Roman Mair

Statik
starrer Körper

Technische Mechanik für Versorgungs-, Energie- und Verfahrenstechnik

fv

HANSER

Mair

Statik starrer Körper

Roman Mair

Statik starrer Körper

Technische Mechanik für Versorgungs-, Energie- und Verfahrenstechnik

Mit 232 Bildern und 13 Tabellen

sowie zahlreichen Übungsaufgaben mit Lösungen

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Prof. Dr.-Ing. Roman Mair
Hochschule München
Fakultät Versorgungs- und Gebäudetechnik

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014889

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-45156-8
E-Book-ISBN 978-3-446- 45365-4

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Ute Eckardt
Herstellung: Katrin Wulst
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Satz: Kösel, Krugzell
Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Studierende der Gebäude-, Versorgungs-, Verfahrens-, Energie- und der Chemietechnik. Bücher über Technische Mechanik sind meistens für Maschinenbauer oder Bauingenieure geschrieben. In den oben genannten Fachrichtungen treten mitunter Probleme auf, die in den üblichen Mechanikbüchern nicht behandelt sind. Deswegen ist dieses Buch so konzipiert, dass hier ausgewählte Grundlagen der Statik starrer Körper behandelt werden, die diesen Berufsgruppen im Alltag abverlangt werden.

Die Statik starrer Körper beschreibt das Wesen von Kräften und Momenten. Sie stellt weiter Methoden zur Bestimmung des äußeren und inneren Gleichgewichts von Tragelementen vor. Dabei bleiben Verformungen unberücksichtigt. Obwohl die Rollreibung eigentlich ein Thema der Statik elastischer Körper ist, wird sie unter dem Abschnitt Reibung mit behandelt. Ein besonderes Augenmerk gilt den typischen Tragelementen wie dem Druck- und Zugstab, dem Biegebalken und der rotationssymmetrischen dünnen Schale.

Die Methoden werden hinreichend exakt hergeleitet; Vereinfachungen, genormte Methoden und praktische Kniffe bleiben den Vorlesungen in den anwendungsbezogenen Fächern vorbehalten, bauen aber auf den vorgestellten Grundlagen auf.

Bei den praktischen Berechnungen genügen drei Stellen einer Zahl, denn die Annahmen der aufgeprägten Lasten sind häufig mit größeren Ungenauigkeiten behaftet.

Ein kritischer Blick auf die eigenen Rechenergebnisse schadet keinem Ingenieur. Kann das stimmen? Ist eine Frage, die einen Konstrukteur sein Leben lang begleitet. Aus diesem Grund wurde bei den Rechenbeispielen ein großer Wert auf Kontrollen gelegt.

Das Verständnis der Theorie ist zwar notwendig, um eine sichere Beurteilung von Konstruktionen zu gewährleisten aber keineswegs ausreichend. Vielmehr kommt es in der tagtäglichen Arbeit auf das Abstraktionsvermögen des Berechners an. Nur wenn man aus dem vorliegenden Problem ein passendes statisches Modell idealisieren kann, sind die daraus resultierenden Rechenergebnisse verwertbar. Und genau das ist das Dilemma der Lehrenden. Die vielfältigen praktischen Erfahrungen in der Statik können nicht gelehrt werden, diese muss jeder Einzelne im Berufsleben selbst sammeln.

Ohne regelmäßiges Üben bleibt auch den begabtesten Lernenden die Statik verschlossen. Deshalb ist das Üben des dargebotenen Stoffes unabdingbar.

An der Stelle möchte ich mich beim Carl Hanser Verlag, speziell bei Frau Ute Eckardt und Frau Katrin Wulst, für die Unterstützung bedanken.

Rain, den 30.09.2017 *Roman Mair*

Inhalt

1 Konstruktionselemente

Um eine technische Konstruktion einer statischen Berechnung zuführen zu können, bedarf es einem Ordnungskriterium für ihre statisch wirksamen Teile. Ein solches Ordnungskriterium ist sehr vielfältig und überschneidet sich teilweise, sodass eine einheitliche und allgemein verbindliche Einteilung nicht existiert. Mögliche Kategorien sind:

- Klassifizierung der Konstruktionen nach ihrer Form
- Klassifizierung der Konstruktionen nach ihrer mechanischen Beanspruchung
- Klassifizierung der Konstruktionen nach ihrer Nutzung
- Klassifizierung der Konstruktionen nach ihrem Material

1.1 Form und Beanspruchung

Die Form der Konstruktionen ist wohl das gebräuchlichste Klassifizierungsmerkmal. Dazu können drei Hauptgruppen gebildet werden:

- Kontinua
- Flächentragwerke
- Stabtragwerke

1.1.1 Kontinua

Bei den Kontinua handelt es sich um massige Bauwerke wie z. B. Pyramiden und Staudämme, bei denen alle drei Abmessungen (Länge l, Höhe h und Breite b) des Tragwerks von gleicher Größenordnung sind. Die Lastabtragung geschieht hauptsächlich durch Druckkräfte im Inneren des Werkstoffes.

