

Ekbert Hering ■ Karl-Heinz Modler (Hrsg.)

GRUNDWISSEN

14. Auflage

des Ingenieurs

Mathematik / Physik / Chemie / Elektrotechnik / Elektronik

Informatik und Kommunikationstechnik / Technische Mechanik

Strömungsmechanik / Thermodynamik / Konstruktionselemente

Konstruktionstechnik / Werkstofftechnik / Energietechnik

Fertigungstechnik / Fertigungssysteme / Fluidenergiemaschinen

Elektrische und elektronische Bauelemente / Messtechnik

Steuerungs- und Regelungstechnik / Antriebstechnik / Maschinendynamik

Simulationstechnik / Mechatronik / Adaptronik

Umwelttechnik / Betriebswirtschaftslehre



Fachbuchverlag Leipzig

Standardwerk
aktualisierte
Auflage

Ekbert Hering
Karl-Heinz Modler

**GRUNDWISSEN
des Ingenieurs**

Autoren und Mitarbeiter

- Dr.-Ing. *Thilo Bein*, Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit Darmstadt, Kap. 22
- Prof. Dr.-Ing. *Paul Beiss*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Kap. 11
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Wolfgang Bernstein* (†), Technische Universität Dresden, Kap. 12
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Hans-Christian Böttger*, Westsächsische Hochschule Zwickau, Kap. 13
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Elmar Breitbach*, DLR-Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik Braunschweig, Kap. 22
- Dipl.-Ing. *Klaus Bressler*, THALES ATM GmbH Korntal-Münchingen, Kap. 16
- Dipl.-Ing. *Rudolf Ehlers*, Fachhochschule Bielefeld, Kap. 21
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Reimar Frobin*, Westsächsische Hochschule Zwickau, Kap. 13
- Prof. Dr. rer. nat. *Rainer Gräf*, Hochschule Esslingen, Kap. 23
- Prof. Dr.-Ing. *Holger Hanselka*, Technische Universität Darmstadt, Kap. 22
- Prof. Dr.-Ing. habil. Prof. h. c. *Hans-Jürgen Hardtke*, Technische Universität Dresden, Kap. 6, 20
- Prof. Dr. *Alexander Haubrock*, Hochschule Aalen, Kap. 24
- Priv.-Doz. Dr.-Ing. *Winfried Heller*, Technische Universität Dresden, Kap. 7
- Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. *Ekbert Hering*, Hochschule Aalen, Kap. 9
- Dr.-Ing. *Barbara Hildebrandt*, Technische Universität Dresden, Kap. 6
- Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. *Günter Höhne*, Technische Universität Ilmenau, Kap. 10
- Dr. rer. nat. *Elke Junkert*, Technische Universität Dresden, Kap. 6
- Dipl.-Ing. *Karlheinz Kabus*, Berlin, Kap. 9
- Prof. Dr.-Ing. *Rolf Kademann*, Fachhochschule Merseburg, Kap. 14
- Dipl.-Ing. *Volker Krajenski*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Kap. 22
- Prof. Dr.-Ing. *Ulrich Kramer*, Fachhochschule Bielefeld, Kap. 21
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Hans-Joachim Kretzschmar*, Hochschule Zittau/Görlitz, Kap. 8
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Peter Langbein*, Fachhochschule Südwestfalen Iserlohn, Kap. 10
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Siegbert Liebig*, Technische Universität Dresden, Kap. 6, 20
- Prof. Dr.-Ing. *Jörg Linsler*, Hochschule Aalen, Kap. 19
- Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. *Rolf Martin*, Hochschule Esslingen, Kap. 2, 4
- Prof. Dr. *Eugen May*, Hochschule Aalen, Kap. 24
- Prof. Dr. rer. nat. *Richard Mohr*, Hochschule Esslingen, Kap. 1
- Dr. rer. nat. *Alwin Nagel*, Steinbeis-Transferzentrum Materials Engineering, Hochschule Aalen, Kap. 11
- Dr.-Ing. *Mihaela Neculau*, Fachhochschule Bielefeld, Kap. 21
- Dr.-Ing. *Dietrich Pawandenat*, Technische Universität Dresden, Kap. 20
- Prof. Dr. *Jürgen Reichel*, Hochschule Aalen, Kap. 24
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Werner Richter*, Döbeln, Kap. 17, 25
- Dipl.-Ing. *Shakoor Salih*, Fachhochschule Bielefeld, Kap. 21
- Prof. Dr. rer. nat. *Gerhard Schneider*, Robert Bosch GmbH Stuttgart, Kap. 11
- Dipl.-Ing. *Wolfgang Schulz*, Wave GmbH Stuttgart, Kapitel 3, 25
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Gerhard Sörgel*, Technische Universität Dresden, Kap. 15
- Prof. Dr.-Ing. *Heinrich Steinhart*, Hochschule Aalen, Kap. 18
- Dr.-Ing. *Ines Stöcker*, Hochschule Zittau/Görlitz, Kap. 8
- Prof. Dr.-Ing. *Manfred Strahlen*, Hochschule Ulm, Kap. 5
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Volker Ulbricht*, Technische Universität Dresden, Kap. 6
- Dipl.-Ing. *Alois Vogt*, Hochschule Aalen, Kap. 19
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Reiner Vollheim*, Technische Universität Dresden, Kap. 7
- Prof. Dr.-Ing. habil. *Gotthard Will*, Technische Universität Dresden, Kap. 15
- Dipl.-Ing. *Heiko Wohlgemuth*, Fachhochschule Merseburg, Kap. 14
- Prof. Dr.-Ing. *Hans Zellbeck*, Technische Universität Dresden, Kap. 15

GRUNDWISSEN des Ingenieurs

Herausgegeben von

Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Ekbert Hering
und

Prof. Dr. rer. nat. habil. Karl-Heinz Modler

14., aktualisierte Auflage

Mit 831 Bildern und 265 Tabellen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Herausgeber

Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. **Ekbert Hering**

Hochschule Aalen

Prof. Dr. rer. nat. habil. **Karl-Heinz Modler**

Technische Universität Dresden

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-22814-6

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für in diesem Werk genannte Gesetze, Normen (DIN, DIN EN, DIN ISO, VDI, VDE usw.) und Richtlinien sind die jeweils gültigen Fassungen mit dem neuesten Ausgabedatum zu beachten.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2007 Carl Hanser Verlag München

www.hanser.de

Projektleitung: Dipl.-Phys. Jochen Horn

Layout: Dipl.-Grafiker Matthias Dittmann, Mügeln

Zeichnungen: Peter Palm, Berlin (Kapitel 3, 4, 13, 15, 16, 19)

Herstellung: Renate Roßbach

Satz, Druck und Bindung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

Printed in Germany

Vorwort

Das „Grundwissen des Ingenieurs“ war in Ostdeutschland von 1959 bis 1990 das absolute Standardwerk für Ingenieurstudenten, für Lehrkräfte und für Ingenieure in der Praxis. Mit 12 Auflagen und 178 000 gedruckten Exemplaren fand dieses Standardwerk im In- und Ausland eine hohe Anerkennung. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts war es an der Zeit, eine *völlige Neubearbeitung* dieses Klassikers vorzunehmen. Damit soll an die früheren Erfolge dieses Buches angeknüpft und dieses Werk einer neuen Generation von Ingenieuren in Ausbildung und Beruf erschlossen werden. Die Herausgeber, die Autoren und der Verlag sind sich des hohen Anspruches bewusst. Deshalb wurde eine 13., völlig neu erarbeitete Auflage dieses Werkes geschrieben, das die ursprünglichen Erfolgsmerkmale beibehält und dennoch die Belange der modernen Ingenieurausbildung berücksichtigt. Nunmehr liegt das Werk in der 14. Auflage vor.

Angesprochen werden Ingenieure aller Fachrichtungen außer Bautechnik, vor allem aber Ingenieure des Maschinenbaus, der Verfahrenstechnik und der Feinwerktechnik.

Das Werk wurde in bewährter Weise für *Studenten und Lehrkräfte an Hochschulen* sowie für in der *Praxis tätige Ingenieure* entwickelt. Es enthält den dargebotenen Stoff in *verdichteter und übersichtlicher* Form. Deshalb wird eine *rationelle Wissensvermittlung* und eine *Vervollkommnung der Kenntnisse* ermöglicht. Die Darstellung in knapper, erläuternder Form – veranschaulicht durch zahlreiche Bilder, Tabellen und praktische Anwendungen – hilft, sicher und schnell Auskünfte über wichtige Einzelheiten und Zusammenhänge des Ingenieurwissens zu erlangen, regt zum Mitdenken an, schließt vorhandene Wissenslücken und ermöglicht eine rasche Umsetzung für die konkreten betrieblichen Problemstellungen.

In den ersten 5 Kapiteln werden die **Grundlagen der Ingenieurwissenschaften** behandelt: *Mathematik* (Kapitel 1), *Physik* (Kapitel 2), *Chemie* (Kapitel 3), *Elektrotechnik/Elektronik* (Kapitel 4) sowie *Informatik und Kommunikationstechnik* (Kapitel 5). Die nächsten drei Kapitel legen die **Grundlagen im Maschinenbau**: Es sind dies die *Technische Mechanik* (Kapitel 6), die *Strömungsmechanik* (Kapitel 7) und die *Thermodynamik* (Kapitel 8). In Kapitel 9 und 10 werden die *Konstruktionselemente* und die *Konstruktionstechnik* behandelt, in Kapitel 11 die *Werkstofftechnik* und in Kapitel 12 die *Energietechnik*. Mit der **Fertigung** beschäftigen sich Kapitel 13 (*Fertigungstechnik*) und Kapitel 14 (*Fertigungssysteme*). In Kapitel 15 werden die *Fluidenergiewmaschinen* behandelt. Da im Maschinenbau zunehmend die **Elektronik** und die **Messtechnik** eine wesentliche Rolle spielen, werden in den folgenden Kapiteln die Grundlagen zum Verständnis gelegt. Es sind dies die Kapitel über *Elektrische und elektronische Bauelemente* (Kapitel 16), *Messtechnik* (Kapitel 17), *Steuerungs- und Regelungstechnik* (Kapitel 18), *Antriebstechnik* (Kapitel 19) und *Maschinendynamik* (Kapitel 20). In allen Bereichen der Ingenieurwissenschaften wird die *Simulationstechnik* eingesetzt, die in Kapitel 21 vorgestellt wird. Dem modernen Bereich der *Mechatronik/Adaptronik* ist Kapitel 22 gewidmet. Alle Ingenieurwissenschaften müssen auf ihre **Umweltverträglichkeit** hin ausgelegt werden. Die dazu notwendigen Kenntnisse gibt Kapitel 23 (*Umwelttechnik*). Immer wichtiger werden für die Ingenieure die *betriebswirtschaftlichen Grundlagen*, wie sie in Kapitel 24 übersichtlich zusammengestellt sind. Der *Anhang* in Kapitel 25 stellt allgemeine, für alle Kapitel gültige Informationen bereit, vom griechischen Alphabet über die gesetzlichen SI-Einheiten bis zu den wichtigsten Abkürzungen (auch der new economy). Leider erlaubt es die Konzeption dieses Werkes nicht, alle Detailprobleme der Leser in der von ihnen gewünschten Tiefe zu beantworten. Deshalb wird in den einzelnen Kapiteln auf weiterführende Literatur verwiesen.

Den Herausgebern und dem Verlag ist es gelungen, namhafte Experten für die jeweiligen Fachgebiete zu gewinnen. Aus diesem Grunde haben an diesem Werk *Autoren* aus allen Bereichen der Hochschulen und allen Regionen der Bundesrepublik mitgearbeitet.

Dank deren Wissen und ihrer Bereitschaft, sich an die strukturierten Vorgaben zu halten, ist trotz der vielen individuellen Beiträge ein **in sich geschlossenes Werk** entstanden. Dafür gebührt allen Autoren ein herzliches Dankeschön. Die Herausgeber möchten es an dieser Stelle nicht versäumen, Herrn Dipl.-Phys. *Jochen Horn* vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag zu danken. Er hat mit Engagement, hohem Sachverstand und sympathischer Durchsetzungskraft die Qualität dieses Werkes maßgeblich bestimmt.

Wir wünschen unseren Lesern und uns, dass ihnen dieses Buch eine der wichtigsten Wissensquellen beim Lehren, Lernen und Problemlösen in der Praxis ist. Möge dieses Werk sehr schnell wieder den Spitzenplatz einnehmen, den es in der Vergangenheit hatte. Gern nehmen wir kritische Hinweise und Vorschläge zur weiteren Verbesserung entgegen.

Aalen, Dresden
März 2007

Ekbert Hering
Karl-Heinz Modler

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik	31
1.1	Zahlen	33
1.1.1	Reelle Zahlen	33
1.1.1.1	Aufbau des Zahlensystems	33
1.1.1.2	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	33
1.1.1.3	Mittelwerte	34
1.1.2	Komplexe Zahlen	34
1.1.2.1	Imaginäre Einheit, Darstellung komplexer Zahlen	34
1.1.2.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	35
1.1.2.3	Fundamentalsatz der Algebra	37
1.1.2.4	Darstellung harmonischer Schwingungen	37
1.1.3	Folgen	38
1.1.4	Reihen	39
1.1.5	Kombinatorik	39
1.2	Lineare Algebra	40
1.2.1	Lineare Gleichungssysteme	40
1.2.1.1	Gauß-Algorithmus	40
1.2.1.2	Numerische Probleme	41
1.2.2	Vektorrechnung	42
1.2.2.1	Vektoralgebra	43
1.2.2.2	Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt	44
1.2.2.3	Lineare Unabhängigkeit im \mathbb{R}^n	45
1.2.3	Determinanten	46
1.2.4	Matrizen	47
1.2.4.1	Lineare Abbildungen	47
1.2.4.2	Rechenregeln	48
1.2.4.3	Eigenwertprobleme	49
1.3	Funktionen einer reellen Veränderlichen	50
1.3.1	Funktionsbegriff	50
1.3.2	Grenzwert und Stetigkeit	51
1.3.3	Ableitung einer Funktion	53
1.3.3.1	Differenzialquotient	53
1.3.3.2	Extrema, Wendepunkte	55
1.3.3.3	Differenzial	56
1.3.3.4	Taylorentwicklung	56
1.3.3.5	Newton-Verfahren	57
1.3.3.6	Regel von de l'Hospital	58
1.3.4	Integralrechnung	59
1.3.4.1	Das bestimmte Integral	59
1.3.4.2	Stammfunktion, Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	60
1.3.4.3	Grundintegrale, Integrationsregeln	61
1.3.5	Elementare Funktionen	61
1.3.5.1	Rationale Funktionen	62
1.3.5.2	Wurzelfunktionen	64
1.3.5.3	Transzendente Funktionen	65

