nichtschaltbare Getriebe),
- Physikalische Wirkprinzip (mechanische Getriebe, hydraulische Getriebe),
- Radkörperform (Stirnradgetriebe, Kegelnradgetriebe, Schneckengetriebe).

Für die Einteilung der Getriebe bzw. Radpaarungen kann man auch eine Einteilung nach den Bewegungsverhältnissen an der Verzahnung vornehmen und zwischen *Wälzgetrieben* und *Schraubgetrieben* (nach DIN 868 Schraubwälzgetriebe genannt) unterscheiden.

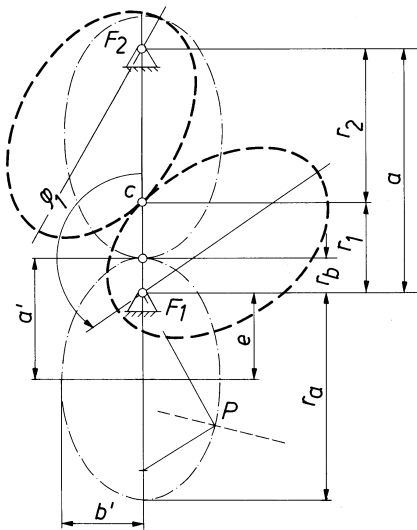


Bild 1/17 Ungleichmäßig übersetzende Zahnradpaare

a) Elliptisches Zahnradpaar [1/14]

b) Exzentrisch gelagertes Stirnrad gepaart mit einem elliptischen Stirnrad (Modellsammlung Getriebetechnik TU Dresden), Näherung der elliptischen Paarung

Bei Schraubgetrieben findet im Gegensatz zu den Wälzgetrieben ein Gleiten längs der Berührlinie (Wälzlinie, Momentanachse der gepaarten Wälzkörper) statt.

Schraubgetriebe haben kreuzende, sich nicht schneidende Achsen. Berühren sie sich in einer Linie, sind ihre Grundkörper (Wälzkörper) Hyperboloide. Die Hyperboloide entstehen, indem eine „Erzeugende“ (gerade Linie) um die Achse der jeweiligen Drehkörper rotiert (Bild 1/18).

Als Sonderfälle entstehen das Zylinderrad (Stirnrad) und das Kegelrad. Die Erzeugende ist die Wälzlinie und die Momentanachse der gepaarten Hyperboloide, die sich längs dieser Linie berühren (Bild 1/19). Abhängig von der Größe des Achsversatzes ergeben sich verschiedene Getriebearten (Bild 1/20).

Die Unterscheidung nach dem *Flankenlinienverlauf* führt bei Stirnrädern für die z. Z. noch gebräuchlichen Arten lediglich auf Gerad-, Schräg- und Doppelschrägverzahnung (Bild 1/21a, b und c). Ältere, heute nicht mehr angewendete Formen sind die „echte“ Pfeilverzahnung (Bild 1/21d) und die Doppelwinkelverzahnung (Bild 1/21f, [1/3], [1/14]). Bei Stirnrädern wird im Gegensatz zu Kegelrädern die Bogenverzahnung selten angewendet (Bild 1/21e, [1/3]).

Zur Unterscheidung nach der *Profilform* sind als wesentliche Arten zu nennen

- *Zykloidenverzahnung*
- *Wildhaber-Novikov-Verzahnung*
- *Triebstockverzahnung*
- *Evolventenverzahnung*

Den Regelfall der Anwendung bildet die *Evolventenverzahnung*. Ihre ausführliche Beschreibung erfolgt im Abschnitt 2.

Das Zahnprofil der *Zykloidenverzahnung* wird durch Hypo- und Epizykloiden gebildet [2], [5], [14]. Zu ihrem Vorteil zählt die hohe Flankentragfähigkeit (Grübchen) und dass gegenüber Evolventengeradverzahnung kleinere Zähnezahlen verwirklichtbar sind. Diesem stehen die bedeutenden Nachteile gegenüber, dass die Werkzeuge mit Zykloidenverzahnung nicht geradflankig und deshalb teurer sind und die Zykloidenverzahnung sehr empfindlich gegen Achsabstandsabweichungen ist. Es muss deshalb auch der Erzeugungswälzkreis mit dem Betriebswälzkreis übereinstimmen. Die Zykloidenverzahnung wird z. Z. nur in Ausnahmefällen angewendet.

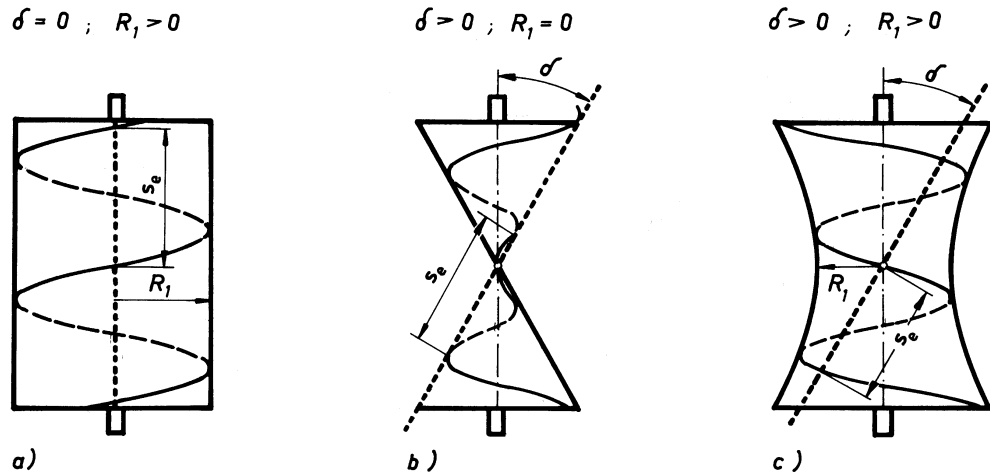


Bild 1/18 Entstehung der Zahnradgrundkörper als Hyperboloide durch eine um die Zahnradachse rotieren gedachte Gerade („Erzeugende“) a) Sonderfall: Zylinder; b) Sonderfall: Kegel; c) Hyperboloid (allgemeiner Fall)

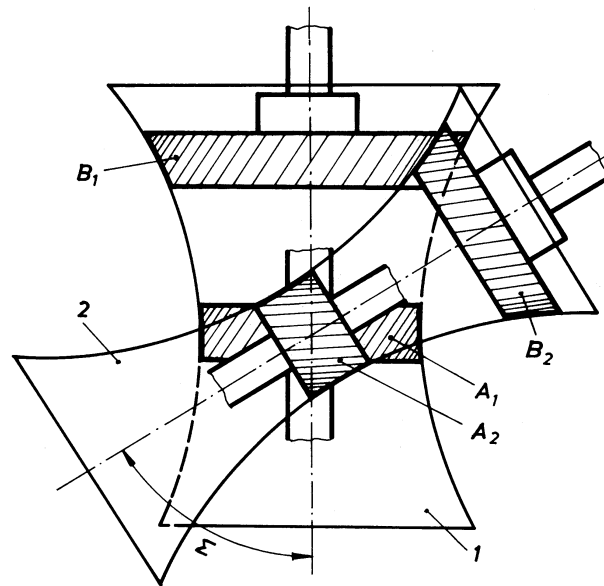


Bild 1/19 Radpaarung mit sich kreuzenden Achsen (Hyperboloidgetriebe).

Im allgemeinen Fall kreuzen sich die Achsen im Abstand a mit dem Kreuzungswinkel Σ . Die bekannten nach der Form der Grundkörper eingeteilten Getriebe entstehen bei bestimmten Grenzfällen des Kreuzungswinkels Σ und Achsabstandes a (Grenzfall $\Sigma = 0$: Stirnradpaarung; Grenzfall $a = 0$: Kegelradpaarung; Grenzfall $\Sigma > 0^\circ, a \neq 0$: achsversetzte Kegelräder bzw. Hypoidgetriebe, Annäherung der eingezeichneten Paarungen B_1, B_2)

Die *Triebstockverzahnung* stellt eine abgewandelte Zykloidenverzahnung dar (Punktverzahnung erweitert durch Zapfen). Ihre Anwendung finden wir vorwiegend bei großen Drehkränzen der Fördertechnik. Wegen des Verschleißes und der meist als Evolvente angenäherten Zahnform des Ritzels kommen bei Triebstockverzahnungen nur kleine Umfangsgeschwindigkeiten in Betracht [2]. Das Bestreben, Verzahnungen mit hoher Flankentragfähigkeit (Grübchen) zu entwickeln, führte zu Profilverzahnungen mit den Krümmungen konkav-konvex (analog der Paarung Innenverzahnung - Außenverzahnung).

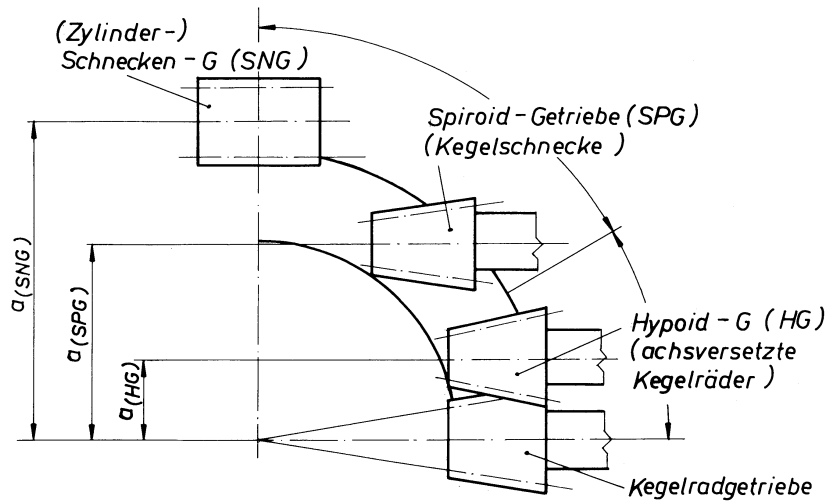


Bild 1/20 Radkörperformen/Getriebearten bei sich kreuzenden Achsen; Getriebearten abhängig vom Achsversatz

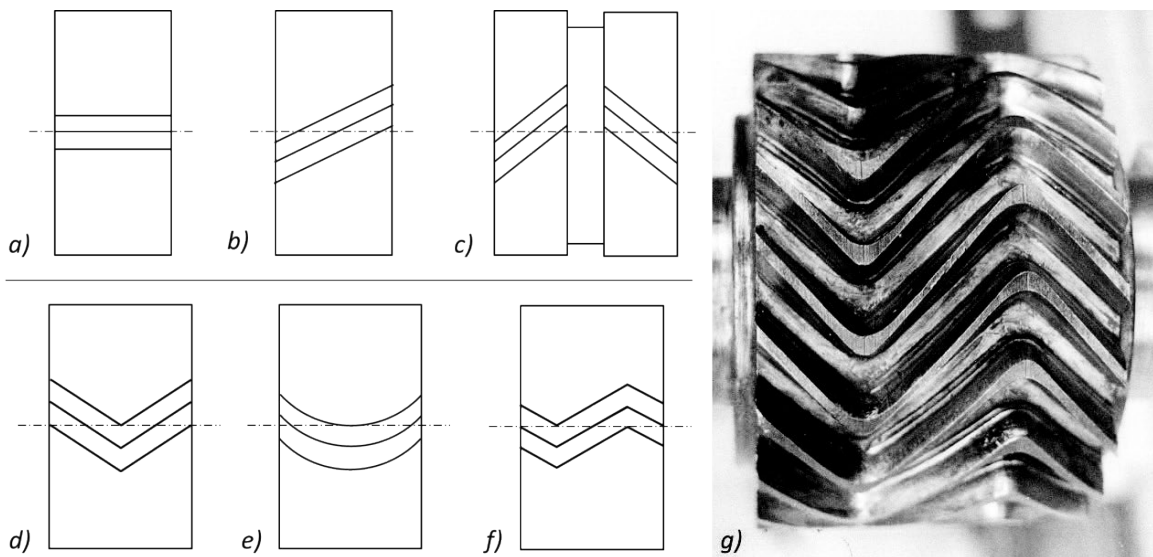


Bild 1/21 Unterscheidung der Stirnräder/Stirnradgetriebe nach dem Flankenlinienverlauf

I: z. Z. häufig benutzte Verzahnungen

a) Geradverzahnung

b) Schrägverzahnung

c) Doppelschrägverzahnung

II: ältere, z. Z. wenig oder nicht mehr verwendete Verzahnungen

d) Pfeilverzahnung

e) Bogenverzahnung

f) Doppelwinkelverzahnung [1/3]

g) Doppelwinkelverzahnung (ehemaliger Antrieb der Bergschwebebahn Dresden Loschwitz, Foto: K. Ketschau)

Bedeutung erlangte vor allem die Kreisbogenverzahnung nach *Wildhaber* und *Novikov* (siehe Bild 1/22). Bei dieser Verzahnung kann das Kreisbogenprofil im Normalschnitt (Wildhaber) und im Stirnschnitt (Novikov) liegen. Fertigungstechnisch ist die erstgenannte Ausführung günstiger. Der Vorteil der Wildhaber-Novikov-Verzahnung gegenüber der Evolventenverzahnung ist die 1,5- bis 3-fach höhere Zahnflankentragfähigkeit (Grübchen). Zu den wesentlichen Nachteilen gehören die wegen der konzentrierten Belastung meist geringere Zahnfußtragfähigkeit gegenüber der Evolventenverzahnung, die Empfindlichkeit bei Achsabstandsänderungen (Lärm, Schwingungen).

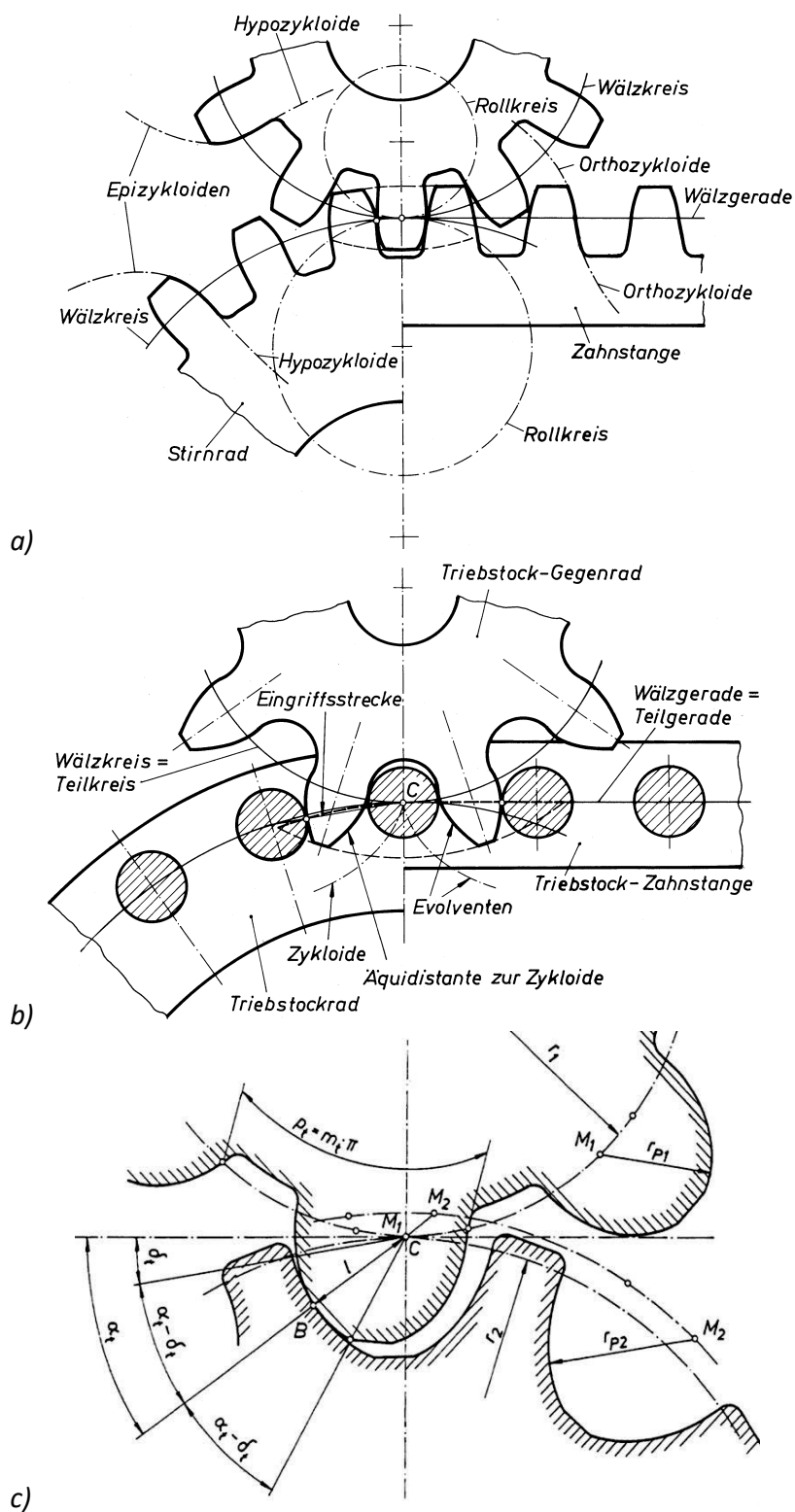


Bild 1/22 Nicht-evolventische Verzahnungen;

a) Zykloidenverzahnung

b) Triebstockverzahnung

c) Wildhaber-Novikov-Verzahnung

Außerdem sind die größeren Herstellkosten (Werkzeugkosten) und die meist erforderliche Beschränkung auf vergütete Verzahnungen (Einlauf; bisher meist keine Schleifeinrichtung vorhanden) ungünstig. Getriebe mit Novikov-Verzahnung wurden in der ehemaligen UdSSR industriell ausgeführt. Gegenüber der *einsatzgehärteten, geschliffenen* Evolventenverzahnung besitzt sie jedoch keine besseren Eigenschaften. Es ist deshalb nicht mit einer weiteren Ausbreitung dieser Sonderverzahnung zu rechnen. Begriffe für Zahnradgetriebe und Zahnradpaare sind in DIN 868, DIN 3998-1 und DIN 3998-2 genormt.

1.3 Verzahnungsgesetz für Stirnradverzahnungen

Für Verzahnungen besteht fast immer die Forderung, bei konstanter Antriebsdrehzahl eine konstante Abtriebsdrehzahl zu gewährleisten, d. h. die Übersetzung i soll sich nicht periodisch ändern. Sind Achsabstand a und Übersetzung i der Radpaarung vorgegeben, liegen die Wälzkreise mit ihren Radien $r_{w1,2}$ fest:

$$r_{w1} = \frac{a}{1 - i} \tag{1/21}$$

$$r_{w2} = a - r_{w1} \tag{1/22}$$

$$\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -i \tag{1/23}$$

Hinweis: $i < 0$ für Außenradpaare (Außenrad – Außenrad)
 $i > 0$ für Innenradpaare (Innenrad – Außenrad)

Eine Drehrichtungsumkehr drückt $i < 0$ aus. Bei Innenverzahnungen sind r_w und z negativ, ebenso der dazugehörige Achsabstand a . Damit aber die Wälzkreise auch im gewünschten Verhältnis vorliegen, muss die Verzahnung dem *Verzahnungsgesetz* genügen. Wählt man zur Erzeugung des Zahnprofils Rollkreise (Zykloidenverzahnung), entstehen automatisch Zahnprofile, die – falls die Gesamtüberdeckung $\epsilon_\gamma \geq 1$ ist – die Bewegungsübertragung mit $i = \text{konstant}$ gewährleisten.

