

Hans Jürgen Korsch

# Physik mit 2×2-Matrizen

Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{jk}^1 \\ \Gamma_{jk}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{kj} \cdot u_1 \\ u_{kj} \cdot u_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} \quad n = \frac{u^1 \times u^2}{|u^1 \times u^2|}$$

$$x(t) = e^{i\omega t} u \quad |\langle \psi | \psi \rangle|^2 \sim e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$\Delta\omega = |\sqrt{2d/m} - \sqrt{2d/\mu}|$$

$$f(r) = \frac{1}{1 + (r/R)^2}$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$u_j \cdot u^k = \delta_j^k$$

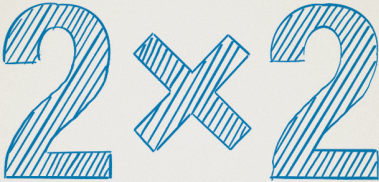
$$\dot{x} = v(x)$$

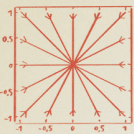
$$H = \begin{pmatrix} V_1(r) & V(r) \\ V(r) & V_2(r) \end{pmatrix}$$

$$\cos^2 \theta$$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} \quad H = \begin{pmatrix} \epsilon & w \\ w^* & -\epsilon \end{pmatrix}$$





$$\gamma_{\pm}(C) = \mp \frac{1}{2} \Omega(C)$$

$$\vec{j}' = M \vec{j}$$

$$\sum$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

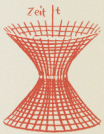
$$M = U^t \tilde{M} U$$

$$\Delta^T G \Delta = G$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$u_{j+1} = A_j u_j$$

$$r = \left( \frac{2n}{1+n^2} \right)$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_{21}} U_1 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$$


HANSER



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Hans Jürgen Korsch

# Physik mit $2 \times 2$ Matrizen

Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben

HANSER

**Autor:**

Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch  
Technische Universität Kaiserslautern  
Fachbereich Physik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelbild:

Satz: Hans Jürgen Korsch

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46694-4

E-Book-ISBN 978-3-446-46806-1

# Vorwort

In der Physik werden Matrizen, insbesondere  $2 \times 2$ -Matrizen, oft als einfache Modelle eingesetzt, um komplizierte Probleme verständlicher zu machen und ihre theoretischen und praktischen Lösungsmethoden zu illustrieren. Das vorliegende Lehrbuch behandelt interessante aktuelle und anwendungsnahe Aufgabenfelder der modernen Physik, in denen die Matrix-Algebra zum Einsatz kommt. Es wendet sich in erster Linie an Studierende der Physik, zum Selbststudium oder als Begleitmaterial zu Vorlesungen. Das Buch kann jedoch auch fortgeschrittenen Interessenten an physikalischen Fragestellungen und ihrer theoretischen Beschreibung neue Perspektiven eröffnen.

Zum einen bietet es einen schnellen Einstieg in sehr unterschiedliche Gebiete der Physik. Durch die oft verwendete ähnliche Methodik, wie zum Beispiel die Transfermatrizen, erkennt man interessante Zusammenhänge zwischen weit auseinander liegenden Feldern. Zum anderen ermöglicht es der Leserin oder dem Leser, die vermittelten Methoden erfolgreich auf neue Probleme anzuwenden.

Die Themenvielfalt des Buches spannt einen weiten Bogen von fundamentalen Themen wie Dynamischen Systemen bis hin zur allgemeinen Relativitätstheorie und Quantenphysik. Dabei steht die Quantenmechanik im Zentrum, aber es werden auch anwendungsorientiertere Gebiete wie Mechanik, Optik, Elektronik oder Quantencomputing behandelt.

Jedes Kapitel gibt eine kurze Einführung in den physikalischen Problemkreis und illustriert die angewandten Methoden mithilfe zahlreicher durchgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben samt Lösungen. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den elementaren Methoden der Matrix-Algebra vertraut ist. Deshalb werden mathematische Verfahren nur kurz erläutert. Eine ausführlichere Darstellung der mathematischen Grundlagen findet der Leser in dem parallel erscheinenden Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik mit  $2 \times 2$  Matrizen. Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben*, Carl Hanser Verlag 2021, Print-ISBN 978-3-446-46693-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46805-4 .

Verweise darauf werden im vorliegenden Buch durch „M2“ angegeben, also beispielsweise als „Mehr dazu findet man in M2, Abschnitt 2.4.“

Wie oben erwähnt, stammen viele der Beispiele für einen Einsatz von Matrix-Methoden aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Deren mathematische Grundlagen werden im Rahmen des vorliegenden Buches nur sehr knapp dargestellt. Mehr dazu findet man in dem Lehrbuch

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik der Quantenmechanik*, Carl Hanser Verlag 2019, Print-ISBN 978-3-446-46226-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46255-7 .

Zwei weitere aktuelle Lehrbücher, die sich auf den Einsatz von Matrizen in der Physik konzentrieren, sind:

Ludyk, Günter: *Relativitätstheorie nur mit Matrizen* sowie *Quantenmechanik nur mit Matrizen*, beide erschienen im Springer-Verlag 2020.

Im vorliegenden Buch wurde auf die oft üblichen detaillierten Literaturangaben der Quellen oder der weiterführenden Arbeiten weitgehend verzichtet, da es nach Ansicht des Autors zunehmend einfacher ist, weitere Informationen zu interessanten Themen im Internet zu „er-googeln“, beispielsweise über die immer besser werdenden Einträge bei Wikipedia. Voraussetzung dafür sind natürlich Grundkenntnisse der Thematik und der relevanten Schlagwörter. Quellenangaben gibt es jedoch dort, wo dies unverzichtbar erschien, beispielsweise weil der vorliegende Text sich stark an dieser Literatur orientiert, oder weil die betreffenden Arbeiten schwer auffindbar sind.

Ein paar Worte zur Rolle der vielen Aufgaben im Text. Sie sind bewusst einfach gehalten und lassen sich in der Regel in wenigen Denk- und Rechenschritten lösen. Sie sollen einerseits dazu anregen, aktiv an der Entwicklung eines Themas mitzuarbeiten, um ein besseres Verständnis zu erreichen. Andererseits sollen auf diese Weise Nebenrechnungen, die den Textfluss stören könnten, ausgelagert werden. In allen Fällen findet man ausführliche Lösungen am Ende jedes Kapitels.

Der vorliegende Text beruht auf den Vorlesungen des Autors zu Themen der Theoretischen Physik an der TU Kaiserslautern. Der Autor dankt den ehemaligen Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe für viele Anregungen und Kommentare. Insbesondere möchte ich hier Dr. Bruno Mirbach hervorheben, der die Mühe nicht scheute, den vorliegenden Text kritisch durchzusehen, und der durch viele hilfreiche Anmerkungen dazu beitrug, dass der Text verständlicher und ärmer an Fehlern wurde. Weitere Hinweise und Vorschläge bitte an

[h.j.korsch@gmail.com](mailto:h.j.korsch@gmail.com).

Eine aktuelle Korrekturliste und weitere Informationen findet man unter

<https://www.hanser-fachbuch.de>.

Mein Dank gilt auch dem Hanser Verlag für die freundliche Aufnahme des Buches und die hilfreiche Unterstützung durch sein Lektorat.

Kaiserslautern, Oktober 2020

Hans Jürgen Korsch

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Lineare Dynamik</b> .....	<b>11</b>
1.1	Phasenportraits linearer Flüsse .....	11
1.2	Fixpunkte und Phasenportraits .....	13
1.3	Der harmonische Oszillator .....	17
1.4	Ein Ausflug in die Nichtlinearität .....	20
1.4.1	Ein nichtlinearer Oszillator .....	22
1.4.2	Das Lotka-Volterra-Modell .....	23
1.5	Iterierte lineare Abbildungen .....	26
1.6	Lösungen der Aufgaben .....	27
<b>2</b>	<b>Schwingungen und Stöße</b> .....	<b>31</b>
2.1	Gekoppelte Schwingungen .....	31
2.2	Angetriebene Schwingungen .....	36
2.2.1	Zeitperiodische Systeme .....	40
2.2.2	Die Mathieu-Gleichung .....	42
2.3	Drei-Teilchen-Stöße .....	44
2.4	Billard-Systeme .....	51
2.4.1	Das ebene Billard .....	51
2.4.2	Fermi-Beschleunigung .....	55
2.5	Lösungen der Aufgaben .....	57
<b>3</b>	<b>Ordnung und Chaos</b> .....	<b>61</b>
3.1	Hamilton-Dynamik .....	61
3.1.1	Poincaré-Schnitte .....	64
3.1.2	Das Hénon-Heiles-System .....	65
3.2	Diskrete Abbildungen .....	67
3.2.1	Stroboskopische Abbildungen .....	67
3.2.2	Arnolds Katze .....	68
3.2.3	Fraktale Abbildungen .....	75
3.3	Lösungen der Aufgaben .....	79



---

<b>4</b>	<b>Elektrische Netzwerke und Vierpole</b> .....	<b>83</b>
4.1	Elektrische Schwingkreise.....	83
4.2	Vierpole.....	87
4.3	Vierpolketten.....	96
4.4	Lösungen der Aufgaben.....	98
<b>5</b>	<b>Gekrümmte Räume</b> .....	<b>101</b>
5.1	Flächen im euklidischen Raum.....	101
5.2	Die flache Raumzeit.....	114
5.3	Die gekrümmte Raumzeit.....	120
5.4	Lösungen der Aufgaben.....	124
<b>6</b>	<b>Optische Systeme</b> .....	<b>127</b>
6.1	Linsensysteme.....	127
6.1.1	Elementare optische Abbildungen.....	128
6.1.2	Die Systemmatrix.....	131
6.1.3	Stationäre Lösungen.....	137
6.1.4	Wellenoptik mit Gauß-Strahlen.....	138
6.2	Optische Resonatoren.....	141
6.2.1	Die Systemmatrix.....	141
6.2.2	Die Grundmode.....	144
6.3	Polarisationsoptik und Jones-Matrizen.....	146
6.4	Lösungen der Aufgaben.....	154
<b>7</b>	<b>Elementare Quantensysteme</b> .....	<b>159</b>
7.1	Grundbegriffe der Quantenmechanik.....	159
7.2	Das Zweiniveausystem.....	164
7.3	Einfache Modellsysteme.....	165
7.3.1	Der harmonische Oszillator.....	165
7.3.2	Das Kastenpotential.....	166
7.3.3	Ein Doppelmuldenpotential.....	167
7.4	Resonanzzustände.....	172
7.5	Periodische Potentiale.....	174
7.6	Semiklassische Näherungen.....	176
7.7	Lösungen der Aufgaben.....	184