1.4 Funktionen mehrerer Variabler	68
1.4.1 Grafische Darstellung, Isoquanten (Höhenlinien)	68
1.4.2 Partielle Ableitungen	69
1.4.3 Richtungsableitung, Gradient	69
1.4.4 Tangentialebene, totales Differenzial	70
1.4.5 Extrema	70
1.4.6 Mehrfachintegrale	71
1.5 Vektoranalysis	73
1.5.1 Kurven im \mathbb{R}^2	73
1.5.2 Kurvenintegrale	74
1.5.3 Potenzial, Gradientenfeld	75
1.5.4 Divergenz, Rotation, Integralsätze	75
1.6 Differenzialgleichungen	76
1.6.1 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	77
1.6.2 Lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung	78
1.6.3 Systeme von Differenzialgleichungen	79
1.6.4 Numerische Verfahren	81
2 Physik	83
2.1 Einleitung, Stellung der Physik.	85
2.2 Mechanik	85
2.3 Akustik	86
2.3.1 Schallwellen.	87
2.3.1.1 Schallgeschwindigkeit	87
2.3.1.2 Schallfeldgrößen	88
2.3.1.3 Pegelmaße	92
2.3.2 Schallempfindung	93
2.3.3 Raumakustik	96
2.3.4 Körperschalldämmung	98
2.4 Optik	100
2.4.1 Geometrische Optik	100
2.4.1.1 Lichtstrahlen und Abbildung.	100
2.4.1.2 Reflexion.	101
2.4.1.3 Brechung.	102
2.4.1.4 Abbildung durch Linsen	102
2.4.1.5 Optische Instrumente	104
2.4.2 Wellenoptik	106
2.4.2.1 Interferenz	106
2.4.2.2 Beugung am Spalt.	109
2.4.2.3 Beugung am Gitter	111
2.4.3 Quantenoptik	111
2.4.3.1 Lichtquanten.	111
2.4.3.2 Emission und Absorption von Licht.	112
2.4.3.3 Laser	113
3 Chemie	115
3.1 Atombau und chemische Bindung	118
3.1.1 Atombau.	118
3.1.2 Periodensystem der Elemente	118

3.1.3	Chemische Bindung	121
3.1.3.1	Beschreibung der Bindungsarten	121
3.1.3.2	Intermolekulare Wechselwirkungen.	124
3.2	Chemische Reaktionen.	125
3.2.1	Stöchiometrie	125
3.2.2	Reaktionsenergie	126
3.2.3	Reaktionskinetik	127
3.2.4	Chemisches Gleichgewicht und Reaktionstypen	128
3.3	Analytische Chemie	130
3.3.1	Analysenverfahren	132
3.3.2	Probenahme	136
3.4	Umweltchemie.	136
3.4.1	Boden	136
3.4.2	Wasser	138
3.4.3	Atmosphäre	139
3.4.4	Umweltschadstoffe	140
4	Elektrotechnik/Elektronik	147
4.1	Grundgesetze und Definitionen	149
4.1.1	Ladung und Strom	149
4.1.2	Spannung und Potenzial	150
4.1.3	Ohm'sches Gesetz und Widerstand	151
4.1.4	Arbeit und Leistung	152
4.1.5	Kirchhoff'sche Gesetze	152
4.2	Gleichstromkreise	153
4.2.1	Spannungs- und Stromquellen.	153
4.2.2	Schaltungen von Widerständen	154
4.3	Elektrisches Feld	155
4.3.1	Feldbegriff.	155
4.3.2	Kapazität	156
4.3.3	Laden und Entladen von Kondensatoren	157
4.4	Magnetisches Feld	158
4.4.1	Feldbegriff.	158
4.4.2	Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld	159
4.4.3	Materie im Magnetfeld.	160
4.4.4	Magnetischer Kreis.	161
4.4.5	Elektromagnetische Induktion.	163
4.4.6	Selbstinduktion	164
4.4.7	Ein- und Ausschalten von Stromkreisen mit Spulen	165
4.5	Wechselstrom	166
4.5.1	Sinusförmige Wechselströme und -spannungen	166
4.5.2	Zeigerdiagramm	167
4.5.3	Wechselstromverhalten von Widerstand, Spule und Kondensator.	169
4.5.4	Transformator.	170
4.6	Drehstrom	171
4.7	Leitungsmechanismen	173
4.7.1	Elektrische Leitung in Metallen	173
4.7.2	Elektrische Leitung in Halbleitern	174

4.8	Elektronik	177
4.8.1	Übersicht über die Halbleiterelemente	177
4.8.2	Dioden	177
4.8.3	Transistoren	178
4.8.3.1	Bipolare Transistoren	178
4.8.3.2	Feldeffekttransistoren	179
4.8.4	Thyristoren	180
4.8.5	Integrierte Schaltungen	181
4.8.5.1	Analoge integrierte Schaltungen	182
4.8.5.2	Digitale integrierte Schaltungen	184
5	Informatik und Kommunikationstechnik	187
5.1	Informatik	189
5.1.1	Technische Informatik	190
5.1.1.1	Aufbau und Funktionsweise eines Computers	190
5.1.1.2	Mikroprozessor	190
5.1.1.3	Mikroprozessorarchitekturen und Spezialformen	193
5.1.1.4	Halbleiterspeicher	194
5.1.1.5	Ein-/Ausgabe-Einheiten	197
5.1.1.6	Massenspeicher- und Archivspeichergeräte	200
5.1.2	Betriebssysteme	200
5.1.2.1	Aufgaben und Struktur eines Betriebssystems	201
5.1.2.2	Klassifizierung von Betriebssystemen	202
5.1.3	Programmiersprachen und Datentypen	202
5.1.3.1	Klassifizierung von Programmiersprachen	203
5.1.3.2	Konzepte höherer Programmiersprachen	204
5.1.3.3	Datenstrukturen	205
5.1.4	Software-Engineering	206
5.1.4.1	Phasenmodell des Software-Entwicklungsprozesses	206
5.1.4.2	Methoden, Darstellungsformen, Werkzeuge	207
5.2	Kommunikationstechnik	208
5.2.1	Grundlagen der Kommunikationstechnik	209
5.2.1.1	Komponenten einer digitalen Nachrichtenübertragungsstrecke	209
5.2.1.2	Codierer/Decodierer	209
5.2.1.3	Modulator/Demodulator	210
5.2.1.4	Multiplexer/Demultiplexer	210
5.2.1.5	Übertragungsmedien	211
5.2.1.6	Paketübertragung	211
5.2.1.7	Das ISO/OSI-Referenzmodell	212
5.2.2	Datenfernübertragung in Telekommunikationsnetzen	213
5.2.2.1	Telekommunikationsnetze	213
5.2.2.2	Komponenten einer Datenfernübertragungsstrecke	214
5.2.2.3	Schnittstellenempfehlungen	214
5.2.3	Rechnernetze	215
5.2.3.1	Technologien, Parameter lokaler Rechnernetze	215
5.2.3.2	LAN-Kopplung: Erweiterung von Rechnernetzen	217
5.2.3.3	Internet	217

6	Technische Mechanik	221
6.1	Statik starrer Körper	223
6.1.1	Grundlagen	224
6.1.1.1	Kraft	224
6.1.1.2	Moment	225
6.1.1.3	Moment einer Kraft	225
6.1.1.4	Resultierende Kraft und resultierendes Moment	225
6.1.1.5	Gleichgewicht	226
6.1.1.6	Sonderfall des ebenen Systems	226
6.1.2	Linientragwerke	227
6.1.2.1	Ebene Linientragwerke	227
6.1.2.2	Räumliche Linientragwerke	229
6.1.3	Reibung	229
6.1.4	Schwerpunkt	230
6.1.4.1	Körperschwerpunkt	230
6.1.4.2	Flächen- und Linienschwerpunkt	230
6.1.5	Flächenmomente	232
6.2	Festigkeitslehre	234
6.2.1	Grundlagen	234
6.2.1.1	Spannungen	234
6.2.1.2	Verzerrungen	236
6.2.1.3	Linear elastisches Materialverhalten	237
6.2.2	Zug und Druck	238
6.2.3	Biegung	239
6.2.3.1	Biegespannungen	239
6.2.3.2	Biegeverformungen	240
6.2.4	Reine Torsion	244
6.2.5	Querkraftschub	246
6.2.6	Extremalprinzip	247
6.2.6.1	Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotenzials	247
6.2.6.2	Prinzip vom Minimum des elastischen Ergänzungspotenzials	248
6.2.7	Einführung in die Stabilitätstheorie	249
6.2.8	Rotationssymmetrische Spannungszustände	250
6.2.8.1	Kreis- und Kreisingenflächen	251
6.2.8.2	Kreis- und Kreisringplatten	251
6.2.9	Festigkeitshypothesen	253
6.2.10	Räumliches linear-elastisches Gesamtproblem	254
6.3	Kinematik	256
6.3.1	Kinematik des Punktes	256
6.3.1.1	Darstellung der Vektoren in verschiedenen Koordinatensystemen	256
6.3.1.2	Wichtige Sonderfälle	258
6.3.2	Kinematik des starren Körpers	259
6.3.2.1	Translation des starren Körpers	259
6.3.2.2	Rotation des starren Körpers	260
6.3.2.3	Zusammengesetzte Bewegung	260
6.3.3	Relativbewegung	261
6.4	Kinetik	261
6.4.1	Kinetik des Massenpunktes und des starren Körpers in der Ebene	262
6.4.1.1	Impulserhaltung	263

6.4.1.2	Arbeitssatz der Mechanik	263
6.4.1.3	Energiesatz der Mechanik	264
6.4.2	Kinetik des Massenpunktsystems	264
6.4.2.1	Schwerpunktsatz	264
6.4.2.2	Impulssatz	265
6.4.2.3	Arbeitssatz der Mechanik für das Massenpunktsystem	266
6.4.3	Kinetik des starren Körpers	266
6.4.3.1	Dynamische Kennwerte des starren Körpers	266
6.4.3.2	Drehimpulssatz	267
6.4.3.3	Schlussfolgerungen aus dem Drehimpulssatz	268
6.4.4	Aufstellen von Bewegungsgleichungen	269
6.4.4.1	D'Alembert'sches Prinzip	269
6.4.4.2	Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art	270
6.5	Schwingungen mechanischer Systeme	270
6.5.1	Kinematik der Schwingungen und Schwingungsanalyse	270
6.5.1.1	Harmonische Schwingungen	270
6.5.1.2	Periodische Schwingungen	271
6.5.1.3	Rechnergestützte Schwingungsanalyse	271
6.5.2	Verfahren der kleinen Schwingungen	272
6.5.3	Freie Schwingungen	273
6.5.3.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	273
6.5.3.2	Freie gedämpfte Schwingungen	273
6.5.4	Erzwungene Schwingungen	275
7	Strömungsmechanik	279
7.1	Einführung	281
7.1.1	Fluide	281
7.1.1.1	Fließeigenschaften der Flüssigkeiten und Gase	281
7.1.1.2	Zustandsgrößen, Stoffgrößen, Zustandsänderungen	282
7.1.1.3	Wandhaftung und Grenzflächenspannung	284
7.1.2	Strömungsfelder	284
7.1.2.1	Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung	284
7.1.2.2	Stromlinie, Bahnlinie und Streichlinie	285
7.1.2.3	Masse-, Impuls- und Energiefluss	285
7.1.2.4	Instabilität von Scherschichten	286
7.1.3	Hydro- und Aerostatik	286
7.1.3.1	Druckverteilungen	286
7.1.3.2	Auftrieb, Lagestabilität	287
7.2	Stromfadentheorie	288
7.2.1	Definitionen, Kontinuitätsgleichung	288
7.2.2	Bewegungsgleichung des reibungsfreien Stromfadens	289
7.2.2.1	Euler-Gleichung	289
7.2.2.2	Bernoulli-Gleichung inkompressibler Strömungen	290
7.2.3	Impulsgleichung	290
7.2.3.1	Integraler Impulssatz	290
7.2.3.2	Druckanstieg hinter einer plötzlichen Rohrerweiterung	292
7.2.3.3	Fördervorgang im Strahlapparat	293
7.2.3.4	Haltekraft eines Tragflügels	294
7.2.3.5	Wandkraft auf eine gekrümmte Düse	294

7.2.3.6	Haltekraft und Energiewandlung bei Propeller und Windrad	295
7.2.4	Energiesatz	296
7.2.4.1	Gesamtdruckverlust, Dissipation und Energieumwandlung.	296
7.2.4.2	Energiegleichung des stationären Stromfadens.	297
7.2.5	Drehimpuls, Turbinengleichung.	298
7.3	Inkompressible Strömungsfelder	299
7.3.1	Reibungsfreie inkompressible Strömungen	299
7.3.1.1	Strömungspotenzial, Stromfunktion.	299
7.3.1.2	Ebene inkompressible Potenzialströmungen	299
7.3.1.3	Räumliche inkompressible Potenzialströmungen	301
7.3.1.4	Beschleunigte Strömung, hydrodynamische Masse	302
7.3.1.5	Oberflächenwellen, Wellenwiderstand	303
7.3.2	Reibungsbehaftete Strömungen	304
7.3.2.1	Kontinuitätsgleichung, Bewegungsgleichung	304
7.3.2.2	Ähnlichkeitstheorie, Modellgesetze	306
7.3.2.3	Laminare Rohr- und Kanalströmung, Kugelumströmung	306
7.3.3	Strömungsgrenzschichten	307
7.4	Strömungsmechanisches Versuchswesen	309
7.4.1	Aufgabengebiete	309
7.4.2	Hydraulische Sonden.	309
7.4.3	Modellgesetze, Versuchsanlagen	310
7.5	Druckverlustbeiwerte	311
7.5.1	Rohrleitungen und Kanäle	311
7.5.1.1	Kreiszyklindrische Rohre	311
7.5.1.2	Kanäle von nicht kreisförmigen Querschnitten.	313
7.5.1.3	Kanäle mit freier Oberfläche.	314
7.5.2	Kanaleinbauten	314
7.5.2.1	Blenden, Siebgitter und Rohrbündel	314
7.5.2.2	Krümmen, Umlenkgeritter und Verzweigungen	316
7.5.2.3	Diffusoren	317
7.5.3	Durchflussregler	317
7.5.3.1	Drosselklappen und Schieber	317
7.5.3.2	Tellerventile	318
8	Thermodynamik	319
8.1	Zustandseigenschaften der Fluide	322
8.1.1	Temperatur	322
8.1.2	Druck	323
8.1.3	Druck-Temperatur-Verhalten der Fluide	323
8.1.4	Masse, Volumen und Dichte.	325
8.1.4.1	Zustandsverhalten – p, v -Diagramm	325
8.1.4.2	Flüssigkeit und überhitzter Dampf	325
8.1.4.3	Nassdampf – Zweiphasengemisch flüssig-gasförmig	327
8.1.5	Wärmekapazität und Isentropenexponent	328
8.1.5.1	Isochore und isobare Wärmekapazität	328
8.1.5.2	Isentropenexponent	330
8.1.6	Innere Energie und Enthalpie	330
8.1.6.1	Zustandsverhalten – h, s -Diagramm	330
8.1.6.2	Flüssigkeit und überhitzter Dampf	331