Im Folgenden soll zunächst die Frage allgemein beantwortet werden, unter welchen Bedingungen bei beliebigen Zahnprofilformen die Übersetzung konstant ist (bei der die Drehung nicht periodisch schwankt).

Aus dieser Bedingung – dem Verzahnungsgesetz – soll abgeleitet werden, wie man bei einem gegebenen Zahnprofil das Gegenprofil unter der Bedingung $i = \text{konstant}$ und $r_{w1,2}$ gegeben bestimmen kann.

Zur Ableitung des Gesetzes für Stirnradgetriebe gehen wir von Bild 1/23 aus. Zwei Zahnflanken berühren sich im Punkt P_y . Die Flanke 1 dreht sich mit ω_1 um den Mittelpunkt 0_1 und Flanke 2 mit ω_2 um 0_2 . Im Berührungspunkt haben die Zahnflanken die Geschwindigkeit v_{y1} bzw. v_{y2} .

$$v_{y1} = \omega_1 r_{y1}, \quad v_{y2} = -\omega_2 r_{y2} \tag{1/24}$$

Damit kein Flankenablösen erfolgt, müssen beide Flanken in Richtung der Normalen \overline{NN} eine gleiche Geschwindigkeit v_n besitzen. Sie schließt mit v_{y1} bzw. v_{y2} die Winkel α_{y1} bzw. α_{y2} ein.

$$\cos \alpha_{y1} = \frac{v_n}{v_{y1}}, \quad \cos \alpha_{y2} = \frac{v_n}{v_{y2}} \tag{1/25}$$

Mit α_{y1}, α_{y2} durch die Radien r_b und r_y ausgedrückt ergibt sich

$$\cos \alpha_{y1} = \frac{r_{b1}}{r_{y1}}, \quad \cos \alpha_{y2} = \frac{r_{b2}}{r_{y2}} \quad (1/26)$$

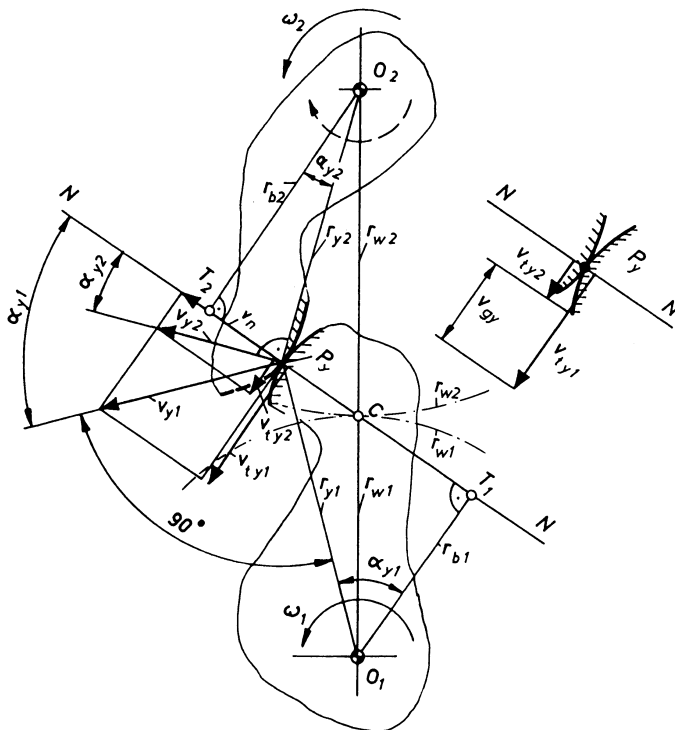
Aus Gl. (1/25) und (1/26) erhält man

$$u_{y1} \frac{r_{b1}}{r_{y1}} = u_{y2} \frac{r_{b2}}{r_{y2}}$$

Mit $\frac{u_{y1}}{r_{y1}} = \omega_1, \quad \frac{u_{y2}}{r_{y2}} = -\omega_2, \quad \frac{r_{b1}}{r_{b2}} = \frac{r_{w1}}{r_{w2}}, \quad r_{w1,2} = \overline{O_{1,2}C}$ (1/27)

ergibt sich

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \quad (1/28)$$



Die Wälzkreisradien $r_{w1,2}$ sind durch die Lage des Punktes C, dem Wälzpunkt, festgelegt. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Normalen \overline{NN} der sich berührenden Zahnflanken mit der Verbindungslinie der Radmittelpunkte $\overline{O_1O_2}$. Die Übersetzung i nach Gl. (1/28) ist demzufolge konstant, wenn die gemeinsame Normale \overline{NN} durch einen Punkt konstanter Lage, den Wälzpunkt C, geht. Es lässt sich somit das *Verzahnungsgesetz*¹⁾ formulieren:

Bild 1/23 Geschwindigkeiten an gepaarten Zahnflanken

„Soll eine Winkelgeschwindigkeit mit gleichförmiger Übersetzung von einer Welle auf eine zweite durch Zahnflanken übertragen werden, muss die gemeinsame Normale der beiden als Flankenprofile verwendeten Kurven in jedem Berührungspunkt durch den Wälzpunkt C gehen.“

Durch dieses Gesetz ist für ein gegebenes Flankenprofil und für gegebene Wälzkreise das Gegenprofil eindeutig bestimmt. Das Vorgehen soll an einem Beispiel demonstriert werden.

Es sei das im Bild 1/24 dargestellte zum Rad I gehörende Flankenprofil gegeben. Das Gegenprofil B soll so bestimmt werden, dass eine konstante Übersetzung vorliegt. Aufgrund des Verzahnungsgesetzes ist die Konstruktion dieser Flanke punktweise möglich. Das Vorgehen wird zunächst für einen Punkt beschrieben.

¹⁾ Bei räumlichen Getrieben (nicht schneidende, nicht parallele Achsen) ist das Verzahnungsgesetz anders zu formulieren (siehe u. a. F. L. Litvin [1.32]).

Die Wälzkreisradien r_{w1} , r_{w2} ergeben sich aus der Übersetzung $i = -r_{w2}/r_{w1}$ und dem Achsabstand nach Gln. (1/21, 1/22). Für die Paarung Rad - Zahnstange ist der Wälzkreis frei wählbar, aber nicht jede Größe ist zweckmäßig. Mit Gl. (1/21 bzw. 1/22) ist der Wälzpunkt C als Berührungspunkt der Wälzkreise definiert. Auf dem gegebenen Profil (A) wird ein Punkt (A_1) gewählt. Der mit diesem Punkt zur Berührung kommende Punkt (B_1) des Gegenprofils (B) soll bestimmt werden. Die Normale auf das Profil (A) im Punkt A_1 wird mit dem Wälzkreis des Rades 1 zum Schnitt gebracht (Punkt I). Punkt A_1 berührt das Gegenprofil, wenn diese Normale durch den Wälzpunkt C geht.

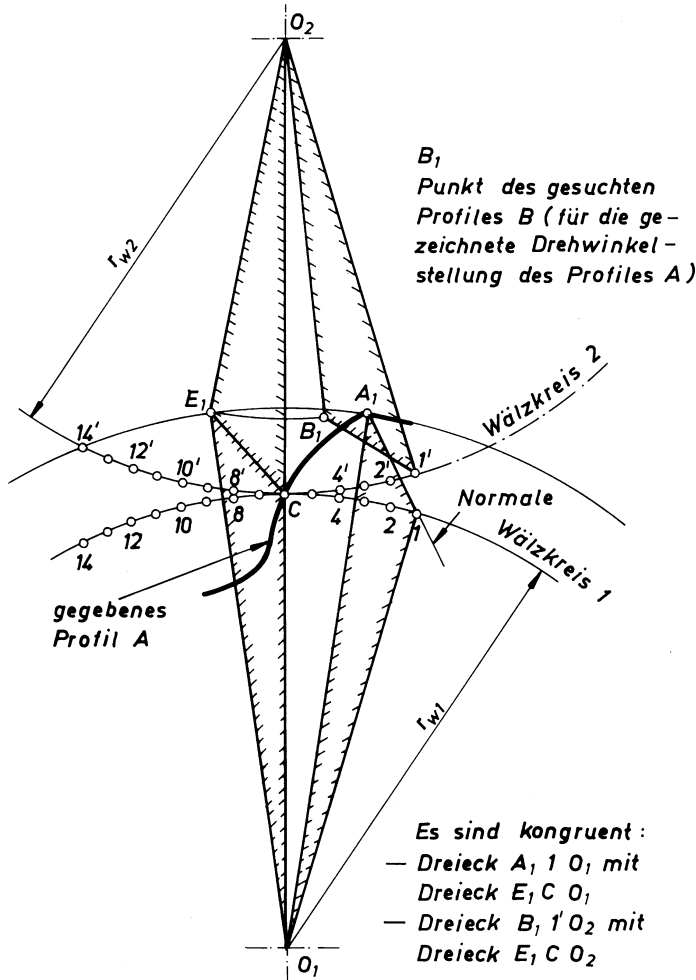


Bild 1/24 Konstruktion eines Punktes des Gegenprofils

Hierzu muss sich Rad 1 so weit gedreht haben, dass der Punkt I mit der Lage des Wälzpunktes C übereinstimmt. Nach dieser Drehung entspricht E_1 der neuen Lage des Punktes A_1 und auch des gesuchten Punktes auf der Gegenflanke (B) (die Dreiecke O_1A_1I und O_1E_1C sind kongruent). Nach den obigen Darlegungen berühren sich die Flanken in E_1 , da die Normale durch den Wälzpunkt C geht. Es ist nur noch die Lage des gesuchten Punktes in der Ausgangsstellung zu bestimmen. Da die Wälzkreise ohne Schlupf (kein Gleiten) aufeinander abrollen, wird Rad 2 ebenfalls um die Bogenlänge $\widehat{1C} = \widehat{1'C}$ gedreht. Die Ausgangslage des sich in E_1 berührenden Punktes des Profils (B) des Rades 2 erhält man durch Rückdrehung um diesen Bogen. Er nimmt danach die Lage B_1 ein. B_1 ist der gesuchte Punkt (der zu A_1 gehörige Punkt) des Gegenprofils (B) für die gezeichnete Stellung des Profils A . Die einzelnen Drehungen sind in Bild (1/24) durch schraffierte Dreiecke verdeutlicht.

Zur Übertragung der abgewälzten Bogenlängen auf dem Wälzkreis z. B. $\widehat{1C}$ von Rad 1 auf Rad 2 $\widehat{1'C}$, teilt man bei Nutzung üblicher zeichnungstechnischer Hilfsmittel den Umfang beider Wälzkreise in der Umgebung des Wälzpunktes in kleine, gleiche Bogenlängen ein (gegeben durch die Punkte $1, 2, 3, 4, 5 \dots; 1', 2', 3', 4', 5' \dots$). Die Länge dieser Abschnitte ist so zu wählen, dass sich Bogen- und Sehnenlängen nicht wesentlich unterscheiden. Indem nun dieses Vorgehen auf die auf das gesamte Profil A verteilten Punkte A_1, A_2, \dots, A_n angewendet wird (Bild 1/25), ergibt sich aus der Verbindung der gewonnenen Punkte E_1, E_2, \dots, E_n die sogenannte *Eingriffslinie* als geometrischer Ort der Berührung beider Profile und aus den Punkten B_1, B_2, \dots, B_n das gesuchte Gegenprofil, z. B. das zu bestimmende Werkzeug.

Man bedient sich dazu zweckmäßigerweise der bereits erwähnten Einteilung der Wälzkreise in gleiche Bogenstücke. Von den Punkten des Wälzkreises, zu denen das gegebene Profil gehört, werden die Normalen zum gegebenen Profil gezogen (Punkte A_1, A_2, \dots). Für jeden dieser Punkte (A_1, A_2, \dots) konstruiert man den Punkt des Gegenprofils (B_1, B_2, \dots) wie für A_1, B_1 beschrieben. Die Konstruktion des Wälzwerkzeugs für ein gegebenes geradflankiges Profil einer Welle („Keilwelle“) zeigt Bild 1/26 am Beispiel des Punktes A_5 . Denkt man sich das gegebene Profil (Zahn) als Schneidwerkzeug (z. B. Hobelkamm, Wälzfräser), das zwangsläufig geführt wird und auf dem Wälzkreis des zu erzeugenden Profils abrollt, entsteht automatisch das dem Verzahnungsgesetz entsprechende Gegenprofil (Bild 2.1/8).

Dieses Konstruktionsprinzip nutzt man oft zur Ermittlung der Zahnfußübergangskurve. Bild 1/27 zeigt diese Konstruktion der Kurve, die von der Kopfante (K) des Gegenprofils B (Werkzeug) beim Abwälzen relativ zum zu erzeugenden (gegebenen) Profil A beschrieben wird. Sie entspricht der entstehenden Fußkurve am erzeugten Gegenprofil, wenn das gegebene Profil ein Werkzeugprofil darstellt.

Es wird die Bahn des Kopfpunktes (hier mit K bezeichnet) relativ zum Gegenprofil beim Abrollen betrachtet. Hierzu teilt man zunächst beide Wälzkreise (bzw. Wälzgerade und Wälzkreis) in kleine, in der Bogenlänge gleiche Abschnitte ein. Beim gedachten Abrollen des Wälzkreises des erzeugenden Rades (Profils) auf dem Wälzkreis des Gegenrades (Profils) sind dann in bestimmten Lagen der Punkt I mit I' , 2 mit $2'$, 3 mit $3'$ usw. deckungsgleich.

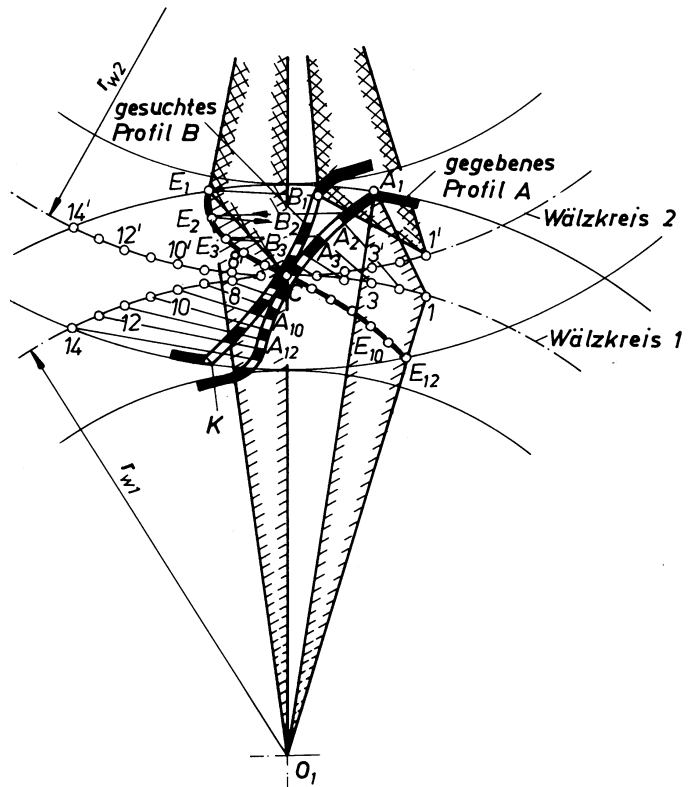


Bild 1/25 Konstruktion des Gegenprofils

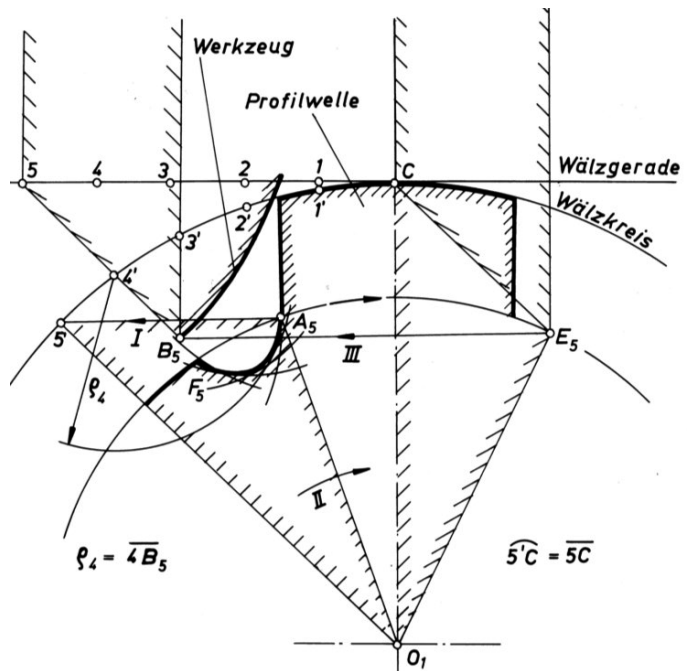


Bild 1/26 Konstruktion des Abwälzwerkzeugs für ein gegebenes geradflankiges (Keil-)Wellenprofil

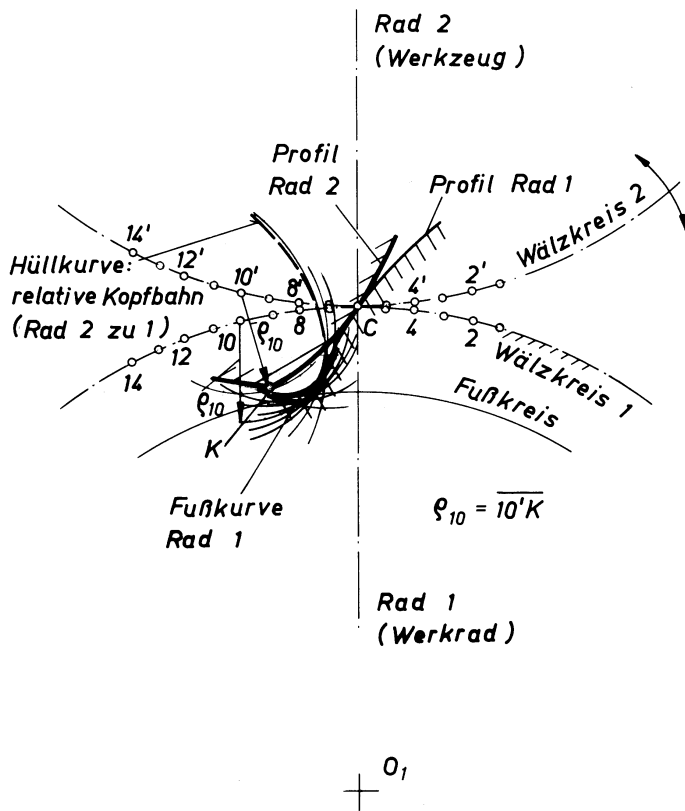


Bild 1/27 Konstruktion der relativen Bahn des Kopfpunktes; erzeugte Fußkurve bei Werkzeug ohne Kopfrundung (Schneidrad)

Die Kopfkante K des mit dem Wälzkreis (2) fest verbundenen erzeugenden Profils besitzt unabhängig von der relativen Lage des Wälzkreises 1 zum Wälzkreis 2 einen jeweils konstanten Abstand zu den wählbaren Punkten des Wälzkreises (1) des erzeugenden Profils. Dieses bedeutet, dass die Kopfkante K , wenn Punkt 10 auf 10' zu liegen kommt, vom Punkt 10 den Abstand $\rho_{10} = \overline{10'K}$ besitzt. Begnügt man sich zunächst damit, zu wissen, dass K in dieser neuen Lage auf einen um 10' geschlagenen Kreisbogen mit dem Radius ρ_{10} liegt, zieht diesen Kreisbogen und führt für eine genügende Anzahl Punkte diese Konstruktion durch, erhält man die gesuchte Fußkurve schließlich automatisch als Hüllkurve. Ein weiteres Beispiel zur Konstruktion der Fußkurve ist in Bild 1/26 ersichtlich, wo die Kopfkante des Werkzeuges (B_5) den durch die Hüllkurve ermittelten Unterschnitt (F_5A_5) erzeugt.