<b>8</b>	<b>Transfermatrix und Streumatrix</b> .....	<b>189</b>
8.1	Eigenschaften von Transfer- und Streumatrix .....	190
8.2	Einfache Modellpotentiale .....	194
8.2.1	Das Delta-Potential .....	194
8.2.2	Die Potentialstufe .....	195
8.2.3	Das Kastenpotential .....	196
8.3	Potentialketten.....	198
8.3.1	Das Doppel-Delta-Potential .....	199
8.3.2	Der Delta-Kamm .....	200
8.3.3	Allgemeine periodische Potentiale .....	203
8.4	Lösungen der Aufgaben .....	203
<b>9</b>	<b>Von den Spinmatrizen zur Dirac-Gleichung</b> .....	<b>209</b>
9.1	Die Spin- oder Pauli-Matrizen .....	209
9.2	Dichtematrix für Spin-1/2-Teilchen .....	212
9.3	Dynamik des Bloch-Vektors.....	214
9.4	Die Lindblad-Master-Gleichung .....	217
9.5	Dirac-Gleichung und Dirac-Matrizen .....	222
9.5.1	Die Dirac-Gleichung .....	222
9.5.2	Die Clifford-Dirac-Algebra .....	224
9.5.3	Der Dirac-Spin-Operator .....	226
9.6	Lösungen der Aufgaben .....	228
<b>10</b>	<b>Das Zweiniveausystem der Quantenmechanik</b> .....	<b>231</b>
10.1	Vermiedene Kreuzungen .....	231
10.2	Zufallsmatrizen und Eigenwert-Statistik .....	233
10.3	Zeitabhängige Hamilton-Operatoren.....	237
10.4	Zeitperiodische Systeme.....	242
10.4.1	Floquet-Theorie .....	242
10.4.2	Periodisch getriebene Zweiniveausysteme .....	244
10.4.3	Der angetriebene Rotor .....	246
10.5	Kontrolle von Quantenprozessen .....	248
10.6	Lie-algebraische Zeitevolution .....	250
10.7	PT-Symmetrie .....	256
10.7.1	... und $2 \times 2$ -Matrizen.....	258
10.7.2	... und elektronische Schwingkreise .....	261
10.8	Lösungen der Aufgaben .....	263

<b>11</b>	<b>Phänomene bei Fast-Entartungen</b> .....	<b>267</b>
11.1	Landau-Zener-Übergänge .....	267
11.2	Diabolische Punkte und Berry-Phasen .....	269
11.3	Exzeptionelle Punkte .....	275
11.4	Landau-Zener-Übergänge mit Zerfall .....	281
11.5	Nichtlineare Zweiniveausysteme .....	283
11.6	Lösungen der Aufgaben .....	288
<b>12</b>	<b>Bipartite Quantensysteme und Quantencomputing</b> .....	<b>291</b>
12.1	Bipartite Systeme und Verschränkung .....	293
12.2	Qubits und Quantengatter .....	295
12.3	Quanten-Teleportation .....	300
12.4	Quanten-Fouriertransformation .....	301
12.5	Lösungen der Aufgaben .....	304
	<b>Index</b> .....	<b>307</b>

# 1

## Lineare Dynamik

*„Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so.“  
— Richard Feynman*

Physik ohne Differentialgleichungen wäre fast undenkbar. Also beginnen wir mit einer Untersuchung ihrer einfachsten nichttrivialen Vertreter, den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen. Eine Kenntnis ihrer Eigenschaften ist wichtig für ein Verständnis des Verhaltens komplexer nichtlinearer Systeme in der Umgebung ihrer stationären Punkte. Wir werden diese Fixpunkte klassifizieren und dabei den Begriff des Index eines Fixpunktes kennenlernen.

### ■ 1.1 Phasenportraits linearer Flüsse

Das Zeitverhalten eines Systems, beispielsweise eines mechanischen Pendels, eines elektrischen Schwingkreises oder eines biologischen Ökosystems, wird oft durch gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Solche Differentialgleichungen lassen sich in ein System erster Ordnung für die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  transformieren. Im einfachsten Fall sind sie explizite Gleichungen für die Änderung  $\dot{x}_j = dx_j/dt$  der Größen  $x_j$  mit der Zeit  $t$ ,

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

(Genauer gesagt handelt es sich hier um ein **autonomes** System. Im allgemeineren Fall können die Funktionen  $v_j$  zeitabhängig sein.) Man sucht eine Lösung für die Anfangsbedingungen  $x_j(t_0)$ . Wir werden hier annehmen, dass die Variablen und die Funktionen reell sind. Zur Abkürzung schreibt man das Differentialgleichungssystem auch als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Dabei steht  $\mathbf{x}$  für ein  $n$ -Tupel der Variablen und es soll dadurch nicht unterstellt werden, dass es sich dabei um das mathematische Objekt eines Vektors handeln muss. Man bezeichnet den von den Variablen  $\mathbf{x}$  aufgespannten Raum als den **Phasenraum** und eine Lösung der Differentialgleichungen als **Phasenbahn** oder auch kurz als Bahn oder **Trajektorie**. Solch ein Phasenraum ist in der Regel eine **Mannigfaltigkeit**, also lokal ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. In jedem Punkt  $\mathbf{x}$  des Phasenraumes ist der Tangentialvektor einer Phasenbahn durch  $\mathbf{v}$  gegeben, die Vektoren  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  bilden ein **Vektorfeld** auf der Mannigfaltigkeit, ihre Richtungen ein **Richtungsfeld**.

Die Geschwindigkeiten  $v_j(x_1, \dots, x_n)$  sind im Allgemeinen **nichtlineare** Funktionen, was in aller Regel zu einem sehr reichhaltigen dynamischen Verhalten führt. Man findet dabei die unterschiedlichsten Strukturen wie beispielsweise Fixpunkte, Grenzzyklen, chaotische Bahnen

und seltsame Attraktoren. Eine Übersicht über die Bahnen eines Systems bezeichnet man als ein **Phasenportrait**.

Von großer Bedeutung sind die Punkte  $\mathbf{x}_s$  des Phasenraums mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s) = 0$ , die sich also zeitlich nicht ändern. Sie haben viele Namen, wie beispielsweise **singuläre Punkte**, **stationäre Punkte**, **Gleichgewichtspunkte** oder **Fixpunkte**. Wir werden das Verhalten in der Umgebung dieser stationären Punkte genauer analysieren.

Eine Grundvoraussetzung für eine Untersuchung solcher dynamischer Systeme ist eine gute Kenntnis der einfachsten Modellsysteme dieser Art, nämlich **linearer Systeme**

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Hier ist  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  ein Vektor und wir können die Gleichungen in Matrixform  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  zusammenfassen mit der Matrix  $\mathbf{A} = (a_{jk})$ . Solche Gleichungen erhält man beispielsweise dann, wenn man das nichtlineare System (1.1) in der Nähe eines stationären Punktes  $\mathbf{x}_s$  mit  $v_j(\mathbf{x}_s) = 0$  betrachtet. Entwickelt man die  $v_j(\mathbf{x})$  um diesen stationären Punkt und verschiebt ihn in den Koordinatennullpunkt, so erhält man die Gleichungen (1.1) mit  $a_{jk} = \partial v_j / \partial x_k |_{\mathbf{x}_s}$ .

Im einfachsten Fall einer einzigen Variablen kann die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

durch  $t - t_0 = \int_{x_0}^x f^{-1}(x') dx'$  gelöst werden. In der Umgebung eines stationären Punktes  $x_s$  mit  $\dot{x} = f(x_s) = 0$  ist das Verhalten der linearisierten Gleichung  $\dot{x} = a(x - x_s)$  mit  $a = f'(x_s)$  sehr übersichtlich: Die Lösung  $x(t) = x_s + x_0 e^{a(t-t_0)}$  nähert sich für  $a < 0$  dem stationären Punkt  $x_s$ , für  $a > 0$  entfernt sie sich davon. Der stationäre Punkt ist dann **stabil** oder **instabil**.

Schon für zwei Variablen ist das Verhalten der linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

mit den Anfangsbedingungen  $(x(0), y(0))^T = (x_0, y_0)^T$  zur Zeit  $t_0 = 0$  merklich interessanter. Es sei daran erinnert, dass wir hier reelle Matrixelemente und Anfangsbedingungen annehmen wollen, und damit auch reelle Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$ . Außerdem wollen wir hier den einfachen Fall zeitunabhängiger Matrixelemente betrachten. Mehr zu dem zeitabhängigen Fall findet man in Abschnitt 2.2.

Wir können eine Lösung der Differentialgleichungen (1.5) finden, indem wir die erste Differentialgleichung ein zweites Mal nach der Zeit differenzieren und dann die Variable  $y(t)$  mithilfe der zweiten Gleichung eliminieren. Das führt dann zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wie bei dem gedämpften harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3. Hier wollen wir aber bei der Matrixdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.6)$$

bleiben. Einfache Lösungen dieser Differentialgleichung findet man mithilfe des Separationsansatzes

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

mit einem zeitlich konstanten Vektor  $\mathbf{u}$ . Die Zeitableitung ergibt  $\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$  und Einsetzen in (1.6) führt auf

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{u} = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

Der Vektor  $\mathbf{u}$  ist also **Eigenvektor** der Matrix  $\mathbf{A}$  mit dem **Eigenwert**  $\lambda$ . Man erhält einen solchen Eigenwert durch die Lösung der **charakteristischen Gleichung**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1.9)$$

(vgl. M2, Gleichung (1.53)). Die Eigenwerte  $\lambda_j$  der Matrix  $\mathbf{A}$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{u}_j$ , also vom Nullvektor verschiedene Vektoren mit  $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$ , sind sehr wichtig für ein Verständnis der Dynamik des Systems. Man sieht sofort, dass jedes Vielfache eines Eigenvektors auch diese Bedingung erfüllt, es gibt also einen **Eigenraum** zu jedem Eigenwert. Mit der Zeit variiert ein Eigenvektor wie

$$\mathbf{u}_j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{u}_j, \quad (1.10)$$

was man sofort durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1.6) sieht. Der Vektor bleibt also immer in diesem Eigenraum.