8.1.6.3	Nassdampf – Zweiphasengemisch flüssig-gasförmig	333
8.1.7	Entropie	334
8.1.7.1	Zustandsverhalten – T, s -Diagramm.	334
8.1.7.2	Flüssigkeit und überhitzter Dampf	334
8.1.7.3	Nassdampf – Zweiphasengemisch flüssig-gasförmig	336
8.1.8	Exergie.	336
8.2	Energiebilanz – 1. Hauptsatz der Thermodynamik	337
8.2.1	Irreversibilität und Reversibilität	337
8.2.2	Geschlossenes System	338
8.2.2.1	Aufstellen der Energiebilanz.	338
8.2.2.2	Volumenänderungsarbeit.	339
8.2.2.3	Kolbennutzarbeit	340
8.2.2.4	Dissipationsarbeit	340
8.2.2.5	Wärme	341
8.2.3	Offenes stationäres System	341
8.2.3.1	Aufstellen der Energiebilanz.	341
8.2.3.2	Technische Arbeitsleistung.	343
8.2.4	Allgemeine instationäre Energiebilanz	344
8.2.5	Berechnung der Änderungen von innerer Energie und Enthalpie	344
8.3	Entropiebilanz – 2. Hauptsatz der Thermodynamik	346
8.3.1	Geschlossenes System	346
8.3.2	Offenes stationäres System	347
8.3.3	Berechnung der Entropieänderungen	348
8.4	Exergiebilanz	350
8.4.1	Energie, Exergie und Anergie	350
8.4.2	Offenes stationäres System	351
8.4.3	Berechnung der Exergieänderungen	352
8.5	Einfache technische Prozesse	352
8.5.1	Fluide in geschlossenen Behältern	352
8.5.2	Fluide unter konstantem Druck	353
8.5.3	Mischung von Fluidströmen.	353
8.5.4	Übertragung von Wärme an Fluidströme.	355
8.5.5	Verdichten und Pumpen	356
8.5.6	Turbinenentspannung	357
9	Konstruktionselemente	365
9.1	Definition und Konstruktionsprozess	368
9.2	Maße, Toleranzen und Passungen	369
9.2.1	Normzahlen (NZ nach DIN 323)	369
9.2.2	Maße, Abmaße und Toleranzen	370
9.2.3	Passungen	372
9.2.4	Gestaltabweichungen von Oberflächen.	374
9.3	Nichtlösbare Verbindungen.	376
9.3.1	Schweißverbindungen	377
9.3.1.1	Schmelz-Schweißverbindungen	378
9.3.1.2	Press-Schweißverbindungen	388
9.3.2	Lötverbindungen	390
9.3.2.1	Lötverfahren.	391
9.3.2.2	Gestalten der Lötverbindungen	391

9.3.2.3	Berechnen der Lötverbindungen	392
9.3.3	Klebverbindungen	393
9.3.3.1	Klebeverfahren	393
9.3.3.2	Gestaltung der Klebverbindungen	393
9.3.3.3	Berechnung der Klebverbindungen	394
9.3.4	Nietverbindungen.	394
9.3.4.1	Nietformen und Nietverfahren	395
9.3.4.2	Berechnung der Nietverbindungen	395
9.3.5	Pressverbände	397
9.3.5.1	Pressverfahren und Gestaltung.	397
9.3.5.2	Berechnung zylindrischer Pressverbände	398
9.4	Lösbare Verbindungen	401
9.4.1	Befestigungsschrauben.	401
9.4.1.1	Gewinde	401
9.4.1.2	Werkstoffe und Korrosionsschutz	403
9.4.1.3	Ausführungen von Schrauben und Muttern.	403
9.4.1.4	Unterlegscheiben und Sicherungen	404
9.4.1.5	Kraftfluss	406
9.4.1.6	Beanspruchung und Verformung beim Anziehen	407
9.4.1.7	Kräfte und Haltbarkeit der Schraubenverbindungen.	409
9.4.2	Bewegungsschrauben	411
9.4.2.1	Gewinde und Werkstoffe.	411
9.4.2.2	Berechnungen	412
9.4.3	Bolzen- und Stiftverbindungen, Sicherungselemente	414
9.4.3.1	Definitionen und Ausführungen	414
9.4.3.2	Berechnungen	415
9.5	Elastische Verbindungselemente, Federn.	416
9.5.1	Grundlegende Zusammenhänge.	416
9.5.1.1	Federrate, Federarbeit, Schalten mehrerer Federn	416
9.5.1.2	Schwingverhalten	417
9.5.1.3	Zylindrische Schraubenfedern	418
9.5.1.4	Tellerfedern	418
9.5.1.5	Drehfedern.	420
9.5.1.6	Blattfedern.	421
9.5.1.7	Sonstige Metallfedern	422
9.5.1.8	Gummifedern	422
9.6	Drehbewegungselemente	423
9.6.1	Achsen und Wellen.	423
9.6.2	Lager.	428
9.6.2.1	Gleitlager	428
9.6.2.2	Wälzlager	432
9.6.3	Reibung und Schmierstoffe	433
9.6.3.1	Reibung	433
9.6.3.2	Schmierstoffe	433
9.6.3.3	Schmieröle.	434
9.6.3.4	Schmierfette	434
9.6.3.5	Festschmierstoffe	434
9.6.4	Welle-Nabe-Verbindungen	435
9.6.4.1	Längskeilverbindungen.	435

9.6.4.2	Passfederverbindungen	436
9.6.4.3	Keilwellenverbindungen	436
9.6.4.4	Zahnwellenverbindungen.	437
9.6.4.5	Polygonwellenverbindungen.	437
9.6.4.6	Kegelverbindungen	438
9.6.4.7	Spannelementverbindungen	438
9.6.4.8	Klemmverbindungen	439
9.6.4.9	Stirnzahnverbindungen	439
9.6.5	Wellenkupplungen und -bremsen	440
9.6.5.1	Starre Kupplungen	440
9.6.5.2	Formschlüssig nachgiebige, drehsteife Wellenkupplungen (Ausgleichskupplungen)	442
9.6.5.3	Formschlüssig nachgiebige, drehelastische Wellenkupplungen	443
9.6.5.4	Schlupfkupplungen	443
9.6.5.5	Formschlüssige Schaltkupplungen	444
9.6.5.6	Reibkupplungen als kraftschlüssige Schaltkupplungen	444
9.6.5.7	Fliehkraftkupplungen (drehzahlbetätigt) und Sicherheits- kupplungen (momentbetätigt)	445
9.6.5.8	Richtungsbetätigte Kupplungen als Freilaufkupplungen	445
9.6.5.9	Bremsen	445
9.6.6	Lager- und Wellendichtungen	446
9.6.6.1	Berührungsfreie Dichtungen	446
9.6.6.2	Schleifende Dichtungen	446
9.7	Zahnräder und Zahnradgetriebe	447
9.7.1	Grundlagen	447
9.7.1.1	Begriffe und Bezeichnungen.	447
9.7.1.2	Verzahnungsgesetz	449
9.7.1.3	Zykloidenverzahnung.	449
9.7.1.4	Evolventenverzahnung	450
9.7.2	Abmessungen, Geometrie und Tragfähigkeit von Stirn- und Kegelrädern	451
9.7.2.1	Abmessungen und Geometrie der Stirn- und Kegelräder	451
9.7.2.2	Tragfähigkeit der Stirn- und Kegelräder	452
9.7.3	Zahnradpaare mit sich kreuzenden Achsen	455
9.8	Hülltriebe	457
9.8.1	Kettentriebe	457
9.8.1.1	Arten von Ketten	458
9.8.1.2	Berechnung von Rollenketten	459
9.8.2	Riementriebe	460
9.8.2.1	Flachriementriebe.	460
9.8.2.2	Keilriementriebe	462
9.8.2.3	Zahnriementriebe	462
9.9	Führungselemente für Flüssigkeiten und Gase	463
9.9.1	Rohrleitungen	463
9.9.1.1	Grundlagen	464
9.9.1.2	Rohrarten, Rohrformstücke und Rohrverbindungen.	464
9.9.1.3	Darstellung und Berechnung von Rohrleitungen.	465
9.9.2	Armaturen	466

10 Konstruktionstechnik	469
10.1 Begriffe und Grundlagen	471
10.1.1 Eigenschaften technischer Produkte	471
10.1.2 Ablauf des konstruktiven Entwicklungsprozesses	476
10.1.2.1 Charakter des Konstruierens	476
10.1.2.2 Stadien und Phasen des konstruktiven Entwicklungsprozesses	479
10.1.3 Werkzeuge der Konstruktionstechnik	481
10.2 Konstruktionsmethoden	481
10.2.1 Elementare Methoden	482
10.2.2 Präzisieren von Konstruktionsaufgaben	484
10.2.2.1 Präzisieren der Prozessdaten	485
10.2.2.2 Präzisieren der Produktdaten	486
10.2.2.3 Festlegen der Aufgaben im Pflichtenheft	488
10.2.2.4 Methode der kunden- und wettbewerbsorientierten Produkt- und Qualitätsplanung – QFD (Quality Function Deployment)	490
10.2.3 Methoden zur Lösungsfindung	491
10.2.3.1 Ermitteln der Gesamtfunktion	491
10.2.3.2 Ermitteln von Verfahrensprinzipien und Funktionsstrukturen	492
10.2.3.3 Funktionsorientierte Auswahl aus Lösungskatalogen	494
10.2.3.4 Variation	495
10.2.3.5 Analogien	497
10.2.3.6 Ideenfindung	499
10.2.3.7 Wertanalyse	501
10.2.3.8 Kombination	502
10.2.4 Methoden zur Lösungsbewertung	505
10.2.4.1 Fehlerkritik	506
10.2.4.2 Bewertung	507
10.2.4.3 Bewertungsverfahren	509
10.3 Gestalten und Dimensionieren	512
10.3.1 Grundsätze	512
10.3.2 Vorgehen beim Gestalten	513
10.3.3 Dimensionieren	518
10.4 Produktdokumentation und Datentransfer	519
10.5 Schutz von Erfindungen	522
10.5.1 Patente	522
10.5.1.1 Erfindungsbeschreibung	523
10.5.1.2 Anmeldung, Prüfung und Erteilung	524
10.5.2 Gebrauchsmuster	524
10.5.3 Hinweise für Erfinder	525
11 Werkstofftechnik	527
11.1 Kristallbau und Gitterbaufehler	530
11.2 Thermisch aktivierte Prozesse	531
11.3 Werkstoffprüfung	532
11.3.1 Härteprüfung	532
11.3.2 Zugversuch	533
11.3.3 Biegeversuch	534
11.3.4 Zeitstandversuch	535
11.3.5 Schwingversuch	535

11.4 Eisen und Stahl	535
11.4.1 Grundlagen der Eisenwerkstoffe	536
11.4.2 Wärmebehandlung	539
11.4.3 Systematik der Stähle	543
11.4.4 Eisengusslegierungen	550
11.5 Nichteisenmetalle	552
11.5.1 Aluminiumlegierungen.	552
11.5.2 Magnesiumlegierungen	553
11.5.3 Nickellegierungen	554
11.5.4 Kupferlegierungen	555
11.6 Keramische Werkstoffe	556
11.6.1 Herstellung	556
11.6.2 Aufbau und Eigenschaften.	557
11.6.3 Eigenschaften und Anwendungen.	560
11.7 Kunststoffe.	562
11.7.1 Herstellung	562
11.7.2 Bezeichnung der Kunststoffe	562
11.7.3 Eigenschaften und Anwendungen.	563
11.8 Verbundwerkstoffe.	568
11.8.1 Faserverbundwerkstoffe	568
11.8.2 Metallmatrix-Verbundwerkstoffe (MMC)	569
11.8.3 Keramikmatrix-Verbundwerkstoffe (CMC)	571
11.9 Funktionswerkstoffe	571
11.9.1 Magnetwerkstoffe	571
11.9.2 Werkstoffe mit besonderen elektrischen Eigenschaften.	574
11.9.3 Halbleiter	576
11.10 Werkstoffe mit besonderen thermischen Eigenschaften	577
12 Energietechnik	579
12.1 Energietechnische Randbedingungen	583
12.2 Primärenergieträger	584
12.2.1 Fossile Brennstoffe.	584
12.2.2 Kernbrennstoffe.	586
12.2.3 Dampferzeuger für fossile Brennstoffe.	587
12.2.4 Energieumwandlung in der Brennkammer von Gasturbinenanlagen	591
12.3 Wärmefreisetzung und Dampferzeugung im Kernkraftwerk	592
12.3.1 Wärmefreisetzung durch Kernumwandlung	592
12.3.2 Dampferzeugung für den 2. Kreislauf eines KKW mit Druckwasserreaktor.	592
12.4 Verfahren und Anlagen der thermischen Energieumwandlung	594
12.4.1 Energetische Gasturbinenanlagen	594
12.4.2 Dampfkraftwerk	596
12.4.3 Gas- und Dampfturbinenkraftwerk (GuD).	602
12.5 Anlagen zur Umwandlung regenerativer Energien	604
12.5.1 Wasserkraftanlagen.	505
12.5.2 Windkraftanlagen.	606
12.5.3 Solarenergie.	608
12.5.4 Thermische Verwertung von Biomasse und Müll	609
12.5.5 Geothermische Kraftwerke	609

12.6	Zuverlässigkeit, Ökonomie und Ökologie	609
12.6.1	Zuverlässigkeit von Energieanlagen	609
12.6.2	Ökonomische Bewertung der Elektroenergieerzeugungsverfahren	611
12.6.3	Schadstoffe aus thermischen Energieanlagen und ihre Beeinflussung.	612
12.7	Zukünftige Entwicklungen in der Energietechnik	614
12.7.1	Dezentraler Bereich der Energieversorgung	614
12.7.2	Zentrale Energieversorgung	616
13	Fertigungstechnik	619
13.1	Einführung	621
13.1.1	Grundbegriffe und Definitionen.	621
13.1.2	Gliederung der Fertigungsverfahren	621
13.1.3	Gliederung des Fertigungsprozesses	622
13.2	Urformen	624
13.2.1	Verfahrensübersicht	624
13.2.2	Gießen mit verlorenen Formen	628
13.2.3	Gießen mit Dauerform	630
13.2.4	Pulvermetallurgische Teilefertigung (Pressen und Sintern)	631
13.3	Umformen	632
13.3.1	Grundbegriffe und Verfahrensübersicht	632
13.3.2	Grundlagen der Umformtechnik	635
13.3.3	Walzen.	640
13.3.4	Freiformen.	642
13.3.5	Gesenkformen.	642
13.3.6	Durchdrücken/Fließpressen	643
13.3.7	Tiefziehen	644
13.3.8	Zugumformen.	644
13.3.9	Biegen	645
13.4	Zerteilen	646
13.4.1	Verfahrensübersicht	646
13.4.2	Schneidvorgang.	647
13.4.3	Schneidverfahren	647
13.5	Spanen	649
13.5.1	Einführung, Verfahrensübersicht	649
13.5.2	Drehen	652
13.5.3	Bohren, Senken, Reiben	653
13.5.4	Fräsen	655
13.5.5	Hobeln, Stoßen, Räumen.	658
13.5.6	Schleifen.	659
13.5.7	Honen	661
13.5.8	Läppen.	662
13.6	Abtragen	663
13.6.1	Definition und Verfahrensübersicht.	663
13.6.2	Thermisches Abtragen	663
13.6.3	Chemisches Abtragen	664
13.6.4	Elektrochemisches Abtragen	664
13.7	Fügen	665
13.7.1	Verfahrensübersicht	665
13.7.2	Schweißvorgang und Grundbegriffe	666