1.1.2 Flächentragwerke

Bei den Flächentragwerken können die Flächen eben oder gekrümmt sein. Ebene Flächentragwerke sind Scheiben und Platten. Scheiben werden in ihrer Ebene durch Zug- oder Druckkräfte beansprucht, sie werden in zwei unterschiedlichen Richtungen gezogen oder gestaucht. Platten werden senkrecht (normal) zu ihrer Ebene beansprucht, sie biegen sich.

Eine gefaltete Ebene nennt man Faltwerk. Faltwerke bestehen aus einzelnen Scheiben und werden in ihrer jeweiligen Ebene beansprucht. Ein typisches Faltwerk ist das Sheddach.

Gekrümmte Flächen nennt man Schalen. Schalen können einfach oder doppelt gekrümmt, leicht oder schwer sein. Zu den leichten, gekrümmten Flächentragwerken zählen wir pneumatische Konstruktionen (Traglufthallen), Zelte und Seilnetze. Schwere, gekrümmte Flächentragwerke sind meistens Schalen aus Beton, die auch wieder einfach oder doppelt gekrümmt sein können. Dünne Betonschalen, bei einem Verhältnis des Krümmungsradius zur Wanddicke von $< 10/1$, leiten die Lasten weitgehend über Membranwirkung (Normalkräfte) ab, dicke Betonschalen hingegen können auch erhebliche Biegemomente aufnehmen, sie werden daher für Schutzbauten, z. B. Reaktorhüllen, verwendet. Beim Membranspannungszustand werden die äußeren Lasten durch Kräfte im Inneren, die parallel zur Mittelfläche sind, abgeleitet. Eine Scheibe wird beispielsweise durch einen Membranspannungszustand beansprucht. Der Gegensatz dazu ist der Biegespannungszustand. Hier werden die Schalen zusätzlich verbogen.

1.1.3 Stabtragwerke

Stäbe und Balken können gerade oder gekrümmt sein. Gerade, durch eine Zug- oder Druckkraft beanspruchte Stäbe werden auch als Stab bezeichnet. Sie dienen als Stützen für senkrechte Lasten und als Verbandstäbe in Fachwerksystemen. Ein Ausnahmestab ist das senkrecht hängende Seil, in dem nur Zugkräfte auftreten können. Stäbe werden gestreckt oder gestaucht.

Stäbe, die vorwiegend durch Biegemomente beansprucht werden, bezeichnen man als Balken. Balken verbiegen sich. Auch wenn zusätzlich axiale Lasten auftreten, wird weiterhin von einem Balken gesprochen. Im Stahlbau werden Balken auch Träger genannt. Balken können zu biegesteifen Rahmen, die in der Rahmenebene belastet werden, oder zu Trägerrosten, die senkrecht zu ihrer Systemebene belastet werden, zusammengefügt werden.

Gekrümmte Stäbe sind vorwiegend durch Druckkräfte beanspruchte Bögen oder ausschließlich durch Zugkräfte beanspruchte horizontal gespannte Seile.

1.2 Nutzung und Material

Diese Art der Klassifizierung hat eine geringere technische Bedeutung. Als Beispiele sind hier der Stahlbehälter, das Kunststoffrohr, oder die Spannbetonbrücke zu nennen.

2 Kräfte und Momente

In diesem Kapitel wird das Wesen von Kräften und Momenten und weiter deren Eigenschaften beschrieben. Es wird gezeigt, wie mehrere Kräfte zu einer Ersatzkraft zusammengefasst werden und wie eine einzelne Kraft in verschiedene Komponenten zerlegt wird.

2.1 Kraftbegriff

Volumen- und Oberflächenkräfte liegen in der Realität vor. Linienlasten und Einzelkräfte sind Idealisierungen (vgl. Bild 2.1).

Volumenkräfte, Oberflächenkräfte und Linienkräfte müssen nicht konstant sein. Häufig sind diese Kräfte eine Funktion des Ortes, manchmal auch zusätzlich eine Funktion der Zeit. Die Ersatzkraft für ungleichmäßige Belastungen wirkt im Schwerpunkt der Belastungsfunktion.