Für unsere  $2 \times 2$ -Matrix gibt es entweder zwei verschiedene Eigenvektoren, nennen wir sie  $\mathbf{u}_\pm$  mit den Eigenwerten  $\lambda_\pm$ , oder nur einen einzigen Eigenvektor  $\mathbf{u}$  mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Im ersten Fall ist der Rang der Matrix  $\mathbf{A}$  gleich zwei und die Eigenvektoren bilden eine Basis. Die Matrix ist dann diagonalisierbar. Im zweiten Fall ist der Rang der Matrix gleich eins und die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Ein allgemeinerer Lösungsansatz der Dynamik des Systems (1.6) formuliert die Bewegungsgleichung in der Matrixform

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (1.11)$$

für die **Zeitentwicklungsmatrix**  $\mathbf{U}(t)$ , die zur Anfangszeit  $t_0 = 0$  gleich der Einheitsmatrix ist:  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ . Damit erhält man durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0 \quad (1.12)$$

die Lösung für jede Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0$ . Die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.11) ist die Exponentialfunktion

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.13)$$

deren explizite Form als  $2 \times 2$ -Matrix wir hier nicht angeben wollen. Man findet sie für den harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3, oder allgemeiner in M2, Abschnitt 2.2.

## ■ 1.2 Fixpunkte und Phasenportraits

Das lineare System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  aus Gleichung (1.6) besitzt als stationären Punkt, also als Fixpunkt, den Nullpunkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Das ist der einzige Fixpunkt, wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar ist, also für  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Andernfalls kann es mehr Lösungen geben, nämlich alle Vektoren mit  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , die Vektoren aus dem **Kern** von  $\mathbf{A}$ . Wenn  $\mathbf{A}$  die Nullmatrix ist, wäre das der gesamte Raum, andernfalls ein eindimensionaler Teilraum, der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda = 0$ . Derartige Fixpunkte nennt man **nicht-isoliert**, denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes liegt ein weiterer Fixpunkt. Im Folgenden werden wir für alle Typen von Fixpunkten die zugehörigen Phasenportraits genauer beschreiben.

Das dynamische Verhalten der Lösungen hängt sicherlich nicht von dem verwendeten Koordinatensystem ab, sondern von Größen, die bei Transformationen des Koordinatensystems,

also Ähnlichkeitstransformationen, invariant bleiben (vgl. M2, Kapitel 4). Das ist der Spur der Matrix  $\mathbf{A}$ , also die Summe der Eigenwerte, und die Determinante, also das Produkt der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\tau &= \text{spur}\mathbf{A} = a + d = \lambda_+ + \lambda_-, \\ \Delta &= \det\mathbf{A} = ab - cd = \lambda_+ \lambda_-\end{aligned}\tag{1.14}$$

und natürlich die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})\tag{1.15}$$

selbst. Da  $\mathbf{A}$  reell ist, sind Spur und Determinante reell und die Eigenwerte sind entweder beide reell oder bilden ein komplex konjugiertes Paar.

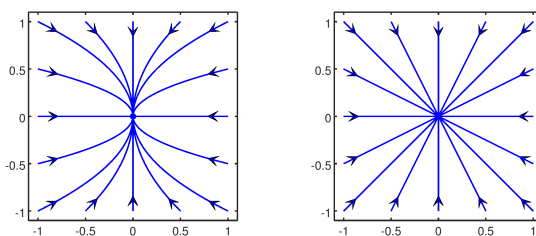
Um die Dynamik des Systems zu verstehen, muss man zunächst alle möglichen unterschiedlichen Typen von Eigenwerten klassifizieren.

### Fall I: $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.

Bringt man die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform  $\begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ , dann liegen die beiden Eigenvektoren in den Koordinatenrichtungen. Es gibt vier Möglichkeiten:

#### Fall Ia: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} > 0$ .

Dann haben die Eigenwerte gleiche Vorzeichen und wir finden ein Verhalten wie in Bild 1.1 für  $\lambda_- = -2$ ,  $\lambda_+ = -1$  illustriert, ein sogenannter **stabiler Knoten**. Die Bahnen nähern sich im Langzeitlimit dem Fixpunkt in der Eigenrichtung des Eigenwertes mit dem kleinsten Betrag des Eigenwertes, also der langsamsten Richtung. In dem dargestellten Fall verläuft die Bewegung in der  $y$ -Richtung schneller als die in der  $x$ -Richtung, da  $|\lambda_-| > |\lambda_+|$ . Wenn beide Eigenwerte negativ und gleich sind, so bewegt sich jeder Punkt radial zum Zentrum, ein **stabiler Stern**, wie im rechten Bild. Sind beide Eigenwerte positiv, dann kehrt sich das Zeitverhalten um, und die Bahnen entfernen sich vom Fixpunkt. Wir haben einen **instabilen Knoten** bzw. einen **instabilen Stern**.



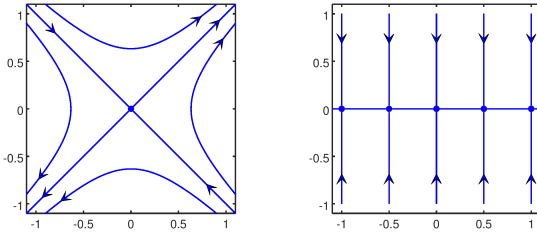
**Bild 1.1** Stabiler Knoten (links) und stabiler Stern (rechts).

#### Fall Ib: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} < 0$ .

Die Eigenwerte haben unterschiedliches Vorzeichen. In einer Eigenrichtung finden wir dann eine Bewegung zum Fixpunkt hin, in der anderen von ihm weg. Wir haben einen **Sattelpunkt**, wie links in Bild 1.2 für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_{\pm} = \pm 1$  und den Eigenvektoren  $\mathbf{u}_{\pm} = (1, \pm 1)^T$ .

#### Fall Ic: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} = 0$ .

Dann ist einer der beiden Eigenwerte gleich null und damit der Kern von  $\mathbf{A}$  nicht nur der Nullvektor. Das rechte Bild 1.2 zeigt ein Phasenportrait für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Hier besteht



**Bild 1.2** Sattelpunkt (links) und nicht-isolierte Fixpunkte auf der  $x$ -Achse (rechts).

die gesamte  $x$ -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten und alle Punkte nähern sich im Langzeitlimit dieser Achse.

**Fall I d: Eigenwerte konjugiert komplex.**

Dieser Fall mit

$$\lambda_{\pm} = \gamma \pm i\omega \quad , \quad \gamma, \omega \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

tritt ein für  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Dann ist die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \mathbf{u}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \mathbf{u}_- \quad (1.17)$$

ein komplexer Vektor. Wir suchen aber eine reelle Lösung. Da unsere Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  linear ist, ist mit  $\mathbf{x}(t)$  auch  $\mathbf{x}^*(t)$  eine Lösung und wir können reelle Linearkombinationen konstruieren. Das lässt sich in übersichtlicher Weise formulieren, indem man die Diagonalfom  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$  mithilfe der Ähnlichkeitstransformation  $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  auf eine reelle Form transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & i\lambda_- \\ i\lambda_+ & \lambda_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_- + \lambda_+ & i\lambda_- - i\lambda_+ \\ -i\lambda_- + i\lambda_+ & \lambda_- + \lambda_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \omega \\ -\omega & \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten  $\mathbf{x}' = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \gamma x' + \omega y' , \\ \dot{y}' &= -\omega x' + \gamma y' , \end{aligned} \quad (1.19)$$

die man in Polarkoordinaten

$$x' = r \cos \varphi , \quad y' = r \sin \varphi \quad (1.20)$$

entkoppeln kann als

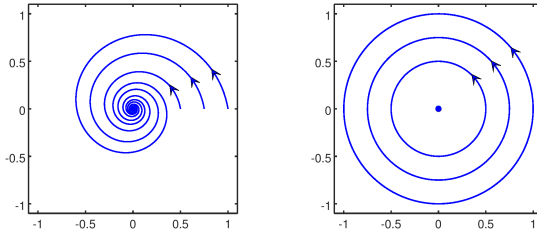
$$\dot{r} = \gamma r , \quad \dot{\varphi} = -\omega \quad (1.21)$$

mit den Lösungen

$$r(t) = r_0 e^{\gamma t} , \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \omega t. \quad (1.22)$$

Das ist eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , deren Entfernung vom Koordinatennullpunkt exponentiell abnimmt (für  $\gamma < 0$ ), zunimmt (für  $\gamma > 0$ ) oder konstant bleibt (für  $\gamma = 0$ ). Im ersten Fall ist das ein **stabiler Fokus**, eine **Senke** des Vektorfeldes, wie in links in Bild 1.3 dargestellt, im zweiten Fall ein **instabiler Fokus**, eine **Quelle** des Vektorfeldes, und im letzten Fall ein **Zentrum** wie im rechten Bild.





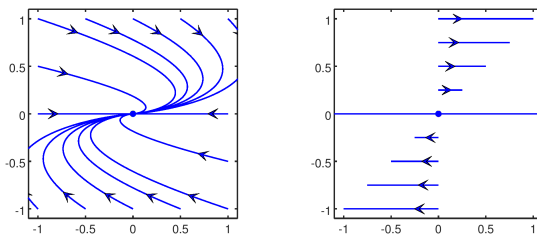
**Bild 1.3** Stabiler Fokus (links) und Zentrum (rechts).

