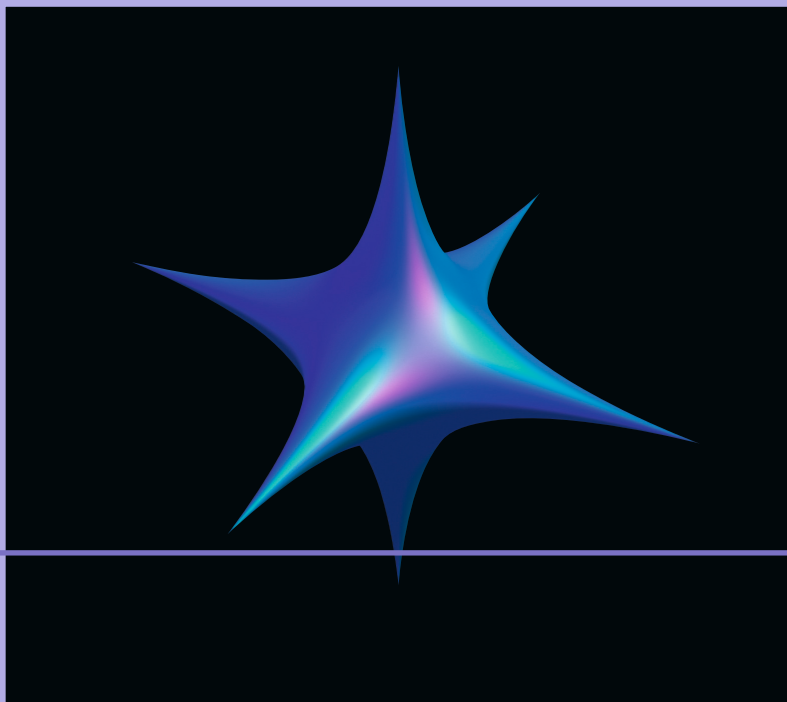


Bernhard Bundschuh



# Signale und Systeme in mehreren Dimensionen



HANSER



#### **Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-72zxp-bg013

[plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de)



#### **Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)



Bernhard Bundschuh

# Signale und Systeme in mehreren Dimensionen

Ein Lehrbuch mit Praxisbeispielen und Programmierübungen

HANSER

## **Autor:**

Prof. Dr.-Ing. Bernhard Bundschuh, Hochschule Merseburg



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2020 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelbild: © Prof. Dr. Bernhard Bundschuh

Satz: Bernhard Bundschuh

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46707-1

E-Book-ISBN 978-3-446-46715-6

# Vorwort

Stephen Hawking soll vor der Veröffentlichung seines Bestsellers „Eine kurze Geschichte der Zeit“ die Warnung erhalten haben, dass jede Formel, die in dem Werk vorkäme, die Anzahl der Leser in etwa halbieren würde. Natürlich maße ich mir nicht an, mit dem weltberühmten Physiker in derselben Liga zu spielen. Zudem ist das Popstar Image, das Stephen Hawking zugeschrieben wurde, bei Professoren der Systemtheorie völlig unbekannt. Ausgehend von der erwähnten Warnung müssten die Leserzahlen sämtlicher Lehrbücher der Systemtheorie im technischen Sinn bei null liegen, da diese grundsätzlich nicht ohne Mathematik auskommt. Im Unterschied zur „Kurzen Geschichte der Zeit“ ist das vorliegende Buch kein populärwissenschaftliches Werk, sondern ein Lehrbuch mit wissenschaftlich technischem Anspruch. Es richtet sich an Leser mit einschlägigen Grundkenntnissen, die etwa in Lehrveranstaltungen zur Theorie eindimensionaler Signale und Systeme erworben wurden. Darauf aufbauend wird diese in mehrere Dimensionen verallgemeinert.

Naturgemäß sind Formeln, mit denen mehrdimensionale Signale und Systeme beschrieben werden, tendenziell umfangreicher und komplexer als in einer Dimension. Bis auf ganz wenige Ausnahmen, etwa bei der Rotation mehrdimensionaler Signale, erleichtern Analogien zu eindimensionalen Signalen und Systemen das Verständnis. Außerdem werden alle Formelausdrücke ausführlich erläutert und grafisch veranschaulicht. Der Zeitaufwand bei ihrer Handhabung kann durch die zeitgemäße Nutzung von Computeralgebraprogrammen wohltuend reduziert werden. Die vorsichtige Annahme, dass viele potentielle Leser Zugriff auf derartige Programme haben, sollte in einer Zeit, in der allenthalben Loblieder auf die „Digitalisierung“ gesungen werden, nicht zu optimistisch sein. Eine Reihe von Programmierbeispielen bietet interessierten Lesern Gelegenheit, die Handhabung von Formeln der mehrdimensionalen Systemtheorie einschließlich grafischer Darstellungen in Mathematica zu erproben. Zu den Programmierbeispielen gehören auch passgenaue Hilfestellungen, mit denen sich Ungeübte die erforderlichen Kenntnisse der Mathematica-Syntax erarbeiten können. Das Buch richtet sich an Studierende ingenieur- und naturwissenschaftlicher Disziplinen mit Grundkenntnissen der Systemtheorie sowie an Entwickler und Anwender in Gebieten wie Bildverarbeitung, Bildgebende Verfahren oder Fernerkundung. Auf [plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de) finden Sie Musterlösungen der Programmierübungen in Form von 15 Mathematica Notebooks.

Ganz herzlich danken möchte ich Frau Professor Ines Rennert von der Hochschule der Telekom in Leipzig, die zu meinem großen Bedauern aufgrund familiärer Verpflichtungen die sehr angenehme und erfolgreiche Zusammenarbeit bei der Verfassung der eindimensionalen „Signale und Systeme“ (Hanser-Verlag, 2013) nicht fortsetzen konnte, für das gründliche Probelesen und die konstruktive Kritik. Mein Dank gilt auch Frau Professor Monika Trundt von der Hochschule Merseburg für das gründliche Probelesen sowie für ihre Hilfe beim Erstellen und Einbinden der Bilder. Ganz besonders möchte ich mich bei meinem Sohn Matthias für die Unterstützung bei der Umsetzung des Manuskriptes in LaTeX bedanken.

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Mehrdimensionale Signale</b> .....	<b>10</b>
2.1	Kontinuierliche Signale .....	12
2.1.1	Kontinuierliche Signale im Ortsbereich .....	13
2.1.1.1	Elementarsignale .....	15
2.1.1.2	Signaloperationen .....	29
2.1.2	Signalbeschreibung im Ortsfrequenzbereich .....	40
2.1.2.1	Fourierreihen .....	40
2.1.2.2	Fouriertransformation .....	47
2.1.2.3	Ortsfrequenzspektren mehrdimensionaler Elementarsignale .....	52
2.1.2.4	Signaloperationen im Ortsfrequenzbereich .....	60
2.1.3	Signalbeschreibung im Bildbereich .....	68
2.2	Abtastung .....	82
2.2.1	Das Abtasttheorem in mehreren Dimensionen .....	82
2.2.2	Reguläre Abtastraster .....	86
2.2.3	Abtastung mit Polarraster .....	90
2.3	Diskrete Signale .....	92
2.3.1	Diskrete Signale im Ortsbereich .....	92
2.3.1.1	Diskrete Elementarsignale .....	95
2.3.1.2	Diskrete Signaloperationen .....	100
2.3.2	Diskrete Signale im Ortsfrequenzbereich .....	102
2.3.3	Mehrdimensionale Diskrete Fouriertransformation .....	108
2.3.4	Mehrdimensionale diskrete Signale im Bildbereich .....	111
<b>3</b>	<b>Mehrdimensionale Systeme</b> .....	<b>120</b>
3.1	Lineare verschiebungsinvariante Systeme .....	121
3.2	Systembeschreibung im Ortsbereich .....	125
3.2.1	Partielle Differenzialgleichungen .....	125
3.2.2	Faltung/Punktantwort .....	132
3.3	Frequenzgänge mehrdimensionaler Systeme .....	135
3.4	Übertragungsfunktionen mehrdimensionaler Systeme .....	137
3.5	Diskrete Systeme .....	139

---

<b>4</b>	<b>Anwendungen .....</b>	<b>143</b>
4.1	Systemtheoretische Beschreibung physikalischer Vorgänge .....	143
4.1.1	Elektrostatik .....	143
4.1.2	Magnetostatik .....	149
4.1.3	Wellenausbreitung.....	156
4.1.4	Modellierung der Bildaufnahme .....	185
4.2	Bildverarbeitung.....	190
4.2.1	Bildverbesserungsverfahren .....	190
4.2.2	Bildrestaurationsverfahren .....	230
4.2.3	Bildanalyse .....	246
4.3	Computertomografie .....	258
4.3.1	Röntgen-Computertomografie .....	258
4.3.2	Astronomische Anwendung tomografischer Verfahren .....	281
4.3.3	Ultraschalltomografie .....	285
4.3.4	Impedanztomografie.....	294
<b>A</b>	<b>Anhang.....</b>	<b>305</b>
A.1	Korrespondenzen der mehrdimensionalen Fouriertransformation .....	305
A.2	Programmierübungen in Mathematica .....	308
	<b>Quellen .....</b>	<b>325</b>
	<b>Index.....</b>	<b>327</b>

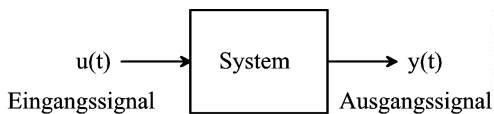




# 1

## Einführung

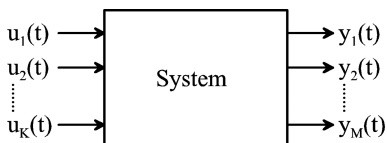
Bei Lesern, die mit der Theorie mehrdimensionaler Signale und Systeme noch nicht vertraut sind, liegt natürlich die Frage nahe, was man sich unter einem mehrdimensionalen Signal bzw. unter einem mehrdimensionalen System vorzustellen hat. Bild 1.1 zeigt schematisch eine aus der eindimensionalen Systemtheorie vertraute Anordnung, ein abstrakt als Block dargestelltes System mit einem Eingangssignal  $u(t)$  und einem Ausgangssignal  $y(t)$ . Beide Signale stellen Zahlenwerte als Funktionen der Zeit dar, die ggf. physikalische Größen repräsentieren, zu denen dann natürlich auch Einheiten gehören. In der Systemtheorie wird bekanntlich von der physikalischen Bedeutung der Signale und Systeme abstrahiert, was zur vorteilhaften universellen Anwendbarkeit systemtheoretischer Methoden führt. Dies gilt auch für die Theorie mehrdimensionaler Signale und Systeme.



**Bild 1.1** System mit eindimensionalem Eingangs- und Ausgangssignal

Die Werte der Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  hängen von einer unabhängigen Variablen, der Zeit  $t$ , ab.  $u(t)$  und  $y(t)$  werden daher als eindimensionale Signale bezeichnet und das System, das beim Anlegen eines eindimensionalen Eingangssignals ein eindimensionales Ausgangssignal produziert, stellt ein eindimensionales System dar.