Um eine möglichst kleine Spannungskonzentration (Kerbwirkung) im Zahnfuß zu erhalten, wird man eine Fußkurve mit möglichst großen Krümmungsradien anstreben. Aufgrund des Eingriffes des Gegenrades (relative Kopfbahn des Gegenrades) ist diese nicht beliebig wählbar. Sie muss unterhalb der Hüllkurve liegen, die vom Zahnkopf des Gegenrades beschrieben wird. Besitzt das Gegenprofil eine Kopfrundung (z. B. erzeugendes zahnstangenförmiges Werkzeug), konstruiert man zunächst die relative Bahn des Mittelpunktes der Kopfrundung nach dem beschriebenen und im Bild 1/27 dargestellten Verfahren. Danach ermittelt man die Fußkurve als Äquidistante zur Mittelpunktbahn (Bild 1/28).

Dieses erfolgt, indem man eine größere Anzahl Kreise mit dem Kopfrundungsradius ρ_a zeichnet, deren Mittelpunkte auf der Bahn von M liegen. Die sich ergebende Hüllkurve ist die gesuchte Fußübergangskurve. Sie stellt eine *Zykloide* dar. Es ist zu beachten, dass nicht jedes nach dem beschriebenen Verfahren konstruierte Profil brauchbar ist.

Ein Profil ist nicht brauchbar, wenn beliebige Kreise um den Mittelpunkt des betreffenden Rades das Profil mehr als einmal schneiden können (Bild 1/29) und ein konkaves auf ein konkaves Profil oder ein konvexes auf ein konkaves mit einem betragsmäßig kleineren Krümmungsradius zu liegen kommt (Bild 1/30). Den in Bild 1/30 dargestellten Fall erkennt man auch am Verlauf der aus den Punkten E_1, \dots, E_n (Punkte E_i siehe Bild 1/25) gebildeten Eingriffslinie. Es liegt ein ungeeignetes Profil vor, wenn mehr als ein Punkt der Eingriffslinie einen gleichen Abstand zum Mittelpunkt besitzt. Durch den Kopfkreis (Kopfnutzungskreis) ist der praktische genutzte Teil des Profils nach außen und durch den Fußnutzkreis nach innen begrenzt.

Bild 1/28 Konstruktion der relativen Bahn des gerundeten Kopfes des Gegenprofils (Zahnstangenprofil) als Hüllkurve zur Äquidistanten des Mittelpunktes M der Kopfrundung; Fußkurve bei Herstellung der Verzahnung

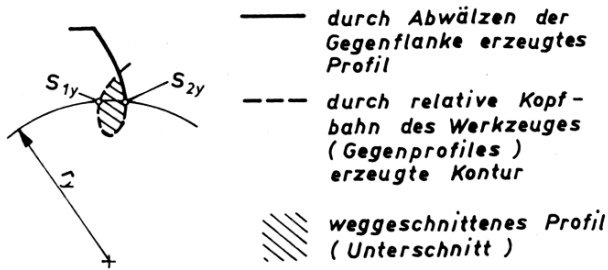
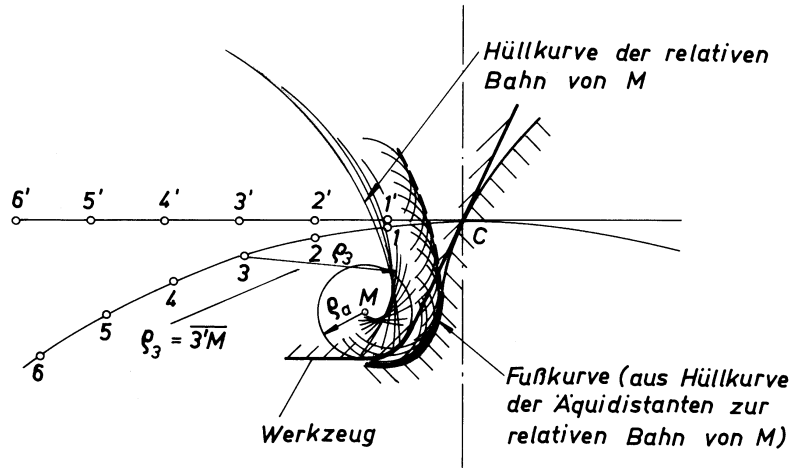


Bild 1/29 Ungeeignetes Zahnprofil

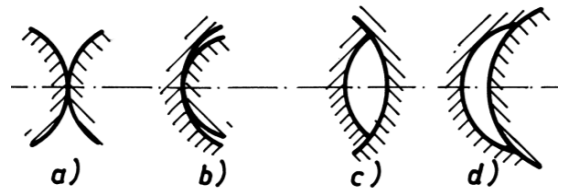


Bild 1/30 Brauchbare (a und b) und unbrauchbare Zahnprofilpaarungen (c und d)

Nachdem dargelegt wurde, wie zu einem beliebigen gegebenen Profil das Gegenprofil konstruiert werden kann, erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen man nicht unmittelbar durch gegenseitiges Abwälzen hergestellte Verzahnungen miteinander paaren kann, so dass ein einwandfreier Lauf, d. h. $i = \text{konst.}$ möglich ist. Diese Eigenschaft wird *Satzrädereigenschaft* genannt. Die besonderen Eigenschaften soll Bild 1/31 verdeutlichen [1/3]. Das Profil des mit A bezeichneten Rades kann durch Abwälzen des Zahnstangenprofils B_0 erzeugt werden. Das Profil B würde andererseits durch A_0 ausgewalzt. Da die als Zahnstangen ausgeprägten erzeugenden Profile Komplementprofile darstellen (siehe unten rechts), kann auch A mit B und A_1 mit B_1 abwälzen:

Liegt also ein passendes Wälzräderpaar $A + B$ vor, so passen sämtliche Räder B_0, B_1, \dots, B_n , die mit A zusammenarbeiten würden, zu sämtlichen Rädern A_0, A_1, \dots, A_n , die mit B zusammenarbeiten würden [1/3].

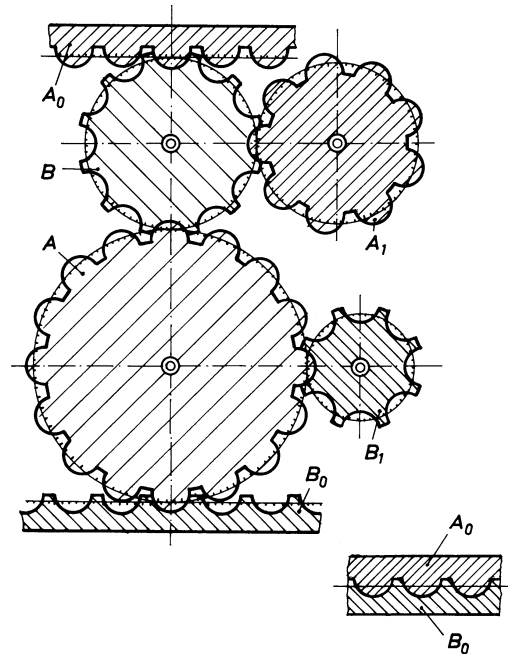


Bild 1/31 Paarverzahnungen (Kutzbach [1/3])

Zur Herstellung der Räder A_1, \dots, A_n (des Teilsatzes A) und der Räder B_1, \dots, B_n (des Teilsatzes B) benötigt man also 2 Werkzeuge (A_0, B_0). Man nennt dieses Verzahnungssystem *Paarverzahnung*. Es liegt nun der Gedanke nahe, die erzeugenden Profile (Zahnstangen) zentralsymmetrisch auszubilden, so dass $A_0 = B_0$ wird (Bild 1/32). Unter dieser Voraussetzung entfallen die Unterschiede zwischen Teilsätzen A_1, \dots, A_n und B_1, \dots, B_n und sämtliche Räder verschiedener Zähnezahlen, die mit einem einzigen Werkzeug hergestellt werden können, sind untereinander beliebig paarungsfähig. Dieser Zustand wird *Satzradeigenschaft* genannt:

Nach Releaux sind Satzräder solche gleich geteilten Räder, die einen Satz bilden und bei beliebiger Paarung richtig untereinander arbeiten können [1/31] (siehe auch [2])

Bild 1/32 zeigt ein zentralsymmetrisches gerades Erzeugungsprofil (Planverzahnung), das die Satzradeigenschaften gewährleistet (Profil A_0 identisch zu B_0). In seiner einfachsten Form besitzt es gerade Zahnflanken (Evolventenverzahnung!). Das gerade Erzeugungsprofil bzw. die als Grenzfall an einer Zahnstange abgebildete Verzahnung wird *Bezugsprofil* genannt (Abschnitt 2.1.1.2). Es erzeugt in jedem Fall brauchbare Zahnprofile, wenn Zahnhöhe h , Eingriffswinkel α und Schrägungswinkel β so gewählt sind, dass während der Drehung der Zahnräder sich stets mindestens ein Flankenpaar im Eingriff befindet, d. h. die Gesamtüberdeckung $\varepsilon_\gamma \geq 1$ beträgt.

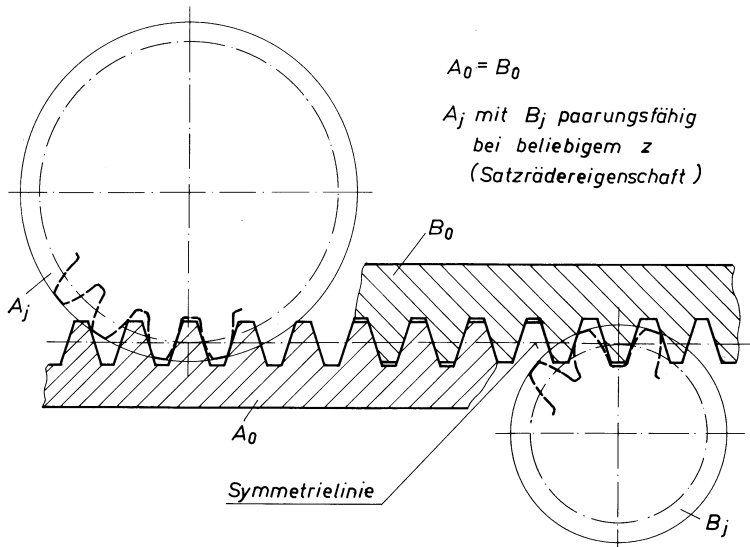


Bild 1/32 Satzradeigenschaften durch zentralsymmetrisches Bezugsprofil (Zahnstangen-Wälzprofil)

1.4 Grundbeziehungen

1.4.1 Übersetzung

Die im Abschnitt 1.2 erwähnte Anpassung erfolgt durch Änderung der Eingangsgröße in die Ausgangsgröße. Quantitativ wird dieses durch die Übersetzung i ausgedrückt.

Die Übersetzung i ist das Verhältnis von Antriebswinkelgeschwindigkeit zu Abtriebswinkelgeschwindigkeit.

Bei drehender An- und Abtriebsbewegung ist somit bei Beachtung der Beziehung (1/29) zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Drehzahl n

$$\omega = 2\pi n \quad (1/29)$$

die Übersetzung i

$$i = \omega_{an}/\omega_{ab} = n_{an}/n_{ab} \quad (1/30)$$

Als *Vorzeichenregel* gilt: Bei gleicher Drehrichtung von An- und Abtriebswelle ist die Übersetzung i positiv, bei entgegengesetzter Drehrichtung von An- und Abtrieb ist i negativ.

Häufig und bei nicht parallelen Wellen wird für i nur der absolute Betrag ohne zusätzliche Anmerkung oder Unterscheidung der Drehrichtung angegeben. Wie groß die Übersetzung eines Getriebes ist, hängt von den speziellen Abmessungsverhältnissen ab.

Für Rädergetriebe soll nun die Übersetzung aus den Abmessungen abgeleitet werden. Ebenfalls wie Reibradgetriebe können Zahnradgetriebe als zwei aufeinander abrollende Radkörper betrachtet werden. Da bei ihnen in Wirklichkeit die Kraftübertragung formschlüssig erfolgt (Ineinandergreifen der Zähne), ist an der Berührungsstelle der abrollenden Radkörper (Wälzylinder) die Umfangsgeschwindigkeit gleich groß (Bild 1/33).

$$v_1 = v_2 = v \quad (1/31)$$

Die Geschwindigkeit v bei einer Drehbewegung ist

$$v = \omega r \quad (1/32)$$

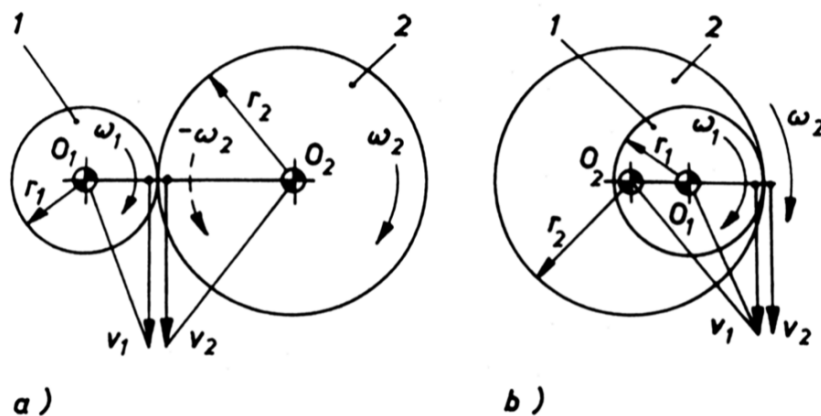


Bild 1/33 Geschwindigkeit an einem Stirnradpaar
 a) Außenradpaar;
 b) Innenradpaar

Somit ergibt sich für die Geschwindigkeiten nach Bild 1/33 für die Paarung Außenrad/Außenrad

$$\omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2 \quad (1/33)$$

und damit für die Übersetzung i mit $d = 2r$ für Rädergetriebe

$$i = \omega_1/\omega_2 = -d_2/d_1 \quad (1/34)$$

Da im Abschnitt 2.1.1.3 die Durchmesser und Zahnzahl des Innenrades als negative Größen definiert sind, gilt Gl. (1/34) auch für Innengetriebe.

Die Übersetzung i einer Radpaarung ist gleich dem negativen Verhältnis des (Wälzkreis-) Durchmessers des Abtriebsrades zu dem des Antriebsrades.

Oft wird nur der Betrag der Übersetzung bestimmt und das negative Vorzeichen in Gl. (1/33 und 1/34), das die Drehrichtungsumkehr ausdrückt, weggelassen.

Bei *Zahnradgetrieben* ist der Durchmesser proportional zur Zähnezahl, so dass sich mit $d_1 = z_1 m$, $d_2 = z_2 m$ (m Proportionalitätsfaktor; Modul) für Außen- und Innengetriebe ergibt

$$i = \omega_1 / \omega_2 = -z_2 / z_1 \quad (\text{für Innengetriebe ist } z_2 < 0, \text{ Hohlrad!}) \quad (1/35)$$

Die Übersetzung mehrstufiger Getriebe kann aus den Übersetzungen der einzelnen Getriebestufen abgeleitet werden, indem ausgehend von der An- oder Abtriebsdrehzahl die Drehzahlen der Zwischenwellen durch die Übersetzungen der einzelnen Getriebestufen ausgedrückt werden. Für eine beliebige Getriebestufe (j), z. B. der 2. Stufe ($j = 2$) des Getriebes nach Bild 1/34 ist

$$i_j = n_{an j} / n_{ab j} \quad n_{an j} = n_{ab j-1} \quad n_{ab j} = n_{an j+1}$$

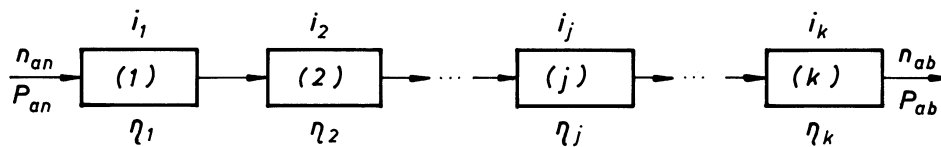


Bild 1/34 Hintereinandergeschaltete (schematisch dargestellte) Getriebestufen, zur Ableitung der Übersetzung und des Wirkungsgrades mehrstufiger Getriebe

Geht man von n_{ab} aus und ersetzt diese Größe durch $n_{an k} / i_k$ und setzt dieses bis zur ersten Stufe fort, ergibt sich allgemein.

$$n_{ab} = \frac{n_{an}}{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} \quad (1/36)$$

Aufgrund von Gl. (1/30) ist also

$$i = i_1 i_2 i_3 \dots i_k \quad (1/37)$$

Die Gesamtübersetzung i eines mehrstufigen Getriebes ist gleich dem Produkt der Übersetzungen $i_1 \dots i_k$ der einzelnen hinter einander geschalteten Getriebestufen.

Ein Beispiel eines mehrstufigen Getriebes zeigt Bild 1/35.