13.7.3	Schmelzschweißverfahren	667
13.7.4	Pressschweißverfahren	669
13.8	Beschichten	669
13.8.1	Einführung, Verfahrensübersicht	669
13.8.2	Vakuumbeschichten	670
13.8.3	Galvanisieren	671
13.9	Stoffeigenschaftsändern	672
13.9.1	Verfahrensübersicht	672
13.9.2	Verfestigen durch Umformen	673
13.9.3	Wärmebehandeln	674
13.9.4	Thermomechanische Behandlung	675
14	Fertigungssysteme	677
14.1	Einleitung	679
14.2	Entwicklungstendenzen in der Fertigungstechnik.	680
14.2.1	Notwendigkeit der Fertigungsprozessoptimierung	680
14.2.2	Veränderungen der industriellen Randbedingungen.	680
14.2.3	Flexible Automation in der Fertigung	681
14.3	Voraussetzungen und Charakteristika des Einsatzes von Flexiblen Fertigungssystemen (FFS)	681
14.3.1	Voraussetzungen für den Einsatz von FFS	681
14.3.2	Einsatzcharakteristika für FFS.	682
14.4	Planungsgrundlagen für FFS.	684
14.5	Aufbau und Planung des FFS.	686
14.5.1	Hauptkomponenten des FFS.	686
14.5.2	Vorgehensweise und Hilfsmittel zur Planung der FFS-Hauptkomponenten	687
14.5.3	Varianten Flexibler Fertigungssysteme (FFS)	689
14.6	Das Maschinenkonzept im FFS.	694
14.6.1	Grundbaustein der flexiblen Automation.	694
14.6.2	Bearbeitungszentrum oder Flexible Fertigungszelle	694
14.6.2.1	Werkzeugmagazin und Werkzeugwechsel	695
14.6.2.2	Werkstückspeicher mit Wechseleinrichtung	696
14.6.2.3	Kühlmittelversorgung und Späneentsorgung	696
14.6.2.4	Automatische Messeinrichtung	697
14.6.2.5	Sonderausstattungen	698
14.6.3	Erforderliche Eigenschaften der Fertigungseinrichtung im FFS	698
14.6.4	Kriterien bei der Beschaffung der Fertigungseinrichtungen	699
14.7	Materialflusssystem im FFS	700
14.7.1	Werkzeugverwaltung.	700
14.7.2	Werkstücktransport.	703
14.8	Informationssystem im FFS.	706
14.8.1	Vorgehensweise und Hilfsmittel zur Planung des Informationssystems.	706
14.8.2	Steuerung von FFS	708
14.8.3	CNC-Steuerung eines FFS.	711
14.8.4	Programmierung im FFS.	712
14.8.4.1	Methoden zur Werkstückprogrammierung	713
14.8.4.2	Materialfluss-Programmierung	713
14.8.4.3	Werkzeugfluss- und Werkzeugdaten-Programmierung	715
14.8.4.4	Bearbeitungsablaufsimation	716

14.9 Flexible Montagesysteme (FMS)	716
14.9.1 Grundkomponenten des FMS	717
14.9.2 Aufgaben des FMS	719
14.9.3 Einsatzbedingungen für eine flexible Montage	719
14.9.4 Hauptkomponenten des FMS	719
14.9.4.1 Mechanische Grundelemente	719
14.9.4.2 FMS-internes Transportsystem	719
14.9.4.3 Materialfluss im FMS.	720
14.9.4.4 Handhabungstechnik im FMS	720
14.9.4.5 Aufgaben und Varianten der Steuerung im FMS.	722
14.9.4.6 Effektivitätsmerkmale für ein FMS	722
14.10 Qualitätssicherung in flexiblen Fertigungslösungen	722
14.10.1 Fertigungsmesstechnik.	722
14.10.2 Einsetzbare Messtechnik im FFS	723
14.10.3 Koordinatenmessgeräte im FFS	724
14.10.4 Steuerung und Programmierung systemintegrierter flexibler Qualitätssicherungs-lösungen	724
14.11 Personalbedarf für Planung und Betrieb eines FFS.	725
14.12 Bewertung von FFS	725
14.12.1 Bewertung in der Planungsphase	726
14.12.2 Bewertung in der Einsatzphase	727
14.13 Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen für FFS	728
14.13.1 Kapazitätsbetrachtungen	728
14.13.2 Effektivitätsbetrachtungen.	729
14.13.3 Reduzierung der Stillstandszeiten und anderer Nutzungsverluste	730
14.13.4 Besonderheiten der FFS-Installation im Zusammenhang mit der Fertigungssituation	730
14.14 Zusammenfassung und Ausblick.	732
15 Fluidenergiemaschinen	735
15.1 Charakterisierung und Einteilung der Fluidenergiemaschinen	738
15.2 Turbomaschinen	740
15.2.1 Turbokraftmaschinen.	740
15.2.1.1 Wasserturbinen	740
15.2.1.2 Windturbinen	742
15.2.1.3 Dampfturbinen	744
15.2.1.4 Gasturbinen	747
15.2.2 Turboarbeitsmaschinen	750
15.2.2.1 Kreiselpumpen	750
15.2.2.2 Turboverdichter	752
15.3 Kolbenmaschinen.	754
15.3.1 Kolbenkraftmaschinen	754
15.3.1.1 Verbrennungsmotoren	754
15.3.1.2 Kolbenentspannungsmaschinen	761
15.3.2 Kolbenarbeitsmaschinen.	762
15.3.2.1 Kolbenpumpen	762
15.3.2.2 Kolbenverdichter	763

16	Elektrische und Elektronische Bauelemente	767
16.1	Passive Bauelemente	769
16.1.1	Widerstände	769
16.1.1.1	Drahtwiderstände	769
16.1.1.2	Schichtwiderstände	770
16.1.1.3	Veränderbare Widerstände	771
16.1.1.4	Dehnungsmessstreifen (DMS)	771
16.1.1.5	Temperaturmesswiderstände	772
16.1.1.6	Heißeiter und Kaltleiter	773
16.1.1.7	Spannungsabhängige Widerstände	774
16.1.1.8	Magnetfeldabhängige Widerstände	774
16.1.1.9	Lichtabhängige Widerstände	774
16.1.2	Kondensatoren	774
16.1.2.1	Folienkondensatoren	775
16.1.2.2	Metall-Papier-Kondensatoren	775
16.1.2.3	Keramische Kondensatoren	776
16.1.2.4	Elektrolytkondensatoren	776
16.1.2.5	Sonderbauformen bei Kondensatoren	777
16.1.3	Induktivitäten	778
16.1.3.1	Luftspulen	778
16.1.3.2	Induktivität mit Eisenkern	778
16.1.3.3	Induktivität mit Ferritkern	779
16.1.3.4	Transformator	779
16.1.3.5	Leitung mit Ferritring	780
16.1.4	Entstörfilter	781
16.2	Halbleiterbauelemente	781
16.2.1	Dioden	781
16.2.1.1	Schaltdioden	782
16.2.1.2	Gleichrichterioden	782
16.2.1.3	Schnelle Leistungsdioden	783
16.2.1.4	Schottky-Leistungsdioden	783
16.2.1.5	Z-Dioden	783
16.2.1.6	Transzorbioden	784
16.2.1.7	Leuchtdioden	784
16.2.1.8	Fotodioden	784
16.2.1.9	Solarzellen	785
16.2.2	Bipolare Transistoren	785
16.2.2.1	Emitterschaltung	787
16.2.2.2	Kollektorschaltung	787
16.2.3	Feldeffekttransistoren (FET)	788
16.2.3.1	Kleinsignaltransistoren	789
16.2.3.2	Leistungs-FET	789
16.2.4	Thyristoren und Triacs	790
16.2.4.1	Thyristoren	790
16.2.4.2	Triacs	791
16.2.4.3	Phasenanschnittsteuerung und Schwingungspaketsteuerung	792
16.2.5	Analoge integrierte Schaltungen	792
16.2.5.1	Operationsverstärker (OPV)	793
16.2.5.2	Digital-Analog-Wandler (DA-Wandler)	795

16.2.5.3	Analog-Digital-Wandler (AD-Wandler)	795
16.2.6	Digitale integrierte Schaltungen	797
16.2.6.1	Logikschaltungen	797
16.2.6.2	Speicherschaltungen	799
16.3	Elektromechanische Bauteile und elektronische Alternativen	800
16.3.1	Schalter	800
16.3.2	Relais	801
16.3.2.1	Elektromechanische Relais	801
16.3.2.2	Halbleiterrelais	802
16.3.3	Schütze	803
16.3.3.1	Sicherheitsrelevante Teile	804
16.3.4	Sicherungen	804
16.3.4.1	Schmelzsicherungen	804
16.3.4.2	Überstromsicherung mit PTC	805
16.3.4.3	Thermosicherung	805
16.3.4.4	Sicherungsautomaten oder Leitungsschutzschalter	806
16.3.4.5	Fehlerstromschutzschalter	807
16.4	Galvanische Elemente	808
16.4.1	Primärelemente	809
16.4.2	Sekundärelemente	810
17	Messtechnik	813
17.1	Einführung	815
17.1.1	Wirtschaftliche Bedeutung	815
17.1.2	Informationsbeziehungen in Messprozessen	815
17.2	Grundbegriffe	816
17.2.1	Gegenstand der Messtechnik	816
17.2.2	Messtechnische Disziplinen, Aufgaben und Ziele	817
17.2.2.1	Bezeichnungen	818
17.2.2.2	Strategische Ziele	819
17.2.2.3	Messtechnische Handlungen und Einrichtungen	821
17.2.3	Größen und Einheiten	823
17.2.3.1	Größen	823
17.2.3.2	Einheiten	823
17.2.4	Messgrößenwandlung	825
17.2.5	Grundstrukturen	827
17.2.6	Weiterverarbeitung	830
17.2.7	Unifizierung und Schnittstellen	831
17.2.7.1	Aufgabenunifizierung	831
17.2.7.2	Schnittstellen	831
17.3	Signale	832
17.3.1	Signalmerkmale	832
17.3.2	Signalwandlung	833
17.3.3	Abtastung und Analog-Digital-Umsetzung	834
17.3.4	Einheitssignale	837
17.4	Kennfunktionen und Kennwerte	839
17.4.1	Statische Kennfunktionen und Kennwerte	839
17.4.2	Dynamische Kennfunktionen und Kennwerte	840
17.5	Messfehler	842

17.5.1 Fehlerdefinitionen	842
17.5.1.1 Statische Fehler	842
17.5.1.2 Dynamische Fehler	844
17.5.1.3 Fehlergrenzen, Fehlerklasse	845
17.5.1.4 Fehlerfortpflanzung	845
17.5.2 Vorbereitung und Auswertung von Messungen	846
17.6 Baugruppen	847
17.6.1 Sensoren	847
17.6.2 Weitere Baugruppen	851
18 Steuerungs- und Regelungstechnik	853
18.1 Einführung	856
18.1.1 Blockdarstellung von Funktionalbeziehungen	856
18.1.2 Klassifizierung von Systemen	856
18.1.2.1 Lineare zeitinvariante und zeitvariante Systeme	858
18.1.2.2 Nichtlineare Systeme	858
18.1.3 Linearisierung um den Arbeitspunkt	859
18.1.4 Steuerungen und Regelungen	860
18.1.5 Laplace-Transformation	861
18.1.5.1 Rechenregeln der Laplace-Transformation	863
18.1.5.2 Anwendung der Laplace-Transformation	863
18.1.6 Übertragungsfunktion	864
18.1.6.1 Wichtige Übertragungsglieder	865
18.1.6.2 Umformung eines Strukturbildes	868
18.1.7 Zustandsraumdarstellung von Systemen	869
18.1.8 Modellbildung einer Gleichstrommaschine	871
18.1.9 Modellbildung einer GM im Zustandsraum	872
18.1.10 Modellbildung einer mechanischen Welle	873
18.2 Reglerentwurf für lineare kontinuierliche Systeme	874
18.2.1 Regeleinrichtung	875
18.2.2 Reglertypen und Reglerparameter	876
18.2.3 Reglerbegrenzung	880
18.2.4 Stabilität von Systemen und Regelkreisen	881
18.2.5 Beurteilung von Regelkreisen	882
18.2.6 Reglereinstellung	883
18.2.6.1 Betragsoptimum	883
18.2.6.2 Symmetrisches Optimum	885
18.2.6.3 Empirische Reglereinstellung	886
18.2.7 Störgrößenaufschaltung	886
18.2.8 Kaskadenregelung	887
18.3 Zustandsraumregelung	888
18.3.1 Regelungsnormalform	889
18.3.2 Beobachtungsnormalform	890
18.3.3 Polvorgabe	890
18.3.4 Zustandsbeobachter	893
18.4 Abtastregelung	895
18.4.1 Aufbau einer Abtastregelung	895
18.4.1.1 Mathematische Beschreibung des Abtastthalteglieds	896
18.4.1.2 Z-Transformation	897

18.4.1.3	Rechenregeln der z -Transformation	898
18.4.1.4	Zeitdiskreter PID-Regler	899
18.4.2	Reglereinstellung	900
18.4.3	Beschreibung einer Regelung mit der z -Transformation	900
18.4.4	Stabilität	901
18.4.5	Kompensationsregler	902
19	Antriebstechnik	905
19.1	Elektrische Maschinen	908
19.1.1	Einführung und Zusammenfassung	908
19.1.1.1	Prinzipielles	908
19.1.1.2	Allgemeines über elektrische Antriebstechnik	908
19.1.2	Typen elektrischer Maschinen	909
19.1.2.1	Gleichstrommaschinen (GSM)	909
19.1.2.2	Asynchronmaschinen (ASM)	916
19.1.2.3	Synchronmaschinen (SM)	916
19.1.2.4	Linearmotor	917
19.1.3	Arbeitspunkt, Vierquadrantenbetrieb	917
19.1.4	Wirkungsgrad und Leistungsgrenzen	919
19.1.5	Dynamisches Verhalten, Hochlauf	919
19.1.5.1	Newton'sches Aktionsprinzip	919
19.1.5.2	Linearer Hochlauf (Rampen-Zeitfunktion)	920
19.1.5.3	Exponentieller Hochlauf	921
19.1.6	Thermodynamik, Erwärmung und Abkühlung	921
19.1.7	Normrichtlinien: Bauformen, Schutzarten, Kühlung und Isolation	923
19.1.7.1	Bauformen	923
19.1.7.2	Schutzarten, Schutzgrade	923
19.1.7.3	Kühlung	924
19.1.7.4	Isolation	924
19.2	Leistungselektronische Umrichter	925
19.2.1	Einleitung	925
19.2.2	Stromrichterschaltungen	926
19.2.2.1	Gleich-, Wechsel- und Umrichter	926
19.2.2.2	Zwischenkreis-Umrichter	926
19.2.2.3	Stromrichterspeisung für Synchron- und Asynchronmotoren	926
19.2.2.4	Der Pulsrichter mit Spannungs-Zwischenkreis	930
19.2.2.5	GTO-Stromrichter	931
19.2.2.6	Direktumrichter	933
19.2.2.7	Untersynchrone Stromrichtererkaskade für Schleifringläufer	933
19.2.2.8	Netzseitige Stromrichter	934
19.2.3	Projektierung	935
19.2.3.1	Nennleistung: vom Hersteller genannte Bemessungsleistung	935
19.2.3.2	Drehmoment	936
19.2.3.3	Drehzahlstellbereich	936
19.2.3.4	Umgebungsbedingungen	937
19.2.3.5	Netzbedingungen	938
19.2.4	Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit und Redundanz	938
19.2.4.1	Standardwerte zur Ausfall- und Verfügbarkeitsberechnung	938
19.2.4.2	Weitere Maßnahmen zur Erhöhung der Verfügbarkeit	939
19.2.5	Auswahlkriterien für Antriebssysteme	939