Nicht ganz so offensichtlich ist die Einordnung der in Bild 1.2 skizzierten Anordnung. Das System besitzt  $K$  Eingänge und  $M$  Ausgänge. Es könnte z. B. eine verfahrenstechnische Anlage repräsentieren, mit einer Reihe zeitlich variierender Stoffmengen als Eingangssignale. Unter den Ausgangssignalen könnte man sich in einem solchen Fall die ebenfalls zeitlich variierenden Stoffmengen der hergestellten Produkte vorstellen, aber auch physikalische Größen wie Drücke oder Temperaturen an verschiedenen Punkten der Anlage. Dieses System könnte ein erster Kandidat für eine Einordnung in die Kategorie „mehrdimensionales System“ sein.



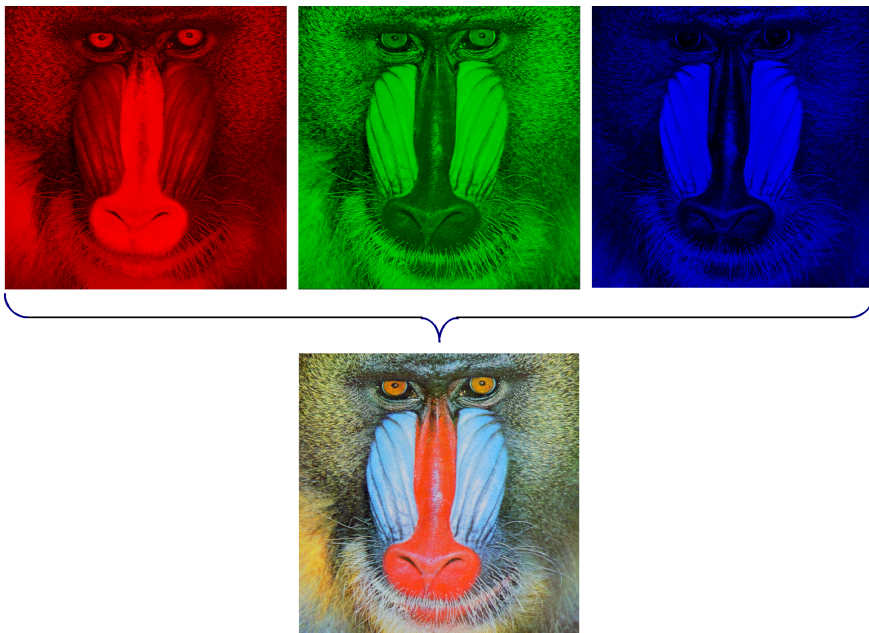
**Bild 1.2** System mit mehreren Ein- und Ausgängen

Entscheidend für die Unterscheidung eindimensional – mehrdimensional sind jedoch die Anzahlen unabhängiger Variablen der Signale. Sind alle an den Ein- oder Ausgängen eines Systems auftretenden Signale eindimensionale Größen, so wird auch das System als eindimensional definiert. Mehrdimensionale Signale stellen Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen dar, etwa mit  $x$  als horizontaler und  $y$  als vertikaler Koordinate einer Schwarz-Weiß-Darstellung im Stil des Bildes 1.3.



**Bild 1.3** Schwarz-Weiß-Bild als Funktion von  $x$  und  $y$  /31/

Im Gegensatz zu Farbbildern stellen Schwarz-Weiß-Bilder zweidimensionale skalare Signale  $s(x,y)$  mit  $s$  als Symbol für Grauwert, Intensität, Helligkeit dar. Da Farbbilder aus drei Farbkomponenten, etwa Rot, Grün, Blau (R, G, B) oder Leuchtdichte (Y), Blau – Leuchtdichte (U), Rot – Leuchtdichte (V) (Y, U, V) bestehen, stellen sie zweidimensionale vektorielle Signale dar.



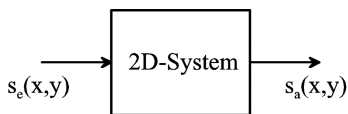
**Bild 1.4** Farbbild mit Rot-, Grün- und Blau-Komponenten exemplarisch /30/

Der hohe Rotanteil der Nase des in der Literatur zur Bildverarbeitung häufig vorkommenden „Baboon“ tritt in der Rot-Komponente sehr hell zu Tage. Das Gleiche gilt in der Blau-Komponente für die leuchtend blauen Flächen unter den Augen. In der Blau-Komponente wirken die Augen fast schwarz, da die gelben Augen im Farbbild durch Überlagerung roter und grüner Anteile, mit nur geringem Blauanteil zustande kommen. Formal wird das Farbbild mit

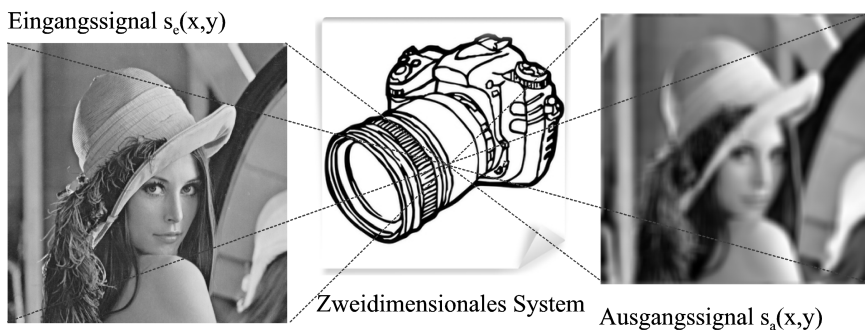
$$\vec{s}(x, y) = \begin{pmatrix} s_{R(ot)}(x, y) \\ s_{G(rün)}(x, y) \\ s_{B(lau)}(x, y) \end{pmatrix} \text{ bezeichnet. Der Vektorpfeil ist eine gängige Kennzeichnung}$$

vektorieller Signale, die auch in den nachfolgenden Kapiteln durchgehend verwendet wird.

Bild 1.5 zeigt ein zweidimensionales System mit Eingangssignal  $s_e(x, y)$  und Ausgangssignal  $s_a(x, y)$  in abstrakter Darstellung als Blockschaltbild. Bild 1.6 illustriert ein praktisches Beispiel.



**Bild 1.5** Zweidimensionales System mit Eingangs- und Ausgangssignal abstrakt



**Bild 1.6** Zweidimensionales System exemplarisch

Mehrdimensionale Signale und Systeme beschränken sich natürlich nicht auf zwei Dimensionen. Das elektrostatische Potenzial  $\varphi(x, y, z)$  in der Umgebung einer elektrischen Ladung, die Temperaturverteilung  $T(x, y, z)$  in einem Raum oder die im Zuge einer computertomografischen Untersuchung gemessene Gewebedichte  $d(x, y, z)$  stellen Beispiele für dreidimensionale skalare Signale dar. Beispiele für dreidimensionale vektorielle Signale sind die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(x, y, z)$  in der Elektrostatik bzw. die magnetische Feldstärke  $\vec{H}(x, y, z)$  in der Magnetostatik. Abschnitt 4.1 enthält weitere Details und Rechenbeispiele.

Ggf. umfassen vektorielle Signale auch mehr als drei Komponenten. So werden in der Fernerkundung zur Analyse von Vegetationszuständen häufig hyperspektrale Bilder

$$\vec{s}(x, y) = \begin{pmatrix} s_1(x, y) \\ s_2(x, y) \\ \vdots \\ s_I(x, y) \end{pmatrix} \text{ aufgenommen, mit einigen Dutzend oder einigen Hundert „Farbkanälen“,}$$

die vom Infrarotbereich bis in den Ultraviolettbereich verteilt sein können.

Eine weitere Kategorie mehrdimensionaler Signale sind Signale mit gemischt auftretenden räumlichen und zeitlichen unabhängigen Variablen. Ein Signal mit der Bezeichnung  $s(x,y,t)$  könnte ein schwarz-weißes Bewegtbild darstellen, wie man es aus dem Kino oder Fernsehen kennt. Im Rahmen derartiger Anwendungen werden in der Praxis natürlich **Bildfolgen** verwendet. Bild 1.7 zeigt schematisch ein einfaches Beispiel.



**Bild 1.7** Bildfolge  $s(x,y,t)$  exemplarisch

Die Zeitkoordinate tritt dann, wie in Gl. 1.1 formuliert, in diskreter Form als ganzzahliges Vielfaches der reziproken Bildfolgefrequenz bzw. Bildrate  $f_B$  auf, d. h.

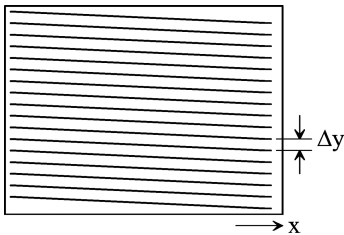
$$s(x, y, t) \hat{=} s(x, y, k\Delta t) \text{ mit } \Delta t = 1/f_B. \quad (1.1)$$

Beim Farbfernsehen treten vektorielle Signale mit teils räumlichen, teils zeitlichen unabhängigen Variablen auf. In Abwandlung von Gl. 1.1 wäre ein derartiges Signal mit

$$\vec{s}(x, y, t) = \begin{pmatrix} s_R(x, y, t) \\ s_G(x, y, t) \\ s_B(x, y, t) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{s}(x, y, t) = \begin{pmatrix} s_Y(x, y, t) \\ s_U(x, y, t) \\ s_V(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

zu bezeichnen.

Eine weitere Unterscheidung kontinuierlich – diskret trat beim analogen Fernsehen auf, als noch Bildröhren in Gebrauch waren. Bild 1.8 illustriert die lange Zeit verwendete Zeilenstruktur von Fernsehbildern mit kontinuierlicher x-Koordinate und diskreter y-Koordinate.



**Bild 1.8** Zeilenstruktur eines analogen Fernsehbildes  $s(x, i_y\Delta y, k\Delta t)$  schematisch

Potenziale bzw. Feldstärken in der Elektrodynamik sind Funktionen sowohl des Ortes als auch der Zeit. Zu nennen sind das skalare elektrische Potenzial  $\varphi(x, y, z, t)$ , die elektrische und die magnetische Feldstärke  $\vec{E}(x, y, z, t)$  bzw.  $\vec{H}(x, y, z, t)$ , beides vektorielle Signale, sowie das magnetische Vektorpotenzial  $(A_x(x, y, z, t), A_y(x, y, z, t), A_z(x, y, z, t))^T$ . Es handelt sich hier also um vierdimensionale Signale.

Die vektorielle Formulierung des Argumentes eines mehrdimensionalen Signals à la  $s(\vec{r}) = s(x_1, x_2, \dots, x_N)$  stellt die kompakteste, vielseitigste und abstrakteste Formulierung dar.

Die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  repräsentieren ggf. teils räumliche, teils zeitliche Koordinaten.