Die Ersatzkräfte, auch Resultierende genannt, ersetzten die Kraftfelder vollständig.

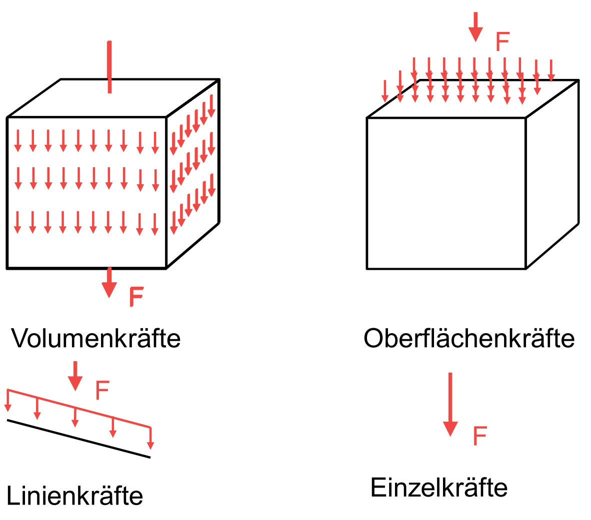

Bild 2.1: Arten von Kräften

Angaben über Kräfte im Bauwesen finden sich in der DIN 1055 (Lastannahmen). Andere Kräfteangaben, zum Beispiel von Maschinen, sind von den jeweiligen Herstellern zu erfragen.

2.1.1 Volumenkräfte

Volumenkräfte p (siehe Bild 2.2) sind im Inneren von Körpern aktiv.

Beispiele für Volumenkräfte sind:

- Kräfte aus Beschleunigungen (Gravitationsfeld, Zentrifugalkräfte)
- Elektromagnetische Kräfte

Die Einheit der Volumenkräfte p ist N/m^3 (Newton pro Kubikmeter) oder kN/m^3.

Eine Massendichte von einem Kilogramm pro dm^3 bewirkt auf der Erdoberfläche eine Volumenkraft von 9,81 N/dm^3.

Volumenkräfte von homogenen Körpern unter gleichförmigen Anziehungskräften haben ihre Ersatzkraft $\boldsymbol{F}$ im geometrischen Schwerpunkt des Körpers. Sie weist in Richtung der Volumenkräfte. Ist die Volumenkraft eine Funktion des Ortes, wie beispielsweise bei Fliehkräften, dann liegt ihre Ersatzkraft im Schwerpunkt der Funktion und ihre Richtung muss aus der Integration der Komponenten der Volumenkräfte ermittelt werden.

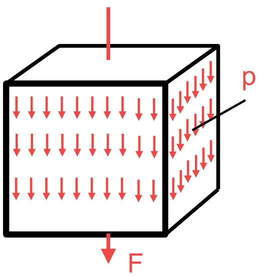

Bild 2.2: Volumenkräfte

2.1.2 Oberflächenkräfte

Oberflächenkräfte p (siehe Bild 2.3) sind nur auf Oberflächen von Körpern aktiv.

Beispiele für Oberflächenkräfte sind:

- (Kontakt-) Pressung bei Festkörperberührung
- Druck von Flüssigkeiten und Gasen (z. B. hydrostatischer Druck)
- Staudruck in Strömungen (z. B. Windlasten)
- Verkehrslasten von Geschossdecken (z. B. Decken von Wohnhäusern $p = 1{,}5\ kN/m^2$)

Die gebräuchliche Einheit von Oberflächenkräften p ist N/m^2 oder kN/m^2.

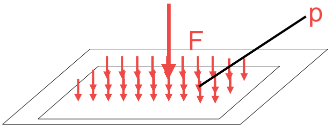

Bild 2.3: Oberflächenkräfte

Oberflächenkräfte sind in der Regel nicht konstant über der belasteten Fläche verteilt. Die Ersatzkraft $\boldsymbol{F}$ greift im Schwerpunkt des Lastkörpers an. Der Lastkörper wird dabei von der belasteten Fläche und der veränderlichen Oberflächenkraft aufgespannt.

Ein Druck von 1 bar ruft eine Oberflächenkraft von $p = 0{,}1\ \mathrm{N/mm^2}$ hervor.

Flächenlasten werden entweder pro tatsächlicher Fläche (zum Beispiel Drücke) oder in Abhängigkeit von deren Projektion angegeben. Schneelasten werden beispielsweise immer auf eine horizontale Projektion von Flächen angegeben. In Bild 2.4 sind typische Lasten für Dächer skizziert.