**Fall II: A ist nicht diagonalisierbar.**

Dann lässt sich die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Jordan-Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

bringen (vgl. M2, Abschnitt 2.1.3). Dabei ist  $\lambda$  der einzige Eigenwert mit dem einzigen Eigenvektor  $\mathbf{u} = (1, 0)^T$ . Bild 1.4 zeigt den Fluss für  $\lambda = -0.5$ . Dies ist ein stabiler **degenerierter Knoten**. Alle Bahnen nähern sich dem Koordinatennullpunkt tangential zur Richtung des Eigenvektors, hier die  $x$ -Achse. Für  $\lambda = 0$  besteht die gesamte  $x$ -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten, ähnlich zu dem Fall in Bild 1.2 für eine diagonalisierbare Matrix mit einem Eigenwert  $\lambda = 0$ . Das Verhalten ist hier jedoch anders: Es gibt keine Bahnen, die gegen die Fixpunkte konvergieren. Alle Trajektorien verlaufen parallel zur  $x$ -Achse mit einer Geschwindigkeit, die proportional zur  $y$ -Komponente anwächst. Alle Bahnen der Abbildung wurden mit  $x_0 = 0$  gestartet und jeweils um das gleiche Zeitintervall propagiert.

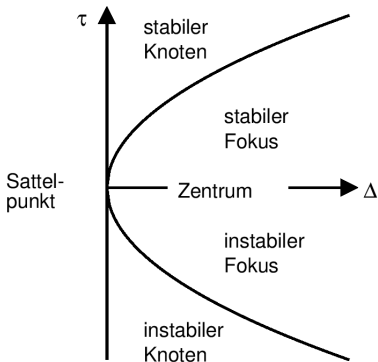


**Bild 1.4** Degenerierter stabiler Knoten (links) und nicht-isolierte Fixpunkte (rechts).

Zur Übung der Fixpunktklassifikation die folgende Aufgabe:

**Aufgabe 1.1 (Lös. Seite 27):** Von welchem Typ sind die Fixpunkte der Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ?

Zusammenfassend ist die Klassifikation der Fixpunkte in Bild 1.5 in der  $(\Delta, \tau)$ -Ebene dargestellt. Innerhalb der nach rechts geöffneten Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  sind die stationären Punkte Fokus-Punkte, stabil für  $\tau < 0$ , instabil für  $\tau > 0$ , und Zentren für  $\tau = 0$ . Unterhalb und oberhalb der Parabel ergeben sich stabile und instabile Knoten, und in der Halbebene  $\Delta < 0$  finden wir Sattelpunkte. Die verschiedenen Fixpunkttypen gehen auf den kritischen Kurven ineinander über. Hier haben wir drei solche Kurven:



**Bild 1.5** Klassifikation stationärer Punkte in Abhängigkeit von Spur  $\tau$  und Determinante  $\Delta$  der Matrix  $\mathbf{A}$ . Auf der Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  findet man degenerierte Knoten und auf der Geraden  $\Delta = 0$  nicht-isolierte stationäre Punkte.

- (a) Wenn man bei einer Parametervariation die ( $\Delta=0$ )-Achse von der linken Seite her kreuzt, dann gehen zwei reelle Fixpunkte verschiedenen Vorzeichens in zwei reelle gleichen Vorzeichens über. Auf der kritischen Geraden ist also einer der Fixpunkte gleich null. Dort finden wir nicht-isolierte Fixpunkte wie rechts in Bild 1.2 dargestellt.
- (b) Kreuzt man die kritische Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  von außen nach innen, dann nähern sich zwei reelle Eigenwerte, treffen sich und gehen in ein konjugiert komplexes Paar über. Auf der Parabel selbst ist die Matrix nicht diagonalisierbar und hat nur einen einzigen Eigenwert. Bei diesem Übergang verwandelt sich ein Knoten über einen degenerierten Knoten (vgl. Bild 1.4) in einen Fokus-Punkt.
- (c) Auf der Achse  $\tau = 0$  mit  $\Delta > 0$  finden wir zwei rein imaginäre Eigenwerte und wir haben ein Zentrum (vgl. das rechte Bild in Bild 1.3). Bei einer Parametervariation, die diese Achse kreuzt, geht ein stabiler Fokus in einen instabilen über.

Von den drei beschriebenen kritischen Fällen trifft man am häufigsten auf den Fall (c), also auf Zentren. Sie treten beispielsweise in reibungsfreien mechanischen Systemen auf.

## ■ 1.3 Der harmonische Oszillator

Der angetriebene gedämpfte harmonische Oszillator ist eines der elementaren Modellsysteme der klassischen Physik. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.24)$$

mit der Dämpfungskonstanten  $\gamma$  und der Frequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung. Der zeitabhängige Antrieb  $f(t)$  ist im einfachsten Fall eine monofrequente periodische Funktion  $f(t) = f_0 \cos \Omega t$ .

Gleichung (1.24) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben, indem man die Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  als zweite Veränderliche neben  $x$  einführt. Dann erhält man

$$\dot{x} = v \quad , \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f(t). \quad (1.25)$$

In vektorieller Form lautet das

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

oder einfacher

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (1.27)$$

mit  $\mathbf{x} = (x, v)^T$ ,  $\mathbf{f}(t) = (0, f(t))^T$  und der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Im einfachsten Fall haben wir keinen äußeren Antrieb,  $f(t) = 0$ , und die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu der homogenen Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  aus Gleichung (1.6), die wir oben untersucht haben (vgl. Seite 12 und folgende). Den angetriebenen Fall werden wir in Abschnitt 2.2 betrachten.

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind gleich

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (1.29)$$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- (a) Für schwache Dämpfung ( $\gamma < \omega_0$ ), im **Schwingfall**, ist der Term unter der Wurzel negativ und wir schreiben zweckmäßigerweise

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.30)$$

Die Eigenfunktionen fallen also zeitlich ab wie  $e^{-\gamma t}$  und oszillieren mit der Frequenz  $\omega$ .

- (b) Für starke Dämpfung ( $\gamma > \omega_0$ ) sind die Eigenwerte reell und beide Lösungen fallen exponentiell ab, am langsamsten die zum Eigenwert  $\lambda_+$ .
- (c) Für die kritische Dämpfung ( $\gamma = \omega_0$ ) entarten die Eigenwerte,  $\lambda_+ = \lambda_-$ , und auch die beiden zugehörigen Eigenvektoren stimmen überein.

Die reelle Matrix  $\mathbf{A}$  aus Gleichung (1.28) ist nicht-symmetrisch. Wenn dann  $\lambda_n$  ihr Eigenwert ist, dann ist  $\lambda_n^*$  ein Eigenwert der hermitesch konjugierten Matrix  $\mathbf{A}^\dagger$ , ihre Eigenvektoren sind aber verschieden. Man unterscheidet dann zwischen **rechten Eigenvektoren**  $\mathbf{x}_n$  (denen von  $\mathbf{A}$ ) und **linken Eigenvektoren**  $\mathbf{y}_n$  (denen von  $\mathbf{A}^T$ ). Es lässt sich leicht zeigen, dass die rechten und linken Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. (Mehr dazu in M2, Abschnitt 1.3.2.) Eine solche biorthogonale Basis ist zweckmäßig bei konkreten Berechnungen. Man normiert dann die Basisvektoren wie

$$\mathbf{y}_n^\dagger \mathbf{x}_m = \delta_{nm}. \quad (1.31)$$

**Aufgabe 1.2 (Lös. Seite 28):** Berechnen Sie die rechten und linken Eigenvektoren  $\mathbf{x}_{\pm}$  bzw.  $\mathbf{y}_{\pm}$  der Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$  aus Gleichung (1.28) zu den Eigenwerten  $\lambda_{\pm}$ . Verifizieren Sie, dass sie orthogonal sind,  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_+ = \mathbf{y}_+ \cdot \mathbf{x}_- = 0$ , und normieren Sie sie wie  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_- = \mathbf{y}_+^\dagger \mathbf{x}_+ = 1$ .

Eine **allgemeine Lösung**, also eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  für jede Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , lässt sich mit der Zeitentwicklungsmatrix  $\mathbf{U}(t)$  aus (1.11) bequem als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{x}_0 \quad (1.32)$$

schreiben. Wir werden weiter unten sehen, wie man eine solche Matrixlösung in exponentieller Form  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  (vgl. Gleichung (1.13)) konstruieren kann. Im Moment wollen wir einmal akzeptieren, dass

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega_0 \sin(\omega t + \varphi) & \sin \omega t \\ -\omega_0^2 \sin \omega t & -\omega_0 \sin(\omega t - \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  und  $\sin \varphi = \omega / \omega_0$  eine solche Lösung darstellt.

**Aufgabe 1.3 (Lös. Seite 28):** Man kann die Lösung (1.33) natürlich durch Differenzieren überprüfen, beispielsweise für das Matrixelement  $U_{11}$ .

Hier haben wir zunächst den schwach gedämpften Fall  $\gamma < \omega_0$  angenommen, den Schwingfall. Die Modifikationen für starke Dämpfung  $\gamma > \omega_0$  ist

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) & \sinh \tilde{\omega} t \\ -\omega_0^2 \sinh \tilde{\omega} t & -\omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t - \tilde{\varphi}) \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

mit  $\tilde{\omega} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  und  $\sinh \tilde{\varphi} = \tilde{\omega} / \omega_0$ . Im Grenzfall kritischer Dämpfung,  $\gamma = \omega_0$ , liefern beide Gleichungen

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 + \gamma t & t \\ -t & 1 - \gamma t \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie man eine Matrixlösung wie (1.33) bestimmen kann. Wir leisten uns dabei den Luxus einer Verallgemeinerung und untersuchen die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I} \quad (1.36)$$

für die allgemeine  $2 \times 2$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

mit konstanten Koeffizienten. Die schon oben erwähnte Lösung ist  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  mit der Matrixfunktion  $e^{\mathbf{A}t}$ , die man beispielsweise durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n \quad (1.38)$$

definieren kann, was natürlich wieder eine  $2 \times 2$ -Matrix ergibt, nämlich

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_0 t} \left\{ \cosh \gamma_0 t \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma_0} \sinh \gamma_0 t (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \right\}. \quad (1.39)$$

mit  $\lambda_0 = (a + d)/2$  und  $\gamma_0 = \sqrt{(a - d)^2/4 + bc}$ . (Mehr darüber findet sich in M2, Kapitel 2.2; siehe insbesondere Gleichung (2.88).)