Anstelle der bis dahin durchweg verwendeten kartesischen Koordinaten, kann, je nach den geometrischen Gegebenheiten einer Problemstellung, auch die Wahl anderer Koordinatensysteme vorteilhaft sein, etwa Zylinderkoordinaten bei der Beschreibung elektrischer oder magnetischer Felder in Lichtwellenleitern mit rotationssymmetrischem Querschnitt oder sphärische Koordinaten bei der Beschreibung elektrischer oder magnetischer Felder in der Ionosphäre.

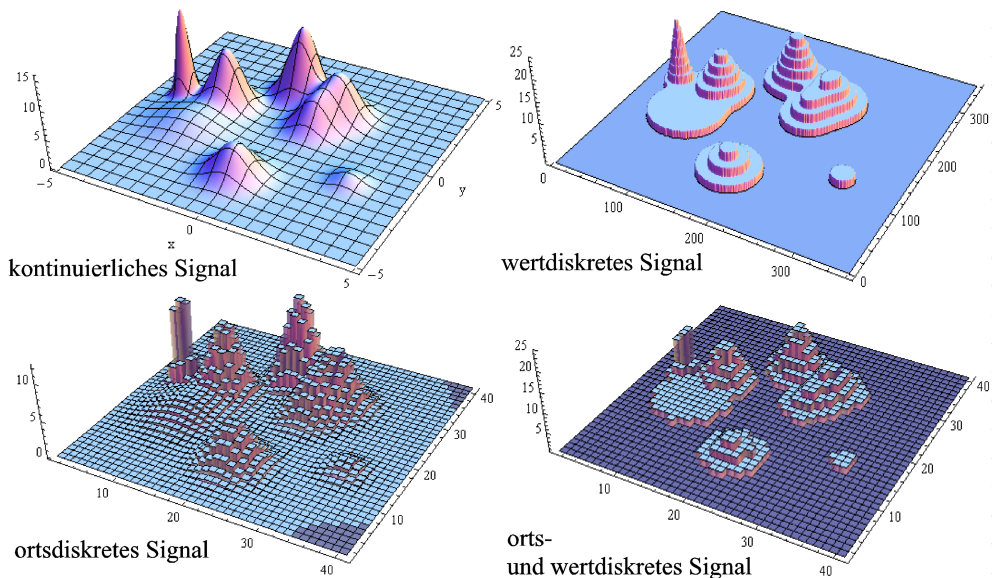
# 2

## Mehrdimensionale Signale

Mehrdimensionale Signale können physikalische Größen repräsentieren, die Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen darstellen. Einige Beispiele, etwa Potenzial- bzw. Feldstärkeverteilungen, wurden im einführenden Kapitel 1 bereits kurz vorgestellt. Sie können aber auch reine Rechengrößen darstellen, wie sie etwa in der Bildverarbeitung (mehr dazu im Abschnitt 4.2!) gebräuchlich sind.

Bild 2.1 illustriert anhand eines sehr einfachen Beispiels die Kategorien:

- kontinuierliches Signal
- ortsdiskretes Signal als Ergebnis einer Abtastung, wie sie etwa bei einer Bildaufnahme mit dem CCD- oder CMOS-Bildsensor einer elektronischen Kamera erfolgt
- wertdiskretes Signal als Ergebnis einer Quantisierung, wie sie durch den Analog-Digital-Konverter (ADC) einer digitalen Kamera realisiert wird
- orts- und wertdiskretes Signal, das durch Abtastung **und** Quantisierung entsteht.

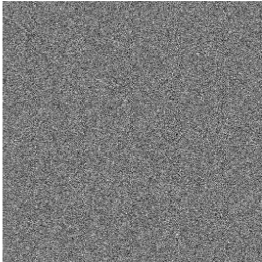


**Bild 2.1** Kontinuierliches Signal und diskrete Signale

Die Wertdiskretisierung bei kontinuierlichen Ortskoordinaten wird in der Praxis nicht benutzt.

Im Gegensatz zu einem stochastischen Signal ist der Signalverlauf eines deterministischen Signals an sämtlichen Ortskoordinaten exakt bekannt, etwa als Formel­ausdruck oder durch eine

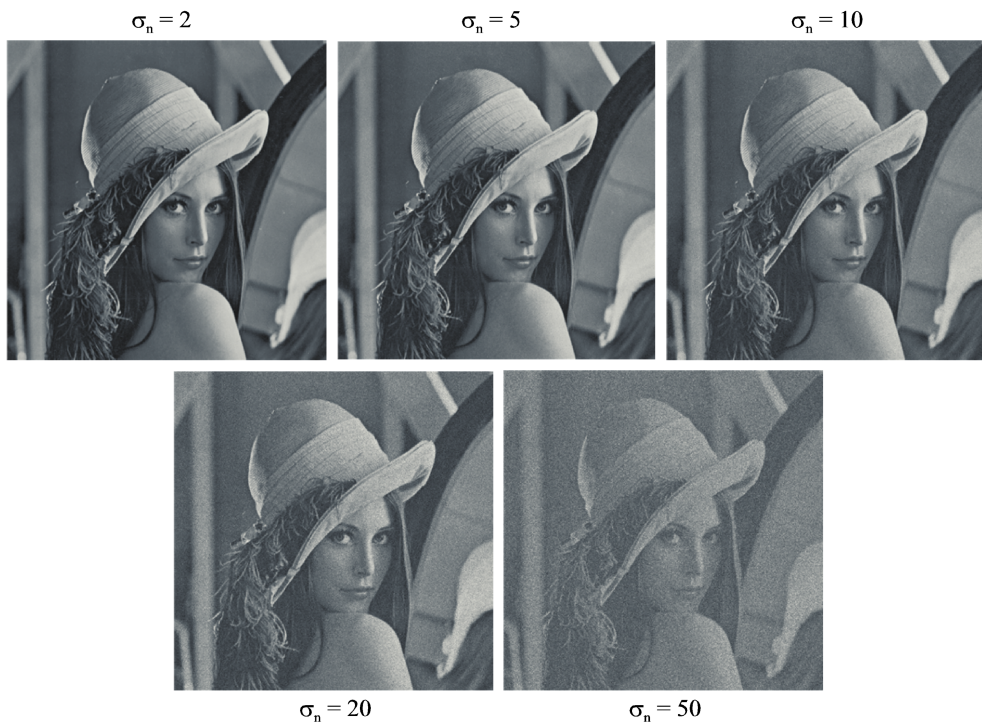
abschnittsweise Definition. Bild 2.2 präsentiert ein zweidimensionales Rauschsignal. Zu Zeiten des terrestrischen analogen Fernsehens trat auf dem Bildschirm der ähnlich aussehende sogenannte „Schnee“ auf, wenn das ständig vorhandene Rauschen des Empfängers nicht durch ein ausreichend starkes Signal überdeckt wurde.



**Bild 2.2** Bildrauschen als zweidimensionales stochastisches Signal = Zufallssignal

Manche Autoren populärwissenschaftlicher Bücher zum Thema Kosmologie schreiben derartige „Fernsehbilder“ der allgegenwärtigen kosmischen Hintergrundstrahlung zu.

Bild 2.3 zeigt das Ergebnis einer Simulation, die den Einfluss von Rauschen unterschiedlicher Stärke auf die Qualität eines Schwarz-Weiß-Bildes demonstriert.



**Bild 2.3** Schwarz-Weiß-Bild + Rauschen unterschiedlicher Standardabweichung

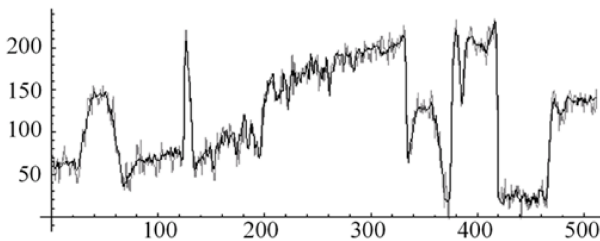
Das ungestörte Bild 1.3 zeigt eine aus der Literatur zur Bildverarbeitung sehr bekannte Dame /31/. Die ganzzahligen, also quantisierten Helligkeitswerte im Bereich 0 ... 255 könnten so im 8-Bit-Analog-Digital-Konverter einer handelsüblichen elektronischen Kamera entstanden



sein. 8 Bit-Zahlen können bekanntlich  $2^8 = 256$  verschiedene Werte annehmen (0, 1, 2 ... 255). Der Maximalwert 255 ist weiß dargestellt, der Minimalwert 0 schwarz.

Das Rauschen wurde durch normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert 0 bei variierender Standardabweichung  $\sigma_n$  nachgebildet und zu den Helligkeitswerten des Bildes hinzuaddiert. Im Englischen spricht man auch von „Additive White Gaussian Noise (AWGN)“.

Die Beispiele machen klar, dass das überlagerte Rauschen erst bei recht hohen Standardabweichungen deutlich zu erkennen ist. Das visuelle System eines menschlichen Betrachters sorgt dafür, dass moderate Rauschbeiträge kaum wahrgenommen werden. Bild 2.4 zeigt das Helligkeitsprofil entlang einer Bildzeile, die ca. 1/4 der Bildhöhe vom oberen Rand entfernt liegt, das dem Helligkeitsprofil des ungestörten Bildes (schwarz) überlagert ist. Die Standardabweichung der normalverteilten Zufallszahlen liegt bei 10.



**Bild 2.4** Helligkeitsprofil entlang einer Zeile eines verrauschten Bildes

Obwohl bei dieser Standardabweichung das Rauschen in einem Schwarz-Weiß-Bild mit natürlichem Motiv kaum wahrnehmbar ist, fällt es im Helligkeitsprofil sofort ins Auge.

## ■ 2.1 Kontinuierliche Signale

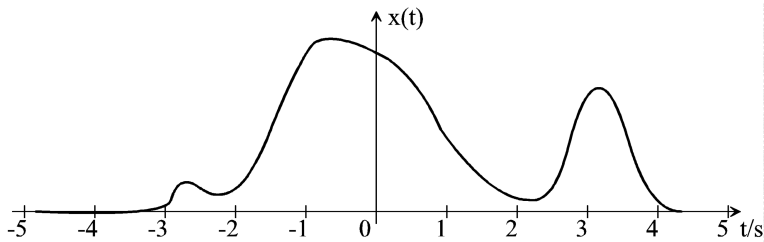
Kontinuierliche Signale sind weder bzgl. ihrer Werte noch bzgl. ihrer Ortskoordinaten diskretisiert, also weder abgetastet noch quantisiert.

Da die Quantisierung von Signalwerten eine nichtlineare und i. A. nicht reversible Operation darstellt, wird die Signal- und später auch Systembeschreibung durch den Verzicht auf die Quantisierung tendenziell vereinfacht. Es treten keine Quantisierungsfehler auf, die, je nach Anwendung, zu Problemen, etwa Stabilitätsproblemen beim Entwurf digitaler Filter /28/, führen können.

Ein grundsätzlicher Verzicht auf die Abtastung mehrdimensionaler Signale wäre hingegen nicht praktikabel, da man damit auf die Nutzung der vielfältigen Möglichkeiten der Digitalen Signalverarbeitung, z. B. in der Bildverarbeitung, verzichten würde.