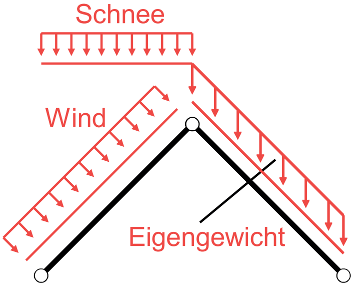

Bild 2.4: Typische Oberflächenkräfte

2.1.3 Linienkräfte

Linienkräfte p (siehe Bild 2.5), oder auch q, stellen bereits eine Idealisierung von Volumenkräften oder Oberflächenkräften dar.

Beispiele für Linienkräfte:

- Gewichtslast eines Rohres und dessen Füllung
- Auflagerreaktionen von Wänden

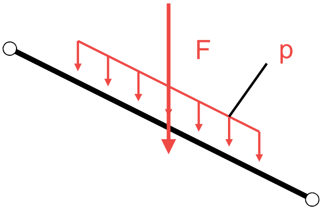

Bild 2.5: Linienkräfte

Die Einheit von Linienkräften p ist N/m oder kN/m.

Die Ersatzkraft von Linienkräften greift im Schwerpunkt der Lastfläche an und hat die Richtung der Linienkraft.

Träger Holzbalkendecke

Eine Holzbalkendecke gemäß Bild 2.6 ist mit der Verkehrslast $p_\mathrm{V} = 1{,}5\ \mathrm{kN/m^2}$ belastet.

Das Eigengewicht der Bretter kann mit $p_\mathrm{B} = 0{,}2\ \mathrm{kN/m^2}$ und das des Balkens mit $q_\mathrm{B} = 0{,}075\ \mathrm{kN/m}$ angenommen werden.

Gesucht ist die Linienlast q_1, mit der sich der Balken abstützt.

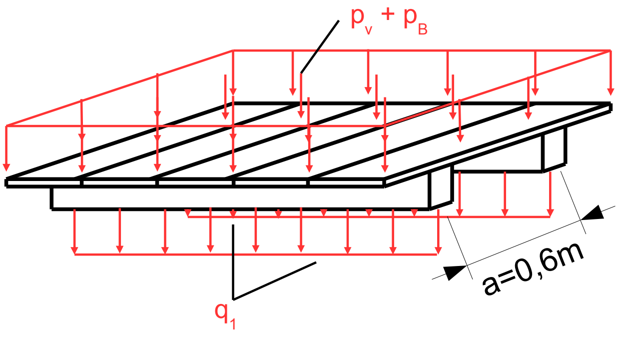

Bild 2.6: Holzbalkendecke

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(p_\mathrm{V} + p_\mathrm{B}\right) \cdot a + q_\mathrm{B} \\ &= \left(1{,}5\,\mathrm{kN/m^2} + 0{,}2\,\mathrm{kN/m^2}\right) \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} + 0{,}075\,\mathrm{kN/m} \\ &= 1{,}095\,\mathrm{kN/m} \end{aligned}$$

2.1.4 Einzelkräfte

Einzelkräfte $\boldsymbol{F}$ (siehe Bild 2.7) treten wie Linienlasten in Wirklichkeit nicht auf. Volumenkräfte oder Oberflächenlasten kann man als resultierende Einzelkräfte zusammenfassen und anstelle der verteilten Kräfte mit dieser einzelnen Kraft weiterrechnen.

Beispiele für Einzelkräfte:

- Gewichtskräfte von Motoren
- Auflagerpressung von Säulen

Die Einzelkräfte werden in N (Newton) oder in Vielfachen davon (kN, MN, GN, ...) gemessen.

Bild 2.7: Einzelkraft

Stützen Holzbalkendecke

Ein Holzbalken mit der Länge L = 3 m, gemäß Bild 2.8, ist mit der Linienlast q_1 = 1,095 kN/m aus dem vorhergehenden Beispiel belastet.

Der Balken ist im Abstand von L = 2 m symmetrisch mit Holzstützen abgestützt.

Gesucht ist die Einzellast F_S, die auf eine Stütze wirkt.