Zu einem speziellen Ergebnis führt die Anwendung der Regeln zur Ermittlung der Gesamtübersetzung bei Räderketten (Bild 1/36). Hier sind die zwischen An- und Abtriebsrad liegenden Zwischenräder direkt mit dem jeweils antreibenden und angetriebenen Rad im Eingriff. Liegen $(k + 1)$ Zahnräder vor, ergeben sich k Zahneingriffe, denen die Stufenübersetzung $i_j = -z_{j+1} / z_j$ zugeordnet wird. Bildet man das Produkt der Einzelübersetzungen nach der Vorschrift von Gl. (1/37)

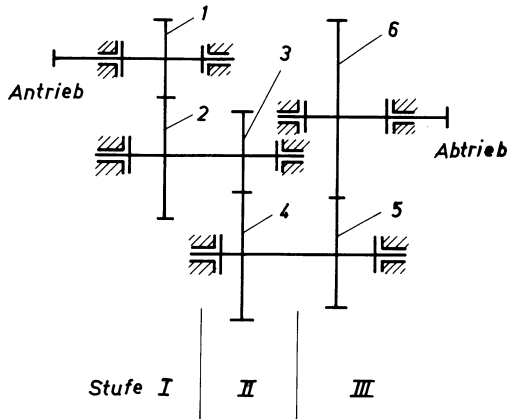
$$i = \prod_{j=1}^k i_j \quad (1/38)$$

ergibt sich

$$i = \frac{z_{ab}}{z_{an}} (-1)^k \quad (1/39)$$

mit der Anzahl der Zahneingriffe k (bei $k + 1$ Zahnrädern). Gl. (1/39) zeigt, dass der absolute Betrag der Übersetzung bei Räderketten nur von den Zähnezahlen des Ab- und Antriebsrades

abhängt. Die Zwischenräder (zweites bis k -tes Zahnrad) haben nur Einfluss auf die Drehrichtung. Die Drehzahlen eines *Umlaufrädergetriebes* (Planetengetriebes) ergeben sich aus der Überlagerung (Summe) der Drehzahlen des ideellen Standgetriebes (Bewegung relativ zum Steg) und der Drehzahl, die als Drehung des Gehäuses betrachtet werden kann. Zur praktischen Berechnung haben sich spezielle Verfahren bewährt [17], [18], [19].



$$i = i_I i_{II} i_{III}$$

$$i_I = -z_2/z_1$$

$$i_{II} = -z_4/z_3$$

$$i_{III} = -z_6/z_5$$

$$i = -(z_2/z_1)(z_4/z_3)(z_6/z_5)$$

Bild 1/35 Mehrstufiges Stirnradgetriebe

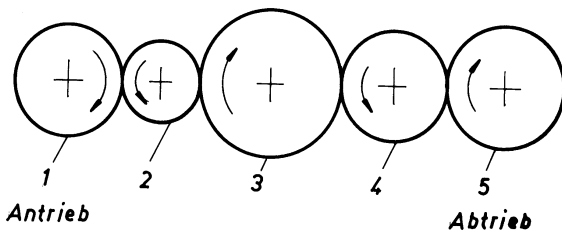


Bild 1/36 Räderkette

1.4.2 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad η ist als der absolute Betrag des Verhältnisses zwischen Abtriebsleistung P_{ab} und Antriebsleistung P_{an} definiert.

$$\eta = |P_{ab}/P_{an}| \tag{1/40}$$

Das Leistungsgleichgewicht eines Getriebes ergibt $\Sigma P = 0$, wenn die zugeführte Leistung als positiv und die abgegebene Leistung (einschließlich Verlustleistung) als negativ definiert wird.

$$P_{an} + (P_{ab} + P_V) = 0 \tag{1/41}$$

P_{an} Antriebsleistung P_{ab} Abtriebsleistung P_V Verlustleistung

Mit $P_V = -(1 - \eta)P_{an}$ ergibt sich $\eta P_{an} + P_{ab} = 0$ bzw.

$$\eta = -P_{ab}/P_{an} \tag{1/42}$$

Oft ist es üblich, nur mit den absoluten Beträgen der Leistungen zu rechnen. Im Hinblick auf Umlaufgetriebe, bei denen die Summe von Leistungen, Drehzahlen und Drehmomenten zu bilden ist, bestätigt sich die vorzeichenbehaftete Definition dieser Größen als sehr vorteilhaft.

Drückt man die Leistungen durch die Drehmomente und Winkelgeschwindigkeiten aus, erhält man für den Wirkungsgrad

$$\eta = -\frac{M_{ab}\omega_{ab}}{M_{an}\omega_{an}} \quad (1/43)$$

Bezeichnet man als Momentverhältnis $M_{ab}/M_{an} = i_M$, ergibt sich mit dem bereits definierten Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\omega_{an}/\omega_{ab} = i$

$$\boxed{\eta = -i_M/i} \quad (1/44)$$

Da Zahnradgetriebe aus formschlüssigen Übertragungselementen aufgebaut sind, entstehen Verluste allein im Drehmomentverhältnis i_M (im Gegensatz zu Reibradgetrieben und anderen kraftschlüssigen Getrieben und Kupplungen).

Der Gesamtwirkungsgrad η eines Antriebes bzw. Getriebes ergibt sich aus dem Einzelwirkungsgraden der hintereinandergeschalteten Getriebe bzw. Getriebestufen. Ausgehend vom Bild 1/34 erhält man für das j -te Element

$$\eta_j = -P_{abj}/P_{anj}; \quad P_{anj} = -P_{abj-1}; \quad P_{abj} = -P_{anj+1}$$

Ersetzt man jeweils P_{abj} durch $(-P_{anj}\eta_j)$ und führt dieses schrittweise beginnend von der letzten Stufe (k) bis zur ersten Stufe fort, ergibt sich

$$P_{ab} = P_{an}\eta_1\eta_2\eta_3 \dots \eta_k \quad (1/45)$$

Unter Beachtung von Gl. (1/42) ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\boxed{\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \dots \eta_k} \quad (1/46)$$

Es gilt somit folgender Satz:

Der Gesamtwirkungsgrad η ergibt sich als das Produkt der Einzelwirkungsgrade $\eta_1 \dots \eta_k$ der hintereinander geschalteten (Getriebe-)Elemente.

Ein Vergleich typischer Werte des Wirkungsgrades zwischen Stirnradgetrieben (eine Stufe) und anderen Getrieben zeigt Tabelle 1/1. Es ist ersichtlich, dass eine Stirnradpaarung die kleinsten Verluste aller Getriebe besitzt. Diese Aussage bleibt auch im Vergleich zu anderen Baugruppen des Antriebes wie Motoren, Turbinen, schlupfbehafteten Kupplungen usw. bestehen.

Die *Ermittlung* der Größe des Wirkungsgrades einer Zahnradpaarung abhängig von den Zahnradaten und hydrodynamischen Bedingungen erfolgt in Abschnitt 6.6.2.

1.4.3 Drehmomente

Zwischen Leistung, Winkelgeschwindigkeit und Drehmoment besteht der Zusammenhang

$$M = P/\omega \quad (1/47)$$

Daraus folgt mit $\eta P_{an} + P_{ab} = 0$ [Gl. (1/42)] bzw. mit $\eta = -M_{ab}\omega_{ab}/(M_{an}\omega_{an})$ [Gl. (1/43)] und $i = \omega_{an}/\omega_{ab}$ [Gl. (1/30)] das Abtriebsmoment M_{ab} .

$$\boxed{M_{ab} = -\eta i M_{an}} \quad (1/48)$$

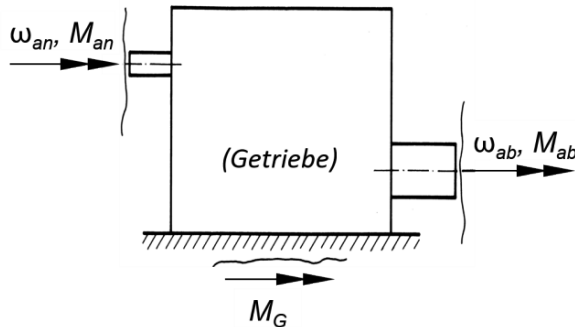
Bei positiver Übersetzung i , d. h., bei gleicher Drehrichtung von An- und Abtrieb ist das Abtriebsmoment als von außen auf das Getriebe wirkende Drehmoment der Drehrichtung der Welle entgegengerichtet. M_{ab} wirkt im Sinne der Hemmung der Drehbewegung.

Da es im Getriebe nach Gl. (1/48) auch zu einer Änderung des Drehmomentes kommt, also im allgemeinen $M_{ab} \neq M_{an}$ ist, muss wegen

$$\sum M = 0 \tag{1/49}$$

ein drittes Drehmoment wirken. Dieses ist das vom Fundament ausgehende Reaktionsmoment, mit dem die Befestigungselemente des Getriebes beansprucht werden (Bild 1/37). Gl. (1/49) ausführlich geschrieben lautet also

$$M_{an} + M_G + M_{ab} = 0 \tag{1/50}$$



$$i = \omega_{an} / \omega_{ab}$$

$$P_{an} + (P_{ab} + P_V) = 0$$

$$M_{an} \omega_{an} = P_{an} > 0$$

$$M_{ab} \omega_{ab} = P_{ab} < 0$$

$$\eta = -P_{ab} / P_{an}$$

$$M_{ab} = -\eta M_{an}$$

Bild 1/37 Von außen auf das Getriebe einwirkende Drehmomente

Mit M_{ab} nach Gl. (1/48) erhält man aus Gl. (1/50) für das vom Fundament auf das Gehäuse eingeleitete Reaktionsmoment M_G

$$M_G = (\eta i - 1) M_{an} \tag{1/51}$$

Die Übersetzung i ist vorzeichenbehaftet einzusetzen.

Infolge eines Momentes $M_G \neq 0$ ist es überhaupt erst möglich, in einem Getriebe eine Änderung des Betrages des Abtriebsmomentes gegenüber dem Antriebsmoment herbeizuführen, siehe Gl. (1/50). Ist $M_G = 0$ kann das entsprechende Gebilde als Kupplung, bei der stets $M_{an} = -M_{ab}$ ist, aufgefasst werden.

1.5 Symbole und Symbolerklärungen

a	mm	Achsabstand	P_V	kW	Verlustleistung
d	mm	Durchmesser, Teilkreisdurchmesser	M	Nm	Drehmoment
i	-	Übersetzung	v	m/s	Geschwindigkeit
i_M	-	Momentverhältnis	z	-	Zähnezahl
k	-	Anzahl der Zahneingriffe	α	°	Eingriffswinkel
m	mm	Modul	ε_γ	-	Gesamtüberdeckung
n	min ⁻¹	Drehzahl	η	-	Wirkungsgrad
r	mm	Radius	ϱ, ρ	mm	Krümmungsradius
P	kW	Leistung	ω	s ⁻¹	Winkelgeschwindigkeit

Indizes

ab	Abtrieb	G	Gestell	w	Wälzkreis
an	Antrieb	n	Normalschnitt	1	Ritzel
b	Grundzylinder	t	Stirnschnitt	2	Rad

2 Geometrie der Verzahnung

2.1 Geometrie der Geradverzahnung

2.1.1 Geometrie der Verzahnung eines Stirnrades

2.1.1.1 Evolvente

Im Allgemeinen wird das Zahnprofil durch einen Abschnitt der Bahnkurve eines auf oder in einem Kreis (Wälzkreis) abrollenden Kreises (Rollkreis) gebildet. Die entstehenden Kurven sind Zykloiden. Im Grenzfall eines unendlich großen Radius des Rollkreises rollt eine Gerade auf einem Kreis ab. Es wird dabei von jedem beliebigen Punkt auf dieser Geraden eine Kurve beschrieben, die Evolvente genannt wird. Der Kreis, auf dem die Gerade abrollt, ist der Grundkreis. Er ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Krümmungskreise des Profils (auch Evolute genannt).

Zu den *Vorteilen der Evolventenverzahnung* gehören

- geradflankige (einfache) Werkzeuge sind einsetzbar (Abschnitt 2.1.1.2),
- Satzrädereigenschaft (Räder gleicher Grundkreisteilung sind paarungsfähig),
- kinematische Unempfindlichkeit bei Achsabstandsänderung (parallele Verschiebung der Achsen mit $\varepsilon_\gamma \geq 1$),
- Profilverschiebung ist möglich (Abschnitt 2.1.2),
- konstante Zahnkraftichtung.

Die *Nachteile* sind

- Unterschnitt bei kleiner Zähnezahl (Abschnitt 2.1.1.3),
- bei Außenverzahnung: Berührung von Flanken mit konvexen Profilen (ungünstig für die Flankenpressung).

Die *Entstehung der Evolvente* wird meist durch einen straff gespannten, vom feststehenden Grundkreis abgerollten Faden dargestellt (Bild 2.1/1).

Denkt man sich bei dem in Bild 2.1/1 demonstrierten Vorgang dem gesamten System eine Drehung überlagert, sodass der Faden eine konstante Richtung behält, kann man sich die Erzeugung auch durch einen vom drehenden Grundzylinder abgezogenen Faden vorstellen.

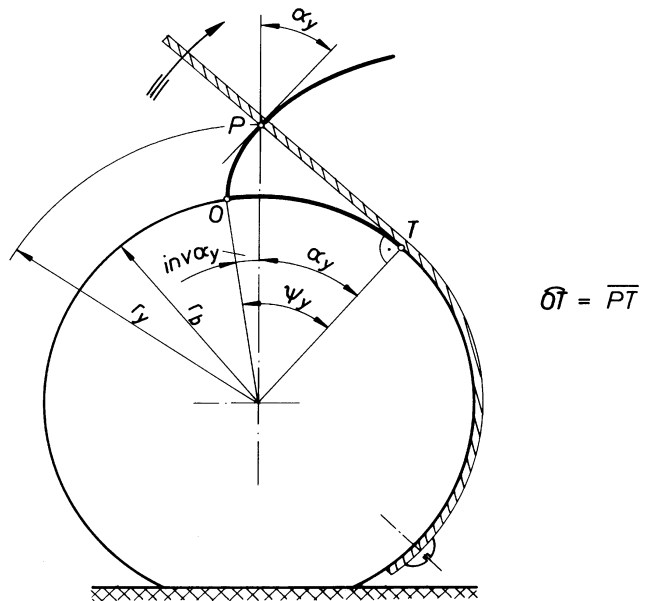


Bild 2.1/1 Entstehung der (Kreis-)Evolvente durch einen Punkt P auf einem abgehobenen, straff gespannten Faden

Der Punkt P - als Spitze eines Schreibstiftes gedacht - zeichnet auf einem mit dem drehenden Grundzylinder fest verbunden gedachten Papier eine Kurve - die Evolvente (identisch mit der Evolvente nach Bild 2.1/1), Bild 2.1/2.

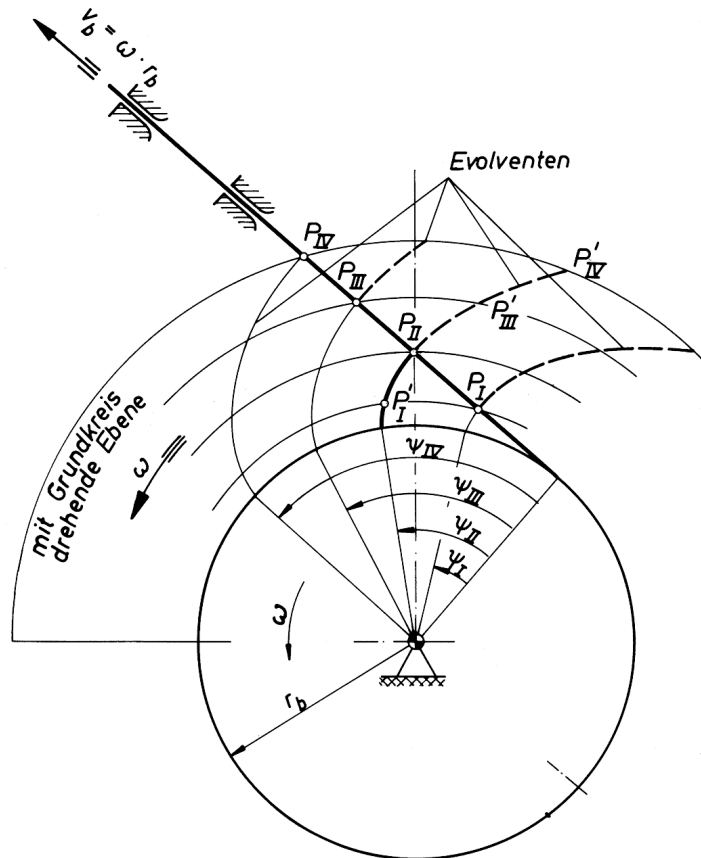


Bild 2.1/2 Erzeugung von mit der drehenden Grundscheibe fest verbundenen Evolventen durch Punkte $P_{I,II,\dots}$ auf dem vom Grundkreis abgezogenen Faden

Das in Bild 2.1/2 dargestellte Prinzip wird bei der Verzahnungsmessung zur Ermittlung der Profilabweichung genutzt. Auf einer Scheibe (Grundkreisscheibe), die fest mit dem zu prüfenden Zahnrad verbunden ist, wird ein Lineal abgewälzt (kein Gleiten zwischen Lineal und Grundzylinder). Zwischen dem auf dem Lineal angebrachten Messfühler und der Evolvente wird sich jede Abweichung vom theoretisch richtigen Profil als Messausschlag, d. h. Abweichung vom Profil, ergeben (siehe auch Abschn. 8).

Die Erzeugung der Zahnflanken erfolgt wegen der geforderten Genauigkeit und Standzeit beim praktisch verwirklichten Verfahren meist nicht durch eine punktförmige Schneidspitze, sondern durch eine Schneidkante, Bild 2.1/3a.

Es ist prinzipiell möglich, die gleiche Evolvente mit Werkzeugen unterschiedlicher Eingriffswinkel herzustellen (Bilder 2.1/3b bis 2.1/3d). Sie müssen den gleichen Grundkreis erzeugen. Die Normale zum Werkzeugprofil ($\alpha_0 = \alpha_w$) muss den Grundkreis tangieren. Hieraus folgt, dass die Wälzkreisdurchmesser d_w abhängig von α_w unterschiedlich sind.

$$d_w = \frac{d_b}{\cos \alpha_w}$$

(2.1/1)

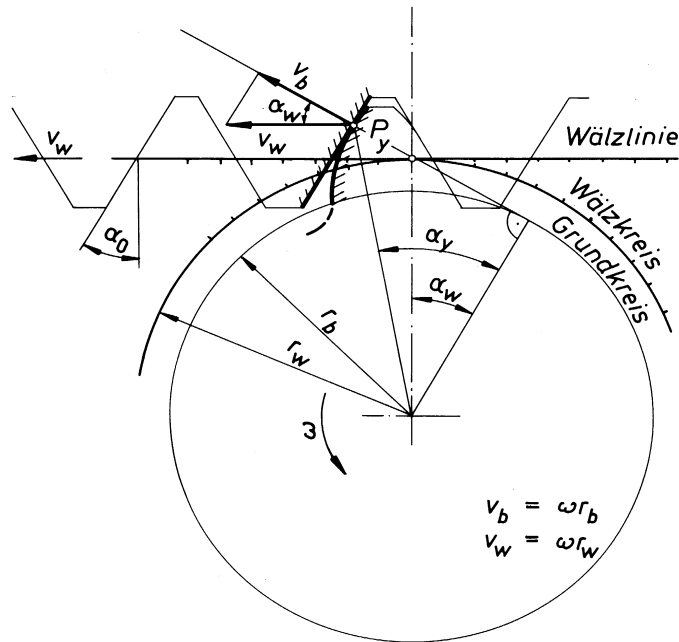


Bild 2.1/3 a) Erzeugung der Evolvente mit einer Zahnstange als erzeugendes Werkzeug

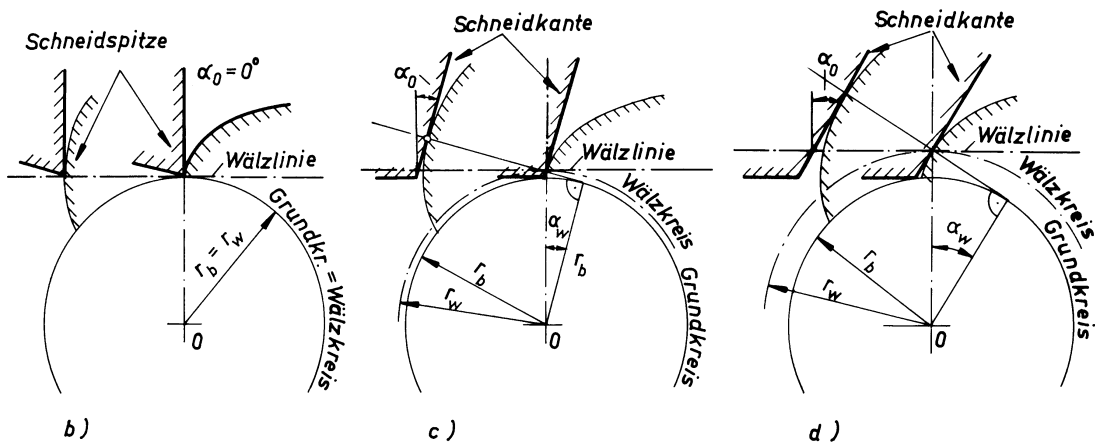


Bild 2.1/3 b), c), d) Erzeugung der gleichen Evolvente durch Werkzeuge (z. B. Schleifscheiben) mit unterschiedlichem Eingriffswinkel

Der Wälzwinkel besitzt einen großen Einfluss auf die entstehende Zahnfußrundung infolge der geänderten relativen Kopfbahn (siehe auch Abschnitt 2.3.2). Für eine praktische Verwirklichung mit Wälzwerkzeugen (z. B. Fräsern) wären die geänderte Werkzeugkopfhöhe und -fußhöhe sowie die geänderte Zahndicke zu beachten.