### 2.1.1 Kontinuierliche Signale im Ortsbereich

Anknüpfend an die Theorie eindimensionaler Signale, z. B. in /24/, zeigt Bild 2.5 ein willkürlich ausgewähltes dimensionsloses kontinuierliches Zeitsignal  $x(t)$ .

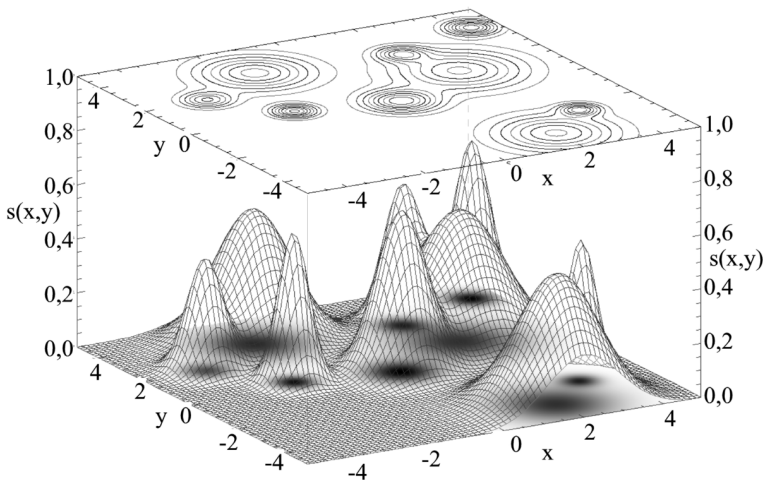


**Bild 2.5** Zeitsignal exemplarisch

Die Kurvendarstellung charakterisiert das Signal in eindeutiger Weise. Signalwerte mitsamt ihren zeitlichen Lagen können problemlos abgelesen werden.

Bild 2.6 zeigt ein äquivalentes zweidimensionales Signal  $s(x,y)$  in drei verschiedenen Darstellungsarten. Sollten einige Leser mit der „Interactive Data Language (IDL)“ vertraut sein, so kennen sie möglicherweise die Grafikfunktion **SHOW3**, die – Nomen est omen – drei verschiedenartige grafische Darstellungen zweidimensionaler Signale überlagert, ein Schwarz-Weiß-Bild, ein Konturbild und eine perspektivische Darstellung mit Gitterlinien.

Der scheinbar willkürliche Sprung bei der Signalbezeichnung von  $x(\dots)$  zu  $s(\dots)$  ist wohl begründet. Würden die in der Theorie eindimensionaler Signale gebräuchlichen Bezeichnungen  $x(t)$  oder  $y(t)$  auch für mehrdimensionale Signale als Funktionen zweier oder mehrerer Ortskoordinaten beibehalten, so kämen womöglich verwirrende Formulierungen à la  $x(x, y, \dots)$  bzw.  $y(x, y, \dots)$  zustande.



**Bild 2.6** Zweidimensionales Signal exemplarisch

Mittels der Gitterlinien können Signalwerte und deren Positionen aus der perspektivischen Darstellung gut abgelesen werden. Das Konturbild gewährleistet eine sehr genaue Lokalisierung.

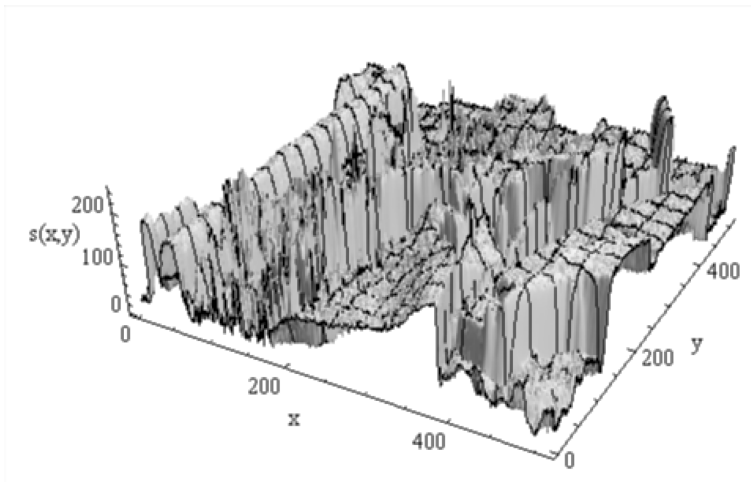
rung charakteristischer Signalstrukturen, etwa lokaler Maxima oder Minima. Das Ablesen von Signalwerten aus dem Konturbild ist hingegen nicht ohne Weiteres möglich. Ggf. kann dem durch Beschriftung oder Farbcodierung der Konturen abgeholfen werden. Einen schnellen Überblick über das Erscheinungsbild eines zweidimensionalen Signals liefert die Schwarz-Weiß-Darstellung. Um feine Details gut erkennen zu können, kann anstelle eines Schwarz-Weiß-Bildes auch eine Falschfarbendarstellung sinnvoll sein.

Völlig andere Verhältnisse herrschen bei der Darstellung eines detailreichen Signals im Stil von Bild 1.3. Aufgrund der großen Zahl verästelter Konturlinien wirkt die Konturdarstellung in Bild 2.7 sehr verwirrend. Man erkennt in etwa das Motiv aus Bild 1.3, die Lokalisierung bestimmter Bildstrukturen ist jedoch nur sehr eingeschränkt möglich.



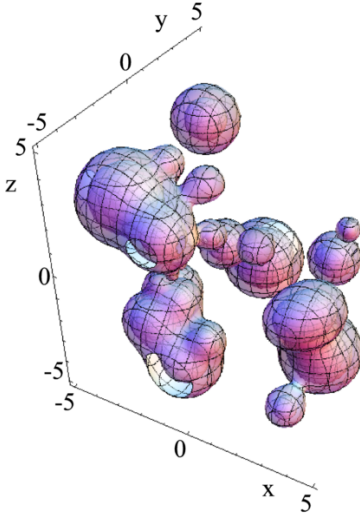
**Bild 2.7** Detailreiches Signal in Konturdarstellung

Die probeweise perspektivische Darstellung in Bild 2.8 liefert eine Art Reliefbild, das noch schwerer zu interpretieren ist als Bild 2.7.



**Bild 2.8** Detailreiches Signal in Konturdarstellung

Bild 2.9 zeigt ein einfaches dreidimensionales Signal als räumlich-perspektivisches Konturbild. Kritisch sind Verdeckungen, auch bei Verwendung halbtransparenter Konturen und natürlich die fehlende Tiefeninformation auf Bildschirmen bzw. Papierbildern. Alternativ können mehrere Schnittbilder parallel dargestellt werden. Man kann auch versuchen, die Tiefeninformation durch eine Farbcodierung oder durch Stereopaare bereitzustellen.



**Bild 2.9** Dreidimensionales Signal  $s(x,y,z)$  exemplarisch

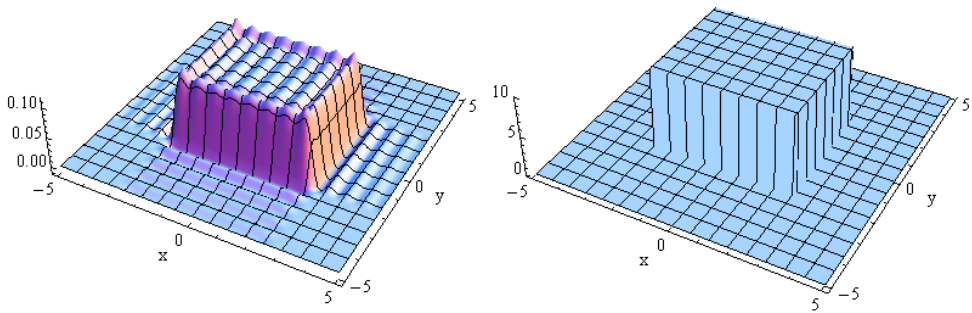
In mehr als drei Dimensionen versagt die menschliche Vorstellungskraft komplett. Ggf. könnte eine zeitliche Folge von Darstellungen im Stil von Bild 2.9, die als Projektionen aus dem vierdimensionalen in den dreidimensionalen Raum oder als Schnittbilder interpretiert werden können, eine begrenzte geometrische Vorstellung höherdimensionaler Signale erzeugen.

### 2.1.1.1 Elementarsignale

Elementarsignale weisen sehr einfache, idealisierte Strukturen auf. Sie sind mathematisch leicht handhabbar und eignen sich daher sehr gut zur Illustration und zum Test systemtheoretischer Beziehungen und Methoden, etwa der im Abschnitt 2.1.2 behandelten mehrdimensionalen Fouriertransformation.

Nutzt man sie im Zuge der Modellierung bzw. Simulation physikalischer Vorgänge, so ist auf ein ausgewogenes Verhältnis der Genauigkeit der Modelle und ihrer einfachen mathematischen Handhabbarkeit zu achten.

In Bild 2.10 werden exemplarisch ein realitätsnahes und nicht ganz unkompliziertes zweidimensionales Signal (links) sowie eine Approximation, die unter Verwendung von Elementarsignalen erzeugt wurde (rechts), gegenübergestellt.



**Bild 2.10** Zweidimensionales Signal und Approximation exemplarisch

Die im Folgenden erläuterten zweidimensionalen Elementarsignale werden jeweils in Anlehnung an ihre eindimensionalen Pendanten im Zeitbereich definiert.

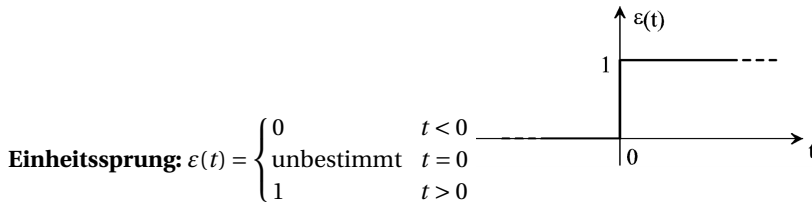
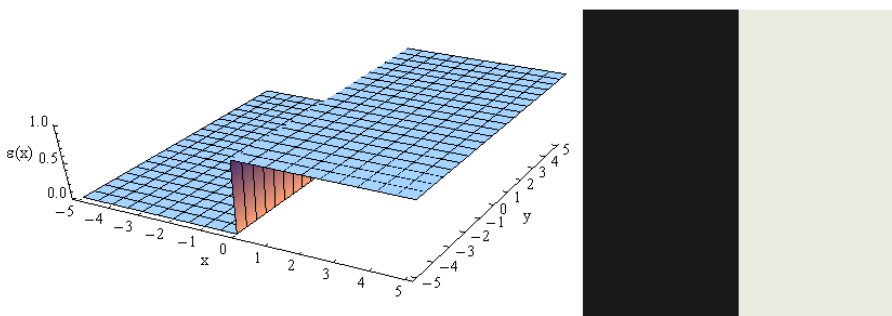


Bild 2.11 zeigt den zweidimensionalen Einheitssprung  $s(x,y) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = 0, \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

einmal in perspektivischer Darstellung und einmal als Schwarz-Weiß-Bild, wobei der Signalwert 0 schwarz dargestellt wird und der Signalwert 1 weiß. Diese Art der Zuordnung gilt auch für alle folgenden Schwarz-Weiß-Darstellungen von Elementarsignalen.