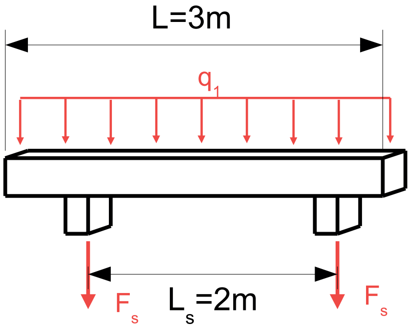

Bild 2.8: Unterstützter Holzbalken

$$F_s = 0{,}5 \cdot q_1 \cdot L = 0{,}5 \cdot 1{,}095\,\mathrm{kN/m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 1642{,}5\,\mathrm{N}$$

2.1.5 Lastannahmen

Die Lastannahmen im Bauwesen sind in DIN 1055 festgelegt und gliedern sich in folgende Teile:

- Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen
- Teil 2: Bodenkenngrößen
- Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten
- Teil 4: Windlasten
- Teil 5: Schnee- und Eislasten
- Teil 6: Einwirkungen auf Silos
- Teil 7: Temperatureinwirkungen
- Teil 8: Einwirkungen während der Bauausführung
- Teil 9: Außergewöhnliche Einwirkungen
- Teil 10: Einwirkungen infolge Krane und Maschinen
- Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln

Zur Berechnung der Beanspruchungen von mechanischen Strukturen trennt man die Belastung sinnvollerweise nach Ursachen. Das Eigengewicht bedarf einer größeren Sicherheit als vorübergehende Lasten, wie beispielsweise der Wind auf einen Abgaskamin. Außergewöhnliche Lastfälle, wie die Kollision eines Fahrzeuges mit einer Pipeline, werden in der Regel auch getrennt berechnet. Thermische Einflüsse, die zu Wärmespannungen führen, werden ebenfalls separat behandelt.

Nach der getrennten Ermittlung der diversen Lastfälle werden die daraus resultierenden Beanspruchungen, versehen mit entsprechenden Sicherheitskoeffizienten, linear zur Gesamtbeanspruchung addiert und mit den Beanspruchungsmöglichkeiten des zugrundeliegenden Werkstoffes verglichen.

Dieses Überlagern von Lastfallkombinationen (z. B. Eigengewicht + Wasserfüllung + Druckprobe) nennt man Superposition. Die Superposition, also das lineare Überlagern von einzelnen Lastfällen, ist zulässig, weil die Beanspruchungen hier Lösungen von linearen Differenzialgleichungen (Gleichgewicht am unverformten, starren System) sind. Bei nichtlinearen Differenzialgleichungen, wie beispielsweise beim Gleichgewicht am verformten System, ist die Superposition nicht erlaubt!

2.2 Eigenschaften einer Einzelkraft

In diesem Abschnitt werden die Merkmale einer konzentrierten Einzelkraft beschrieben, sowie ihre Auswirkungen dargelegt.

2.2.1 Wirkungslinie

Die Beanspruchung des Balkens ändert sich nicht, wenn man das Gewicht mit der Gewichtskraft F_G an einem kurzen (Bild 2.9, Fall A) oder an einem langen Seil (Bild 2.9, Fall B) befestigt. Die Masse des Seils wird bei dieser Betrachtung vernachlässigt.

Im Fall A und B wird unten am Balken gezogen, im Fall C dagegen von oben gedrückt.

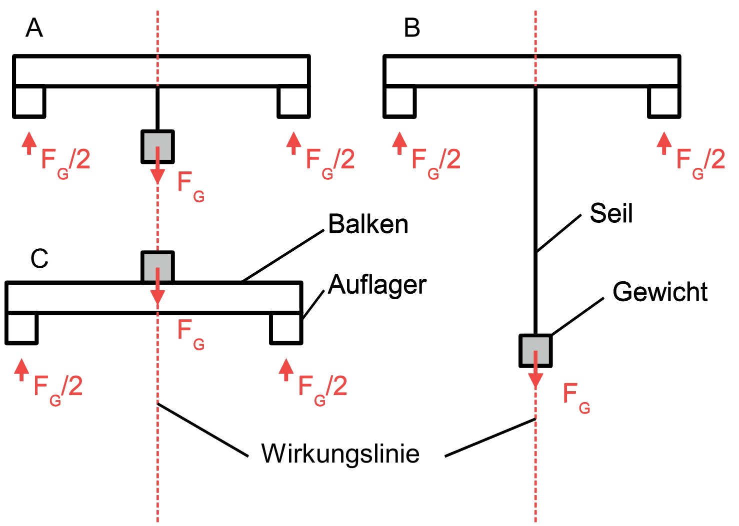

Bild 2.9: Wirkungslinie einer Kraft

Einen Unterschied in der Beanspruchung im Fall C bemerkt man lediglich in der direkten Nachbarschaft der Lasteinleitung. In einem Abstand von etwa der doppelten Balkenhöhe sind die Beanspruchungen in allen drei Fällen annähernd gleich. Die Auflagerreaktionen sind daher in allen drei Fällen gleich $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}/2$.

Das Prinzip von St. Vernant besagt, dass sich eine Lasteinleitung nur lokal, also in ihrer unmittelbaren Umgebung auswirkt. Eine genauere Untersuchung der exakten Verhältnisse am Lasteinleitungspunkt ist mit einfachen Mitteln nicht möglich.