Die zur Erzeugung der Evolvente erforderliche Fortbewegung des Punktes P_y auf der den Grundzylinder tangierenden Geraden mit

$$v_0 = \omega r_b$$

entspricht dann der Geschwindigkeitskomponente des Werkzeuges in Richtung des Grundkreises. Das Werkzeug wälzt mit der Geschwindigkeit v_w auf dem Wälzkreis ab. Er besitzt den Radius r_w . Dieser stimmt wegen der schräg liegenden Schneidkante (Winkel α_0) nicht mehr mit dem Grundkreis überein.

Die Umfangsgeschwindigkeit v_b am Grundkreis, ausgedrückt als Komponente der Wälzgeschwindigkeit, ist dann

$$v_0 = v_w \cos \alpha_w \quad (2.1/2)$$

Die Umfangsgeschwindigkeit am Wälzkreis ist

$$v_w = \omega r_w \quad (2.1/3)$$

Aus den Geschwindigkeitsverhältnissen und dem auf der Schneidkante wandernden (erzeugenden) Punkt P_y erkennt man bereits, dass sich für ein mit einer Geraden abwälzendes Werkzeug geradflankige Schneidkanten für die Erzeugung der Evolvente ergeben, was zu ihren ausgezeichneten Vorteilen gehört (Bild 2.1/3).

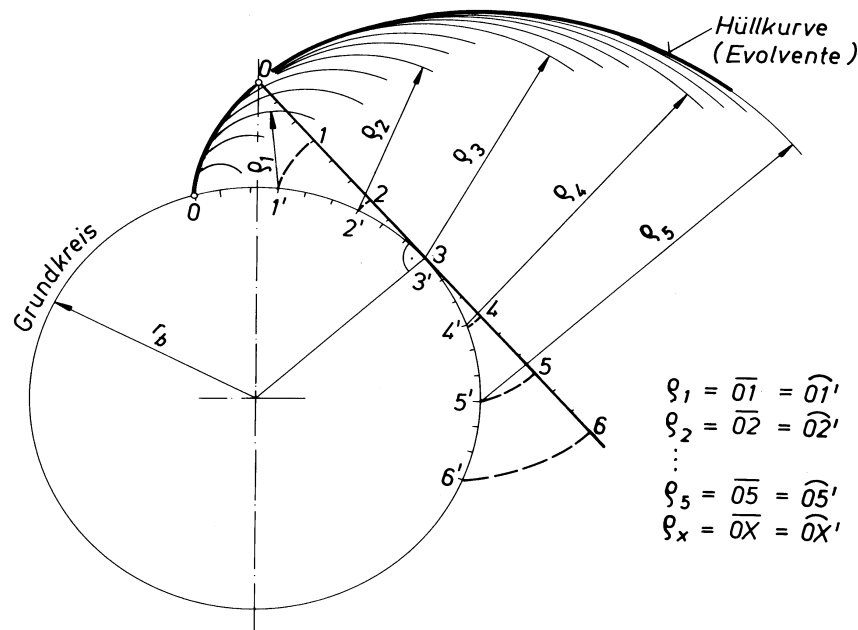


Bild 2.1/4 Hüllkurvenkonstruktion der Evolvente

Zeichnerisch wird die Evolvente günstig mit der *Hüllkurvenkonstruktion* ermittelt, (Bild 2.1/4). Dieses erfolgt, indem zunächst die Tangente (abrollende Gerade oder abgehobener Faden) an dem Grundkreis, z. B. im Punkt $3'$ gezeichnet wird. Es wird nun ein Punkt auf dieser Geraden gewählt, z. B. der Punkt 0 , der auf der Evolvente liegen soll.

Ausgehend vom Berührungspunkt der Tangente am Grundkreis (im Bild 2.1/4, Punkt $3'$) teilt man die abrollende Gerade in gleiche Abschnitte ein $\overline{3,2}$, $\overline{2,1}$ und $\overline{3,4}$, $\overline{4,5}$ und überträgt diese als Bogenlängen auf den Grundkreis (z. B. $\overline{3,2} = \widehat{3'2'}$, $\overline{2,1} = \widehat{2'1'}$), sodass beim Abrollen Punkt 1 auf $1'$, 2 auf $2'$ usw. zu liegen kommen. Zweckmäßigerweise wählt man die Abstände so, dass der Unterschied zwischen Bogen- und Sehnenlänge klein ist, was die Übertragung der Abstände von der Geraden auf den Kreis mit dem Stechzirkel ermöglicht.

Mit dem Abstand $\overline{0,1}$ schlägt man dann um Punkt $1'$, mit $\overline{0,2}$ um $2'$, mit $\overline{0,3}$ um $3'$ usw. einen Kreis. Die Evolvente ergibt sich als Hüllkurve der Kreisbogenschar (Hüllkurvenkonstruktion). Die Kreise mit den Radien q_1 , q_2 usw. entsprechen im Schnittpunkt der abrollenden Geraden mit der Evolvente, also in den Punkten 1 , 2 usw. exakt ihren *Krümmungsradien*. Die Mittelpunkte sämtlicher Krümmungskreise, deren Krümmungsradien q_1 , q_2 , q_3 usw. sind, liegen auf dem Grundkreis.

Tabelle 2.1/1 Evolventenfunktion $\text{inv}\alpha_y$

α_y	15°	16°	17°	18°	19°	20°
0,00	0,00614980	0,00749271	0,00902471	0,01076043	0,01271506	0,01490438
0,01	0,00616234	0,00750707	0,00904103	0,01077887	0,01273576	0,01492752
0,02	0,00617490	0,00752144	0,00905738	0,01079733	0,01275649	0,01495068
0,03	0,00618748	0,00753584	0,00907374	0,01081581	0,01277724	0,01497386
0,04	0,00620007	0,00755026	0,00909013	0,01083431	0,01279801	0,01499707
0,05	0,00621268	0,00756470	0,00910653	0,01085283	0,01281881	0,01502030
0,06	0,00622531	0,00757915	0,00912296	0,01087138	0,01283964	0,01504356
0,07	0,00623795	0,00759362	0,00913941	0,01088995	0,01286048	0,01506685
0,08	0,00625061	0,00760812	0,00915587	0,01090854	0,01288135	0,01509016
0,09	0,00626329	0,00762263	0,00917236	0,01092715	0,01290224	0,01511349
0,10	0,00627599	0,00763716	0,00918887	0,01094579	0,01292316	0,01513685
0,11	0,00628871	0,00765171	0,00920540	0,01096444	0,01294410	0,01516024
0,12	0,00630144	0,00766628	0,00922195	0,01098312	0,01296506	0,01518365
0,13	0,00631419	0,00768087	0,00923851	0,01100182	0,01298605	0,01520709
0,14	0,00632696	0,00769547	0,00925510	0,01102055	0,01300706	0,01523055
0,15	0,00633974	0,00771010	0,00927172	0,01103929	0,01302810	0,01525404
0,16	0,00635255	0,00772474	0,00928835	0,01105806	0,01304916	0,01527755
0,17	0,00636537	0,00773941	0,00930500	0,01107685	0,01307024	0,01530109
0,18	0,00637821	0,00775409	0,00932167	0,01109566	0,01309134	0,01532465
0,19	0,00639107	0,00776880	0,00933836	0,01111449	0,01311247	0,01534824
0,20	0,00640394	0,00778352	0,00935508	0,01113335	0,01313363	0,01537185
0,21	0,00641683	0,00779826	0,00937181	0,01115223	0,01315480	0,01539549
0,22	0,00642974	0,00781302	0,00938857	0,01117113	0,01317601	0,01541916
0,23	0,00644267	0,00782780	0,00940534	0,01119005	0,01319723	0,01544285
0,24	0,00645562	0,00784260	0,00942214	0,01120899	0,01321848	0,01546656
0,25	0,00646858	0,00785742	0,00943896	0,01122796	0,01323975	0,01549030
0,26	0,00648156	0,00787225	0,00945580	0,01124695	0,01326105	0,01551407
0,27	0,00649456	0,00788711	0,00947265	0,01126596	0,01328237	0,01553786
0,28	0,00650758	0,00790199	0,00948953	0,01128499	0,01330371	0,01556168
0,29	0,00652061	0,00791688	0,00950643	0,01130405	0,01332508	0,01558552
0,30	0,00653367	0,00793180	0,00952336	0,01132313	0,01334647	0,01560939
0,31	0,00654674	0,00794673	0,00954030	0,01134223	0,01336789	0,01563329
0,32	0,00655983	0,00796168	0,00955726	0,01136135	0,01338933	0,01565721
0,33	0,00657293	0,00797666	0,00957424	0,01138050	0,01341079	0,01568116
0,34	0,00658606	0,00799165	0,00959125	0,01139966	0,01343228	0,01570513
0,35	0,00659920	0,00800666	0,00960827	0,01141885	0,01345379	0,01572913
0,36	0,00661236	0,00802169	0,00962532	0,01143807	0,01347533	0,01575315
0,37	0,00662554	0,00803674	0,00964239	0,01145730	0,01349689	0,01577720
0,38	0,00663874	0,00805181	0,00965948	0,01147656	0,01351847	0,01580127
0,39	0,00665195	0,00806690	0,00967658	0,01149584	0,01354008	0,01582537
0,40	0,00666519	0,00808201	0,00969371	0,01151514	0,01356172	0,01584950
0,41	0,00667844	0,00809714	0,00971087	0,01153447	0,01358337	0,01587365
0,42	0,00669171	0,00811228	0,00972804	0,01155381	0,01360505	0,01589783
0,43	0,00670499	0,00812745	0,00974523	0,01157318	0,01362676	0,01592203
0,44	0,00671830	0,00814264	0,00976244	0,01159258	0,01364849	0,01594626
0,45	0,00673162	0,00815784	0,00977968	0,01161199	0,01367024	0,01597052
0,46	0,00674496	0,00817307	0,00979693	0,01163143	0,01369202	0,01599480
0,47	0,00675832	0,00818831	0,00981421	0,01165089	0,01371382	0,01601911
0,48	0,00677170	0,00820358	0,00983151	0,01167037	0,01373564	0,01604344
0,49	0,00678510	0,00821886	0,00984883	0,01168988	0,01375749	0,01606780

Tabelle 2.1/1 Evolventenfunktion $\text{inv}\alpha_y$ (Fortsetzung)

α_y	15°	16°	17°	18°	19°	20°
0,50	0,00679851	0,00823417	0,00986617	0,01170941	0,01377937	0,01609218
0,51	0,00681194	0,00824949	0,00988353	0,01172896	0,01380127	0,01611659
0,52	0,00682539	0,00826484	0,00990091	0,01174853	0,01382319	0,01614103
0,53	0,00683886	0,00828020	0,00991832	0,01176813	0,01384514	0,01616549
0,54	0,00685235	0,00829558	0,00993574	0,01178775	0,01386711	0,01618998
0,55	0,00686585	0,00831098	0,00995319	0,01180739	0,01388910	0,01621450
0,56	0,00687938	0,00832641	0,00997066	0,01182705	0,01391112	0,01623904
0,57	0,00689292	0,00834185	0,00998814	0,01184674	0,01393317	0,01626361
0,58	0,00690648	0,00835731	0,01000565	0,01186645	0,01395524	0,01628820
0,59	0,00692006	0,00837279	0,01002319	0,01188618	0,01397733	0,01631282
0,60	0,00693365	0,00838829	0,01004074	0,01190594	0,01399945	0,01633746
0,61	0,00694727	0,00840381	0,01005831	0,01192572	0,01402159	0,01636213
0,62	0,00696090	0,00841935	0,01007591	0,01194552	0,01404376	0,01638683
0,63	0,00697455	0,00843491	0,01009352	0,01196534	0,01406595	0,01641156
0,64	0,00698822	0,00845049	0,01011116	0,01198519	0,01408817	0,01643631
0,65	0,00700191	0,00846609	0,01012882	0,01200506	0,01411041	0,01646108
0,66	0,00701562	0,00848171	0,01014650	0,01202495	0,01413267	0,01648588
0,67	0,00702934	0,00849735	0,01016420	0,01204487	0,01415496	0,01651071
0,68	0,00704309	0,00851301	0,01018192	0,01206481	0,01417727	0,01653557
0,69	0,00705685	0,00852869	0,01019967	0,01208477	0,01419961	0,01656045
0,70	0,00707063	0,00854439	0,01021743	0,01210476	0,01422197	0,01658536
0,71	0,00708443	0,00856011	0,01023522	0,01212476	0,01424436	0,01661029
0,72	0,00709825	0,00857585	0,01025303	0,01214479	0,01426677	0,01663525
0,73	0,00711208	0,00859161	0,01027086	0,01216485	0,01428921	0,01666024
0,74	0,00712594	0,00860739	0,01028871	0,01218492	0,01431167	0,01668525
0,75	0,00713981	0,00862319	0,01030658	0,01220502	0,01433416	0,01671029
0,76	0,00715370	0,00863901	0,01032448	0,01222515	0,01435667	0,01673535
0,77	0,00716761	0,00865485	0,01034239	0,01224529	0,01437921	0,01676045
0,78	0,00718154	0,00867071	0,01036033	0,01226546	0,01440177	0,01678556
0,79	0,00719549	0,00868659	0,01037829	0,01228565	0,01442435	0,01681071
0,80	0,00720946	0,00870249	0,01039627	0,01230587	0,01444696	0,01683588
0,81	0,00722344	0,00871841	0,01041427	0,01232611	0,01446960	0,01686108
0,82	0,00723744	0,00873435	0,01043229	0,01234637	0,01449226	0,01688630
0,83	0,00725147	0,00875030	0,01045034	0,01236665	0,01451494	0,01691155
0,84	0,00726551	0,00876628	0,01046841	0,01238696	0,01453765	0,01693683
0,85	0,00727957	0,00878228	0,01048650	0,01240729	0,01456038	0,01696214
0,86	0,00729364	0,00879830	0,01050461	0,01242765	0,01458314	0,01698747
0,87	0,00730774	0,00881434	0,01052274	0,01244802	0,01460592	0,01701282
0,88	0,00732186	0,00883041	0,01054089	0,01246843	0,01462873	0,01703821
0,89	0,00733599	0,00884649	0,01055907	0,01248885	0,01465157	0,01706362
0,90	0,00735014	0,00886259	0,01057726	0,01250930	0,01467443	0,01708905
0,91	0,00736431	0,00887871	0,01059548	0,01252977	0,01469731	0,01711452
0,92	0,00737850	0,00889485	0,01061372	0,01255026	0,01472022	0,01714001
0,93	0,00739271	0,00891101	0,01063198	0,01257078	0,01474315	0,01716552
0,94	0,00740694	0,00892719	0,01065027	0,01259132	0,01476611	0,01719107
0,95	0,00742119	0,00894339	0,01066857	0,01261188	0,01478909	0,01721664
0,96	0,00743545	0,00895962	0,01068690	0,01263247	0,01481210	0,01724224
0,97	0,00744974	0,00897586	0,01070525	0,01265308	0,01483513	0,01726786
0,98	0,00746404	0,00899212	0,01072362	0,01267372	0,01485819	0,01729351
0,99	0,00747836	0,00900840	0,01074202	0,01269437	0,01488128	0,01731919

Tabelle 2.1/1 Evolventenfunktion $\text{inv } \alpha_y$ (Fortsetzung)