Die Zeitentwicklungsmatrix  $\mathbf{U}(t)$  beschreibt den Fluss im Phasenraum, der durch das Vektorfeld  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  erzeugt wird. Für die Matrix  $\mathbf{A}$  aus (1.28) erhält man  $\lambda_0 = -\gamma$  und  $\gamma_0 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , also die oben angegebenen Lösungen (1.33) und (1.34).

**Aufgabe 1.4 (Lös. Seite 28):** Berechnen Sie explizit Determinante und Spur der Matrix  $\mathbf{U}(t)$  aus (1.33). Wie lassen sich diese Ergebnisse direkt aus der Matrix  $A$  aus (1.28) ermitteln?

Die Zeitentwicklungsmatrizen  $\mathbf{U}(t)$  zu einer Matrix  $A$  bilden eine kommutative Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Das erkennt man auf einfache Weise mithilfe der Darstellung  $\mathbf{U}(t) = e^{At}$ . Zunächst gehört wegen  $\mathbf{I} = e^{A \cdot 0} = \mathbf{U}(0)$  die Einheitsmatrix zu dieser Menge und die Gleichungen

$$\mathbf{U}(t_2)\mathbf{U}(t_1) = e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_2+t_1)} = \mathbf{U}(t_2+t_1) = \mathbf{U}(t_1)\mathbf{U}(t_2), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = e^{-At} = \mathbf{U}(-t) \quad (1.41)$$

zeigen, dass auch die Produkte und die Inversen dazugehören. Außerdem belegt die Formel für das Produkt die Kommutativität.

## ■ 1.4 Ein Ausflug in die Nichtlinearität

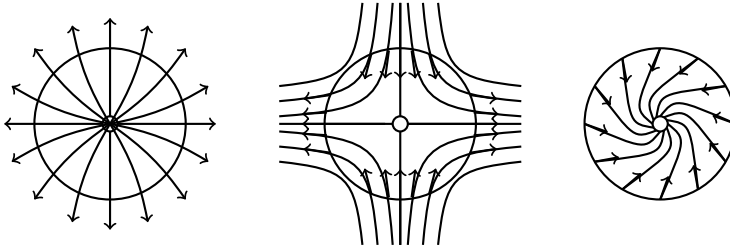
Eine wesentliche Eigenschaft der oben betrachteten Systeme ist ihre **Linearität**. Das erlaubt eine Analyse mit den Techniken der Linearen Algebra, schränkt aber andererseits ihre Anwendbarkeit zur Beschreibung interessanter physikalischer Systeme viel zu sehr ein. Im Rahmen dieses Buches können wir leider nur einen kurzen Ausflug in die Welt nichtlinearer Systeme unternehmen und beschränken uns dabei auf zweidimensionale autonome Systeme, die durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (1.42)$$

beschrieben werden, die also nicht explizit von der Zeit abhängen. Mit  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  für den Punkt in der Phasenebene und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = (f, g)^T$ , die wir als glatt, also beliebig oft differenzierbar, voraussetzen, schreiben wir dies wieder als  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Solche zweidimensionalen Systeme sind vergleichsweise einfach zu verstehen, denn man kann zeigen, dass hier *keine* chaotische Dynamik auftreten kann.

Einen Überblick über das dynamische Verhalten liefert das Phasenportrait. Es wird wesentlich organisiert durch **Invarianten** der Dynamik, also Punktmenge, deren Punkte bei der Zeitentwicklung für alle Zeiten in dieser Menge verbleiben. Das sind hier Fixpunkte und geschlossene Bahnen, also **invariante Kurven**.

Zum besseren Verständnis ihrer Organisation im Phasenraum benötigen wir noch ein weiteres Charakteristikum, ihren **Index**. Wir betrachten dazu das Richtungsfeld auf einer einfach geschlossenen Kurve  $C$  im Phasenraum, also auf einer Kurve, die sich nicht selbst schneidet. Außerdem soll auf der Kurve kein Fixpunkt liegen. Wir betrachten in einem Punkt der Kurve einen Zeiger in Richtung des Richtungsfeldes und verfolgen diesen Zeiger bei einem vollständigen Umlauf des Punktes längs der Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn. Der **Index**  $I_C$  der Kurve ist definiert als die Anzahl der Zeigerdrehungen, die **Windungszahl**, wieder gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Unter dem **Index eines Fixpunktes** versteht man den Index ei-



**Bild 1.6** Index stationärer Punkte. Knoten (links) und Fokus (rechts) haben den Index +1, ein Sattelpunkt (Mitte) hat den Index -1.

ner geschlossenen Kurve, die ihn einschließt und keinen weiteren Fixpunkt. Hier einige der wichtigsten **Eigenschaften des Index**<sup>1</sup>:

- (a) Nach einer kurzen Überlegung mit einem Blick auf Bild 1.6 erkennt man, dass der Index eines Fokus-Punktes und eines Knotens gleich +1 ist, der eines Sattelpunktes gleich -1.
- (b) Bei einer stetigen Deformation der Kurve  $C$  ohne Kreuzung eines Fixpunktes ändert sich der Index nicht, denn als ganzzahlige Größe kann sich der Index nicht stetig ändern.
- (c) Wenn die Kurve  $C$  keinen Fixpunkt umschließt, ist ihr Index gleich null, denn man kann nach (b) die Kurve stetig auf einen winzigen Punkt zusammenziehen. Dort ist das Feld konstant und die Windungszahl folglich null.
- (d) Umschließt die Kurve  $C$  eine endliche Anzahl isolierter Fixpunkte, ist ihr Index gleich der Summe der Indizes dieser Fixpunkte. Das lässt sich zeigen, indem man die Kurve stetig zusammenzieht, sodass sie nur noch die Fixpunkte umschließt sowie Hin- und Rückwege längs ihrer Verbindungslinien. Dann kompensieren sich die Beiträge dieser Verbindungslinien.
- (e) Wenn die geschlossene Kurve eine Bahnkurve ist, dann sind alle Geschwindigkeitsvektoren tangential zur Bahn gerichtet. Folglich dreht sich der Vektor genau wie der Bahnpunkt genau einmal und der Index ist gleich +1.

Wenn diese Betrachtungen der Indexfunktion zu anschaulich, also zu wenig „mathematisch“ erscheinen, dann könnte die folgende Aufgabe das ausgleichen:

**Aufgabe 1.5 (Lös. Seite 29):** Für das Vektorfeld der Differentialgleichungen (1.42) ist der Index einer einfachen Kurve  $C$ , die keinen Fixpunkt enthält, gleich

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.$$

Beweisen Sie diese Integralformel und berechnen Sie für das Feld  $f(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ,  $g(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha$  mithilfe der Integralformel den Index für einen Kreis, der den Nullpunkt umschließt.

<sup>1</sup> Sehr viel mehr zu diesem Thema findet man in dem Buch Arnold, V. I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag 2001.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns zwei nichtlineare Systeme etwas genauer ansehen, eine nichtlineare Erweiterung des harmonischen Oszillators und ein bekanntes System der Biologie aus der Populationsdynamik.

### 1.4.1 Ein nichtlinearer Oszillator

Eine natürliche Erweiterung des bekannten harmonischen Oszillators aus Abschnitt 1.3 ist der nichtlineare Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f_0 \cos \omega t, \quad (1.43)$$

der auch nach dem deutschen Ingenieur Georg Duffing (1861-1944) unter dem Namen **Duffing-Oszillator** bekannt ist. Hier wird in der Bewegungsgleichung (1.24) des harmonischen Oszillators die lineare Kraft um den Term  $\beta x^3$  ergänzt, der das Verhalten des Systems *qualitativ* verändert. Dieser angetriebene nichtlineare Oszillator ist ein charakteristisches Beispiel für ein System mit sehr komplexer chaotischer Dynamik. Hier werden wir uns aber auf den viel einfacheren Fall mit  $f_0 = 0$  beschränken, also auf eine freie gedämpfte nichtlineare Schwingung, beispielsweise ein Modell einer realen Feder oder eines gedämpften Pendels für kleine Ausschläge.

Wir schreiben die Differentialgleichungen (1.43) wieder als zwei Gleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\alpha x - \beta x^3 - 2\gamma v = F(x) - 2\gamma v. \quad (1.44)$$

mit einer „Kraft“  $F(x)$ , die man als (negativer) Gradient eines Potentials schreiben kann:

$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 \quad \text{mit} \quad F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \alpha x + \beta x^3 \quad (1.45)$$

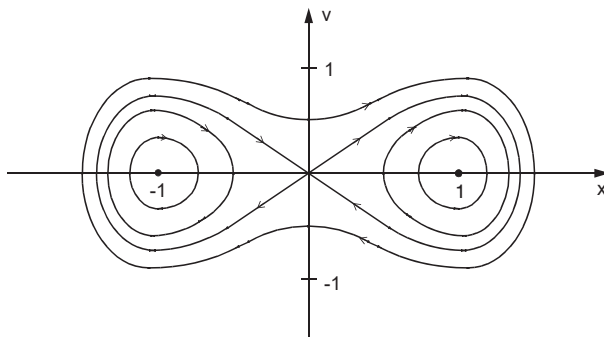
Die Fixpunkte der Bewegungsgleichung berechnet man als

$$v = 0 \quad \text{und} \quad x_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x_{\pm} = \pm\sqrt{-\alpha/\beta} \quad \text{für} \quad \alpha/\beta < 0. \quad (1.46)$$

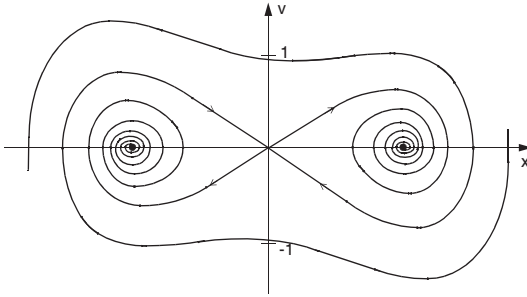
**Aufgabe 1.6 (Lös. Seite 30):** Linearisieren Sie die Differentialgleichungen (1.44) für  $\gamma > 0$  und  $\beta = 1$  an den Fixpunkten und bestimmen Sie ihren Charakter.