19.3	Hydraulische Antriebstechnik	941
19.3.1	Übersicht	941
19.3.2	Grundlagen	941
19.3.2.1	Druck	941
19.3.2.2	Hydraulische Energie	942
19.3.2.3	Hydraulische Leistung	942
19.3.2.4	Zusammenhang zwischen Druck- und Temperaturdifferenzen	942
19.3.2.5	Fluide und ihre Eigenschaften	943
19.3.2.6	Spalt- und Blendenströmungen	944
19.3.3	Bauelemente hydrostatischer Antriebe	945
19.3.3.1	Pumpen	945
19.3.3.2	Fluidmotoren	947
19.3.4	Ventile	947
19.3.5	Arbeitszylinder	948
19.3.6	Verbindungselemente	948
19.3.7	Dichtelemente	949
19.3.8	Hydrostatische Getriebe	949
19.3.9	Speicher	949
19.3.10	Bauelemente hydrodynamischer Antriebe	951
19.3.10.1	Hydrodynamische Kupplung	951
19.3.10.2	Hydrodynamische Bremse	953
19.3.10.3	Hydrodynamischer Drehmomentwandler	953
20	Maschinendynamik	955
20.1	Einleitung	957
20.2	Modellbildung und Parameterbestimmung	958
20.2.1	Modellbildung	958
20.2.2	Bewegungsgleichungen	958
20.2.3	Parameterbestimmung	960
20.3	Dynamik zwangsläufiger starrer Körper	961
20.4	Eigenwertproblem	962
20.5	Massenausgleich und Auswuchten	964
20.5.1	Freie Massenkräfte	964
20.5.2	Massenausgleich	964
20.5.3	Auswuchten von Rotoren	964
20.6	Schwingungsisoliertes Aufstellen von Maschinen	966
20.6.1	Aktive und passive Schwingungsisolierung	966
20.6.2	Abstimmung und Dämpfung	966
20.6.3	Eigenfrequenzen der elastisch gelagerten Maschine	969
20.7	Antriebsdynamik	970
20.7.1	Berechnungsmodelle	970
20.7.2	Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen	971
20.7.3	Systeme mit n Massen	972
20.8	Biegeschwingungen	972
20.8.1	Berechnung der Biegesteifigkeit	972
20.8.2	Biegeschwingung der einfach besetzten Welle mit Kreiselwirkung	973
20.8.3	Biegeschwingungen des Balkens mit n diskreten Punktmassen	975
20.8.4	Näherungsverfahren zur Abschätzung von Eigenfrequenzen	975
20.9	Mehrkörpersysteme	976

21	Simulationstechnik	979
21.1	Einführende Beispiele	982
21.1.1	Simulation bei der Entwicklung technischer Systeme	982
21.1.2	Simulation in der Fertigungsvorbereitung	983
21.1.3	Simulation beim Betreiben technischer Anlagen	985
21.1.4	Historische Entwicklung	986
21.2	Grundlagen der Simulationstechnik	986
21.2.1	Definitionen: Prozesse, Systeme, Modelle	987
21.2.2	Aufbau von Simulationsmodellen	988
21.2.3	Testen von Simulationsmodellen	990
21.2.4	Untersuchungsmethoden	991
21.3	Simulationsmodelle	992
21.3.1	Differenzenmodelle	994
21.3.2	Differenzialmodelle	996
21.3.3	Endliche Automaten	998
21.3.4	Petri-Netz-Modelle	998
21.4	Numerische Methoden	999
21.4.1	Zeitdiskretisierung	1000
21.4.2	Ortsdiskretisierung	1001
21.4.3	Finite-Elemente-Methode	1002
21.5	Beschreibung mit Graphen	1005
21.5.1	Signalflussgraphen	1005
21.5.2	Energieflussgraphen (Bondgraphen)	1007
21.5.3	Zustands- und Ereignisgraphen	1009
21.6	Anwendungsbereiche	1012
21.6.1	Ausbildung und Training	1012
21.6.2	Computer-Aided Engineering	1013
21.6.3	Hardware-in-the-Loop	1014
21.6.4	Man-in-the-Loop	1016
22	Mechatronik/Adaptronik	1019
22.1	Einführung in die Mechatronik und Adaptronik	1021
22.1.1	Mechatronik	1022
22.1.2	Adaptronik	1023
22.1.3	Vergleich von Mechatronik und Adaptronik	1024
22.1.4	Definition der Begriffe	1025
22.2	Aktor- und Sensorsysteme	1026
22.2.1	Funktionswerkstoffe	1026
22.2.1.1	Piezokeramiken	1027
22.2.1.2	Formgedächtnislegierungen	1032
22.2.1.3	Sonstige	1036
22.2.2	Multifunktionale Werkstoffsysteme	1038
22.2.3	Diskrete Aktoren	1040
22.2.3.1	Piezokeramische Stapelaktoren	1040
22.2.3.2	Piezokeramische Biegewandler	1044
22.3	Regelungstechnische Ansätze für adaptive Systeme	1045
22.3.1	Einführung	1045
22.3.2	System mit Rückkopplung	1046
22.3.3	System mit adaptiver Gegensteuerung	1048

22.4	Berechnungsverfahren	1049
22.4.1	Allgemein	1049
22.4.2	Bewegungsdifferentialgleichung für einen diskretisierten Balken mit aktiven Werkstoffen	1049
22.4.3	Aktor- und Sensorpositionierung	1052
22.4.4	Regelung mit proportionaler Rückführung	1054
22.5	Anwendungsbeispiele	1055
22.5.1	Adaptive Tilger und Kompensatoren	1055
22.5.2	Semiaktive Dämpfung	1056
22.5.3	Adaptive Lärmunterdrückung	1058
23	Umweltechnik	1061
23.1	Wasser-/Abwassertechnik	1066
23.1.1	Zusammenhänge der Abwasser- und Schadstoffentstehung	1066
23.1.2	Standzeitverlängerung des Wirkbades	1067
23.1.3	Verringerung der Ausschleppung von Wirkstoffen	1069
23.1.4	Wasser sparende Spültechnik	1070
23.1.4.1	Ziele der Spültechnik	1070
23.1.4.2	Spültechnik-Parameter	1071
23.1.4.3	Spülsystem-Typen und Berechnungen der Wassermengen	1072
23.1.4.4	Kreislaufführung von Spülwasser	1072
23.1.4.5	Vergleich unterschiedlicher Spülsysteme	1073
23.1.5	Rückführung von Ausschleppungen	1074
23.1.6	Abwasserbehandlung	1075
23.2	Umweltbereich Luft/Abluft	1076
23.2.1	Luftzusammensetzung und Luftverunreinigungen	1077
23.2.2	Auswirkungen von Luftverunreinigungen	1077
23.2.3	Begrenzung der Emission von Luftverunreinigungen	1078
23.2.3.1	Primärmaßnahmen	1078
23.2.3.2	Sekundärmaßnahmen	1079
23.3	Umweltbereich Boden/Abfall	1080
23.3.1	Grundsatz der Abfallwirtschaft	1081
23.3.2	Primärmaßnahmen zur Abfallvermeidung	1081
23.3.3	Sekundärmaßnahmen zur Stoffkreislaufschließung	1082
23.3.4	Beseitigung von Abfällen	1082
24	Betriebswirtschaftslehre	1085
24.1	Betriebliches Personalmanagement	1087
24.1.1	Einführung	1087
24.1.2	Personalentwicklung	1088
24.1.2.1	Grundlagen	1088
24.1.2.2	Qualifikation von Mitarbeitern	1088
24.1.2.3	Mitarbeiterbeurteilung	1089
24.1.3	Personalführung	1090
24.1.3.1	Grundlagen	1090
24.1.3.2	Motivation	1092
24.1.4	Personalbeschaffung	1093
24.1.4.1	Grundlagen	1093
24.1.4.2	Werbung und Auswahl von Mitarbeitern	1093

24.1.5	Personalorganisation	1095
24.1.5.1	Grundlagen	1096
24.1.5.2	Personalinformationssysteme (PIS)	1096
24.1.6	Entgeltpolitik	1097
24.1.6.1	Grundlagen	1097
24.1.6.2	Prämien	1097
24.2.	Marketing	1098
24.2.1	Sichtweisen des Marketings	1098
24.2.2	Marketing-Mix	1100
24.2.3	Marketingformen	1100
24.2.4	Marketingstrategien	1100
24.2.4.1	Strategische Ziele	1101
24.2.4.2	Marketing-Basisstrategien	1101
24.2.5	Preispolitik	1104
24.2.5.1	Kostenorientierte Preissetzung	1104
24.2.5.2	Kundenorientierte Preissetzung	1104
24.2.5.3	Konkurrenzorientierte Preissetzung	1105
24.2.5.4	Konditionenpolitik	1105
24.2.6	Produktpolitik	1106
24.2.6.1	Produkttypologien	1107
24.2.6.2	Produkthierarchien	1108
24.2.6.3	Produktlinie	1108
24.2.6.4	Produktmix	1108
24.2.6.5	Sortiment	1109
24.2.6.6	Produktlebenszyklus (PLZ)	1109
24.2.6.7	Die Marke	1110
24.2.7	Distributionspolitik	1111
24.2.7.1	Wahl der Vertriebskanäle	1112
24.2.8	Kommunikationspolitik und Ziele	1116
24.2.8.1	Der Kommunikationsprozess	1116
24.2.8.2	Instrumente der Absatzförderung	1117
24.2.9	Das Bilden von Marktsegmenten	1118
24.2.10	Die Wahl der Zielmärkte und der Positionierung	1119
24.3	Der Jahresabschluss	1119
24.3.1	Bilanz	1119
24.3.1.1	Bilanzarten	1120
24.3.1.2	Gliederung der Bilanz	1121
24.3.1.3	Bewertung in der Bilanz	1122
24.3.2	Gewinn- und Verlustrechnung (GuV-Rechnung)	1123
24.3.3	Anhang und Lagebericht	1125
24.4	Kosten- und Leistungsrechnung	1125
24.4.1	Grundlagen	1125
24.4.2	Grundbegriffe der Kostenrechnung	1126
24.4.3	Kostenartenrechnung	1127
24.4.4	Kostenstellenrechnung	1129
24.4.4.1	Bestimmung der Kostenstellen	1129
24.4.4.2	Betriebsabrechnungsbogen (BAB)	1129
24.4.5	Kostenträgerrechnung	1131
24.4.5.1	Divisionskalkulation	1131

24.4.5.2	Zuschlagskalkulation	1133
24.4.6	Kostenrechnungssysteme in der Praxis	1134
24.4.6.1	Ist- und Plankostenrechnung	1134
24.4.6.2	Zusammenhang Kostenarten-, Kostenstellen- und Kostenträgerrechnung	1134
24.4.6.3	Teilkostenrechnung (Deckungsbeitragsrechnung)	1135
24.5	Investitions- und Wirtschaftlichkeitsrechnung	1136
24.5.1	Statische Verfahren.	1136
24.5.1.1	Kostenvergleichsrechnung	1136
24.5.1.2	Gewinnvergleichsrechnung	1137
24.5.1.3	Rentabilitätsrechnung.	1137
24.5.1.4	Amortisationsrechnung.	1137
24.5.2	Dynamische Verfahren.	1138
24.5.2.1	Kapitalwertmethode	1138
24.5.2.2	Interne Zinsfuß-Methode.	1138
24.5.2.3	Annuitätenmethode	1138
24.6	Finanzierung	1139
24.6.1	Fremdfinanzierung	1140
24.6.1.1	Sicherheiten	1140
24.6.1.2	Kurzfristige Fremdfinanzierung	1140
24.6.1.3	Langfristige Fremdfinanzierung	1140
24.6.2	Innenfinanzierung	1141
24.6.2.1	Finanzierung aus Umsatzerlösen	1141
24.6.2.2	Finanzierung aus Kapitalfreisetzungen	1141
24.6.3	Beteiligungsfinanzierung	1142
24.6.3.1	Kapitalgesellschaften	1142
24.6.3.2	Personengesellschaften	1142
25	Anhang	1145
	Sachwortverzeichnis	1169

Mathematik

Prof. Dr. rer. nat. Richard Mohr
Hochschule Esslingen

1.1 Zahlen

Zahlbereiche

Bezeichnung	Definition	abgeschlossen bezüglich
natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	$+$, \cdot
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	$+$, \cdot , $-$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$	$+$, \cdot , $-$, $:$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{\text{unendliche Dezimalbrüche}\}$	$+$, \cdot , $-$, $:$; Grenzwerte
komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \end{array} \right\}$	$+$, \cdot , $-$, $:$; Grenzwerte algebraische Gleichungen

1.1.1 Reelle Zahlen

1.1.1.1 Aufbau des Zahlensystems

In der Menge der rationalen Zahlen sind alle „bürgerlichen“ Rechenoperationen $+$, $-$, \cdot , $:$ möglich. Rationale Zahlen lassen sich als endliche oder periodische Dezimalbrüche darstellen. Damit auch Grenzwertbildung uneingeschränkt möglich ist, muss man auch die nicht-periodischen, unendlichen Dezimalbrüche hinzunehmen und es ergibt sich \mathbb{R} . Mit reellen Zahlen kann der Computer nicht rechnen. Als Ersatz dient die endliche Teilmenge der Gleitpunktzahlen der Länge l zu einer Basis β , i. Allg. 2 (Dualzahlen) oder 16 (Hexadezimalzahlen). $d = \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_l \cdot \beta^n$; $0 \leq d_i < \beta$, $d_1 \neq 0$. Maschinenzahlen sind im Rechenbereich des Computers nicht gleichmäßig verteilt; sie häufen sich in der Nähe der Null.

1.1.1.2 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzgesetze: $a^0 = 1$; $1^\alpha = 1$; $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha; \quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

Wurzeln sind die Umkehrung der entsprechenden Potenzfunktion. Für $a > 0$ erklärt man

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b > 0 \text{ mit } b^n = a; \quad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \text{ falls } n \text{ ungerade}$$

Schreibt man $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$, so gelten dafür die obigen Potenzrechengesetze.

$$x^n = a \Rightarrow \begin{cases} n \text{ gerade} & \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & 2 \text{ reelle Lösungen } x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a} \\ a < 0 & \text{keine Lösung} \end{cases} \\ n \text{ ungerade} & \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & 1 \text{ reelle Lösung } x = \sqrt[n]{a} \\ a < 0 & 1 \text{ reelle Lösung } x = -\sqrt[n]{|a|} \end{cases} \end{cases}$$

Der Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ($a, b > 0$)

Es gilt: $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$, $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$, $\log(u^\alpha) = \alpha \cdot \log u$

1.1.1.3 Mittelwerte

gewichtetes arithmetisches Mittel

(Um aus den Prozentzahlen in den einzelnen Wahlbezirken den globalen Wert zu errechnen, müssen die Einzelergebnisse mit der Zahl der Wahlberechtigten gewichtet werden)

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad \alpha_i \text{ Gewichte}$$

geometrisches Mittel

(durchschnittliche Verzinsung bei verschiedenen Zinssätzen)

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

harmonisches Mittel

(mittlere Geschwindigkeit aus den Einzelgeschwindigkeiten bei gleichen Strecken)

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

quadratisches Mittel

(Beurteilung von Abweichungen vom Sollwert; Beurteilungskriterium bei Approximationsproblemen)

$$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

Für die verschiedenen Mittel gilt: $\min(x_i) \leq \bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q \leq \max(x_i)$

1.1.2 Komplexe Zahlen

Erweiterung von \mathbb{R} , damit algebraische Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösbar werden.

1.1.2.1 Imaginäre Einheit, Darstellung komplexer Zahlen

$$\mathbb{C} = \{a + j \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}; j^2 = -1\} \quad \text{Menge der komplexen Zahlen; } j \text{ imaginäre Einheit.}$$

Für $b = 0$ erhält man die reellen Zahlen; für $a = 0$ ergeben sich die rein imaginären Zahlen. Zur Darstellung von \mathbb{C} fasst man die komplexen Zahlen auf als reelle Zahlenpaare, die man als Vektoren in der x, y -Ebene darstellen kann.