α_y	21°	22°	23°	24°	25°	26°
0,00	0,01734489	0,02005379	0,02304909	0,02634966	0,02997535	0,03394698
0,01	0,01737062	0,02008229	0,02308055	0,02638428	0,03001331	0,03398852
0,02	0,01739638	0,02011083	0,02311204	0,02641892	0,03005132	0,03403009
0,03	0,01742217	0,02013939	0,02314357	0,02645360	0,03008935	0,03407170
0,04	0,01744798	0,02016798	0,02317512	0,02648831	0,03012743	0,03411335
0,05	0,01747382	0,02019660	0,02320671	0,02652306	0,03016553	0,03415504
0,06	0,01749968	0,02022525	0,02323832	0,02655784	0,03020367	0,03419676
0,07	0,01752557	0,02025392	0,02326997	0,02659264	0,03024185	0,03423851
0,08	0,01755149	0,02028263	0,02330164	0,02662749	0,03028006	0,03428031
0,09	0,01757744	0,02031136	0,02333335	0,02666236	0,03031831	0,03432214
0,10	0,01760341	0,02034013	0,02336509	0,02669727	0,03035659	0,03436401
0,11	0,01762941	0,02036892	0,02339686	0,02673221	0,03039490	0,03440592
0,12	0,01765544	0,02039774	0,02342866	0,02676718	0,03043325	0,03444786
0,13	0,01768150	0,02042659	0,02346049	0,02680219	0,03047164	0,03448984
0,14	0,01770758	0,02045547	0,02349235	0,02683722	0,03051006	0,03453186
0,15	0,01773369	0,02048438	0,02352424	0,02687229	0,03054851	0,03457391
0,16	0,01775982	0,02051331	0,02355616	0,02690740	0,03058700	0,03461600
0,17	0,01778598	0,02054228	0,02358812	0,02694253	0,03062553	0,03465813
0,18	0,01781217	0,02057127	0,02362010	0,02697770	0,03066409	0,03470030
0,19	0,01783839	0,02060029	0,02365212	0,02701291	0,03070268	0,03474250
0,20	0,01786464	0,02062935	0,02368416	0,02704814	0,03074131	0,03478474
0,21	0,01789091	0,02065843	0,02371624	0,02708341	0,03077997	0,03482702
0,22	0,01791721	0,02068754	0,02374835	0,02711871	0,03081867	0,03486933
0,23	0,01794353	0,02071668	0,02378048	0,02715404	0,03085741	0,03491168
0,24	0,01796989	0,02074585	0,02381265	0,02718941	0,03089618	0,03495407
0,25	0,01799627	0,02077504	0,02384485	0,02722481	0,03093498	0,03499650
0,26	0,01802267	0,02080427	0,02387709	0,02726024	0,03097382	0,03503896
0,27	0,01804911	0,02083352	0,02390935	0,02729571	0,03101270	0,03508146
0,28	0,01807557	0,02086281	0,02394164	0,02733121	0,03105161	0,03512400
0,29	0,01810206	0,02089212	0,02397397	0,02736674	0,03109055	0,03516658
0,30	0,01812858	0,02092147	0,02400632	0,02740230	0,03112953	0,03520919
0,31	0,01815512	0,02095084	0,02403871	0,02743790	0,03116855	0,03525184
0,32	0,01818169	0,02098024	0,02407113	0,02747353	0,03120760	0,03529453
0,33	0,01820829	0,02100967	0,02410358	0,02750920	0,03124669	0,03533726
0,34	0,01823492	0,02103913	0,02413606	0,02754490	0,03128581	0,03538002
0,35	0,01826157	0,02106862	0,02416857	0,02758063	0,03132497	0,03542282
0,36	0,01828825	0,02109814	0,02420111	0,02761639	0,03136416	0,03546566
0,37	0,01831496	0,02112769	0,02423369	0,02765219	0,03140339	0,03550853
0,38	0,01834170	0,02115726	0,02426629	0,02768802	0,03144265	0,03555145
0,39	0,01836846	0,02118687	0,02429893	0,02772388	0,03148195	0,03559440
0,40	0,01839525	0,02121650	0,02433160	0,02775978	0,03152128	0,03563739
0,41	0,01842207	0,02124617	0,02436430	0,02779571	0,03156065	0,03568042
0,42	0,01844892	0,02127586	0,02439703	0,02783168	0,03160006	0,03572348
0,43	0,01847579	0,02130559	0,02442979	0,02786767	0,03163950	0,03576658
0,44	0,01850270	0,02133534	0,02446258	0,02790370	0,03167897	0,03580972
0,45	0,01852963	0,02136512	0,02449541	0,02793977	0,03171848	0,03585290
0,46	0,01855658	0,02139494	0,02452826	0,02797586	0,03175803	0,03589612
0,47	0,01858357	0,02142478	0,02456115	0,02801200	0,03179761	0,03593937
0,48	0,01861058	0,02145465	0,02459407	0,02804816	0,03183723	0,03598266
0,49	0,01863762	0,02148455	0,02462702	0,02808436	0,03187688	0,03602599

Tabelle 2.1/1 Evolventenfunktion $\text{inv } \alpha_y$ (Fortsetzung)

α_y	21°	22°	23°	24°	25°	26°
0,50	0,01866469	0,02151448	0,02466000	0,02812059	0,03191657	0,03606936
0,51	0,01869178	0,02154444	0,02469301	0,02815685	0,03195630	0,03611276
0,52	0,01871890	0,02157443	0,02472606	0,02819315	0,03199606	0,03615620
0,53	0,01874606	0,02160445	0,02475914	0,02822948	0,03203586	0,03619969
0,54	0,01877323	0,02163450	0,02479224	0,02826585	0,03207569	0,03624320
0,55	0,01880044	0,02166458	0,02482538	0,02830225	0,03211556	0,03628676
0,56	0,01882767	0,02169468	0,02485855	0,02833868	0,03215546	0,03633036
0,57	0,01885494	0,02172482	0,02489176	0,02837515	0,03219540	0,03637399
0,58	0,01888223	0,02175499	0,02492499	0,02841165	0,03223537	0,03641766
0,59	0,01890954	0,02178519	0,02495826	0,02844818	0,03227539	0,03646137
0,60	0,01893689	0,02181541	0,02499155	0,02848475	0,03231543	0,03650512
0,61	0,01896426	0,02184567	0,02502488	0,02852135	0,03235552	0,03654890
0,62	0,01899167	0,02187596	0,02505824	0,02855799	0,03239563	0,03659273
0,63	0,01901909	0,02190627	0,02509164	0,02859466	0,03243579	0,03663659
0,64	0,01904655	0,02193662	0,02512506	0,02863136	0,03247598	0,03668049
0,65	0,01907404	0,02196699	0,02515852	0,02866809	0,03251621	0,03672443
0,66	0,01910155	0,02199740	0,02519201	0,02870486	0,03255647	0,03676840
0,67	0,01912909	0,02202784	0,02522553	0,02874167	0,03259677	0,03681242
0,68	0,01915666	0,02205830	0,02525908	0,02877851	0,03263710	0,03685647
0,69	0,01918426	0,02208880	0,02529266	0,02881538	0,03267747	0,03690056
0,70	0,01921188	0,02211932	0,02532628	0,02885229	0,03271788	0,03694469
0,71	0,01923954	0,02214988	0,02535992	0,02888923	0,03275832	0,03698886
0,72	0,01926722	0,02218046	0,02539360	0,02892620	0,03279880	0,03703307
0,73	0,01929493	0,02221108	0,02542732	0,02896321	0,03283932	0,03707731
0,74	0,01932267	0,02224172	0,02546106	0,02900025	0,03287987	0,03712160
0,75	0,01935043	0,02227240	0,02549483	0,02903732	0,03292046	0,03716592
0,76	0,01937823	0,02230310	0,02552864	0,02907443	0,03296108	0,03721028
0,77	0,01940605	0,02233384	0,02556248	0,02911158	0,03300174	0,03725468
0,78	0,01943390	0,02236460	0,02559635	0,02914876	0,03304244	0,03729912
0,79	0,01946178	0,02239540	0,02563025	0,02918597	0,03308317	0,03734359
0,80	0,01948969	0,02242622	0,02566419	0,02922322	0,03312394	0,03738811
0,81	0,01951762	0,02245708	0,02569816	0,02926050	0,03316475	0,03743266
0,82	0,01954559	0,02248797	0,02573216	0,02929781	0,03320559	0,03747725
0,83	0,01957358	0,02251888	0,02576619	0,02933516	0,03324647	0,03752189
0,84	0,01960160	0,02254983	0,02580025	0,02937254	0,03328738	0,03756656
0,85	0,01962965	0,02258080	0,02583435	0,02940996	0,03332833	0,03761126
0,86	0,01965772	0,02261181	0,02586848	0,02944741	0,03336932	0,03765601
0,87	0,01968583	0,02264285	0,02590264	0,02948490	0,03341034	0,03770080
0,88	0,01971396	0,02267391	0,02593683	0,02952242	0,03345140	0,03774562
0,89	0,01974213	0,02270501	0,02597106	0,02955997	0,03349250	0,03779048
0,90	0,01977032	0,02273614	0,02600531	0,02959756	0,03353363	0,03783539
0,91	0,01979854	0,02276730	0,02603960	0,02963518	0,03357480	0,03788033
0,92	0,01982678	0,02279849	0,02607392	0,02967284	0,03361601	0,03792531
0,93	0,01985506	0,02282970	0,02610828	0,02971053	0,03365725	0,03797033
0,94	0,01988336	0,02286095	0,02614266	0,02974826	0,03369853	0,03801538
0,95	0,01991170	0,02289223	0,02617708	0,02978602	0,03373985	0,03806048
0,96	0,01994006	0,02292354	0,02621153	0,02982382	0,03378120	0,03810562
0,97	0,01996845	0,02295488	0,02624602	0,02986165	0,03382259	0,03815079
0,98	0,01999687	0,02298625	0,02628053	0,02989951	0,03386402	0,03819601
0,99	0,02002531	0,02301766	0,02631508	0,02993741	0,03390548	0,03824126

Ausgehend von Bild 2.1/1 soll die *Evolventenfunktion* $\text{inv}\alpha_y$ definiert werden. Sie spielt eine fundamentale Rolle bei der Verzahnungsberechnung. Grund des schlupffreien Abrollens ist, dass die Strecke \overline{PT} gleich der Bogenlänge \widehat{OT} ist und demzufolge

$$r_b \tan \alpha_y = r_b (\widehat{\alpha}_y + \text{inv}\alpha_y)$$

Nach $\text{inv}\alpha_y$ aufgelöst ergibt sich

$$\boxed{\text{inv}\alpha_y = \tan \alpha_y - \widehat{\alpha}_y} \quad (2.1/4)$$

Werte der Evolventenfunktion sind in Tab. 2.1/1 zusammengestellt ($\text{inv}20^\circ = 0,01490438$).

Bei gegebenem $\text{inv}\alpha_y$ kann α_y nur durch Iteration ermittelt werden:

$$\widehat{\alpha}_y(n+1) = \frac{-\tan \alpha_y(n) + \widehat{\alpha}_y(n) + \text{inv}\alpha_y}{\tan^2 \alpha_y(n)} + \widehat{\alpha}_{yn} \quad (2.1/4a)$$

Als unbrauchbare nullte Näherung ergibt sich (aus einer Reihenentwicklung)

$$\widehat{\alpha}_y(0) = \sqrt[3]{3 \text{inv}\alpha_y} \quad (2.1/4b)$$

Die Evolventenfunktion kann bei der Berechnung der Zahndicke und Profilverschiebung angewendet werden. Für einen vorgegebenen Radius r_y ergibt sich nach Bild 2.1/1 der Winkel α_y aus

$$\boxed{\cos \alpha_y = r_b / r_y} \quad (2.1/5)$$

Es sollen nun die *Koordinaten* der Evolvente bestimmt werden. Nach Bild 2.1/5 ergeben sich dafür bei Verwendung des Parameters ψ

$$x = r_b (\sin \psi - \psi \cos \psi) \quad (2.1/6)$$

$$y = r_b (\cos \psi + \psi \sin \psi) \quad (2.1/7)$$

Zwischen dem Parameter ψ und dem Winkel α_y besteht die Beziehung (siehe auch Bild 2.1/1)

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha_y + \text{inv}\alpha_y \quad \text{bzw.} \\ \psi &= \tan \alpha_y \end{aligned} \quad (2.1/8)$$

Verwendet man die allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius einer Kurve

$$\varrho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right| \quad (2.1/9)$$

erhält man mit den Gln. (2.1/6 und 2.1/7) folgende Ableitungen unter Beachtung der Beziehungen

$$y' = \frac{dy}{d\psi} \cdot \frac{1}{dx/d\psi} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{d(y')}{d\psi} \cdot \frac{1}{dx/d\psi}$$

die Größe des bereits erwähnten *Krümmungsradius*

$$\varrho = |r_b \psi|$$

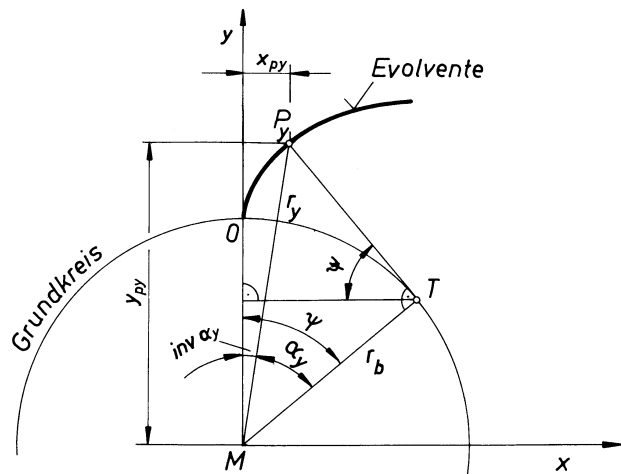


Bild 2.1/5 Größen an der Evolvente

Da $\psi = \tan \alpha_y$ ist (Gl. 2.1/8), ergibt sich

$$q = |r_b \tan \alpha_y| \quad (2.1/10)$$

Die aus der Anschauung gewonnene und bei der Hüllkurvenkonstruktion verwendete Größe für q ist damit mathematisch bestätigt. Der Winkel α_y kann nach Gl. (2.1/5) ermittelt werden.

In einigen Fällen wird die *Bogenlänge* l der Evolvente benötigt, die zwischen zwei gegebenen Radien r_{y1} und r_{y2} liegt. Ihre Ableitung erfolgt mit den differentiellen Größen dx und dy :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2.1/11)$$

Aus den Gln. (2.1/6 und 2.1/7) erhält man

$$dx = r_b \psi \sin \psi \, d\psi,$$

$$dy = r_b \psi \cos \psi \, d\psi,$$

$$l = r_b \int_{\psi_1}^{\psi_2} \psi \, d\psi$$

und nach ausgeführter Integration und Einsetzen der Grenzen die Bogenlänge l

$$l = 0,5 r_b (\psi_2^2 - \psi_1^2) \quad (2.1/12)$$

Die Winkel $\psi_{1,2}$ folgen aus Gln. (2.1/5 und 2.1/8) bei gegebenen Radien $r_{y1,2}$, zwischen denen die Bogenlänge l der Evolvente zu berechnen ist (Bild 2.1/6).

Die den gegebenen Radien $r_{y1,2}$ zugehörige Länge Δg auf die Eingriffslinie bzw. zugehöriger Wälzung $\overline{P_{22}P_{11}} = \overline{P_{21}P_{13}}$ (Bild 2.1/6) ist

$$\Delta g = \sqrt{r_{y2}^2 - r_b^2} - \sqrt{r_{y1}^2 - r_b^2}$$

Die Berechnung des durch einen Zahn verdrängten Volumens (z. B. Zahnradpumpe) erfordert zunächst die Bestimmung der *Fläche* (P_{11}, P_{12}, P_{21}) unter der Evolvente. Geht man von einem differentiellen Winkелеlement $d\varphi$ aus (Bild 2.1/6), erhält man bei Anwendung der Polarkoordinaten das unter dem Kurvenabschnitt liegende Flächenelement

$$dA = 0,5 r_y^2 \, d\varphi_y$$

Die Größen r_y und φ_y werden durch den Winkel ψ_y ausgedrückt (Bild 2.1/1 und 2.1/6)

$$r_y = r_b \sqrt{1 + \psi_y^2}$$

$$\varphi_y = \psi_y - \tan^{-1} \psi_y$$

Mit diesen Beziehungen ergibt sich die Fläche A ($P_{11} P_{21} M$):

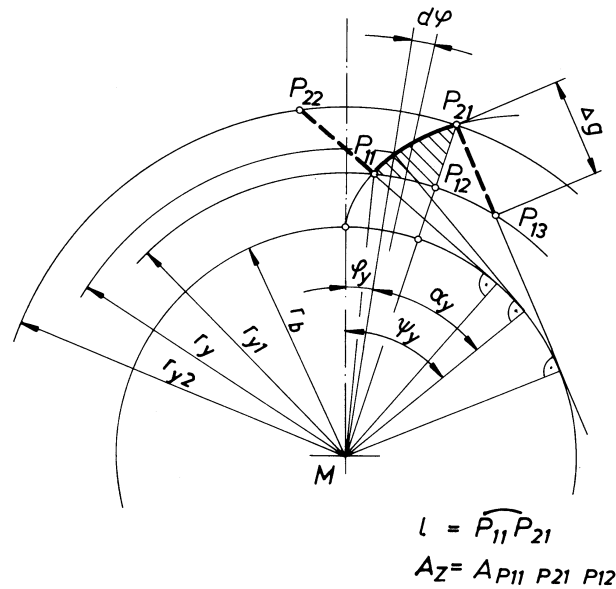


Bild 2.1/6 Geometrische Größen zur Berechnung der Bogenlänge der Evolvente und der Zahnprofilefläche

$$A = \frac{r_b^2}{2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \psi_y^2 d\psi_y = \frac{r_b^2}{6} (\psi_2^3 - \psi_1^3)$$

A ist die durch die Punkte P_{11}, P_{21}, M gegebene Fläche. A_z stellt die in Bild 2.1/6 schraffiert gezeichnete, durch die Punkte P_{11}, P_{21}, P_{12} eingeschlossene Zahnprofilfläche $A_z (P_{11} P_{21} P_{12})$ dar. Sie liegt zwischen den gegebenen Radien r_{y1} und r_{y2} .

$$A_z = \frac{r_b^2}{6} (\psi_2^3 - \psi_1^3) - \frac{r_{y1}^2}{2} (\varphi_{y2} - \varphi_{y1}) \tag{2.1/13}$$

Hierbei sind $\psi_{1,2} = \tan\alpha_{y1,2}$, $\varphi_{y1,2} = \text{inv}\alpha_{y1,2}$ und $\cos\alpha_{y1,2} = r_{b1,2}/r_{y1,2}$.

2.1.1.2 Bezugsprofil

Die Flankenprofile können durch ihre Krümmungsradien angenähert werden (Bild 2.1/4). Bei größer werdendem Gegenrad, z. B. Rad 2, nimmt auch der Krümmungsradius q_{C2} zu. Als Grenzfall wird bei unendlich großem Durchmesser das Gegenrad zur Zahnstange und der Krümmungsradius $q_{C2} = 0,5d_{b2}\tan\alpha$ wächst mit d_{b2} ebenfalls ins Unendliche. Damit gehen die Flankenprofile des Gegenrades in Geraden über.

Das durch die Zahnstange gegebene geradflankige Profil eignet sich gut zur Festlegung der geometrischen Grundgrößen. Dieses Profil wird *Bezugsprofil* genannt. Bei der Paarung Zahnstange – Zahnrad ist der Betriebseingriffswinkel $\alpha_w = \alpha_p$ mit α_p als Profilverwinkel der Zahnstange.

Das Bezugsprofil ist in DIN 867 vorzugsweise für Stirnräder mit Moduln $m = 1 \text{ mm}$ bis 50 mm standardisiert (Bild 2.1/7).

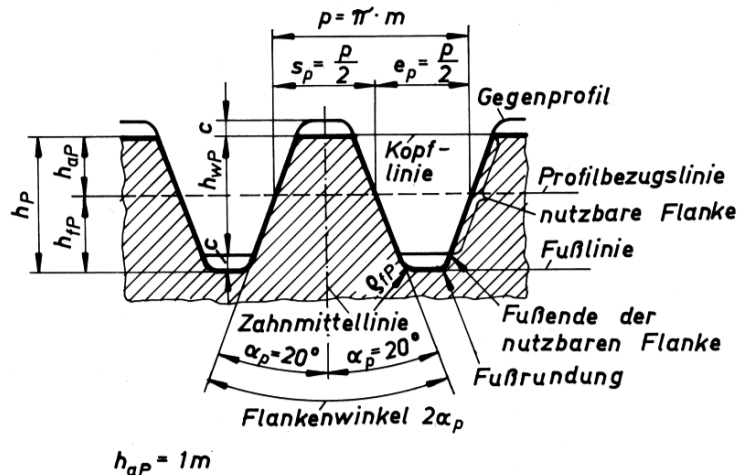


Bild 2.1/7 Bezugsprofil nach ISO 53 (DIN 867); Type A, B, C, D
 Type A: Standardbezugsprofil: $c_p = 0,25m$; $h_{fP} = 1,25m$; $q_{fP} = 0,38m$
 Type D: $c_p = 0,4m$; $h_{fP} = 1,4m$; $q_{fP} = 0,39m$ (volle Fußausrundung)
 Type B: wie A, aber $q_{fP} = 0,3m$
 Type C: wie A, aber $q_{fP} = 0,25m$

Es ist so aufgebaut, dass die Räder einer Paarung das gleiche Bezugsprofil haben (symmetrisch zur Profilbezugslinie). Damit sind beliebige gleich geteilte Räder paarungsfähig. Das wird als *Satzrädereigenschaft* bezeichnet. Bei Verlängerung der Zahnköpfe des Bezugsprofils um das Kopfspiel c kann dieses auch als Werkzeugprofil aufgefasst werden.