Für ein reibungsfreies System ( $\gamma = 0$ ) ist die „Energie“

$$E = \frac{1}{2}v^2 + V(x) \quad (1.47)$$



**Bild 1.7** Phasenbahnen des freien ungedämpften Duffing-Oszillators mit  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  und  $\gamma = 0$ .



**Bild 1.8** Phasenbahnen des freien gedämpften Duffing-Oszillators mit  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  und  $\gamma = 0.1$ .

eine Erhaltungsgröße, was man direkt durch Berechnung ihrer Zeitableitung verifizieren kann:

$$\dot{E} = v\dot{v} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = v(F(x) - 2\gamma v) - F(x)v = -2\gamma v^2. \quad (1.48)$$

Also ist  $E$  für  $\gamma = 0$  konstant und nimmt für  $\gamma > 0$  monoton ab.

Das Potential  $V(x)$  hat für  $\alpha/\beta > 0$  ein Minimum bei  $x_0 = 0$ , andernfalls dort ein Maximum und zwei Minima bei  $x_{\pm}$ . Das sind genau die Fixpunkte aus (1.46). Die Phasenbahnen des Systems erhält man aus der Energieerhaltung als

$$v(x) = \pm \sqrt{2(E - V(x))}. \quad (1.49)$$

Sie sind also geschlossene Kurven. Nach Eigenschaft (e) ist der Index dieser Kurven gleich +1, sie müssen also entweder nur einen Fixpunkt mit Index -1 einschließen, also hier ein Zentrum, oder drei Fixpunkte, also hier zwei Zentren bei  $x_{\pm}$  mit Index +1 und den Sattelpunkt bei  $x_0$ . Bild 1.7 illustriert diesen Fall für  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ .

Wenn man der Reibungsterm hinzunimmt, dann bleiben Lage und Index der Fixpunkte unverändert. Allerdings bleibt die Energie nicht mehr erhalten und die Zentren werden für schwache Dämpfung zu stabilen Fokus-Punkten, die Bahnen anziehen, wie in Bild 1.8 illustriert. Der Sattelpunkt bleibt erhalten (vgl. auch Aufgabe 1.6). Die Bahnen, die gegen den Sattelpunkt konvergieren, seine **stabilen Mannigfaltigkeiten**, und die Bahnen, die sich vor unendlich langer Zeit vom Sattelpunkt entfernt haben, seine **instabilen Mannigfaltigkeiten**, zerlegen die gesamte Phaseebene in jeweils zusammenhängende Bereiche. Alle Bahnen innerhalb dieser Bereiche konvergieren gegen einen der beiden Fokus-Punkte, sie bilden ihre **Einzugsbereiche**.

Geschlossene Bahnen existieren für  $\gamma > 0$  nicht. Davon kann man sich für dieses System leicht überzeugen, denn eine geschlossene Bahn ist periodisch. Die Energie  $E$  nimmt aber monoton ab, wie wir aus Gleichung (1.48) wissen, im Widerspruch zur Periodizität. (Eine Ausnahme ist der Fall, dass die Geschwindigkeit konstant gleich null ist. Dann ist aber auch  $x$  konstant und unsere periodische Bahn reduziert sich auf einen Punkt.)

## 1.4.2 Das Lotka-Volterra-Modell

Die **Lotka-Volterra-Gleichungen** beschreiben ein Modell der **Populationsdynamik** in der Biologie. Dieses Modell ist auch unter dem Namen Räuber-Beute-Modell bekannt und wurde in den Jahren 1925/1926 unabhängig von A. J. Lotka und V. Volterra formuliert. Sie beschreiben die zeitliche Veränderung der Populationen zweier Spezies, nennen wir sie hier  $x$  und  $y$  mit  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$ , durch Differentialgleichungen.



Was können wir beispielsweise für das Verhalten der Populationsveränderung  $\dot{x}$  vermuten? Zunächst bewirkt die Vermehrung einer Spezies eine Zunahme proportional zu ihrer Population, also  $\dot{x} = \epsilon_x x$  mit  $\epsilon_x > 0$ . Ohne sonstige Einflüsse führt das zu einem exponentiellen Wachstum. Mit zunehmendem  $x$  wird aber das Wachstum durch Konkurrenz behindert, was man durch einen Term  $-\alpha_{xx}x^2$  mit  $\alpha_{xx} > 0$  berücksichtigen kann. Dies lässt sich auch begründen, indem man annimmt, dass die Wachstumsrate  $\epsilon_x$  durch einen Term proportional zu  $x$  reduziert wird, beispielsweise indem die vorhandene Nahrung durch die Konkurrenz verringert wird. Zusammen ergibt das die **logistische Gleichung**

$$\dot{x} = \epsilon_x x - \alpha_{xx} x^2 = (\epsilon_x - \alpha_{xx} x)x. \quad (1.50)$$

Das Gleiche gilt für das Wachstum  $\dot{y}$  der Spezies  $y$ , und genauso berücksichtigt man die gegenseitige Konkurrenz der beiden Spezies durch die Terme  $-\alpha_{xy}xy$  bzw.  $-\alpha_{yx}xy$  mit  $\alpha_{xy} > 0$  und  $\alpha_{yx} > 0$ . Damit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\epsilon_x - \alpha_{xx}x - \alpha_{xy}y) \\ \dot{y} &= y(\epsilon_y - \alpha_{yy}y - \alpha_{yx}x), \end{aligned} \quad (1.51)$$

oder in Matrixform  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$  mit  $\mathbf{u} = (x, y)^T$ . Wir wollen hier darauf verzichten, dieses Modell mit den sechs allgemeinen Parametern zu untersuchen, sondern beschränken uns auf ein illustrierendes Beispiel aus einem sehr empfehlenswerten Buch von Strogatz<sup>2</sup> über das Verhalten einer Tierpopulation von Kaninchen,  $x$ , und Schafen,  $y$ , die beide von dem gleichen Nahrungsmittel abhängig sind, dem Gras. Dafür betrachten wir einen speziellen Parametersatz mit den Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(2 - y - x). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Die Vermehrungsrate der Kaninchen ist höher angesetzt als die der Schafe, und die Schafe behindern das Wachstum der Kaninchenpopulation stärker als umgekehrt, was beides sinnvoll erscheint. Interessant ist es beispielsweise, ob ein harmonisches Gleichgewicht möglich ist, bei dem Kaninchen und Schafe koexistieren.

Zunächst wollen wir demonstrieren, dass man auf einfache Weise mit den Kenntnissen über das Verhalten linearer Systeme einen ersten Überblick über das Phasenportrait gewinnen kann. Dazu bestimmen wir zuerst die Fixpunkte  $\mathbf{u}_s = (x_s, y_s)^T$  und aus den linearisierten Gleichungen  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{L}(\mathbf{u}_s)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)$  ihre Charakteristika. Hier gibt es vier Fixpunkte, die man auf einfache Weise aus den Fixpunkt-Gleichungen

$$x(3 - x - 2y) = 0 \quad \text{und} \quad y(2 - y - x) = 0 \quad (1.53)$$

findet. Das wäre zunächst die Lösung  $x_s = 0$  mit den beiden Möglichkeiten  $y_s = 0$  oder  $y_s = 2$ . Für  $y_s = 0$  gibt es außerdem die Lösung  $x_s = 3$  und schließlich, wenn beide Variablen nicht gleich null sind,  $3 - x - 2y = 0$  und  $2 - y - x = 0$  mit der Lösung  $x_s = y_s = 1$ . Die **Jacobi-Matrix** zu (1.52) lautet

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - 2y - x \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Man berechnet für jeden Fixpunkt die Matrix  $\mathbf{L}$ , ihre Spur  $\tau$ , ihre Determinante  $\Delta$  und bestimmt mithilfe der Diskriminante  $\tau^2 - 4\Delta$  die Eigenwerte  $\lambda_j$  und die Eigenvektoren  $\mathbf{u}_j$  sowie ihren Typ. Alle diese Daten sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

<sup>2</sup> Strogatz, S. H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview, 2000

**Tabelle 1.1** Fixpunkte der Lotka-Volterra-Gleichungen (1.52) und ihre Charakteristika.

$(x_s, y_s)$	L	$\tau$	$\Delta$	$\tau^2 - 4\Delta$	$\lambda_j$	$u_j$	Typ
(0,0)	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	5	6	$1 > 0$	2, 3	$(0, 1)^T, (1, 0)^T$	instab. Knoten
(0,2)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	-3	2	$1 > 0$	-1, -2	$(1, -2)^T, (0, 1)^T$	stab. Knoten
(3,0)	$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	-4	3	$-7 < 0$	-1, -3	$(3, -1)^T, (1, 0)^T$	stab. Knoten
(1,1)	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	-2	-1	$8 > 0$	$-1 \pm \sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \mp 1)^T$	Sattelpunkt

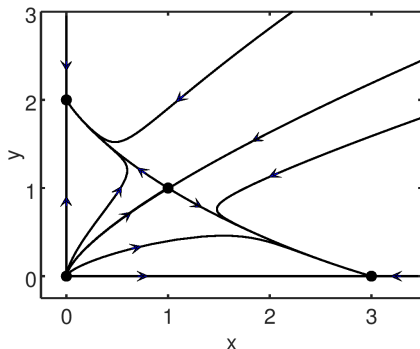
Wir finden einen instabilen und zwei stabile Knoten sowie einen Sattelpunkt.

Für den Knoten sind die Bahnen asymptotisch tangential zur langsamen Richtung, also zur Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert mit dem kleinsten Betrag. Im Sattelpunkt verläuft die stabile Mannigfaltigkeit in Richtung des Eigenvektors zum negativen Eigenwert, die instabile in der Richtung des anderen Eigenvektors. Es ist eine gute Übung, diese Angaben in einer Graphik darzustellen und die kleinen Stücke der linearisierten Phasenbahnen sinnvoll miteinander zu verbinden. Das Resultat sollte dem Bild 1.9 entsprechen.