Die vertikale Koordinate  $y$  tritt in der Bezeichnung  $\varepsilon(x)$  nicht auf. Dies bedeutet, dass sich das Signal bei Variation der  $y$ -Koordinate mit festgehaltener  $x$ -Koordinate nicht ändert.

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Signal handelt und die  $y$ -Koordinate nicht etwa übergangen wurde, verwenden manche Autoren die Schreibweise  $s(x, y) = \varepsilon(x)1(y)$ .

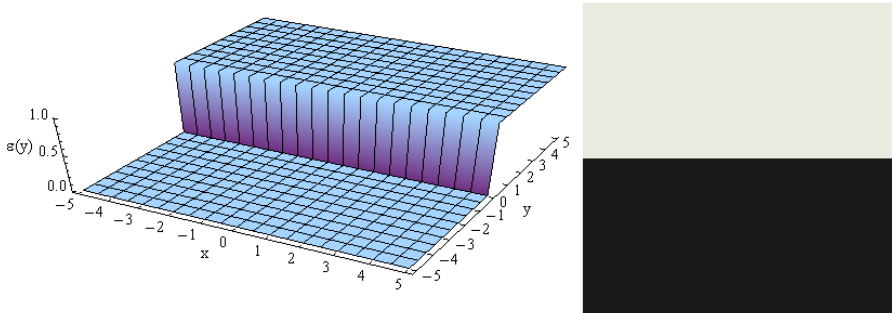


**Bild 2.11** Horizontaler Einheitssprung  $s(x, y) = \varepsilon(x)$

Bild 2.12 illustriert den vertikalen Einheitssprung  $s(x,y) = \varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \text{unbestimmt} & y = 0, \\ 1 & y > 0 \end{cases}$

einmal in perspektivischer Darstellung und einmal als Schwarz-Weiß-Bild, wobei der Signalwert 0 wieder schwarz dargestellt wird und der Signalwert 1 weiß.

Jetzt tritt in der Bezeichnung  $\varepsilon(y)$  die horizontale Koordinate  $x$  nicht auf, d. h. das Signal ändert sich bei Variation der  $x$ -Koordinate mit festgehaltener  $y$ -Koordinate nicht, was auch in der Form  $s(x,y) = 1(x)\varepsilon(y)$  ausgedrückt werden kann.

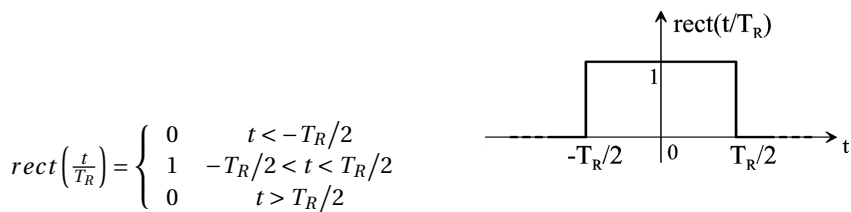


**Bild 2.12** Vertikaler Einheitssprung  $s(x,y) = \varepsilon(y)$

In zwei Dimensionen stellt der Einheitssprung  $\varepsilon(x)$  ein Signal dar, das in der gesamten Halbebene  $x > 0$  den Wert 1 aufweist, in der Halbebene  $x < 0$  hingegen den Wert 0. Stellt man die Halbebenen  $y > 0$  bzw.  $y < 0$  gegenüber, so gilt eine analoge Aussage auch für  $\varepsilon(y)$ .

In drei Dimensionen stellt der Einheitssprung  $s(x,y,z) = \varepsilon(x)$  ein Signal dar, das im gesamten Halbraum  $x > 0$  den Wert 1 aufweist, im Halbraum  $x < 0$  hingegen den Wert 0. Entsprechendes gilt für die Einheitssprünge  $s(x,y,z) = \varepsilon(y)$  bzw.  $s(x,y,z) = \varepsilon(z)$ .

**Rechteckfunktion:**



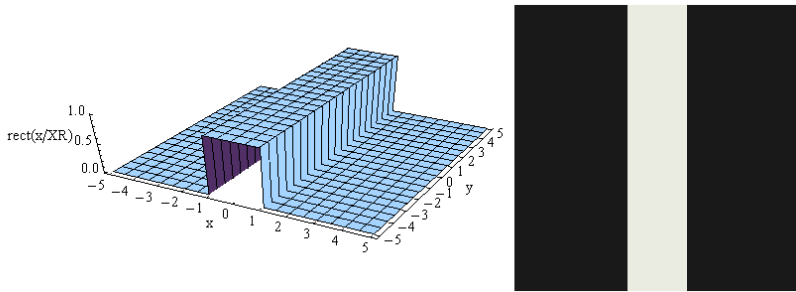
Die eigentlich unbestimmten Signalwerte bei  $t = -T_R/2$  bzw.  $t = T_R/2$  können bedenkenlos auf eins gesetzt werden, da sich die unbestimmten Werte jeweils nur über eine beliebig kurze Zeitdauer erstrecken und „praktisch“, etwa im Zuge einer Integration, nicht ins Gewicht fallen.

Einfache Signaloperationen, die im Abschnitt 2.1.1.2 näher erläutert werden, ermöglichen eine formale Definition der Rechteckfunktion, auf Basis des Einheitssprungs  $\varepsilon(t)$ .

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_R}\right) = \varepsilon\left(t + \frac{T_R}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T_R}{2}\right) = \begin{cases} 0 & t < -T_R/2 \\ 1 & -T_R/2 \leq t \leq T_R/2 \\ 0 & t > T_R/2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Bild 2.13 zeigt die horizontale Rechteckfunktion  $rect\left(\frac{x}{X_R}\right) = \begin{cases} 0 & x < -X_R/2 \\ 1 & -X_R/2 \leq x \leq X_R/2 \\ 0 & x > X_R/2 \end{cases}$

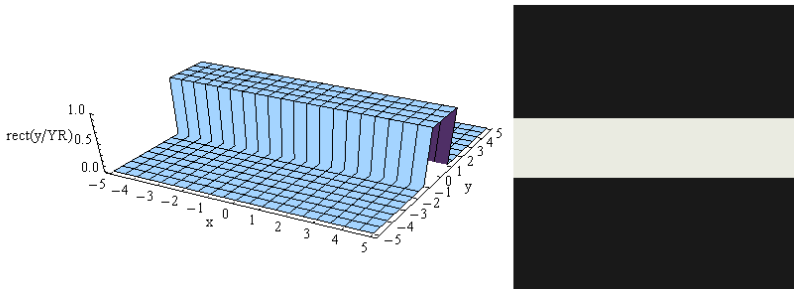
als speziellen Fall eines zweidimensionalen Signals, einmal in perspektivischer Darstellung, einmal als Schwarz-Weiß-Bild, wobei der Signalwert 0 wieder schwarz dargestellt wird und der Signalwert 1 weiß.



**Bild 2.13** Horizontale Rechteckfunktion  $s(x, y) = rect(x/X_R)$  exemplarisch mit  $X_R = 2$

Bild 2.14 illustriert die äquivalent definierte Rechteckfunktion mit vertikaler Orientierung:

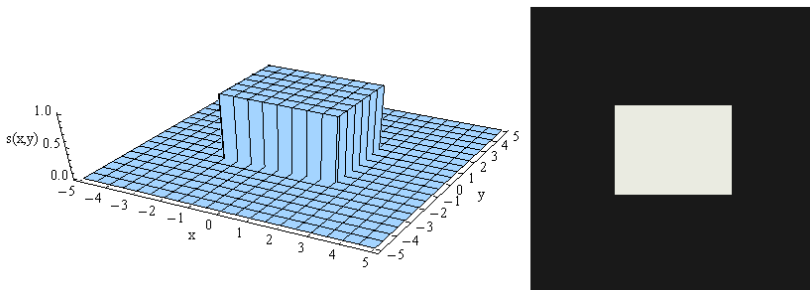
$$rect\left(\frac{y}{Y_R}\right) = \begin{cases} 0 & y < -Y_R/2 \\ 1 & -Y_R/2 \leq y \leq Y_R/2 \\ 0 & y > Y_R/2 \end{cases} \text{ exemplarisch mit } Y_R = 2.$$



**Bild 2.14** Vertikale Rechteckfunktion  $s(x, y) = rect(y/Y_R)$  exemplarisch mit  $Y_R = 2$

Mit Vorgriff auf Abschnitt 2.1.1.2 wird die **separierbare** zweidimensionale Rechteckfunktion  $rect\left(\frac{x}{X_R}, \frac{y}{Y_R}\right) = rect\left(\frac{x}{X_R}\right) \cdot rect\left(\frac{y}{Y_R}\right)$  als Produkt eindimensionaler Funktionen definiert.

Bild 2.15 illustriert sie exemplarisch mit  $X_R = 4$  und  $Y_R = 3$ .



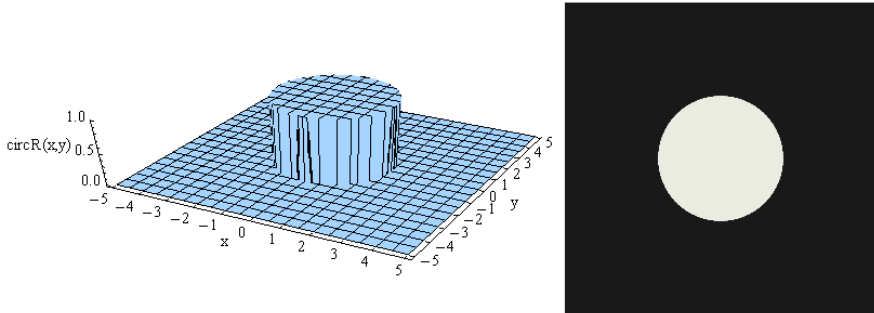
**Bild 2.15** Separierbare Rechteckfunktion  $s(x, y) = rect(x/X_R)rect(y/Y_R)$  mit  $X_R = 4$  und  $Y_R = 3$

Im Gegensatz zu Einheitssprung und Rechteck gibt es zur „wirklich zweidimensionalen“

**Kreisfunktion**  $\text{circ}_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases}$  keine **eindimensionale** Entsprechung.

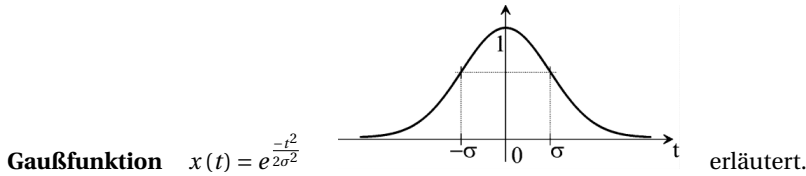
Die Kreisfunktion eignet sich sehr gut zur Modellierung runder Bildstrukturen und zur Beschreibung rotationssymmetrischer Systeme, etwa Kameraobjektive.