> Eine Kraft kann auf ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich an ihren Auswirkungen etwas ändert.

Die Kraft lässt sich mathematisch als ein linienflüchtiger Vektor beschreiben. Vektoren kann man am besten als Pfeile mit Anfangskoordinaten und Endkoordinaten (Spitze) beschreiben. Ein Ortsvektor ist an einem festen Punkt fixiert, ein linienflüchtiger Vektor darf auf einer bestimmten Linie und ein freier Vektor darf im Raum auch parallel frei verschoben werden.

2.2.2 Mathematische Beschreibung von Kräften

Räumliche Beschreibung von Kräften

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ ist also ein linienflüchtiger Vektor (Vektoren werden fett gekennzeichnet), der auf seiner Wirkungslinie $\boldsymbol{w}$ beliebig verschoben werden kann. Die Wirkungslinie $\boldsymbol{w}$ kann mit der folgenden Geradengleichung beschrieben werden. $\boldsymbol{x}_0$ ist der Ortsvektor vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem beliebigen Punkt der Wirkungslinie. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ wird vorerst als freier Vektor zu $\boldsymbol{x}_0$ addiert und danach mit dem Skalar λ zu $\boldsymbol{w}$ gemäß Bild 2.10 gestreckt

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \cdot \boldsymbol{F}.$$

Die Koordinaten x, y und z der Wirkungslinie $\boldsymbol{w}$ ergeben sich zu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \qquad \text{Gl. (2.1)}$$

> Zur Festlegung einer Kraft im Raum sind die drei Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{x}_0$ und drei Komponenten der Kraft $\boldsymbol{F}$, also sechs Angaben nötig.

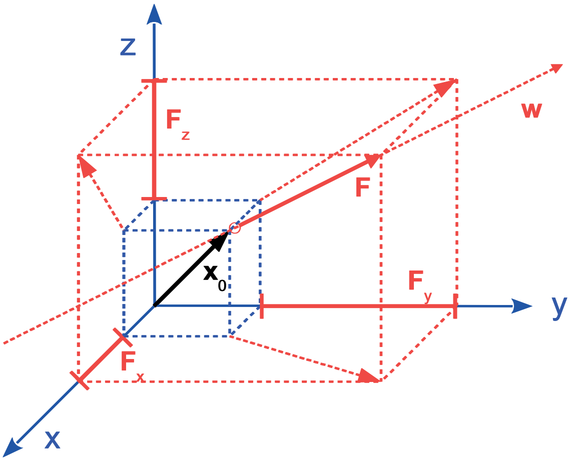

Bild 2.10: Die Kraft im räumlichen kartesischen Koordinatensystem

Eine beliebige Kraft $\boldsymbol{F}$ kann mittels einer Konstanten c gestreckt oder gestaucht werden.

$$\boldsymbol{F}_2 = c \cdot \boldsymbol{F}_1$$

- Ist c größer als 1, wird die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ gestreckt,
- ist c kleiner als 1, aber größer als 0, wird sie gestaucht.
- Nimmt c den Wert $c = -1$ an, dann wirkt die Kraft $\boldsymbol{F}_2$ der ursprünglichen Kraft $\boldsymbol{F}_1$ entgegen.

Ebene Beschreibung von Kräften

Die Komponenten der Kraft $\boldsymbol{F}$ in die jeweilige Koordinatenrichtungen x oder y erhält man mittels Skalarprodukt der Kraft mit dem jeweiligen Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ in der Form

$$F_x = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}, \qquad \text{Gl. (2.2)}$$

$$F_y = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \qquad \text{Gl. (2.3)}$$

oder über die trigonometrischen Beziehungen

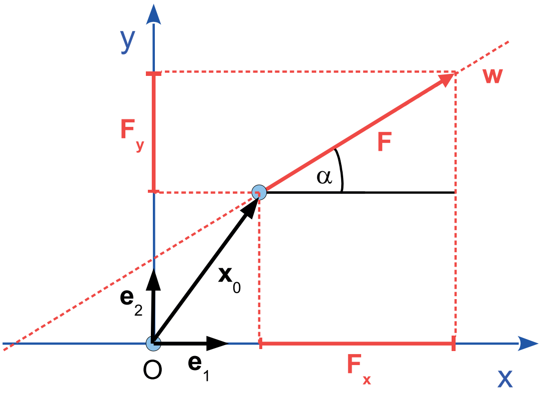

Bild 2.11: Kraftkomponenten in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem

$$F_x = |\boldsymbol{F}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} \cdot \cos(\alpha) \quad \text{und} \qquad \text{Gl. (2.4)}$$

$$F_y = |\boldsymbol{F}| \cdot \sin(\alpha) = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} \cdot \sin(\alpha). \qquad \text{Gl. (2.5)}$$

Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$ sind Ortsvektoren verankert am Ursprung eines hier rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Länge „1“. $\boldsymbol{e}_1$ zeigt in x-Richtung und $\boldsymbol{e}_2$ in y-Richtung, wie in Bild 2.11 zu sehen ist.