Wir erkennen die folgenden Eigenschaften der Populationsdynamik:

- Fast alle Bahnen enden in den beiden stabilen Fixpunkten bei  $(x_s, y_s) = (3, 0)$  oder bei  $(0, 2)$ . Es gibt also im Langzeitlimit entweder nur Kaninchen oder nur Schafe. Ein stabiles Gleichgewicht beider Populationen existiert nicht.
- Eine besondere Rolle kommt der stabilen Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes zu. Sie trennt die Einzugsbereiche der beiden stabilen Fixpunkte, genau wie wir es schon für den Duffing-Oszillator gesehen hatten.

Es könnte jetzt noch die Frage auftreten, ob nicht doch ein periodisches Verhalten der beiden Populationen möglich ist, also eine geschlossene Bahn im Phasenraum, die uns bei unserer Diskussion des Phasenportraits entgangen ist. Dazu überlegen wir uns Folgendes: Eine solche geschlossene Bahn hat den Index +1, sie muss also mindestens einen Fixpunkt mit Index +1



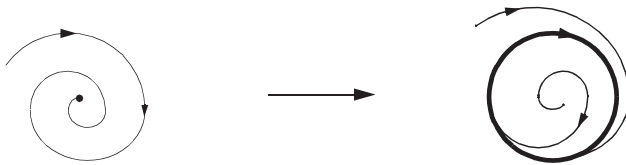
**Bild 1.9** Populationsdynamik des Kaninchen ( $x$ )-Schafe ( $y$ ) Systems (1.52). Es gibt vier Fixpunkte ( $\bullet$ ), drei Knoten und einen Sattelpunkt.

umschließen. Davon gibt es hier drei, und alle liegen auf der  $x$ - oder  $y$ -Achse. Daher muss eine solche Bahn notwendigerweise eine dieser Achsen kreuzen. Auf diesen Achsen ist das Feld aber immer entlang der Achse gerichtet, kann also niemals tangential zur Bahnkurve sein. Folglich existieren keine periodischen Bahnen.

In beiden Beispielen nichtlinearer Systeme haben wir begründen können, dass in den Phasenportraits keine periodischen Bahnen auftreten konnten. Das soll in keiner Weise bedeuten, dass das immer so ist. Im Gegenteil, es gibt viele interessante Systeme der Physik, in denen solche Bahnen existieren und sogar sehr wichtig sind. Sie können beispielsweise eine stabile kontrollierbare Selbsterregung eines Systems erzeugen, was das folgende Beispiel demonstriert, wobei wir die lineare Gleichung (1.21) durch einen nichtlinearen Term erweitern:

$$\dot{r} = v(r) = r(a - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1. \quad (1.55)$$

Die Fixpunkte dieser Differentialgleichung sind  $r = 0$  und  $r = \sqrt{a} = r_0$  für  $a > 0$ . Mithilfe von  $v'(r) = a - 3r^2$  sieht man, dass der Fixpunkt  $r = 0$  mit  $v'(0) = a$  für  $a < 0$  stabil ist, sonst instabil. Wegen  $v'(r_0) = -2a$  ist dann  $r_0$  stabil und wir erhalten dann eine geschlossene Bahn als Lösung, ein Kreis mit Radius  $r_0$ , der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird. Die Bahnen in der Nachbarschaft werden von ihr angezogen, hier sogar sämtliche Bahnen mit Ausnahme des instabilen Fixpunktes bei  $r = 0$ . Man bezeichnet eine solche periodische Lösung als **Grenzyklus**. Wenn der Systemparameter  $a$  von negativen Werten zu positiven variiert wird, dann wird aus einem stabilen Fokus für  $a < 0$  ein Grenzyklus für  $a > 0$ , der sich mit wachsendem  $a$  aufweitet, wie in Bild 1.10 illustriert. Man bezeichnet ein solches Verhalten als **Hopf-Bifurkation**, benannt nach dem deutsch-amerikanischen Mathematiker Eberhard F. F. Hopf (1902-1983).



**Bild 1.10** Hopf-Bifurkation. Der stabile Fokus bei  $r = 0$  für  $a < 0$  entwickelt sich in einen Grenzyklus  $r = \sqrt{a}$  für  $a > 0$ .

## ■ 1.5 Iterierte lineare Abbildungen

Eng verwandt mit linearen Flussgleichungen sind iterierte lineare Gleichungen

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

Sie entstehen beispielsweise aus Flussgleichungen, die man nur bei diskreten Zeiten betrachtet. Dies bietet sich zum Beispiel an bei Systemen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (1.57)$$

die periodisch von der Zeit abhängen,  $\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t)$ , und die nur bei Zeiten  $t_n = nT$  betrachtet werden, eine sogenannte **stroboskopische Abbildung**. Ganz allgemein werden wir auf solche Abbildungen stoßen, wenn wir iterierte nichtlineare Gleichungen untersuchen, wie

beispielsweise bei den harten Stößen oder allgemeiner bei **Poincaré-Abbildungen**, die wir in den Abschnitten 2.4 und 3.1.1 betrachten werden. Dort sind die periodischen Lösungen von großer Bedeutung und Kenntnisse über ihre Stabilität erhält man, indem man die Abbildung linearisiert. Ein Beispiel haben wir oben für das Lotka-Volterra-Modell gesehen.

Hier beschränken wir auf  $2 \times 2$ -Systeme mit einer reellen invertierbaren Matrix  $\mathbf{L}$ . Diese Matrix vermittelt eine lineare Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  (siehe M2, Kapitel 4). Ihre Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}) \quad (1.58)$$

mit  $\tau = \text{spur}\mathbf{L}$  und  $\Delta = \det\mathbf{L}$  bestimmen das Verhalten der Lösungen

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{L}^n \mathbf{x}_0, \quad (1.59)$$

genau wie im Fall der linearen Flüsse in Abschnitt 1.2 (siehe insbesondere Bild 1.5).

Besonders wichtig (und häufig) sind flächentreue Abbildungen, also solche mit  $\det\mathbf{L} = 1$ . Dann ist der Punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  für

$$|\text{spur}\mathbf{L}| < 2 \quad (1.60)$$

ein **elliptischer Fixpunkt**. Er ist **stabil**, das heißt, anfänglich benachbarte Bahnen bleiben für alle Zeiten in seiner Nähe. Genauer wissen wir, dass sich die Iterierten auf einer Ellipse um den Fixpunkt herum bewegen. Für  $|\text{spur}\mathbf{L}| > 2$  ist der Fixpunkt instabil, ein **hyperbolischer Fixpunkt**, und die Iterierten bewegen sich auf hyperbolischen Bahnen, die sich letztlich vom Fixpunkt entfernen, wie in M2, Bild 4.3 und 4.4 illustriert. Dort, in Abschnitt 3.5.1, findet man weitere Details über solche reellen symplektischen Abbildungen.

Als Beispiel betrachten wir kurz das Bild  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_n$  mit der Matrix

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Wir werden dieser Abbildung, vermeintlich geringfügig modifiziert durch ein mod 1, in Abschnitt 3.2.2 als Katzen-Abbildung wieder begegnen. Die Determinante der Matrix (1.61) ist gleich eins, die Abbildung ist also flächentreu und hat die positiven Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}). \quad (1.62)$$

Die zugehörigen (hier nicht normierten) Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_{\pm} = (1, \lambda_{\pm} - 1)^T \quad (1.63)$$

sind orthogonal, da die Matrix symmetrisch ist. Aus  $\text{spur}\mathbf{L} = 3 > 2$  folgt, dass der Fixpunkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hyperbolisch ist. Die iterierten Vektoren liegen auf einem Hyperbelast und nähern sich einer ihrer Asymptoten, der instabilen Richtung  $\mathbf{x}_+$ .

## ■ 1.6 Lösungen der Aufgaben

**Aufgabe 1.1 (Seite 16):** Von welchem Typ sind die Fixpunkte der Matrizen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ?

**Lösung:** Die Determinante der Matrix  $\mathbf{A}$  ist gleich  $\Delta = -2$ . Also liegt hier ein Sattelpunkt vor. Für die Matrix  $\mathbf{B}$  berechnet man die Determinante als  $\Delta = 5$  und die Spur als  $\tau = 6$ . Damit ist

die Diskriminante  $\tau^2 - 4\Delta = 16$ , also größer als null, und folglich ist der Fixpunkt ein Knoten. Er ist wegen  $\tau > 0$  instabil.

**Aufgabe 1.2 (Seite 18):** Berechnen Sie die rechten und linken Eigenvektoren  $\mathbf{x}_\pm$  bzw.  $\mathbf{y}_\pm$  der Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$  aus Gleichung (1.28) zu den Eigenwerten  $\lambda_\pm$ . Verifizieren Sie, dass sie orthogonal sind,  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_+ = \mathbf{y}_+ \cdot \mathbf{x}_- = 0$ , und normieren Sie sie wie  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_- = \mathbf{y}_+^\dagger \mathbf{x}_+ = 1$ .

**Lösung:** Die rechten und die linken Eigenvektoren berechnet man als

$$\mathbf{x}_\pm = N_\pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\pm = M_\pm \begin{pmatrix} -\omega_0^2 \\ \lambda_\pm^* \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

Das Skalarprodukt von  $\mathbf{y}_+$  und  $\mathbf{x}_-$  zeigt die Orthogonalität der beiden Vektoren:

$$\mathbf{y}_+ \cdot \mathbf{x}_- = \mathbf{y}_+^\dagger \mathbf{x}_- = M_+^* N_- (-\omega_0^2 + \lambda_+ \lambda_-) = 0, \quad (1.65)$$

da  $\lambda_+ \lambda_- = \det \mathbf{A} = \omega_0^2$ . Für die Normierung berechnen wir entsprechend

$$\mathbf{y}_\pm \cdot \mathbf{x}_\pm = \mathbf{y}_\pm^\dagger \mathbf{x}_\pm = M_\pm^* N_\pm (-\omega_0^2 + \lambda_\pm^2). \quad (1.66)$$

Das ist gleich eins für eine Wahl der Normierungskonstanten als

$$N_\pm = M_\pm^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\pm^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.67)$$

**Aufgabe 1.3 (Seite 19):** Man kann die Lösung (1.33) natürlich durch Differenzieren überprüfen, beispielsweise für das Matrixelement  $U_{11}$ .