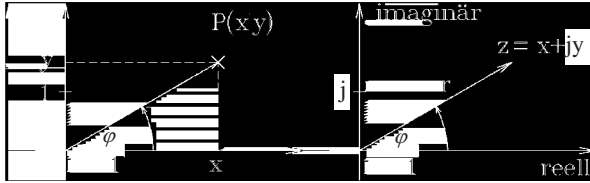


Bild 1.1 Komplexe Zahlenebene

$$P(x|y) \Leftrightarrow z = \underbrace{x + j \cdot y}_{\text{Komponentenform}} = \underbrace{r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)}_{\text{Trigonometrische Form}} = \underbrace{r \cdot e^{j\varphi}}_{\text{Exponentialform}}$$

$x = \text{Re}\{z\}$; $y = \text{Im}\{z\}$; $z^* = x - j \cdot y$ die zu $z = x + j \cdot y$ konjugiert komplexe Zahl.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{matrix}$$

Beispiel: $z = 1 + j \cdot \sqrt{3}$; $r = \sqrt{1 + 3} = 2$; $\tan \varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$; $z = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}$

Eigenschaften des Betrags komplexer Zahlen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)| = |r \cdot e^{j\varphi}| = r$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad z_2 \neq 0$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.1.2.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Gleichheit komplexer Zahlen

$$(x_1 + j \cdot y_1) = (x_2 + j \cdot y_2) \Leftrightarrow \{x_1 = x_2; y_1 = y_2\}$$

$$r_1 \cdot e^{j\varphi_1} = r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \Leftrightarrow \{r_1 = r_2; \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi\}$$

Beträge müssen übereinstimmen, die Winkel dürfen sich um $k \cdot 2\pi$ unterscheiden.

Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen erfolgt wie bei Vektoren komponentenweise.

$$(x_1 + j \cdot y_1) \pm (x_2 + j \cdot y_2) = (x_1 \pm x_2) + j \cdot (y_1 \pm y_2)$$

Grundgesetze der Addition übertragen sich von \mathbb{R} auf \mathbb{C} . Dagegen lässt sich auf \mathbb{C} keine Ordnungsrelation erklären. Ungleichungen haben in \mathbb{C} keinen Sinn!

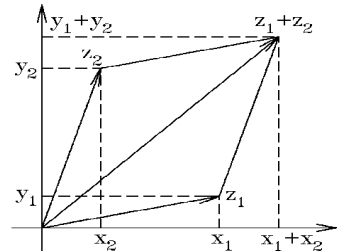


Bild 1.2 Addition in \mathbb{C}

Multiplikation und Division

Für die Komponentenform erhält man nach den üblichen Klammerregeln die Vorschrift:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 + j \cdot y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Bei der Division führt das Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl zu:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + j \cdot y_1}{x_2 + j \cdot y_2} = \frac{(x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 - j \cdot y_2)}{(x_2 + j \cdot y_2) \cdot (x_2 - j \cdot y_2)} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

In Exponentialform (Polarkoordinaten) ergibt sich (analog Potenzrechnung):

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Winkelargumente addieren!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{Beträge dividieren, Winkelargumente subtrahieren!}$$

$$z^k = (r \cdot e^{j\varphi})^k = r^k \cdot e^{j \cdot k \cdot \varphi} \quad \text{Beträge potenzieren, Winkelargumente mit } k \text{ multiplizieren!}$$

In \mathbb{C} gelten die gewohnten Regeln der Algebra (Ausnahme: Ungleichungen).

Wurzeln einer komplexen Zahl

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^n = w$; $\Rightarrow \underbrace{r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi}}_{= z^n} = \underbrace{\rho \cdot e^{j \cdot \alpha}}_{= w}$.

$$r^n = \rho \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho} > 0$$

Daraus folgt:

$$n\varphi_k = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Gleichung $z^n = w = \rho \cdot e^{j\alpha}$ hat genau n verschiedene Lösungen der Form:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{j \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{j \frac{\alpha}{n}} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Für $k=0$ erhält man $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{j \frac{\alpha}{n}}$. Die weiteren Werte z_1, z_2, \dots, z_{n-1} ergeben sich durch fortgesetztes Multiplizieren mit dem Drehfaktor $e^{j \cdot \frac{2\pi}{n}}$.

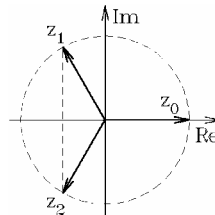
Beispiel: Alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ haben die Form $\varepsilon_n^k = e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{n}}$. Die Zahlen ε_n^k heißen n -te Einheitswurzeln. Sie bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks.

Für $n=3$ ergibt sich:

$$z_0 = \varepsilon_3^0 = 1$$

$$z_1 = \varepsilon_3^1 = e^{j \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot j$$

$$z_2 = \varepsilon_3^2 = e^{j \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot j$$



1.1.2.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jede ganzrationale Funktion (Polynom) vom Grad n mit reellen Koeffizienten

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n; \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

besitzt in \mathbb{C} genau n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen. Die Nullstellen sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex.

Für $n = 2$ ergibt sich die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$az^2 + bz + c = 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0 \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In Abhängigkeit von der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ergeben sich die Fälle:

1. $D > 0$: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ zwei verschiedene reelle Lösungen
2. $D = 0$: $z_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ eine doppelt zu zählende reelle Lösung
3. $D < 0$: $z_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ein Paar konjugiert komplexer Lösungen

Ist bei einer algebraischen Gleichung höherer Ordnung eine Nullstelle bekannt, so lässt sich die Problemstellung um eine Ordnung erniedrigen.

Beispiel: Die kubische Gleichung $z^3 + z - 10 = 0$ besitzt die Lösung $z_1 = 2$. Nach Abspaltung des Linearfaktors $(z - 2)$ erhält man eine quadratische Gleichung

$$(z^3 + z - 10) : (z - 2) = z^2 + 2z + 5 \quad \text{mit den Lösungen} \quad z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2j$$

1.1.2.4 Darstellung harmonischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen erhält man als Lösung der Schwingungsdifferenzialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$ in der Form $x(t) = C_1 \cos(\omega \cdot t) + C_2 \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

$A > 0$... Amplitude; φ ... Nullphasenwinkel: $x(0) = A \cdot \cos \varphi$

$\omega > 0$... Kreisfrequenz; $T = \frac{2\pi}{\omega}$... Schwingungsdauer

Man führt nun komplexe Ersatzgrößen ein, deren Realteil die harmonische Schwingung beschreibt.

$$z(t) = A \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = A \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot A \sin(\omega \cdot t + \varphi); \quad x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$$

$z(t)$ beschreibt in der komplexen Zahlenebene eine Kreisbahn. Man nennt

$$z_0 = z(0) = A e^{j\varphi}$$

den komplexen Amplitudenfaktor oder kurz: Zeiger der harmonischen Schwingung.

Der Zeiger z_0 enthält mit der Amplitude A und dem Nullphasenwinkel φ alle wesentlichen Größen der harmonischen Schwingung.

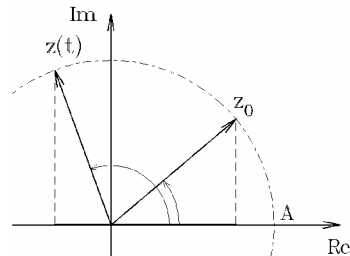


Bild 1.3 Zeigerdarstellung

Addition harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen ist mit reeller Rechnung (Additionstheoreme) recht mühsam. Mit Hilfe komplexer Zeigerdarstellung ergibt sich:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \leftrightarrow z_1(t) = A_1 e^{j(\omega \cdot t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \leftrightarrow z_2(t) = A_2 e^{j(\omega \cdot t + \varphi_2)} = A_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

Die Addition der beiden komplexen Ersatzgrößen liefert

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1(t) + z_2(t) \\ &= (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}) \cdot e^{j\omega \cdot t} \\ &= A e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega \cdot t} \end{aligned}$$

Den Zeiger der Überlagerung erhält man durch Addition der beiden Zeiger $z_1(0)$, $z_2(0)$.

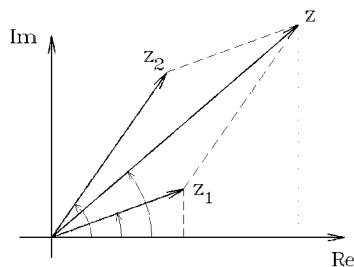


Bild 1.4 Zeigeraddition

Beispiel: Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Schwingungen

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega \cdot t)$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega \cdot t) = A_2 \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\text{mit } \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \tan \varphi = -\frac{A_2}{A_1} \end{cases}$$

Skizze für $A_1 > 0$, $A_2 > 0$

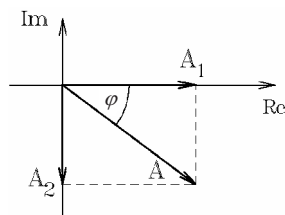


Bild 1.5 Sinusschwingung

1.1.3 Folgen

Unter einer Zahlenfolge versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die einer natürlichen Zahl i aus einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ eine reelle oder komplexe Zahl a_i zuordnet. Ist die Indexmenge mit \mathbb{N} identisch, so spricht man von einer unendlichen Folge. Beispiele:

$$\text{a) } \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}; \quad \text{b) } \{1, 3, 5, 7, \dots\}; \quad \text{c) } \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}; \quad \text{d) } \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

Die Folgenglieder der Beispiele a) und c) streben der Zahl 0 – ihrem Grenzwert – zu.

Eine unendliche Zahlenfolge $\{a_n\}$ konvergiert gegen a – symbolisch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ –, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

1.1.4 Reihen

Betrachtet werden Partialsummen (aufsummierte Folgen) der Bauart $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Bei speziellen Strukturen lässt sich diese Summe explizit darstellen.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\
 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n &= \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1
 \end{aligned}$$

Konvergiert die Folge $\{s_n\}$ gegen den Grenzwert s , so heißt die Reihe konvergent mit ihrer

$$\text{Summe } s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ gegen

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Durch Vergleich mit geometrischen Reihen ergeben sich die Konvergenzkriterien:

Existieren die Grenzwerte $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \rho$ bzw. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho$, dann ist die Reihe konvergent für $\rho < 1$. Sie divergiert für $\rho > 1$. Existieren die Grenzwerte nicht oder sind sie gleich 1, so kann die Konvergenzfrage mit diesem Kriterium nicht entschieden werden.

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}; \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1) \cdot 2^k}{k \cdot 2^{k+1}} \right| = \left| \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} \right| \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} \right)^k; \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^k}} = \left| \frac{2}{k} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

Bei alternierenden Reihen (Vorzeichen der Summanden wechseln) liegt bereits Konvergenz vor, wenn die Glieder $|a_k|$ monoton gegen 0 streben.

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots; |a_k| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

1.1.5 Kombinatorik

Die Grundaufgabe der Kombinatorik besteht darin, die Anzahl von Möglichkeiten bei Auswahlprozessen und Anordnungen zu bestimmen. Dabei sind zwei Gesichtspunkte zu beachten:

- Spielt beim Auswahlprozess die Reihenfolge eine Rolle? (geordnet – ungeordnet)
- Wird nach einer Auswahl der Originalzustand wiederhergestellt? (Zurücklegen?)

Die Zahl der Auswahlmöglichkeiten sind für diese Grundaufgaben (k Elemente aus n Elementen) in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
geordnet	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)$	n^k
ungeordnet	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Beispiele:

- Aus den Buchstaben $\{a, b, c, d, e\}$ kann man $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ verschiedene „Worte“ mit drei Buchstaben bilden. (geordnet; ohne Zurücklegen)
- Beim Zahlenlotto 6 aus 49 gibt es $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13938816$ Möglichkeiten. (ungeordnet; ohne Zurücklegen)
- Beim Fußballtoto werden die drei Symbole $\{0, 1, 2\}$ (für unentschieden; Heim- oder Gastmannschaft gewinnt) auf die 11 Spiele verteilt. Es gibt $3^{11} = 177147$ Möglichkeiten. (geordnet; mit Zurücklegen)
- Beim Dominospiel werden zwei der Symbole $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ je auf eine Hälfte des Steins verteilt. (Wiederholungen zugelassen!) Es gibt $\binom{7+2-1}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ verschiedene Steine. (ungeordnet; mit Zurücklegen)

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n\text{-mal}}$$

Beim Ausmultiplizieren entstehen Summanden der Bauart $a^k \cdot b^{n-k}$. Damit der Summand $a^k \cdot b^{n-k}$ entsteht, muss aus k Klammern a ausgewählt werden. Bei den übrigen Klammern ist dann b festgelegt. Hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Mit der Festlegung $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$ erhält man: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

1.2 Lineare Algebra

1.2.1 Lineare Gleichungssysteme

1.2.1.1 Gauß-Algorithmus

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen werden sukzessive Variable eliminiert. Man stellt eine gestaffelte Form her. Dabei sind folgende Äquivalenzumformungen erlaubt:

- Vertauschung zweier Gleichungen.
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Konstanten $c \neq 0$.
- Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.
- Vertauschung von Unbekannten (Vertauschung von Spalten).

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 = -2 & | \cdot (-1) & | \cdot (-2) \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & \leftarrow & \\
 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 & \leftarrow & \\
 \\
 x_1 + x_2 + x_3 = -2 & & x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\
 0 + x_2 - 2x_3 = 8 & | \cdot (-1) & 0 + x_2 - 2x_3 = 8 \\
 0 + x_2 - x_3 = 9 & \leftarrow & 0 + 0 + x_3 = 1
 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -13 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Der Informationsgehalt für das obige Beispiel steckt in den Koeffizienten der Unbekannten x_i und der „rechten Seite“ der Gleichungen. Fasst man diese Zahlen zu einer Matrix zusammen, so können die Äquivalenzumformungen daran vorgenommen werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Gauß'sches Eliminationsverfahren: Man erzeugt die gestaffelte Form durch systematisches Eliminieren der Unbekannten x_i . Die Position der Koeffizienten wird durch Doppelindizes festgelegt (1. Index: Zeilennummer; 2. Index: Spaltennummer)

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix wird nun so lange Äquivalenzumformungen unterworfen, bis die so genannte Normalform erreicht ist. Daran kann die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems und gegebenenfalls die Dimension der Lösung abgelesen werden.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} & p_{1r+1} & \dots & p_{1n} & q_1 \\ 0 & p_{22} & \dots & p_{2r} & p_{2r+1} & \dots & p_{2n} & q_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 & p_{rr} & p_{rr+1} & \dots & p_{rn} & q_r \\ & & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{r+1} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ & & & & & & & \vdots \end{array} \right)$$

Fallunterscheidungen:

- $q_{r+1} \neq 0$ Es existiert keine Lösung. (Widerspruch: $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = q_{r+1} \neq 0$)
- $q_{r+1} = 0$ Das System ist lösbar. Die Variablen $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ sind frei wählbar.
Man erhält eine $(n - r)$ -parametrische Lösung. (Spezialfall: $n = r$ ergibt eindeutige Lösung)

Gilt $b_k = 0$, d. h., steht auf der rechten Seite des Systems überall null, so nennt man das lineare Gleichungssystem homogen. Homogene Gleichungssysteme sind stets lösbar. Die triviale Lösung $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ist stets Lösung.

1.2.1.2 Numerische Probleme

Bei großen linearen Gleichungssystemen werden die Umformungen mit Hilfe eines Rechners durchgeführt. Die dabei benutzte Gleitkomma-Arithmetik führt zu Rundungsfehlern.