Zur Festlegung einer Kraft in der Ebene sind zwei Koordinaten und zwei Kraftkomponenten, also vier Angaben, nötig.

2.2.3 Drehmoment einer Kraft

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ besitzt ein Drehmoment bezüglich des Drehpunktes O (vgl. Bild 2.12). Das Moment ergibt sich aus Kraft mal Hebelarm und hat die Einheit Nm. (Nicht zu verwechseln mit der mechanischen Arbeit, Kraft mal Weg, die auch Nm als Einheit besitzt.)

Allgemein kann das Drehmoment im dreidimensionalen Raum als Vektorprodukt gemäß Gleichung 2.6

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F} \quad \text{aufgefasst werden.} \qquad \text{Gl. (2.6)}$$

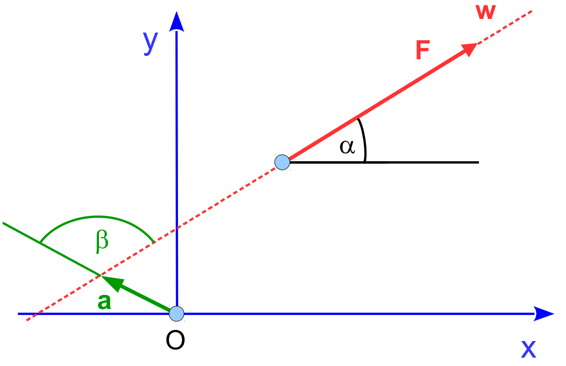

Bild 2.12: Drehmoment einer Kraft

> Das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ist ein Vektor, der sowohl senkrecht auf der Kraft $\boldsymbol{F}$ als auch auf dem Hebelarm $\boldsymbol{a}$ steht.

Der Betrag des Moments ist

$$\left|\boldsymbol{M}\right| = \left|\boldsymbol{a}\right| \cdot \left|\boldsymbol{F}\right| \cdot \sin\left(\beta\right) \mid 0 \leq \beta \leq \pi. \qquad \text{Gl. (2.7)}$$

Bei ebenen Problemen zeigt der Vektor eines positiven Drehmoments senkrecht aus der Koordinatenebene x-y heraus. Der Betrag des Moments $|\boldsymbol{M}| = M$ (M nicht fett gedruckt ist keine vektorielle, sondern eine skalare Variable) entspricht dabei der dritten Komponente, also der z-Komponente, des Momentenvektors $\boldsymbol{M}$.

$$M = M_z$$

Dreht das Moment in mathematisch positivem Sinn, also entgegen der Uhrzeigerrichtung, dann bezeichnet man es als positives Drehmoment. Den Richtungssinn des Moments kann man sich bildlich mit der dem Schraubenweg einer üblichen Rechtsschraube vergegenwärtigen; mit einem positiven Drehmoment wird eine Rechtsschraube herausgedreht.

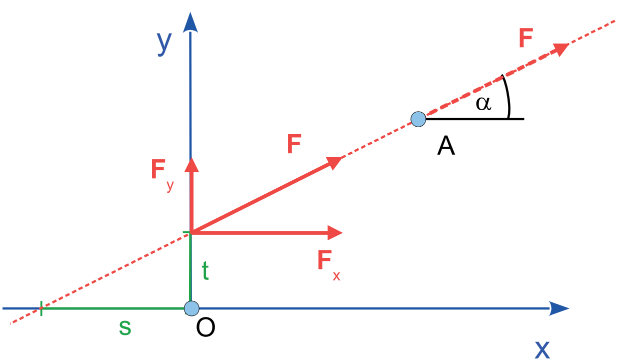

Bild 2.13: Drehmoment mit Achsenabschnitten

Bei ebenen Problemen lässt sich das Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprungs O als skalares Produkt aus seinen Kraftkomponenten F_x oder F_y mit den jeweiligen Achsenabschnitten s und t gemäß Bild 2.13 bestimmen.