**Lösung:** Die Zeitableitung von  $U_{11}$  ergibt

$$\begin{aligned} \dot{U}_{11} &= \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} (-\gamma \omega_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega \omega_0 \cos(\omega t + \varphi)) \\ &= \frac{\omega_0 e^{-\gamma t}}{\omega} (-\gamma \sin \omega t \cos \varphi - \gamma \cos \omega t \sin \varphi + \omega \cos \omega t \cos \varphi - \omega \sin \omega t \sin \varphi) \\ &= \frac{\omega_0 e^{-\gamma t}}{\omega} \left( -\frac{\gamma^2}{\omega_0} \sin \omega t - \frac{\gamma \omega}{\omega_0} \cos \omega t + \frac{\omega \gamma}{\omega_0} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0} \sin \omega t \right) \\ &= \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} (-\gamma^2 - \omega^2) \sin \omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.68)$$

wobei

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \gamma / \omega_0 \quad (1.69)$$

benutzt wurde. Dieses Resultat stimmt mit dem Matrixelement der rechten Seite von (1.33) überein:

$$(\mathbf{A}\mathbf{U})_{11} = A_{11}U_{12} + A_{12}U_{21} = U_{21} = -\frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (1.70)$$

**Aufgabe 1.4 (Seite 20):** Berechnen Sie explizit Determinante und Spur der Matrix  $\mathbf{U}(t)$  aus (1.33). Wie lassen sich diese Ergebnisse direkt aus der Matrix  $\mathbf{A}$  aus (1.28) ermitteln?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{U}(t) &= \frac{e^{-2\gamma t}}{\omega^2} \left( -\omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 \sin^2 \omega t \right) \\
 &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-2\gamma t} \left( -(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)(\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) + \sin^2 \omega t \right) \\
 &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-2\gamma t} \left( -\sin^2 \omega t \cos^2 \varphi + \cos^2 \omega t \sin^2 \varphi + \sin^2 \omega t \right) \\
 &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-2\gamma t} \left( \sin^2 \omega t (1 - \cos^2 \varphi) + \cos^2 \omega t \sin^2 \varphi \right) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-2\gamma t} \sin^2 \varphi = e^{-2\gamma t} \quad (1.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{spur} \mathbf{U}(t) &= \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \left( \omega_0 \sin(\omega t + \varphi) - \omega_0 \sin(\omega t - \varphi) \right) \\
 &= \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \left( \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi - \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \right) \\
 &= \frac{2\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos \omega t \sin \varphi = 2e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (1.72)
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$  aus (1.28) sind nach (1.30) gleich  $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega$ . Daraus erhalten wir die Eigenwerte von  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  als  $e^{\lambda_{\pm}t}$  und damit

$$\det \mathbf{U}(t) = e^{\lambda_+ t} e^{\lambda_- t} = e^{(\lambda_+ + \lambda_-)t} = e^{-2\gamma t} \quad (1.73)$$

$$\operatorname{spur} \mathbf{U}(t) = e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t} = e^{-\gamma t} \left( e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) = 2e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (1.74)$$

**Aufgabe 1.5 (Seite 21):** Für das Vektorfeld der Differentialgleichungen (1.42) ist der Index einer einfachen Kurve  $C$ , die keinen Fixpunkt enthält, gleich

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.$$

Beweisen Sie diese Integralformel und berechnen Sie für das Feld  $f(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ,  $g(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha$  mithilfe der Integralformel den Index für einen Kreis, der den Nullpunkt umschließt.

**Lösung:** Beweis: Mit  $\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$  und

$$\begin{aligned}
 d\phi(f, g) &= \frac{\partial \phi}{\partial g} dg + \frac{\partial \phi}{\partial f} df \\
 &= \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \left( \frac{dg}{f} - \frac{g df}{f^2} \right) = \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} \quad (1.75)
 \end{aligned}$$

ergibt sich die gesuchte Formel

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}. \quad (1.76)$$

Für  $f(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  und  $g(x, y) = x \sin \alpha + y \cos \alpha$  erhält man zunächst bei einer Parametrisierung des Kreises  $C$  als  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$

$$f^2 + g^2 = x^2 + y^2 = r^2. \quad (1.77)$$

Im nächsten Schritt berechnet man mit

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\varphi} &= r(-\alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) = -(x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\ \frac{dg}{d\varphi} &= r(-\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi) = x \cos \alpha - y \sin \alpha\end{aligned}\quad (1.78)$$

den Zähler des Integranden in (1.76) als

$$\begin{aligned}f dg - g df &= \left( f \frac{dg}{d\varphi} - g \frac{df}{d\varphi} \right) d\varphi = (x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 + (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 \\ &= x^2 + y^2 = r^2\end{aligned}\quad (1.79)$$

mit dem Ergebnis  $I_C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$ .

**Aufgabe 1.6 (Seite 22):** Linearisieren Sie die Differentialgleichungen (1.44) für  $\gamma > 0$  und  $\beta = 1$  an den Fixpunkten und bestimmen Sie ihren Charakter.

**Lösung:** Die Linearisierung von  $\dot{v}(x, v) = -\alpha x - x^3 - 2\gamma v$  um einen Punkt  $(x_s, v_s)$  ergibt mit  $\dot{v}(x_s, v_s) = 0$  für einen Fixpunkt und mit  $v_s = 0$

$$\begin{aligned}\dot{v}(x, v) &\approx \dot{v}(x_s, v_s) - (\alpha + 3x_s^2)(x - x_s) - 2\gamma v \\ &= -(\alpha + 3x_s^2)(x - x_s) - 2\gamma v.\end{aligned}\quad (1.80)$$

Für den Fixpunkt  $x_0 = 0$  ist dann die linearisierte Abbildung durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{pmatrix}$  gegeben, mit der Spur  $\tau = -2\gamma$  und der Determinante  $\Delta = \alpha$ . Die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}) = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha}\quad (1.81)$$

sind für  $\alpha > \gamma^2$  ein konjugiert komplexes Paar. Wegen  $\tau = -2\gamma < 0$  ist der Fixpunkt ein stabiler Fokus, eine Senke des Flusses (vgl. Fall I d auf Seite 15). Andernfalls sind die Eigenwerte reell und wegen  $\Delta = \alpha$  für  $0 < \alpha < \gamma^2$  ist der Fixpunkt ein stabiler Knoten (vgl. Fall I a auf Seite 14) und für  $\alpha < 0$  ein Sattelpunkt (Fall I b auf Seite 14).

Für die Fixpunkte  $x_{\pm} = \pm\sqrt{-\alpha}$  betrachten wir nur den Fall reeller Fixpunkte, also  $\alpha < 0$ . Die linearisierte Abbildungsmatrix ist gleich  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -2\gamma \end{pmatrix}$  mit der Spur  $\tau = -2\gamma$  und der Determinante  $\Delta = -2\alpha > 0$ . Hier sind die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}) = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha}\quad (1.82)$$

wieder ein konjugiert komplexes Paar für  $\gamma^2 < -2\alpha$ , also für schwache Dämpfung, und daher Senken des Flusses (vgl. Fall I d auf Seite 15). Für  $\gamma^2 > -2\alpha$ , also starke Dämpfung, finden wir stabile Knoten (Fall I a auf Seite 14).

# 2

## Schwingungen und Stöße

*„Der Wissenschaftler findet seine Belohnung in dem, was Poincaré die Freude am Verstehen nennt, nicht in den Anwendungsmöglichkeiten seiner Erfindung.“*  
— Albert Einstein

Das Paradebeispiel für den Einsatz von Matrixmethoden in der klassischen Mechanik sind gekoppelte lineare Schwingungen. In diesem Kapitel stehen einfache, oder vermeintlich einfache Systeme der klassischen Bewegung von Punktmassen im Zentrum. Wir schlagen einen Bogen von linearen Schwingungsgleichungen mit und ohne zeitperiodischen Antrieb zu harten Stößen von Teilchen, entweder miteinander oder mit festen oder oszillierenden Wänden. Dabei werden wir unter anderem auch mit chaotischer Dynamik befassen müssen, ein Thema, das uns im Folgenden noch mehrfach begegnen wird.

### ■ 2.1 Gekoppelte Schwingungen

Wenn wir kleine Auslenkungen eines mechanischen Systems von  $N$  Punktmassen in einer einzigen Raumdimension aus einer Gleichgewichtslage betrachten, so erhalten wir aus den **newtonschen Bewegungsgleichungen** für die Koordinaten  $x_j$  der Punktmassen  $m_j$  näherungsweise die gekoppelten Schwingungsgleichungen

$$m_j \ddot{x}_j + \sum_{k=1}^N d_{jk} x_k = 0. \quad (2.1)$$

Dabei sind  $x_j$  die (kleinen) Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage und  $d_{ij}$  in der Regel die negativen zweiten Ableitungen eines Potentials am Gleichgewichtspunkt. Die Matrix mit dem Matrixelementen  $d_{jk}$ , also die Hesse-Matrix des Potentials, ist reell, symmetrisch und für ein Potentialminimum positiv definit. Zweckmäßigerweise skalieren wir die Koordinaten wie  $y_j = \sqrt{m_j} x_j$  und erhalten

$$\ddot{y}_j + \sum_{k=1}^N \Omega_{jk}^2 y_k = 0 \quad (2.2)$$

mit  $\Omega_{jk}^2 = d_{jk} / \sqrt{m_j m_k}$ , oder in Matrixform

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{y} = 0 \quad (2.3)$$

mit einer reellen, symmetrischen und positiv definiten Matrix  $\mathbf{\Omega}^2$ .

Wir werden uns hier, ganz im Sinne unseres Themas der  $2 \times 2$ -Matrizen, mit  $N = 2$  Freiheitsgraden befassen und suchen eine Lösung des linearen Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten, die gegebene Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = 0$  erfüllt, also  $y_1(0) = y_{10}$ ,  $y_2(0) = y_{20}$