Das folgende Beispiel besitzt die exakte Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Gerechnet wird mit einer 5-stelligen Gleitkomma-Arithmetik, bei der nach der 5. Stelle abgeschnitten wird.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (0.3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (2500) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 0 & 1.5005 \cdot 10^4 & \underbrace{1.50025 \cdot 10^4 + 2.5}_{=1.5004} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1^c = -0.35000 \\ x_2^c = -1.5000 \\ x_3^c = 0.99993 \end{cases}$$

Die Ursache für die große Abweichung liegt im 2. Umformungsschritt – der Multiplikation mit 2500. Der verheerende Einfluss beim Abschneiden kann dadurch entscheidend verkleinert werden, dass man durch Umordnen des linearen Gleichungssystems versucht, die Multiplikation mit großen Faktoren zu vermeiden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-0.5) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (0.0004) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.002 & \underbrace{6.001 + 0.001}_{=6.002} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1^c = 0 \\ x_2^c = -1 \\ x_3^c = 1 \end{cases}$$

Man wird deshalb vor jedem Eliminationsschritt Zeilen und Spalten so vertauschen, dass der betragsmäßig größte Koeffizient in der linken oberen Ecke des Restschemas steht. Dieser Koeffizient heißt **Pivotelement**.

Nachiteration

Trotz optimaler Auswahl des Pivotelements entstehen beim Rechnen mit Gleitkomma-Arithmetik Rundungsfehler. Durch eine dem expliziten Verfahren angeschlossene Nachiteration lässt sich oft die Genauigkeit verbessern.

Es sei $\underline{x}^{(0)}$ eine mit Rundungsfehlern behaftete Lösung des Systems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit dem „Fehler“ $\underline{r}^{(1)} = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}^{(0)}$. Der Korrekturvektor $d\underline{x}^{(1)}$ wird nun so bestimmt, dass durch $\underline{x}^{(1)} = \underline{x}^{(0)} + d\underline{x}^{(1)}$ die lineare Gleichung „besser“ erfüllt ist.

$$\underline{A} \cdot (\underline{x}^{(0)} + d\underline{x}^{(1)}) = \underline{b} \Rightarrow \underline{A} \cdot d\underline{x}^{(1)} = \underline{d} - \underline{A} \cdot \underline{x}^{(0)} = \underline{r}^{(1)} \Rightarrow \underline{x}^{(1)} = \underline{x}^{(0)} + d\underline{x}^{(1)}$$

1.2.2 Vektorrechnung

Vektoren dienen zur übersichtlichen Darstellung.

Physikalische Größen wie Masse, Temperatur etc. sind nach gewählter Maßeinheit durch die Angabe einer Zahl eindeutig bestimmt (skalare Größen). Andere (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Drehmoment etc.) bedürfen zur eindeutigen Festlegung noch zusätzlicher Angaben über Richtung und Orientierung (vektorielle Größen). Die mathematische Präzisierung führt zum geometrisch eingeführten Vektorbegriff. Bezeichnung: \vec{a} , \overline{AB}

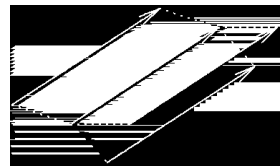


Bild 1.6 Vektoren

Ein Vektor ist eine gerichtete, orientierte Strecke im Raum. Dabei werden diejenigen Vektoren als gleich angesehen, die durch Parallelverschiebung ineinander übergehen.

1.2.2.1 Vektoralgebra

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen.

Nach dem Vorbild der Kräfteaddition erklärt man die Addition zweier Vektoren, ebenso die Multiplikation mit einem Skalar.

Zwei Vektoren werden addiert, indem man den Anfangspunkt des einen Vektors im Endpunkt des anderen Vektors anhängt. Der Vektor $-\vec{a}$ hat Betrag und Richtung von \vec{a} , aber die entgegengesetzte Orientierung. Unter $s\vec{a}$ versteht man einen Vektor, der mit dem Faktor s gestreckt wird. Bei negativem s wird zusätzlich die Orientierung umgedreht.

Die üblichen Rechenregeln der Algebra gelten auch hier:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= s\vec{a} + s\vec{b} \\ (s + t) \cdot \vec{a} &= s\vec{a} + t\vec{a} \end{aligned}$$

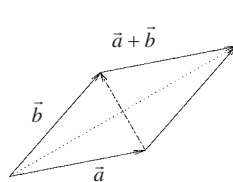


Bild 1.7 Addition, Subtraktion

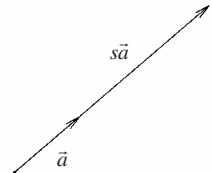


Bild 1.8 s-Multiplikation

Algebraisierung der Vektorrechnung

Der geometrische Vektorbegriff soll zahlenmäßig erfasst werden. Alle Vektoren im Raum können als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (Länge 1, paarweise orthogonal, Orientierung mit „Rechte-Hand-Regel“) dargestellt werden.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Die drei Zahlen a_1, a_2, a_3 bestimmen \vec{a} vollständig. Man identifiziert:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

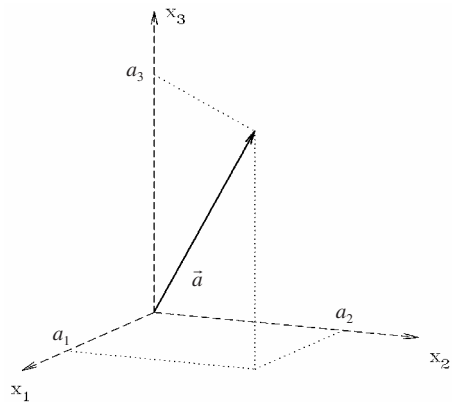


Bild 1.9 Koordinatensystem

Die Grundrechenoperationen übertragen sich auf die Komponenten. Für die Länge gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.2.2.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt

1. Skalarprodukt

Unter dem Skalarprodukt von \vec{a} und \vec{b} versteht man das Produkt aus den Beträgen multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

Physikalisches Vorbild: Arbeit, die längs einer Strecke \vec{s} von der Kraft \vec{F} geleistet wird:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) &\neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{aligned}(1) & \vec{a} = \vec{0} \text{ oder} \\ (2) & \vec{b} = \vec{0} \text{ oder} \\ (3) & \vec{a} \text{ senkrecht zu } \vec{b}\end{aligned}$$

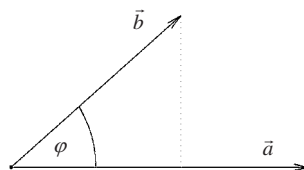


Bild 1.10 Skalarprodukt

In Koordinatendarstellung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Aus den Koordinaten der Vektoren kann der eingeschlossene Winkel bestimmt werden:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

2. Vektorprodukt

Das mit $\vec{a} \times \vec{b}$ bezeichnete Vektorprodukt (Kreuzprodukt) steht senkrecht auf den Vektoren \vec{a} und \vec{b} , bildet in der Reihenfolge $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem und hat den Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$ mit $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Bewegt sich eine elektrische Ladung im Magnetfeld, so wirkt auf diese eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des Magnetfeldes. Dabei ist der Anteil des Magnetfeldes relevant, der senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &\neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{aligned}(1) & \vec{a} = \vec{0} \text{ oder} \\ (2) & \vec{b} = \vec{0} \text{ oder} \\ (3) & \vec{a} \text{ parallel zu } \vec{b}\end{aligned}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ kann als die von den Vektoren \vec{a}, \vec{b} aufgespannte Parallelogrammfläche interpretiert werden.

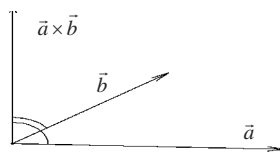


Bild 1.11 Vektorprodukt

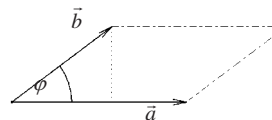


Bild 1.12 $|\vec{a} \times \vec{b}|$

In Koordinatendarstellung:
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Merkregel mit „Determinantenschema“:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Spatprodukt

Das Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ dreier Vektoren ist definiert durch: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1 \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 \cdot (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Dies bedeutet ein Hintereinanderausführen von Vektor- und Skalarprodukt. Es kann gedeutet werden als Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats.

Merkregel mit „Determinantenschreibweise“:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

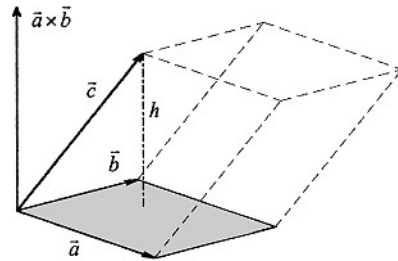


Bild 1.13 Spatprodukt

1.2.2.3 Lineare Unabhängigkeit im \mathbb{R}^n

Vektoren werden algebraisch als geordnete n -Tupel erfasst. Damit ist eine Verallgemeinerung auf mehr als drei Dimensionen möglich. (Im Folgenden fett gekennzeichnet!) Addition, Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar sind ebenfalls erklärt. Von den im \mathbb{R}^3 erklärten Produkten ist nur das Skalarprodukt auf den \mathbb{R}^n übertragbar.

Beispiel: Fasst man die Preise für n Artikel zu einem Preisvektor \mathbf{P} , die Bestellmengen zu einem Vektor \mathbf{M} zusammen, so ergibt sich für Wert der Bestellung das Skalarprodukt $\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$.

Lässt sich bei einer vorgegebenen Menge von Vektoren keiner dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellen, so nennt man diese Vektoren linear unabhängig.

Eine Menge von Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ heißt linear unabhängig, wenn aus der Beziehung $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \vec{0}$ stets folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Übertragen in die Theorie linearer Gleichungssysteme bedeutet dies, dass das homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt.

$$\begin{array}{r} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1k}\lambda_k = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2k}\lambda_k = 0 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{array} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Sind im Anschauungsraum $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig, so ist ihr Spatprodukt null:

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

1.2.3 Determinanten

Die Determinante ordnet einem quadratischen Zahlenschema eine reelle Zahl zu. Dieser Wert ist genau dann null, wenn die Spaltenvektoren linear abhängig sind.

$$n = 2: \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$n = 3$: 3 Vektoren liegen in einer Ebene, d. h. sind linear abhängig, wenn $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$$

$$a_{11} \cdot \underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}_{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - a_{12} \cdot \underbrace{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}_{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} + a_{13} \cdot \underbrace{(a_{21}a_{31} - a_{22}a_{31})}_{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Determinanten höherer Ordnung lassen sich analog zum Fall $n = 3$ mittels „Entwickeln“ berechnen. Werden in der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + & \dots & - & + \\ - & + & - & \dots & + & - \\ + & - & + & \dots & - & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ - & + & - & \dots & + & - \\ + & - & + & \dots & - & + \end{vmatrix}$$

die i -te Zeile und die k -te Spalte gestrichen, so entsteht die Unterdeterminante D_{ik} mit $(n-1)$ Zeilen und Spalten. Die Ausgangsdeterminante lässt sich dann als Summe der Produkte von Elementen der gestrichenen Spalte bzw. Zeile mit den zugehörigen Unterdeterminanten darstellen. Das Vorzeichen wird mit der „Schachbrettregel“ festgelegt.

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot D_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \cdot D_{in} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot D_{ij} \\ &= (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot D_{1k} + \dots + (-1)^{n+k} a_{nk} \cdot D_{nk} = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \cdot D_{lk} \end{aligned}$$

Die im Falle $n = 3$ am Spatprodukt geometrisch nachvollziehbaren Eigenschaften übertragen sich auch auf Determinanten höherer Ordnung.

Die Determinanten sind linear in allen Argumenten, d. h., es gilt:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \alpha \cdot \mathbf{a}_{k_1} + \beta \cdot \mathbf{a}_{k_2}, \dots, \mathbf{a}_n) = \alpha \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_n) + \beta \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k_2}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Neben der zentralen Eigenschaft $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ linear abhängig gilt weiter:

- Werden alle Zeilen mit den entsprechenden Spalten miteinander vertauscht, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
- Werden zwei Spalten (Zeilen) miteinander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen.
- Wird zu einer Spalte (Zeile) das Vielfache einer anderen Spalte (Zeile) addiert, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
- Haben die Elemente einer Spalte (Zeile) einen gemeinsamen Faktor, so darf er vor die Determinante gezogen werden.

Obige Eigenschaften ermöglichen es analog zum Gauß-Algorithmus, obere bzw. untere Dreiecksform herzustellen. Dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalglieder.

1.2.4 Matrizen

Lineare Zusammenhänge zwischen mehrdimensionalen Größen (z.B. Winkelgeschwindigkeit – Drehimpuls) lassen sich mit Hilfe der Matrizenrechnung übersichtlich darstellen.

1.2.4.1 Lineare Abbildungen

Das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ y_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{aligned}$$

kann als Abbildung \mathbf{A} des \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 interpretiert werden. Fasst man die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen, so ergibt sich formal die nebenstehende Beziehung, wenn man vereinbart, dass sich die i -te Komponente des Bildvektors \vec{y} als $y_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2$ Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors mit \vec{x} errechnet.

Diese Konzeption lässt sich auf beliebige Vektorräume verallgemeinern. Eine Matrix vom Typ $A_{(m,n)}$ mit m Zeilen und n Spalten beschreibt eine Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \text{ausführlich:} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \text{mit } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j; i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Die Spalten der Matrix lassen sich als Bilder der Einheitsvektoren deuten. Werden zwei lineare Abbildungen \mathbf{A}, \mathbf{B} hintereinander ausgeführt, so erhält man wieder eine lineare Abbildung. Die Produktmatrix \mathbf{BA} beschreibt die Gesamtabbildung.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \mathbf{z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p; \mathbf{z} = \mathbf{BA} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{BA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Die Koeffizienten der Produktmatrix $C = BA$ (p Zeilen, n Spalten) erhält man durch Ineinander einsetzen der Abbildungsgleichungen.

$$c_{ik} = b_{i1} \cdot a_{1k} + b_{i2} \cdot a_{2k} + \dots + b_{im} \cdot a_{mk} = \sum_{j=1}^m b_{ij} \cdot a_{jk}; \quad i=1, 2, \dots, p, \quad k=1, 2, \dots, n$$

c_{ik} ergibt sich als Skalarprodukt der i -ten Zeile von B mit der k -ten Spalte von A .

Ordnet man die Matrizen im nebenstehenden Falk-Schema an, so lassen sich die Skalarprodukte der Zeilenvektoren von B mit den Spaltenvektoren von A wie folgt deuten: Die Elemente von C ergeben sich dadurch, dass man die in derselben Zeile stehenden Zeilenvektoren von B mit den in der entsprechenden Spalte stehenden Spaltenvektoren von A multipliziert.	$C = BA$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qm} \end{pmatrix}$

Das Produkt von Matrizen ist nur in solchen Fällen erklärt, bei denen die Anzahl der Spalten von B mit der Anzahl der Zeilen von A übereinstimmt. Die Multiplikation von Matrizen ist i. Allg. nicht kommutativ, d. h., das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Faktoren ab.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Koordinatentransformation

Drehungen und Spiegelungen eines Koordinatensystems lassen sich ebenfalls als Matrizenmultiplikation darstellen. Abstandserhaltende Abbildungen im \mathbb{R}^2 sind:

$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ Drehung um Winkel φ ; $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ Spiegelung um die Gerade $y = x \cdot \tan \varphi$

1.2.4.2 Rechenregeln

Die lineare Rechenoperationen für Vektoren lassen sich auch auf Matrizen übertragen. Addition, Subtraktion für Matrizen desselben Typs sowie die Multiplikation mit einem Skalar werden wieder komponentenweise erklärt.