Bild 2.16 zeigt das Signal exemplarisch mit  $R = 2$ , einmal in perspektivischer Darstellung und einmal als Schwarz-Weiß-Bild.



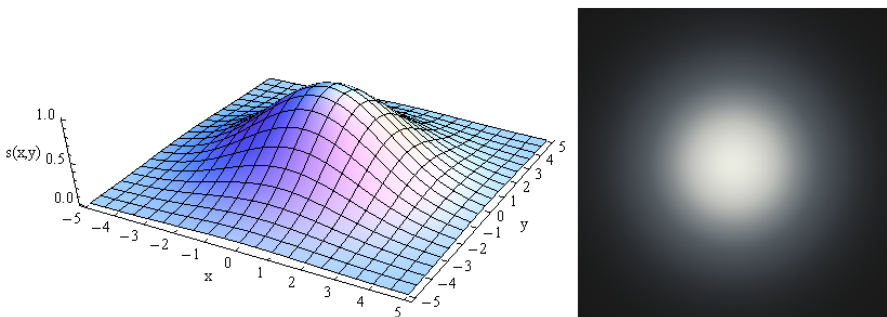
**Bild 2.16** Kreisfunktion  $\text{circ}_R(x, y)$  exemplarisch mit  $R = 2$

In Lehrbüchern zu eindimensionalen Signalen und Systemen wird üblicherweise auch die



In zwei Dimensionen lautet sie:  $s(x, y) = s_x(x) \cdot s_y(y) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$ .

Die separierbare Form vereinfacht den Übergang zur N-dimensionalen Gaußfunktion in Form eines Mehrfachproduktes. Bild 2.17 illustriert das zweidimensionale Signal exemplarisch mit den Standardabweichungen  $\sigma_x = 2$  und  $\sigma_y = 2$ , einmal perspektivisch, einmal als Schwarz-Weiß-Bild.



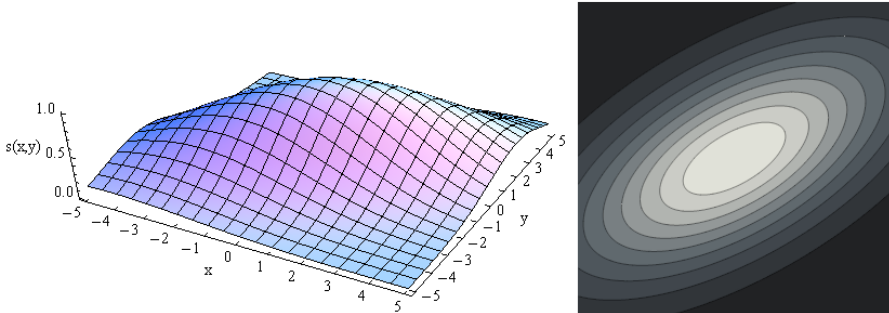
**Bild 2.17** Gaußfunktion exemplarisch mit  $\sigma_x = 2$ ,  $\sigma_y = 2$



Die Gaußfunktion eignet sich gut zur Modellierung unscharfer Strukturen in Bildern. Gaußfunktionen, deren Hauptachsen nicht entlang der Koordinatenachsen orientiert sind, können mit einer auch in der Stochastik gebräuchlichen Kovarianzmatrix, die in zwei Dimensionen in

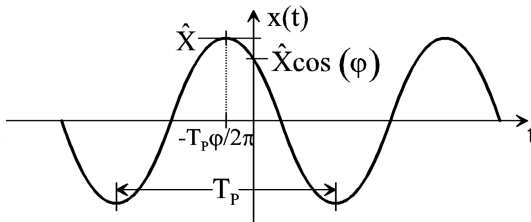
der Form  $C = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$  definiert wird, spezifiziert werden:

$$s(x, y) = e^{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}. \text{ Bild 2.18 zeigt ein Beispiel mit } C = \begin{pmatrix} 4 \cos(60^\circ) & -2 \sin(60^\circ) \\ 4 \sin(60^\circ) & 2 \cos(60^\circ) \end{pmatrix}.$$



**Bild 2.18** Gedrehte unsymmetrische Gaußfunktion

Die in Bild 2.19 dargestellte **Harmonische Schwingung**  $x(t) = \hat{X} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_P} + \varphi\right)$  dient als Basisfunktion der Fourierreihen bzw. der Fouriertransformation. In der Wechselstromlehre wird sie zur Formulierung von Spannungs- bzw. Stromverläufen verwendet.



**Bild 2.19** Harmonische Schwingung

Drei Parameter charakterisieren das Signal: der Spitzenwert  $\hat{X}$ , die Periodendauer  $T_P$  und die Phase  $\varphi$ . Es kann auch als Funktion der Frequenz  $f_P = 1/T_P$  oder der Kreisfrequenz  $\omega_P = 2\pi/T_P$  formuliert werden.

$$x(t) = \hat{X} \cos(2\pi f_P t + \varphi) = \hat{X} \cos(\omega_P t + \varphi) \tag{2.2a}$$

Leser mit Erfahrung in der Wechselstromlehre wissen sicher die Vorzüge der Formulierung einer harmonischen Schwingung als Realteil eines komplexen Signals im Stil von Gl. 2.2b zu schätzen.

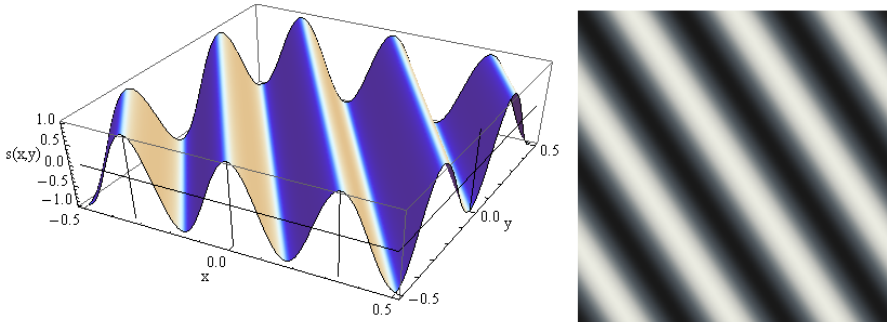
$$x(t) = \text{Re} \{ \hat{X} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_P t} \} \tag{2.2b}$$

Auch die zweidimensionale harmonische Schwingung wird als Realteil eines komplexen Signals definiert.

$$s(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{S} e^{j\varphi} e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{S} e^{j(2\pi f_x x + \varphi_x)} e^{j(2\pi f_y y + \varphi_y)} \right\} \quad (2.3)$$

Die in Gl. 2.3 verwendete separierbare Form kann bei der Berechnung diskreter Ortsfrequenzspektren vorteilhaft genutzt werden.

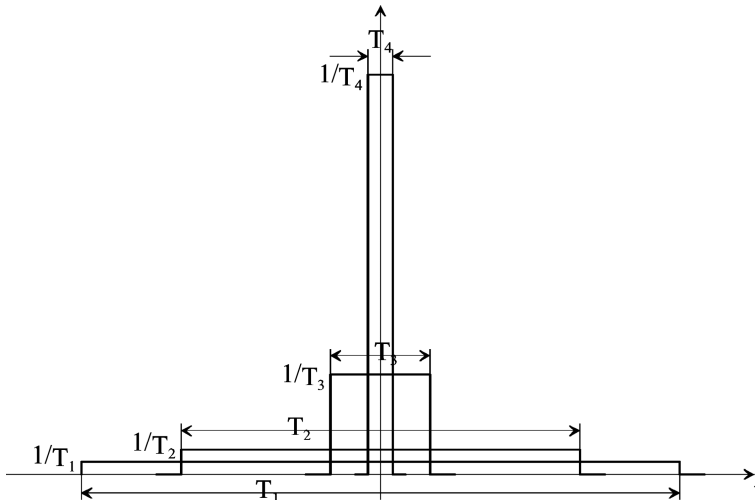
Bild 2.20 zeigt exemplarisch eine zweidimensionale harmonische Schwingung mit den Parametern  $f_x = 3m^{-1}$ ,  $f_y = 2m^{-1}$ ,  $\varphi_x = \varphi_y = 0$ .



**Bild 2.20** Zweidimensionale harmonische Schwingung exemplarisch

Die drei bzw. zwei Perioden in x- bzw. y-Richtung können leicht abgezählt werden.

Ein bei Teilnehmern an Lehrveranstaltungen der Systemtheorie meist nicht besonders populäres Elementarsignal ist der Dirac-Impuls, dessen schrittweise Konstruktion in Bild 2.21 veranschaulicht wird.



**Bild 2.21** Entstehung des Dirac-Impulses aus Rechteckfunktionen

Man startet gedanklich mit einem Rechtecksignal der Dauer  $T_1$  und der Höhe  $1/T_1$ . Dann wird die Dauer des Rechtecks auf den kleineren Wert  $T_2$  reduziert, während seine Höhe umgekehrt proportional auf  $1/T_2$  erhöht wird. Im nächsten Schritt wird die Dauer des Rechtecks weiter auf den noch kleineren Wert  $T_3$  reduziert, während die Höhe umgekehrt proportional auf  $1/T_3$

erhöht wird. Sodann wird nach dem gleichen Schema die Zeitdauer auf den noch kleineren Wert  $T_4$  reduziert und die Höhe auf  $1/T_4$  vergrößert.

Setzt man diesen Vorgang immer weiter fort, so entsteht letztendlich ein Rechteckimpuls, dessen Zeitdauer gegen null konvergiert, während seine Höhe gegen unendlich strebt. Wie in Bild 2.21 gezeigt, bleibt die Impulsfläche während der sukzessiven Reduzierungen der Impulsdauer in Kombination mit Vergrößerungen der Impulshöhe immer auf dem Wert eins.

Der Dirac-Impuls kann nun durch den Grenzübergang

$$\delta(t) = \lim_{T_R \rightarrow 0} \frac{1}{T_R} \text{rect}\left(\frac{t}{T_R}\right) \quad (2.4)$$

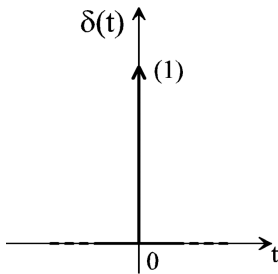
definiert werden.

Auch andere Impulse mit Impulsfläche = 1 eignen sich für derartige Grenzübergänge, etwa die

Gaußfunktion:  $\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$  oder die Lorentz-Funktion:  $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T}{T^2 + t^2}$ .

Weitere geeignete Impulse finden internetaffine Leser u. a. bei „Google/Wikipedia“.

Bild 2.22 zeigt eine gebräuchliche grafische Darstellung des Dirac-Impulses  $\delta(t)$ .