Es wälzt oder schneidet bei einem zwangsweise geführten Abwälzvorgang das Gegenprofil ein. ISO 53 (DIN 867) ordnet bevorzugten Kopfspielen maximale Fußrundungsradien zu. Hinsichtlich der Fußtragfähigkeit ist auch ein Mindestfußradius zu fordern. Für die *Verzahnwerkzeuge* sind in DIN 3972 Bezugsprofile – abgestimmt auf die Bearbeitungsstufen – angegeben. Bei der Verwendung von Schneidrädern ist die Erzeugung eines Mindestfußrundungsradius nicht zwangsläufig, da bei diesen Werkzeugen nicht immer eine Kopfabrundung vorliegt.

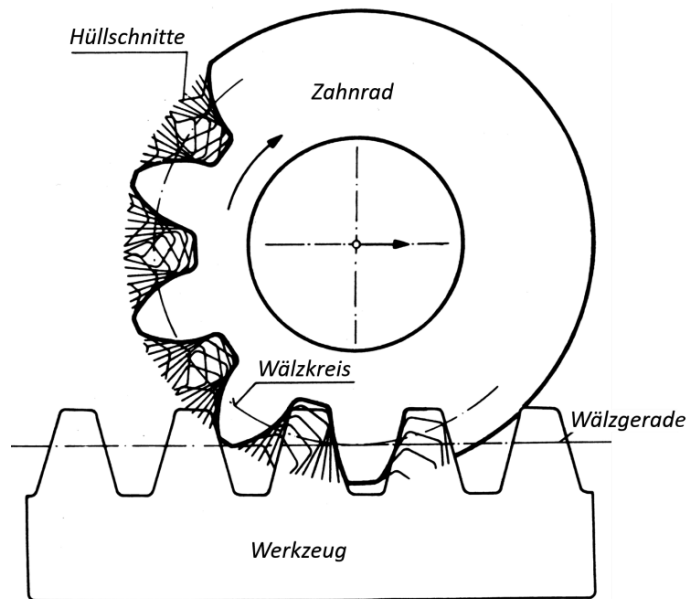


Bild 2.1/8 Entstehung der Zahnflanken aus den Hüllschnitten beim Abwälzen eines zahnstangenförmigen Werkzeugs

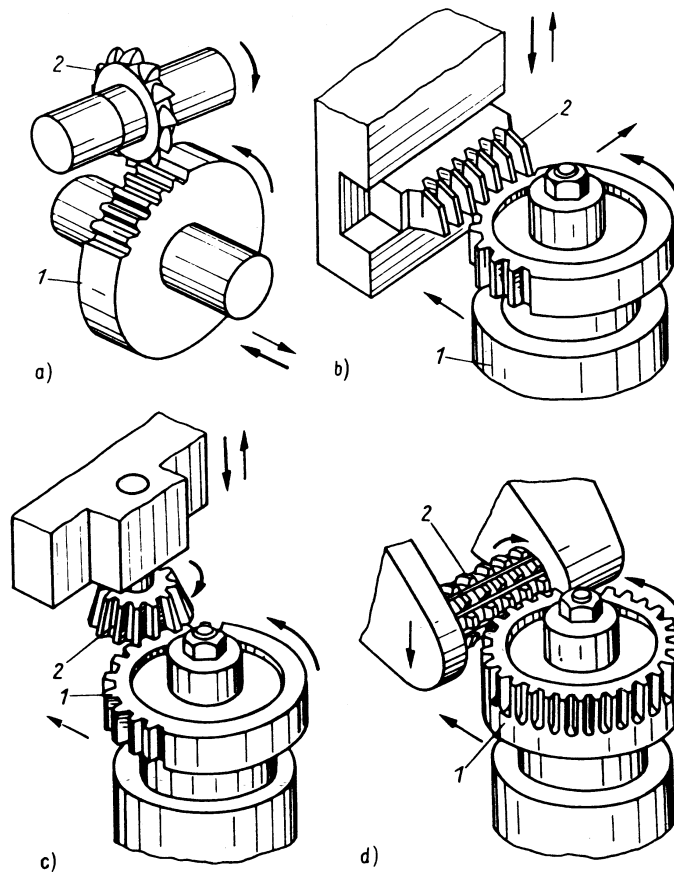


Bild 2.1/9 Schematische Darstellung der spanenden Herstellung von Verzahnungen im Formverfahren (a) und Wälzverfahren (b, c, d); 1: Werkstück, 2: Werkzeug;
a) Formfräser; b) Schneidkamm; c) Schneidrad; d) Wälzfräser

Betrachtet man den Abwälzvorgang Zahnstange (Werkzeug) - Zahnrad (Werkstück) vom Zahnrad aus, d. h. die Bewegung der Zahnstange relativ zum Zahnrad, ergeben sich die im Bild 2.1/8 dargestellten Hüllschnitte. Das Flankenprofil entsteht als Hüllkurve.

Bild 2.1/9b, c, d zeigt die praktische Verwirklichung der mit Bild 2.1/8 angedeuteten Erzeugung des Profils. Mit zusätzlichen Frei- und Spanwinkeln entsteht der Schneidkamm (Bild 2.1/9b), aus dessen Form die Zahnstange noch klar erkennbar ist. Ordnet man die Zähne von Schneidkammern auf einer Walze schraubenlinienförmig versetzt an, entsteht der Wälzfräser (Bild 2.1/9d).

Da mit einer Zahnstange zwei Zahnräder beliebiger, verschiedener Zähnezahlpaarungsfähig sind, kann man eines dieser Räder wiederum als erzeugendes Rad (Werkzeug) betrachten, das die Verzahnung einwalzt oder wie im Bild 2.1/9c schematisch dargestellt, schneidet (Schneidrad). Weitere Ausführungen zur Verzahnungsfertigung sind im Abschnitt 10 enthalten.

Am realen Zahnrad wirken sich bei Schneidkammern, Fräsern und Schneidrädern die Zahndickenabmaße auf den Fußkreisdurchmesser d_f und damit auf das Kopfspiel c aus. Bei Schneidrädern werden diese Größen noch durch die Profilverschiebung und Zähnezahlsowohl des herzustellenden Zahnrades wie auch des Werkzeuges etwas beeinflusst, da bei einer Paarung mit endlichen Zähnezahlen keine Proportionalität zwischen Dickenänderung und Achsabstandsänderung (hier Schneidrad - Werkrad) besteht. Eine wesentliche Änderung des Fußkreisdurchmessers kann zusätzlich durch Maßabweichungen bei der Wärmebehandlung eintreten (z. B. Einsatzhärten).

Der wirklich entstehende Zahnfußkrümmungsradius ρ_f hängt ebenfalls von der Zähnezahl z und dem Profilverschiebungsfaktor x ab (Abschnitt 2.3.3). Bei einem Schneidkamm oder Wälzfräser mit dem Werkzeugkopfradius ρ_{a0} entstehen am Zahnrad Fußkrümmungsradien $\rho_f \geq \rho_{a0}$ (z. B. $\rho_{a0} = 0,25m_n$ oder $0,38m_n$). Verwendet man dagegen Schneidräder, die z. T. keine Kopfrundung haben, sind bei ungünstiger Profilverschiebung Zahnfußradien $\rho_f < 0,25m_n$ im Gegensatz zum Bezugsprofil möglich. Diese Tatsache wird oft übersehen. Berücksichtigt man exakt die entstehende Rundung bei der Tragfähigkeitsberechnung (Kerbwirkung), können hierdurch mögliche ungünstige Auswirkungen nicht unbemerkt bleiben.

Eine Abweichung vom durch DIN 867 gegebenen Profil im Sinne einer Modifikation ist zulässig. Unter Modifikation wird hier eine Abweichung verstanden, die in der Größenordnung der elastischen Verformung der Zähne liegt. Sie soll die Erregung von Schwingungen (innere dynamische Zahnkräfte) infolge der Schwankung der Zahnverformung verringern und/oder die Fressgefahr herabsetzen und/oder die Auswirkung von Eingriffswinkel- und Teilungsfehlern mindern. ISO 53-1974 legt hierfür einen Grenzwert abhängig vom Modul fest (Bild 2.1/10). Die real auftretenden Verformungen überschreiten diese Größe normalerweise nicht. Ein nicht tangentialer Übergang des modifizierten Bereiches in die Evolvente ist zu vermeiden (Pressung!).

Da die Zahnverformung von den jeweiligen Verzahnungsdaten und der Belastung abhängt, ist die Vorgabe eines festen Wertes für die Größe der Profilmodifikation nicht sinnvoll. Eine Abweichung im Zahnfußbereich vom im Bild 2.1/7 dargestellten Profil zur Vermeidung von Schleifabsätzen ist üblich und zulässig. Auf Grund der Schwankung des Schleifaufmaßes und Härteverzuges muss man für die meisten Verzahnungen eine Restunterwühlung zulassen. Damit keine oder keine wesentliche Kürzung des evolventischen Profils vorliegt, ist eine

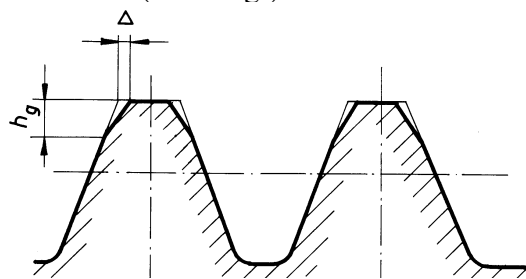


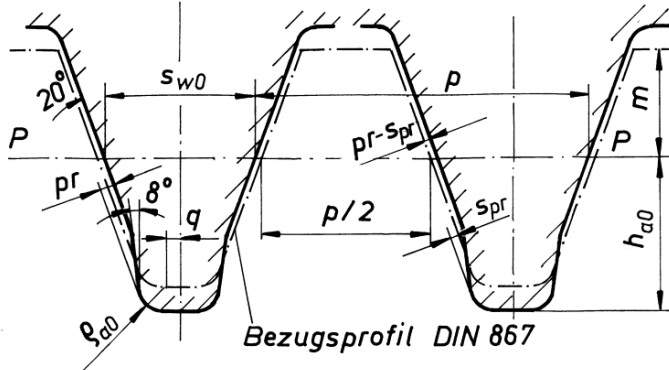
Bild 2.1/10 Maximalwerte der Profilmodifikation nach ISO 53-1974 (TGL RGW 308-76:

$$\Delta = 0,02m, h_g = 0,45m)$$

Hinweis: Der Knick am Anfang der Rücknahme ist ungünstig.

größere Zahnfußtiefe erforderlich. Es ist zu beachten, dass die Maßänderungen bei der Wärmebehandlung nicht nur vom Modul, sondern auch vom Durchmesser des Rades abhängen. Die modulabhängige Restunterwühlung stellt also einen werkzeugbedingten Kompromiss dar. Bild 2.1/11 zeigt das für die Tragfähigkeitsberechnung meist zugrunde gelegte Profil mit Restunterwühlung bzw. Freischnitt s_{pr} für die Verzahnung.

Tabelle 2.1/2 Modulabhängige Restunterwühlung für geschliffene Verzahnungen; Werkzeug-Bezugsprofil mit Protuberanz (Werknorm der ehemaligen Luftfahrtindustrie der DDR)



$(pr - s_{pr})$ Bearbeitungszugabe je Zahnflanke
 s_{pr} Freischnitt im Zahngrund
 pr Protuberanz

Hinweis: Bei neueren Auslegungen wird q_{a0} meist größer ($0,35m$) und $h_{a0} = 1,4m$ gewählt und sowohl bei pr als auch s_{pr} abgewichen. Anstatt des Protuberanzeingriffswinkels von 8° wird oft 10° angewendet.

Modul m	p $m\pi$	s_{w0}	$pr - s_{pr}$ $0,12 + 0,02m$	s_{pr} $0,06 + 0,02m$	pr $0,18 + 0,04m$	h_{a0} $1,45m$	q_{a0} $0,25m$	q
2	6,2832	2,8011	0,160	0,100	0,260	2,900	0,500	0,272
2,5	7,8540	3,5652	0,170	0,110	0,280	3,625	0,625	0,323
3	9,4248	4,3293	0,180	0,120	0,300	4,350	0,750	0,375
4	12,5664	5,8575	0,200	0,140	0,340	5,800	1,000	0,479
5	15,7080	7,3858	0,220	0,160	0,380	7,250	1,250	0,583
6	18,8496	8,9140	0,240	0,180	0,420	8,700	1,500	0,687
7	21,9911	10,4422	0,260	0,200	0,460	10,150	1,7500	0,791

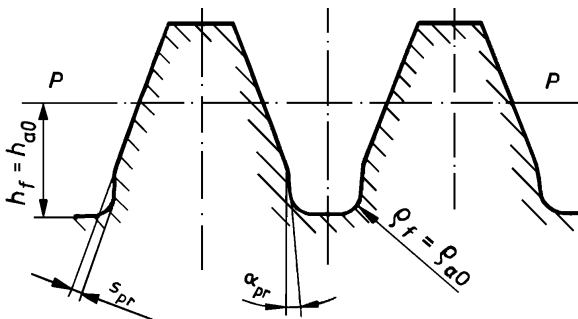


Bild 2.1/11 Bezugsprofil der Verzahnung bei Herstellung mit Protuberanzwerkzeug (Anwendung bei ISO 6336-3 und DIN 3990-3)
 $h_{a0} = 1,4m_n$; $q_{a0} = 0,4m_n$; $s_{pr} = 0,02m_n$;
 $\alpha_{pr} = 8 \dots 10^\circ$; (übrige Daten siehe Bild 2.1/7)

2.1.1.3 Grundgrößen der Verzahnung eines Stirnrades

Die folgenden Ableitungen gelten gleichermaßen für Außen- und Innenverzahnungen. Dabei werden die *Zähnezahl für Außenverzahnungen als positiv* und die *Zähnezahl der Innenverzahnung als negativ* definiert.

Mit dieser Festlegung ergeben sich an der Außenverzahnung - wie gewohnt - positive Durchmesser und an der Innenverzahnung sind die berechneten Durchmesser negativ. Bild 2.1/12 verdeutlicht diesen Sachverhalt.

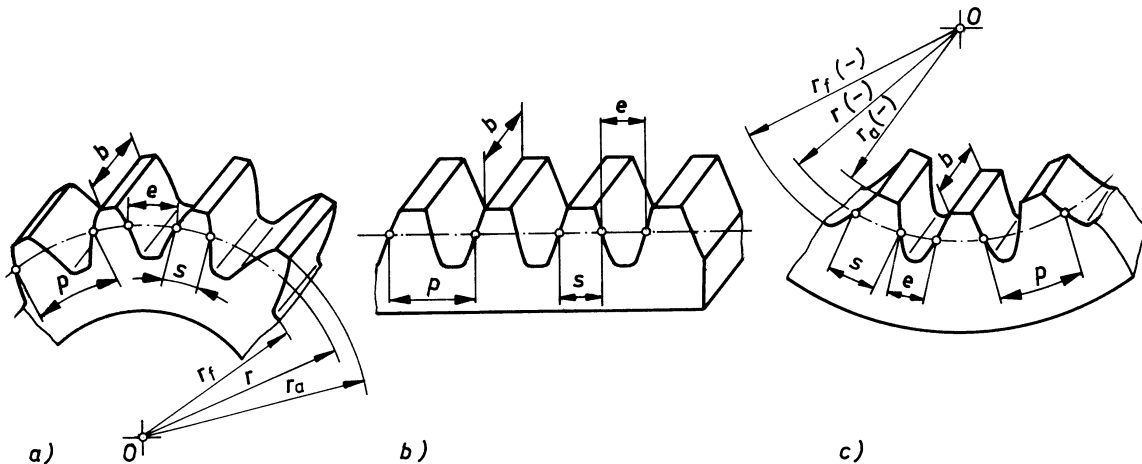


Bild 2.1/12 Übergang der positiv definierten Durchmesser der Außenräder in negativ definierte Hohlräder:

- a) Außenrad ($d > 0$);
- b) Zahnstange ($d \rightarrow \infty$);
- c) Hohlrad ($d < 0$)

Vom Mittelpunkt des Segmentes des Außenrades aus (Bild 2.1/12a) kann der Teilkreis als Krümmungskreis des Zahnrades betrachtet werden. Vergrößert man diesen Krümmungskreis zu $d \rightarrow \infty$ ergibt sich die Zahnstange (Bild 2.1/12b). Denkt man sich nun das Segment im bisherigen Sinne weiter verformt, verlagert sich der Krümmungsmittelpunkt auf die andere Seite vom konstant angenommenen Beobachtungsort. Es ist damit sinnvoll, da die Blickrichtung vom feststehenden Ort aus nicht mehr auf die konkave, sondern nun auf die konvexe Kontur fällt, die Raddurchmesser und die Zähnezahln rechnerisch als negativ zu definieren.

Es sollen nun zunächst einige Grundgrößen dargestellt bzw. abgeleitet werden (siehe DIN 3960, Ersatz siehe Anlage 17.1). Sie werden entweder zum prinzipiellen Verständnis oder für die Zeichnungsangabe bzw. Tragfähigkeitsberechnung benötigt.

a) Eingriffswinkel α , Teilkreisdurchmesser d

Mit wachsendem Abstand vom Grundkreis wächst auch die Schräglage der Evolvente bzw. der Profilwinkel α_y (vgl. Bild 2.1/1). α_y ergibt sich für einen bestimmten Punkt der Evolvente mit dem Abstand r_y vom Radmittelpunkt zu $\cos \alpha_y = r_b / r_y$, Gl. (2.1/5).

Erfahrungsgemäß ist im Mittenbereich des Profils der Verzahnung ein Winkel von etwa $\alpha_y = 20^\circ$ günstig. In DIN 867 ist deshalb $\alpha_y = \alpha = 20^\circ$ genormt. Der Winkel α wird *Eingriffswinkel* genannt (vgl. Bild 2.1/13).

Es ist üblich, den Durchmesser anzugeben, an dem der Profilwinkel α_y dem *Eingriffswinkel* α ($= 20^\circ$) entspricht. Dieser Durchmesser wird als Teilkreisdurchmesser d bezeichnet.