Der Hebelarm muss bei einem Produkt mit zwei Skalaren senkrecht auf der Wirkungslinie stehen. Verschiebt man den Anfangspunkt A der Kraft auf der Wirkungslinie bist zur y-Achse ergibt sich das Moment zu

$$M_O = -F_x \cdot t. \qquad \text{Gl. (2.8)}$$

F_y hat in diesem Fall den Hebelarm 0 und liefert keinen Beitrag zum Drehmoment um den Punkt O (vgl. Bild 2.13).

Verschiebt man den Anfangspunkt A der Kraft dann weiter auf der Wirkungslinie bis zur x-Achse ergibt sich das Moment zu

$$M_O = F_y \cdot s. \qquad \text{Gl. (2.9)}$$

F_x hat in diesem Fall den Hebelarm 0 und s ist in Bild 2.13 negativ.

Für jeden allgemeinen Punkt A auf der Wirkungslinie ***w*** berechnet sich das Drehmoment um den Punkt B in Bild 2.14 zu

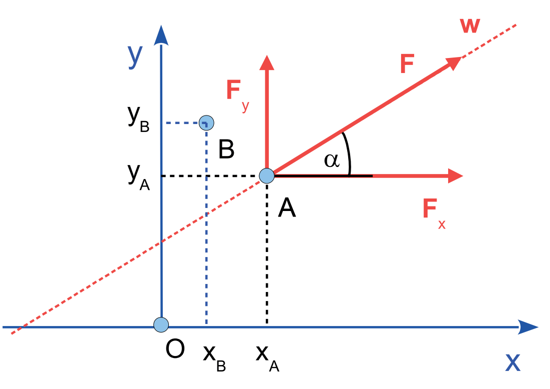

Bild 2.14: Drehmoment um einen beliebigen Punkt B

$$M_B = F_y \cdot (x_A - x_B) - F_x \cdot (y_A - y_B). \qquad \text{Gl. (2.10)}$$

Als Sonderfall berechnet sich das Drehmoment um den Ursprung O mit $x_B = y_B = 0$ zu

$$M_O = F_y \cdot x_A - F_x \cdot y_A. \qquad \text{Gl. (2.11)}$$

2.2.4 Kräftepaar

Sind zwei Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$, wie in Bild 2.15 dargestellt, vom Betrag gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen nicht auf identischen aber parallelen Wirkungslinien $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$, nennt man das System ein Kräftepaar. Bei den zwei Kräftepaaren $\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3 - \boldsymbol{F}_4$ heben sich jeweils alle Kraftkomponenten auf.

Das heißt, bei einem Kräftepaar verschwindet die resultierende Kraft. Wegen der um den Abstand a_2 versetzten Wirkungslinien verbleibt aber ein Drehmoment der Größe

$$M = |\boldsymbol{F}_1| \cdot a_2 = |\boldsymbol{F}_2| \cdot a_2. \qquad \text{Gl. (2.12)}$$

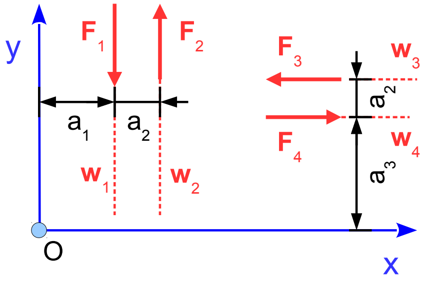

Bild 2.15: Kräftepaare

Verschiebt man ein Kräftepaar oder verdreht es, so übt es auf einen beliebigen Punkt immer das gleiche Drehmoment aus.

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist unabhängig vom Ort.

Es ist, im Gegensatz zu einer Kraft, ein freier Vektor.

Das Drehmoment ist nur vom Betrag der Kräfte und vom Abstand der Wirkungslinien abhängig. Wenn in Bild 2.15 $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}_3| = |\boldsymbol{F}_4|$ gilt, lässt sich zeigen, dass für das Drehmoment um den Punkt O Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} M_O &= -|\boldsymbol{F}_1| \cdot a_1 + |\boldsymbol{F}_2| \cdot (a_1 + a_2) \\ &= -|\boldsymbol{F}_2| \cdot a_1 + |\boldsymbol{F}_2| \cdot (a_1 + a_2) \\ &= |\boldsymbol{F}_2| \cdot a_2 = |\boldsymbol{F}_1| \cdot a_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} M_O &= -|\boldsymbol{F}_4| \cdot a_3 + |\boldsymbol{F}_3| \cdot (a_3 + a_2) \\ &= |\boldsymbol{F}_3| \cdot a_2 = |\boldsymbol{F}_4| \cdot a_2 = |\boldsymbol{F}_1| \cdot a_2. \end{aligned}$$