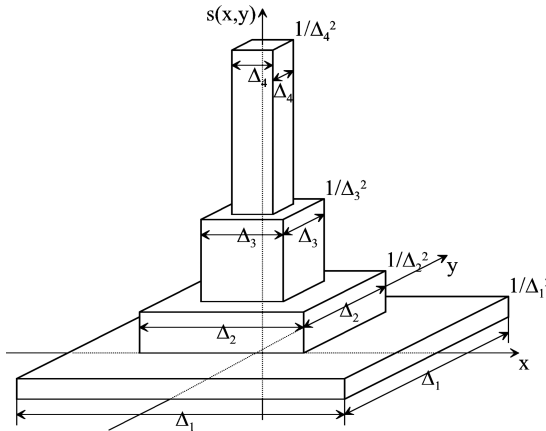


**Bild 2.22** Dirac-Impuls symbolisch

Da seine Höhe gegen unendlich tendiert, ist keine exakte, sondern nur eine symbolische grafische Darstellung möglich.

Leser, die bereits mit Mathematica vertraut sind, können diese Aussage bestätigen, nachdem sie versucht haben, den in Mathematica als **DiracDelta[t]** implementierten Dirac-Impuls mit der **Plot**-Funktion grafisch darzustellen. Die neben dem Pfeil in Klammern geschriebene Eins repräsentiert die Impulsfläche, bzw. das „Gewicht“ des Dirac-Impulses.

Überträgt man den in Bild 2.21 illustrierten Grenzübergang in zwei Dimensionen, so entsteht die in Bild 2.23 skizzierte Abfolge von Quadern, deren Seitenlängen sukzessive verkleinert werden, während die Höhen nach und nach ansteigen. Entscheidend ist, dass die Volumina sämtlicher Quader gleich eins sind, d. h. Höhe = 1/Grundfläche.



**Bild 2.23** Entstehung eines Deltapunktes aus zweidimensionalen Rechteckfunktionen

Der zweidimensionale Dirac-Impuls = Deltapunkt kann als Ergebnis des Grenzübergangs

$$\delta(x, y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^2} \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (2.5)$$

definiert werden.

Aus den identischen Seitenlängen  $\Delta$  in x- und y-Richtung resultiert die Grundfläche  $\Delta^2$ .

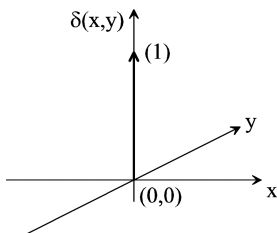
Da das Volumen eines Quaders als Grundfläche  $\times$  Höhe bestimmt wird, ist das Volumen = Gewicht des Deltapunktes gleich eins.

Einige weitere zweidimensionale Impulse mit Impulsvolumen = 1 eignen sich ebenfalls für diesen Grenzübergang, die Kreisfunktion:  $\delta(x, y) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \text{circ}_R(x, y)$ , die Gaußfunktion:

$$\delta(x, y) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \text{ die Lorentz-Funktion: } \delta(x, y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta^2+x^2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta^2+y^2} \text{ (separierbar)}$$

$$\text{bzw. } \delta(x, y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^2+x^2+y^2} \text{ (rotationssymmetrisch).}$$

Bild 2.24 zeigt eine gebräuchliche grafische Darstellung des Deltapunktes  $\delta(x, y)$ .

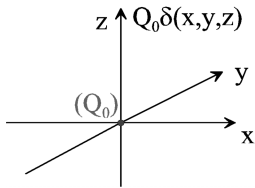


**Bild 2.24** Zweidimensionaler Deltapunkt in symbolischer Darstellung

Der Pfeil dient erneut als Indikator für die unendliche Höhe des Impulses und die neben dem Pfeil erkennbare eingeklammerte Eins gibt sein Gewicht an, entsprechend dem Volumen = 1 der beim Grenzübergang verwendeten Impulse.

Analog zur Definition des zweidimensionalen Deltapunktes per Grenzübergang kann aus einer Abfolge dreidimensionaler Impulse mit Hypervolumina = 1 auch ein dreidimensionaler Deltapunkt  $\delta(x, y, z)$  entwickelt werden. Die Übertragung der Pfeildarstellung aus Bild 2.24 in

drei Dimensionen ist nicht möglich. Bild 2.25 gibt eine ungefähre Vorstellung anhand der exemplarischen Darstellung einer Punktladung  $Q_0$  im Ursprung des Koordinatensystems.



**Bild 2.25** Punktladung im Ursprung des Koordinatensystems

Die Raumladungsdichte einer Punktladung, aus der ihr elektrostatisches Potenzial sowie ihre elektrische Feldstärke berechnet werden können (näheres in Abschnitt 4.1!), ist unendlich. Die Ladung  $Q_0$  entspricht dem Gewicht des Deltapunktes. Das Produkt  $Q_0\delta(x, y, z)$  besitzt die physikalisch korrekte Einheit  $As/m^3$  der Raumladungsdichte. Für Deltapunkte in mehreren Dimensionen gelten im Prinzip die gleichen Rechenregeln wie für die „vertrauten“ Dirac-Impulse als Zeitsignale. In Tabelle 2.1 sind die wichtigsten ein- und mehrdimensionalen Beziehungen aufgelistet.

Die Produkteigenschaft ist sofort einsichtig, wenn man beachtet, dass der Deltapunkt  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  nur am Ort  $\vec{r} = \vec{r}_0$  ungleich null ist.

**Tabelle 2.1** Rechenregeln für ein- und mehrdimensionale Deltapunkte

Dimensionen	Produkteigenschaft	Ausblendeigenschaft
1	$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$
N	$s(\vec{r}) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = s(\vec{r}_0) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} s(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d\vec{r} = s(\vec{r}_0)$

In N Dimensionen ist das differenzielle Element  $d\vec{r}$  des N-fach-Integrals als Hypervolumenelement  $dx_1 dx_2 \dots dx_N$  aufzufassen.

Die Konstante  $s(\vec{r}_0)$  kann somit aus dem N-fach Integral herausgezogen werden und mit der bereits ausgiebig verwendeten Tatsache, dass, unabhängig von der Anzahl der Dimensionen, das Gewicht eines Deltapunktes immer gleich eins ist, folgt sofort die Ausblendeigenschaft, die auch als Definitionsgleichung des Deltapunktes gilt. Weitere Eigenschaften, die z. B. in /2/ ausführlich erläutert werden, folgen aus der Ausblendeigenschaft.

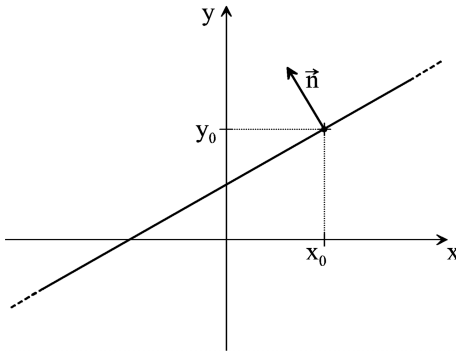
Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall stellen mehrdimensionale Deltapunkte Spezialfälle einer Vielzahl möglicher **Delta( $\delta$ )funktionen** dar, die durch das Argument bzw. die Argumente der „Funktion“  $\delta(\dots)$  charakterisiert werden. In zwei Dimensionen können ein oder zwei Argumente der Deltafunktion auftreten. Die Deltafunktion

$$\delta((\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}) \tag{2.6}$$

mit Ortskoordinaten  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , Fixpunkt  $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  und Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  stellt eine **Deltagerade** dar. Setzt man das Skalarprodukt zweier Vektoren im Argument der Deltafunktion gleich null, so erhält man die Normalenform einer Geradengleichung in der x-y-Ebene mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$ :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (x - x_0) n_x + (y - y_0) n_y = 0. \quad (2.7)$$

Punkte deren x- und y-Koordinaten diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Deltagerade. Nur an diesen Punkten ist das Argument der Deltafunktion gleich null, d. h. die Deltafunktion besitzt nur dort Werte ungleich null. Bild 2.26 illustriert eine zweidimensionale Deltagerade in der x-y-Ebene.

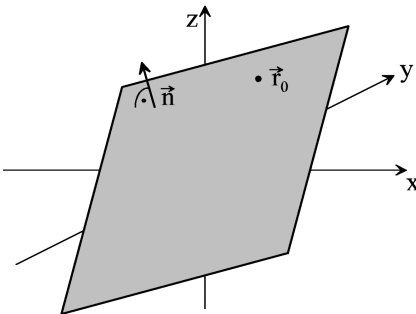


**Bild 2.26** Deltagerade in der x-y-Ebene schematisch

Die dreidimensionale Version der Gl. 2.7 führt zur Normalenform einer Ebenengleichung

$$(x - x_0) n_x + (y - y_0) n_y + (z - z_0) n_z = 0. \quad (2.8)$$

Bild 2.27 zeigt schematisch eine Deltaebene mit Fixpunkt  $\vec{r}_0$  und Normalenvektor  $\vec{n}$ .



**Bild 2.27** Deltaebene schematisch

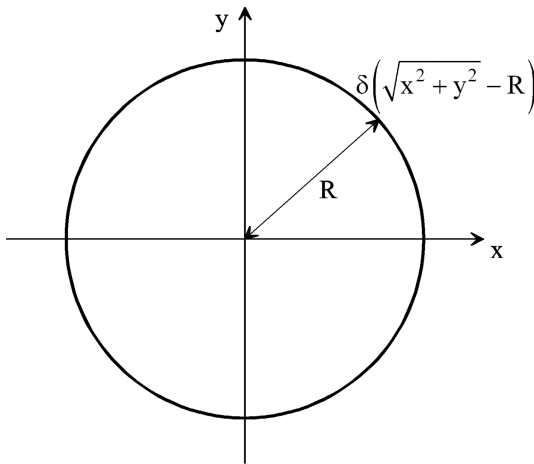
Eine Deltagerade in der x-y-Ebene nach Gl. 2.7 kann zu einer Deltakurve

$$s(x, y) = \delta(f(x, y)) \quad (2.9)$$

verallgemeinert werden.  $f(x, y) = 0$  ist die bekannte implizite Formulierung einer Kurve in der x-y-Ebene. Bild 2.28 zeigt einen Deltakreis

$$s(x, y) = \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - R) \quad (2.10)$$

mit Mittelpunkt  $(0,0)$  und Radius  $R$  als Spezialfall einer Deltakurve.