Der Teilkreisdurchmesser d ist bei Geradverzahnung der Durchmesser, an dem die Evolvente gegenüber der Verbindungslinie zum Radmittelpunkt um $\alpha_y = \alpha$ ($= 20^\circ$) geneigt ist.

d wird als Produkt der Zähnezahln z und eines Faktors m (Modul), der die Größe der Verzahnung ausdrückt, berechnet:

$$d = zm$$

(2.1/14)

Der Teilkreisdurchmesser ist eine reine Bezugsgröße und nicht direkt messbar.

b) *Teilkreisteilung p, Modul m*

Der Abstand zweier benachbarter Zähne auf dem Teilkreis ist die Teilkreisteilung p (Bild 2.1/13). Sie wird als Vielfaches von π ausgedrückt. Dieses Vielfache ist der mit Gl. (2.1/14) eingeführte Modul m , der eine Grundgröße der Verzahnungsgeometrie darstellt:

$$p = m\pi \quad (2.1/15)$$

Damit gilt folgende Definition:

Der Modul m ist die Zahl, die mit π multipliziert die Teilkreisteilung p ergibt.

Da sich mit dem Modul m proportional sämtliche Verzahnungsabmessungen ändern, gilt ein zweiter Merksatz:

Der Modul m ist ein Größenfaktor der Verzahnung.

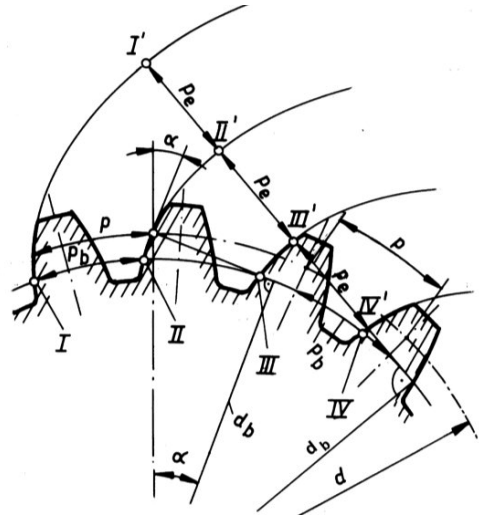


Bild 2.1/13 Grundgrößen der Außenverzahnung

Um die Vielfalt der Verzahnungen einzuschränken und den Aufwand für die Verzahnungswerkzeuge gering zu halten, wurde der Modul genormt (siehe Tab. 2.1/3).

Obwohl für den Modul oft nur der Zahlenwert genannt wird, ist zu beachten, dass es sich um eine dimensionsbehaftete Größe handelt. Ist nur der Zahlenwert gegeben, gilt die Maßeinheit mm.

Tabelle 2.1/3 Genormte Moduln m_n (in mm), ISO 54 (DIN 780); vorzugsweise R I anwenden

R I	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20	25	32	40	50
R II	1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18	22	28	36	45	

c) *Grundkreisdurchmesser d_b :*

Der Grundkreis ist für die Erzeugung und somit auch für Form der Evolvente (Krümmung) maßgebend (siehe Bilder 2.1/1 bis 2.1/5). Nach den Bildern 2.1/13 und 2.1/14 ergibt sich für den Grundkreisdurchmesser

$$d_b = d \cos \alpha \quad (2.1/16)$$

und mit d nach Gl. (2.1/14)

$$d_b = zm \cos \alpha \quad (2.1/17)$$

d) *Grundkreisteilung p_b , Eingriffsteilung p_e*

Die Grundkreisteilung p_b ist der Abstand zweier benachbarter Zähne auf dem Grundkreis (Bogenlänge). Zwei benachbarte Zähne schließen den Winkel $2\pi/z$ ein. Es ist somit

$$p_b = \frac{2\pi}{z} \cdot \frac{d_b}{2}$$

Mit d_b nach Gl. (2.1/17) ergibt sich

$$p_b = m\pi \cos \alpha$$

oder mit Gl. (2.1/15)

$$p_b = p \cos \alpha$$

Legt man zwei Punkte (z. B. I und II , Bild 2.1/13) im Abstand der Grundkreisteilung auf dem Umfang des Grundkreises fest und verfolgt ihre Bahnen bei der Evolventenkonstruktion (Abheben des aufgewickelten Fadens mit den Punkten I und II) so wird deutlich, dass der Abstand zwischen den zwei erzeugten Evolventen über alle Wälzpositionen konstant ist ($\widehat{I'II'} = p_b = \widehat{I'II'}$). Dieser konstante Abstand wird *Eingriffsteilung* genannt. Aus den Bildern 2.1/13 und 2.1/14 geht hervor, dass die *Grundkreisteilung* p_b gleich der *Eingriffsteilung* p_e ist.

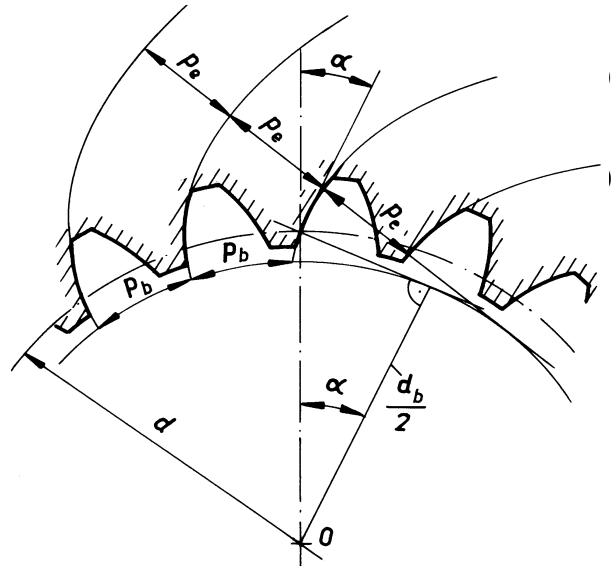


Bild 2.1/14 Geometrische Grundgrößen der Innenverzahnung

$$p_e = p_b = m\pi \cos \alpha \quad (2.1/19)$$

Auf Grund dieser Überlegungen kann eine der wesentlichen Eigenschaften der Evolventenverzahnung hervorgehoben werden:

Der senkrechte Abstand (Eingriffsteilung p_e) von zwei benachbarten gleichgerichteten Zahnflanken ist konstant.

Es ist also für das theoretische Maß p_e im Bereich der Evolvente gleichgültig, von welchem Punkt des Profils die Senkrechte (Normale) zum Nachbarprofil gefällt wird. Diese kennzeichnende Eigenschaft der Evolventenverzahnung wird zur bezugsfreien Messung genutzt.

Es sind nur Räder gleicher Eingriffsteilung paarungsfähig. Für die Paarung sind also weder der Modul m noch der Eingriffswinkel α allein, sondern das Produkt maßgebend.

$$m_1 \cos \alpha_1 = m_2 \cos \alpha_2 \quad (2.1/20)$$

e) *Zahnhöhe h , Kopfkreisradius d_a , Fußkreisradius d_f*

Die Zahnhöhe h und die Begrenzungsdurchmesser d_a bzw. d_f der Verzahnung sind ebenfalls linear vom Modul m abhängig. Im Bild 2.1/15 sind die betreffenden Größen eingetragen.

Die Zahnkopfhöhe h_a wird mit Hilfe des Moduls m , des Profilverschiebungsfaktors x (Abschnitt 2.1.2 Stirnradpaarung, f) und des Kopfhöhenänderungsfaktors k nach Gl. (2.1/45) ermittelt:

$$h_a = m(h_{aP}/m + x + k) \quad (2.1/21)$$

Nach ISO 53 (DIN 867) ist $h_{aP}/m = 1$. Die Zahnfußhöhe ergibt sich zu

$$h_f = m(h_{fP}/m - x) \quad (2.1/22)$$

mit $h_{fP} = h_{aP} + c$; $c = c^* m$.

Im Normalfall beträgt $c^* = 0,25$; bei Protuberanz $c^* = 0,40 \dots 0,45$

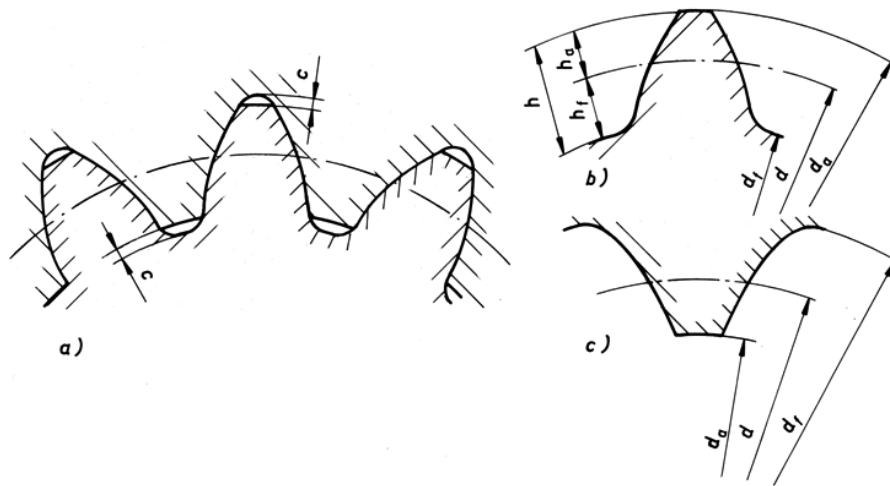


Bild 2.1/15 Zahnhöhen und Durchmesser:

- a) Außenverzahnung – Innenverzahnung (als Zahnflanke der Außenverzahnung);
 b) Außenverzahnung;
 c) Innenverzahnung

In einigen speziellen Fällen, z. B. älteren Werkzeugen, kann der Kopfspielfaktor im Bereich $c^* = 0,16$ bis $0,35$ liegen, bei den meisten Protuberanzwerkzeugen bis über $0,4$. Die Zahnhöhe h als Summe von h_a (mit k nach Gl. (2.1/45)) und h_f beträgt

$$h = 2h_{aP} + m(c^* + k) \quad (2.1/23)$$

Ausgehend vom Teilkreisdurchmesser d können mit der Zahnkopfhöhe h_a der Kopfkreisdurchmesser d_a und mit der Zahnfußhöhe h_f der Fußkreisdurchmesser d_f bestimmt werden:

$$d_a = d + 2h_a, \quad d_f = d - 2h_f$$

Mit $h_{aP} = 1m$ nach ISO 53 (DIN 867) wird

$$d_a = zm + 2m(1 + x + k) \quad (2.1/24)$$

$$d_f = zm - 2m(1 - x + c^*) \quad (2.1/25)$$

f) Zahndicke s_y an einem beliebigen Zylinder

Die Zahndicke s_y soll auf einem beliebigen Zylinder mit dem Durchmesser d_y innerhalb des durch Evolventen begrenzten Teils des Zahnes, d. h. außerhalb des Bereiches der Zahnfußübergangskurve (Flanke - Fußkreis), bestimmt werden. Sie wird z. B. für Berechnungen zum Vermeiden des Spitzwerdens der Zahnköpfe und zur Ableitung der Profilverschiebung benötigt.

Ausgehend von Bild 2.1/16a kann die Zahndicke s_y bestimmt werden zu:

$$s_y = \psi_y d_y \quad (2.1/26a)$$

Aus Bild 2.1/16a ist weiterhin ersichtlich, dass

$$2\psi_y = 2\psi_b - 2 \operatorname{inv} \alpha_y \quad (2.1/26b)$$

und $2\psi_b = 2\psi + 2 \operatorname{inv} \alpha \quad (2.1/26c)$

betragen.

Mit der Zahndicke s im Teilkreis nach Gl. (2.1/43) erhält man

$$\psi = \frac{s}{d} \quad (2.1/26d)$$

Aus den Gln. (2.1/26a bis d) ergibt sich die Zahndicke s_y als Bogenlänge auf einem beliebigen Durchmesser d_y mit α_y aus $\cos \alpha_y = d_b/d_y$ zu

$$s_y = d_y \left(\frac{s}{d} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_y \right) \quad (d_y \text{ und } d \text{ negativ für Innenverzahnung!}) \quad (2.1/26e)$$

g) Spezielle Zahndicken

Mit der Zahndicke s (Gl. (2.1/43)) auf dem Teilzylinder, die ebenfalls eine Bogenlänge darstellt, ergibt sich mit $d_y = d_b$ und $\alpha_y = \alpha_b = 0$ die *Zahndicke am Grundzylinder*.

$$s_b = d_b \left(\frac{s}{d} + \operatorname{inv} \alpha \right) \quad (d_b \text{ und } d \text{ negativ für Innenverzahnung!}) \quad (2.1/27)$$

Diese Zahndicke stellt den Abstand zwischen Rechts- und Linksflanke eines Zahnes auf dem Grundzylinder dar, wenn man sich die Evolventen bis dort verlängert denkt.

Die *Zahnkopfdicke* s_a ist ebenfalls abhängig von der Zähnezah und der Profilverschiebung. Bei extremer Profilverschiebung und Paarung eines Rades kleiner Zähnezah bzw. bei der Paarung Außenrad - Hohlrad kann es infolge der dann nur sehr geringen oder fehlenden Kopfkürzung zu einer Spitzenbildung am Zahnkopf oder zu einer zu kleinen Zahnkopfdicke am kleineren außenverzahnten Rad kommen. Bei oberflächengehärteten Verzahnungen führt eine zu kleine Zahnkopfdicke u. U. zu einem Abplatzen im Zahnkopfbereich.

Die Zahnkopfdicke s_a ergibt sich aus Gl. (2.1/26) mit $d_y = d_a$ und $\alpha_y = \alpha_a$ aus $\cos \alpha_a = d_b/d_a$ zu

$$s_a = d_a \left(\frac{s}{d} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_a \right) \quad (2.1/28)$$

(s siehe Gl. (2.1/43), d_a und d negativ bei Innenverzahnung!).

Während es bei Außenverzahnung durch zu große Profilverschiebung bei bestimmten Paarungen ($k = 0$ oder geringe Kopfkürzung) zu einem Spitzwerden der Zahnköpfe kommen kann, besteht bei Innenverzahnungen die analoge Gefahr, dass die Lückenweite im Zahnfuß zu eng bzw. im Grenzfall Null wird (siehe Absatz h).

Für die Messung der Zahndicke ist oft das Sehnenmaß von Interesse.

Die *Zahndickensehne* \bar{s}_y an einem beliebigen Durchmesser (Bild 2.1/16) ist

$$\bar{s}_y = d_y \sin \psi_y \quad (2.1/29)$$

mit $\psi_y = s_y/d_y$

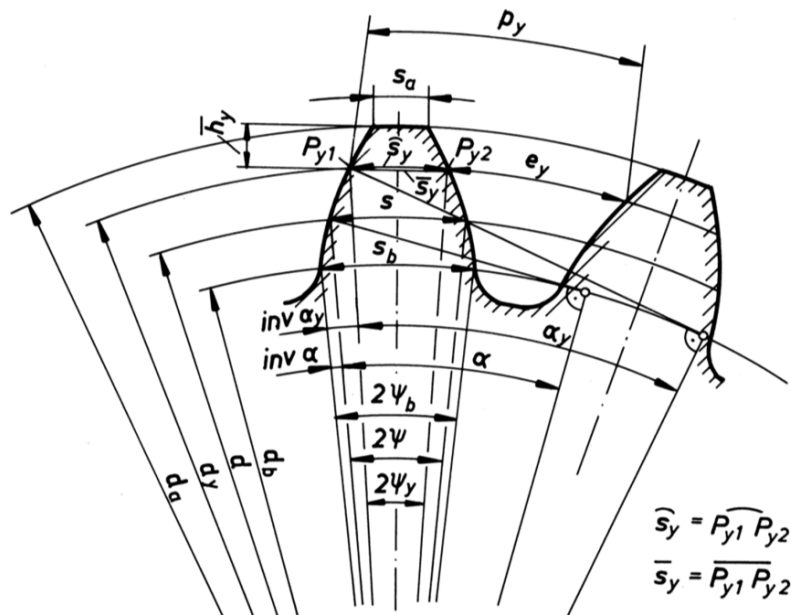
Die Höhe bis zum Sehnenmaß \bar{s}_y ist (Bild 2.1/16)

$$\bar{h}_y = 0,5(d_a - d \cos \psi_y) \quad (2.1/30)$$

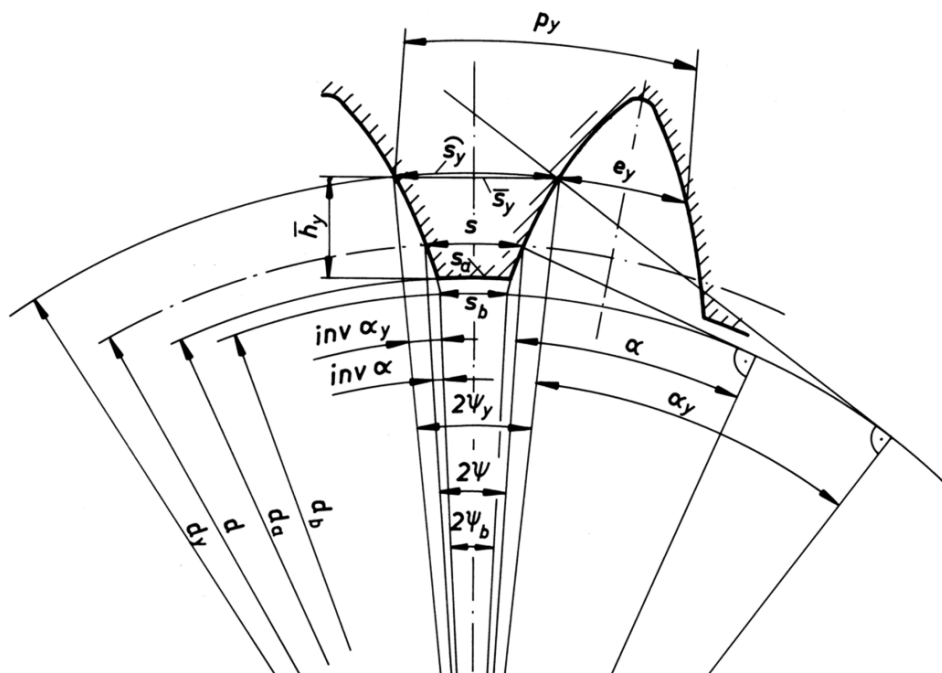
Analog ergibt sich die *Zahndickensehne am Teilzylinder*

$$\bar{s} = d \sin \psi \quad (2.1/30a)$$

mit $\psi = s/d$



a) Außenverzahnung



b) Innenverzahnung

Bild 2.1/16 a), b) Größen zur Ermittlung der Zahndicke s_y an einem Zylinder beliebigen Durchmessers d_y

Die Höhe \bar{h} bis zum Sehnenmaß \bar{s} ist (Bild 2.1/16)

$$\bar{h} = 0,5(d_a - d \cos \psi) \quad (2.1/31)$$

Bemerkenswert ist die sogenannte *konstante Zahndickensehne* \bar{s}_c . Sie ist im Gegensatz zu den anderen Zahndickensehnen unabhängig von der Zähnezahl. Nach Bild 2.1/17 ergibt sich die konstante Zahndickensehne zu