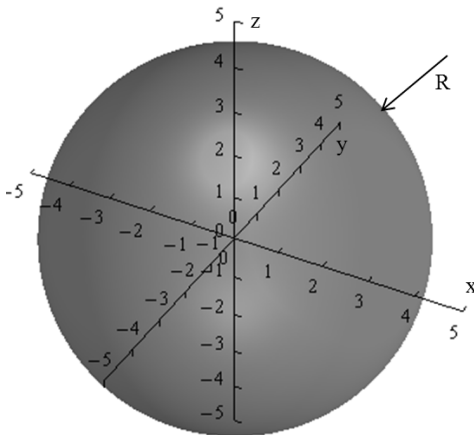
**Bild 2.28** Kreislinie als Deltakurve

Die Deltaebene nach Gl. 2.8 kann zu einer Deltafläche

$$s(x, y, z) = \delta(f(x, y, z)) \tag{2.11}$$

verallgemeinert werden.  $f(x,y,z) = 0$  ist die bekannte implizite Formulierung einer i. A. gekrümmten Fläche im Raum. Bild 2.29 zeigt exemplarisch eine Deltakugelfläche mit Mittelpunkt  $(0,0,0)$  und Radius  $R$ :

$$s(x, y, z) = \delta(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R). \tag{2.12}$$

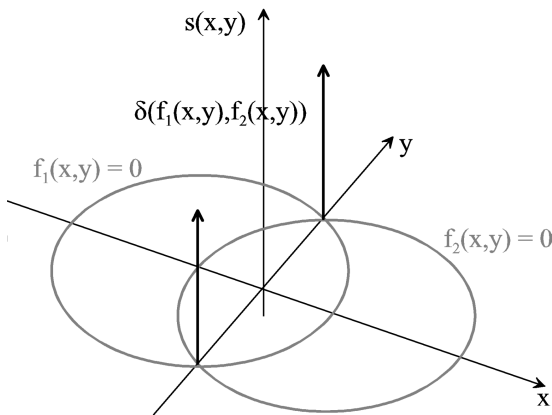


**Bild 2.29** Deltakugelfläche exemplarisch mit  $R = 4$

Ein etwas komplexeres Beispiel ist der im Januarheft von Spektrum der Wissenschaft 2007 /34/ zu Ehren von Hans Magnus ausführlich gewürdigte „Enzensbergerstern“ mit der Formulierung  $s(x, y, z) = \delta(a \cdot (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) - (1 - x^2 - y^2 - z^2)^3)$  als Deltafläche. Die mit  $a = 400$  berechnete und grafisch dargestellte Form „schmückt“ den Umschlag dieses Buches. Kleine Zahlenwerte  $> 0$  des Parameters  $a$  führen zu eher „kugeligen“ Formen, sehr große Werte dagegen zu eher „feingliedrigen“ Gebilden.

Eine zweidimensionale Deltafunktion kann auch mit zwei Argumenten  $f_1(x, y)$  und  $f_2(x, y)$  formuliert werden, die den impliziten Definitionen  $f_1(x, y) = 0$  bzw.  $f_2(x, y) = 0$  zweier Kurven in der  $x$ - $y$ -Ebene entsprechen.

An Punkten, an denen eine Deltafunktion  $\delta(f_1(x, y), f_2(x, y))$  ungleich null sein soll, müssen beide Argumente gleich null sein, d. h. die impliziten Gleichungen  $f_1(x, y) = 0$ , und  $f_2(x, y) = 0$  beider Kurven müssen erfüllt sein. Die Deltafunktion besteht dann aus einem oder mehreren Deltapunkt(en)  $\hat{=}$  Schnittpunkt(en) der Kurven. Bild 2.30 illustriert diesen wortreich geschilderten Zusammenhang anhand zweier Deltakreise, die sich in zwei Punkten schneiden. Diese Deltafunktion besteht also aus zwei Deltapunkten, die im Bild wieder symbolisch als Pfeile dargestellt sind.



**Bild 2.30** Deltafunktion  $\delta\left(\sqrt{(x+R/2)^2+y^2}-R, \sqrt{(x-R/2)^2+y^2}-R\right)$

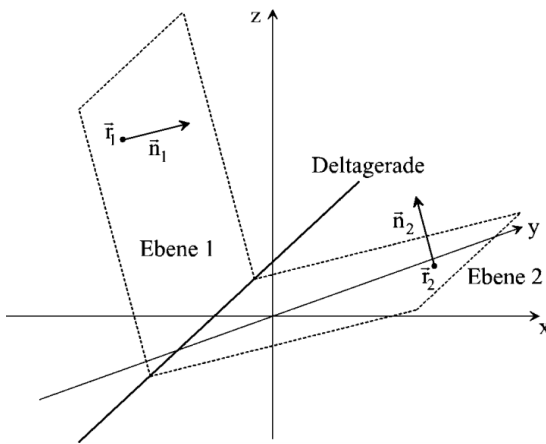
Formal kann die Deltafunktion  $\delta(f_1(x, y), f_2(x, y))$  auch als Produkt  $\delta(f_1(x, y)) \cdot \delta(f_2(x, y))$  zweier Deltakurven definiert werden. Das Produkt kann nur an den  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinaten ungleich null sein, an denen beide Faktoren ungleich null sind.

Kritische Leser könnten hier anmerken, dass in der Theorie eindimensionaler Signale und Systeme das Produkt zweier Dirac-Impulse nicht definiert ist. Im Fall sich schneidender Deltakurven tritt dieses Problem nicht auf. Produkte wie  $\delta(x)\delta(x)$  sind allerdings auch in mehreren Dimensionen nicht definiert und somit zu vermeiden.

Eine entsprechende dreidimensionale Deltafunktion  $\delta(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ , die auch als Produkt  $\delta(f_1(x, y, z))\delta(f_2(x, y, z))$  formuliert werden kann, stellt die Schnittkurve zweier Deltaflächen bzw. eine Deltakurve in drei Dimensionen dar.

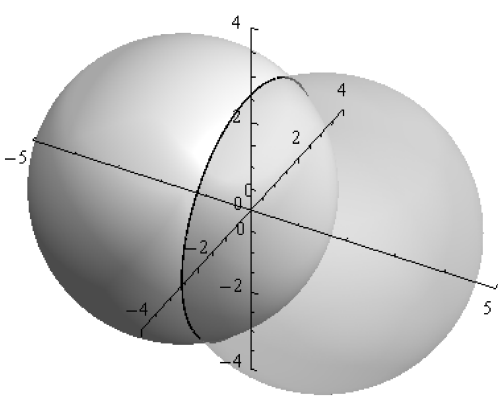
Bild 2.31 illustriert diesen Zusammenhang am Beispiel zweier sich schneidender Deltaebenen  $\delta((\vec{r}-\vec{r}_1) \cdot \vec{n}_1)$  bzw.  $\delta((\vec{r}-\vec{r}_2) \cdot \vec{n}_2)$ , die sich in einer Deltagerade schneiden.





**Bild 2.31** Deltagerade als Schnittlinie zweier Deltaebenen schematisch

Bild 2.32 zeigt exemplarisch zwei sich in einem Deltakreis schneidende Deltakugelflächen  $\delta\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}-R_1\right)$  und  $\delta\left(\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}-R_2\right)$  in Kombination mit dem Deltakreis in der y-z-Ebene als Schnittkurve mit  $R_1 = R_2 = 3, x_1 = -1,5, y_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 1,5, y_2 = 0, z_2 = 0$ .



**Bild 2.32** Deltakreis als Schnittkurve zweier Deltakugelflächen exemplarisch

Mit den angegebenen Zahlenwerten liegt der Radius des bei (0,0,0) zentrierten Deltakreises bei  $R \sin(60^\circ) \approx 2,6$ .

Ist eine Deltagerade in drei Dimensionen in Punkt-Richtungs- bzw. Parameterform gegeben, so kann man zwei sich schneidende Deltaebenen konstruieren, die die in Bild 2.31 schematisch skizzierte Gerade  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$  als Schnittgerade enthalten und die Deltagerade dann als Deltafunktion mit zwei Argumenten formulieren. Der Parameter t stellt nicht etwa die Zeit dar sondern spezifiziert die Lage eines Punktes auf der Gerade. Der Richtungsvektor  $\vec{v}$  kann als Vektorprodukt  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  der Normalenvektoren der Ebenen angegeben werden. Zur Bestimmung des Fixpunktes  $\vec{r}_0$  gibt es keine eindeutige Rechenvorschrift. Aus unendlich vielen Lösungen des unterbestimmten Problems kann eine zweckmäßige Variante ausgewählt werden.

Die direkte Definition einer Deltagerade in drei Dimensionen beruht auf der parametrischen Formulierung der Koordinaten eines Deltapunktes.

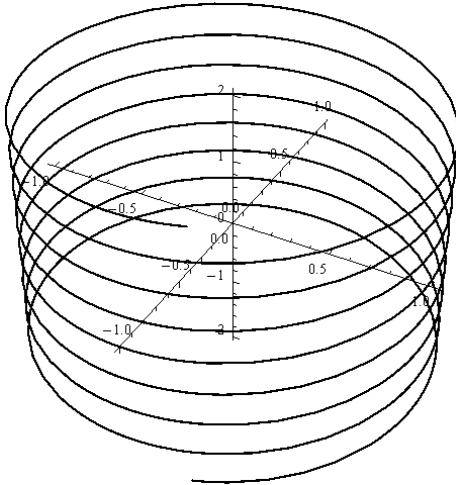
$$\delta(x - (x_0 + v_x t), y - (y_0 + v_y t), z - (z_0 + v_z t)) \quad (2.13)$$

Für Punkte auf der Gerade sind alle drei Argumente der Deltafunktion gleich null, sodass diese dort Werte ungleich null annimmt.

Dieses Konstruktionsprinzip ist nicht auf Deltageraden beschränkt, sondern kann auf beliebige Raumkurven angewandt werden. Die allgemeine Definition einer Deltakurve in Parameterform lautet

$$\delta(x - f_x(t), y - f_y(t), z - f_z(t)) \quad (2.14)$$

Bild 2.33 zeigt exemplarisch die grafische Darstellung einer Deltakurve in Form einer Schraubenlinie (Helix) mit Radius  $R$  und 8 Windungen der Steigung  $\Delta z/2\pi$ , die etwa zur Modellierung des Stromes bzw. der Stromdichte in einer Spule oder auch in einer Wendelantenne eingesetzt werden könnte. Anstelle des vorher erwähnten Faktors  $t$  dient jetzt der Winkel  $\varphi$  zur Lokalisierung von Punkten entlang der Raumkurve.



**Bild 2.33** Schraubenlinie als Deltakurve exemplarisch

In Parameterform lautet diese Deltakurve:

$$\delta\left(x - R \cos(\varphi), y - R \sin(\varphi), z - \Delta z \frac{\varphi}{2\pi}\right). \quad (2.15)$$

Auf Basis der bisher erläuterten Elementarsignale können weitere idealisierte Signale, auch mit komplexeren Formen, mithilfe im Abschnitt 2.1.1.2 erläuterten Signaloperationen definiert werden.

### 2.1.1.2 Signaloperationen

**Translationen** mehrdimensionaler Signale verallgemeinern Zeitverschiebungen, wie sie im Vorgriff bereits in Abschnitt 2.1.1.1 zur formalen Definition eines eindimensionalen Rechtecksignals aus Einheitssprüngen verwendet wurden. In vektorieller Schreibweise lautet ein ortsverschobenes  $N$ -dimensionales Signal  $s(\vec{r} - \vec{r}_0)$ , mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  und dem