$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$ bzw. $C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ik} = \lambda a_{ik}$

Es gelten – soweit die Rechenoperationen definiert sind – folgende Gesetzmäßigkeiten:

$A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$; $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
 $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$; $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Die transponierte Matrix A^T geht aus der Matrix A hervor, indem man deren Spalten und Zeilen vertauscht.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Rang einer Matrix

Die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren nennt man Rang einer Matrix. Der Rang ist invariant gegenüber elementaren Umformungen. Er kann deshalb z. B. am Schluss des Gauß'schen Algorithmus abgelesen werden.

Inverse Matrix

Besitzt eine quadratische Matrix $\mathbf{A}_{(n,n)}$ den Rang n , d. h., sind alle Spaltenvektoren linear unabhängig, so existiert die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} . Ein weiteres Kennzeichen für vollen Rang ist $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Ist \mathbf{E} die Einheitsmatrix, so gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Die inverse Matrix ergibt sich als Lösung von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$. Beispiel für $n = 3$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\cong \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\cong \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -5 & 3 & & & \\ 2 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Bei einer Orthonormalmatrix sind alle Spaltenvektoren paarweise zueinander orthogonal und besitzen die Länge 1. (Beispiel: Transformationsmatrizen \mathbf{K} , die rechtwinklige Koordinatensysteme ineinander überführen.) Die inverse Matrix ist in diesem Fall mit der transponierten Matrix identisch. $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^T$.

1.2.4.3 Eigenwertprobleme

Bei bekannter Trägheitsmatrix interessiert die Richtung der Drehachse, für die der Drehimpuls dieselbe Richtung hat. Dies führt auf das Eigenwertproblem.

Gesucht ist eine Zahl λ und ein Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Die Zahl λ heißt Eigenwert, der Vektor \mathbf{x} Eigenvektor.

Um nichttriviale Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems zu erhalten, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich null sein, d. h., die Spaltenvektoren müssen linear abhängig sein.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}; \text{ mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

Die Lösung der obigen algebraischen Gleichung ergibt die Eigenwerte λ_i . Die zugehörigen Eigenvektoren erhält man als Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Ist die Ausgangsmatrix symmetrisch, d. h., gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, so können stets n linear unabhängige Eigenvektoren bestimmt werden, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wählt man diese als neue Basisvektoren, so stellt sich die Matrix \mathbf{A} im neuen Koordinatensystem als Diagonalmatrix dar. Bei nichtsymmetrischen Matrizen ist dies nicht gewährleistet.

Beispiel: An den Ecken eines Würfels mit der Kantenlänge 1 sei jeweils die Masse 1 befestigt. Man erhält den Zusammenhang:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J} \cdot \omega \quad \begin{array}{l} \omega: \text{ Winkelgeschwindigkeit} \\ \mathbf{J}: \text{ Trägheitsmatrix} \\ \mathbf{L}: \text{ Drehimpuls} \end{array}$$

Für die charakteristische Gleichung ergibt sich nach Zerlegung in Faktoren:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 180\lambda + 400 = -(\lambda - 4) \cdot (\lambda - 10)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4; \lambda_{2,3} = 10.$ Die Eigenvektoren bestimmen sich zu:

$$\underline{\lambda_1 = 4} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{j}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_1 = 10} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{j}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{j}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wählt man die Richtungen $\{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ als neues Koordinatensystem (\mathbf{j}_i sind zu normieren!), so ergibt sich die Transformationsvorschrift:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{L}} \\ \omega = \mathbf{K} \cdot \tilde{\omega} \end{array}$$

Im neuen Koordinatensystem stellt sich der ursprüngliche Zusammenhang wie folgt dar:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} \cdot \omega \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{\omega} \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}} = \underbrace{\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}}_{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\omega} = \mathbf{D} \cdot \tilde{\omega}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1.3 Funktionen einer reellen Veränderlichen

Hängt eine Größe, die durch eine reelle Zahl charakterisiert wird, eindeutig von einer anderen ab, so spricht man von einem funktionalen Zusammenhang.

1.3.1 Funktionsbegriff

Wird jedem Element x aus einer gegebenen Menge D (Definitionsbereich) von reellen Zahlen genau eine Zahl y aus einer Menge W (Wertebereich) zugeordnet, so nennt man y eine Funktion von x : $y = f(x)$.

Funktionen werden durch Funktionsgleichungen, Schaubilder, Tabellen etc. dargestellt. Der Definitionsbereich umfasst alle reellen Zahlen, für welche die Zuordnungsvorschrift sinnvoll ist. Erfüllt das Schaubild gewisse Symmetrie-Eigenschaften, so belegt man auch die Funktion mit diesen Eigenschaften. Nebenstehend werden diese geometrischen Eigenschaften analytisch charakterisiert. In Anlehnung an das Symmetrieverhalten der Polynome nennt man auch $f(x)$ gerade bzw. ungerade.

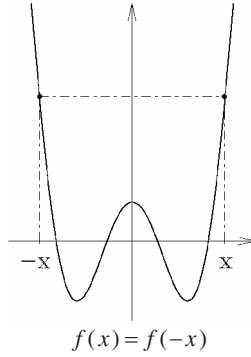


Bild 1.14 Gerade Funktion
Symmetrie zur y-Achse

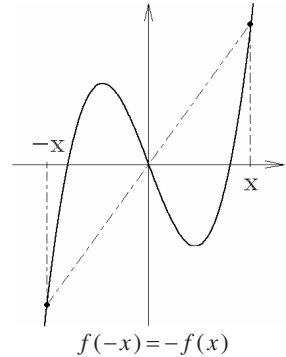


Bild 1.15 Ungerade Funktion
Symmetrie zum Nullpunkt

Eine Funktion $f(x)$ nennt man streng monoton (steigend – fallend), wenn stets gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (steigend); } \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (fallend)}$$

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Bereich streng monoton, so lässt sie sich dort umkehren. Die Umkehrfunktion bezeichnet man mit $f^{-1}(x)$. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

- Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x .
- Vertauschen der Variablen x und y . Ebenso Definitions- und Wertebereich.
- Das Schaubild der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an $y = x$.

Beispiel: $y = f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$, $W = [0, \infty)$

Die Funktion stellt für $x \geq 0$ den Zusammenhang zwischen Seite und Fläche eines Quadrats dar. $f(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse und für $x \geq 0$ streng monoton. Dort bestimmt sich die Umkehrfunktion zu:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

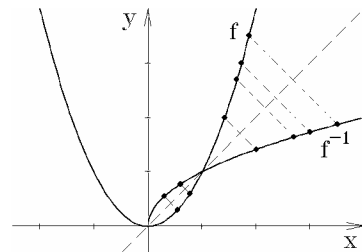


Bild 1.16 Umkehrfunktion

1.3.2 Grenzwert und Stetigkeit

Ist eine Funktion $f(x)$ an einer isolierten Stelle x_0 nicht definiert, so kann man das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung untersuchen. Manchmal gelingt es dann, $f(x)$ auch an der kritischen Stelle einen Wert f_0 zuzuweisen. Man spricht dann von einem Grenzwert.

symbolisch: $f(x) \rightarrow f_0$ für $x \rightarrow x_0$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0$

Folgende Beispiele zeigen Verhaltensweisen in der Umgebung einer Definitionslücke.

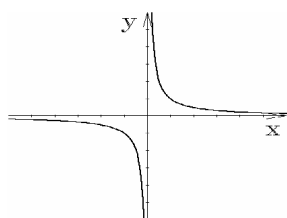


Bild 1.17 $f_1(x) = \frac{1}{x}$

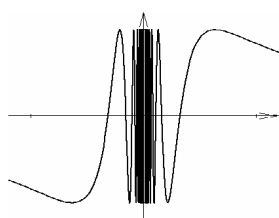


Bild 1.18 $f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

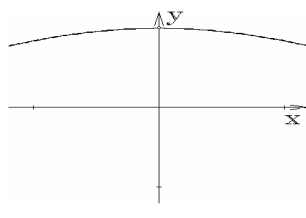


Bild 1.19 $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Bei $f_1(x)$, $f_2(x)$ macht es keinen Sinn, der Funktion im Nullpunkt einen Wert zuzuweisen, während die Funktionswerte von $f_3(x)$ bei Annäherung an $x_0 = 0$ dem Wert 1 beliebig nahe kommen. Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Der Grenzwert 1 lässt sich auch durch die folgende Ungleichungskette (Bogenmaß) begründen:

$$\begin{aligned} \sin x &\leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \\ 1 &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\ 1 &\geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \end{aligned}$$

Strebt $x \rightarrow 0$, so geht $\cos x \rightarrow 1$ und damit auch der

Quotient $\frac{\sin x}{x}$.

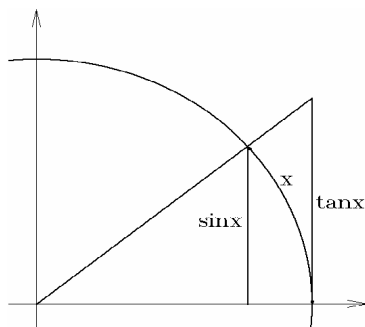


Bild 1.20 Ungleichung

Definition: Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 genau dann den Grenzwert f_0 , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ gibt, sodass für alle $x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f_0| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Obige Definition ist nun nicht nur für „kritische“ Stellen x_0 anwendbar, sondern auch für alle x aus dem Definitionsbereich.

Bei einer gutartigen Funktion $f(x)$ macht es nun keinen Unterschied, ob man sich mit dem Argument x zunächst dem Wert x_0 nähert und dann die Funktionsvorschrift auswertet oder ob man an den Zwischenstellen die Funktionswerte bestimmt und dann den Grenzwert berechnet. Solche Funktionen lassen sich ohne Absetzen zeichnen und werden als stetig bezeichnet. Es sind keine Sprünge möglich. Ebenso dürfen pathologische Situationen wie beim Beispiel $f_2(x)$ nicht vorkommen. Allgemein definiert man Stetigkeit wie folgt:

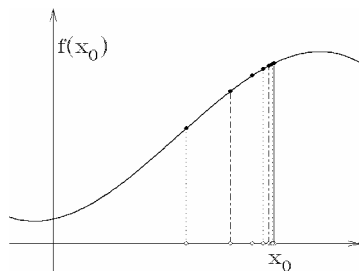


Bild 1.21 Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an x_0 stetig, wenn sie für $x \rightarrow x_0$ einem endlichen Grenzwert zustrebt und dieser mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, d. h., wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Bei stetigen Funktionen sind Grenzübergänge und Funktionsauswertung miteinander vertauschbar. Ist auch $f'(x)$ in x_0 stetig, so nennt man $f(x)$ stetig differenzierbar. Die folgenden Skizzen sollen den Begriff veranschaulichen.

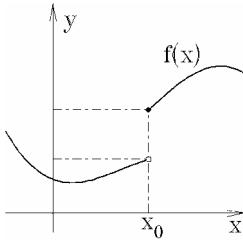


Bild 1.22 Unstetig

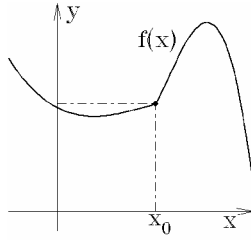


Bild 1.23 Stetig

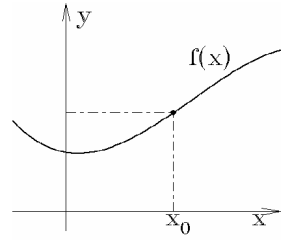


Bild 1.24 Stetig differenzierbar

1.3.3 Ableitung einer Funktion

Die Differenzialrechnung ermöglicht das Rechnen mit „unendlich kleinen Größen“.

1.3.3.1 Differenzialquotient

Falls der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ existiert, nennt man $f(x)$ in x_0 differenzierbar und die Zahl $f'(x_0)$ heißt Ableitung oder Differenzialquotient.

Schreibweisen: $y = f(x)$; Ableitung $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, Df

Geometrische Interpretation:

Die Steigung der Tangente in einem Kurvenpunkt $(x_0 | f(x_0))$ soll als Grenzwert der Sekantensteigung bestimmt werden.

$$m(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Falls die Kurve genügend „glatt“ ist, existiert der Grenzwert für $h \rightarrow 0$.

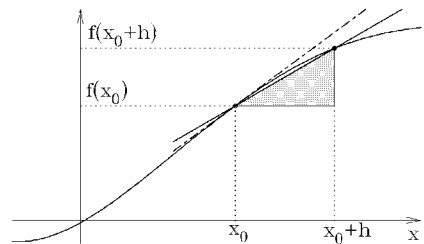


Bild 1.25 Sekantensteigung

Eine weitere Möglichkeit zur Veranschaulichung des Differenzialquotienten bietet die Momentangeschwindigkeit v . Beschreibt $s(t)$ den Aufenthaltsort eines Massepunktes auf einer Geraden, so errechnet sich die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} zwischen der Zeit t_0 und $t_0 + h$

$$\bar{v}(t_0, h) = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \rightarrow v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{v}(t_0, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Die Stromstärke $I(t)$ lässt sich analog als Veränderung der Ladung $Q(t)$ bezüglich der Zeit t interpretieren. Bezeichnet man die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt, so gilt:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(t_0 + h) - Q(t_0)}{h}; \quad a(t) = \dot{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} \quad (\text{Beschleunigung})$$

Der Differenzierungsprozess lässt sich wiederholen. Man spricht dann von 2., 3., etc. Ableitungen.

Symbolisch: $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$, D^2f .

Rechenbeispiele zur Berechnung des Differenzialquotienten:

a) $y = f(x) = x^2; \quad y' = f'(x) = 2x$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} \rightarrow 2x_0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

b) $y = f(x) = \sin x; \quad y' = f'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \cdot \frac{\overbrace{(\cos h - 1) \cdot (\cos h + 1)}^{\cos^2 h - 1 = -\sin^2 h}}{h \cdot (\cos h + 1)} \\ &= \cos x_0 \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} - \sin x_0 \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{\cos h + 1}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \cos x_0 \end{aligned}$$

Rechenregeln

Die Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten und zusammengesetzten Funktionen lassen sich auf die Ableitungen der Bestandteile zurückführen.

Es gelten die Regeln:

(Quotientenregel für $g(x) \neq 0$)

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g'(x))^2}$$

$$[f(g(x))]'' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Mit der Kettenregel kann man die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: f und f^{-1} seien Funktion und Umkehrfunktion, d. h., es gelte: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

$$x = f(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} : \Rightarrow 1 = \frac{df}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)} \cdot \frac{df^{-1}}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Beispiel: $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ mit $\frac{dx}{dy} = e^y$; $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

1.3.3.2 Extrema, Wendepunkte

Mit dem Ableitungsbegriff lassen für entsprechend oft differenzierbare Funktionen Bedingungen für Extrema und Wendepunkte formulieren.

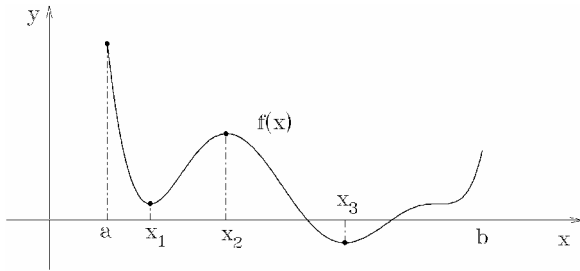


Bild 1.26 x_i relative Extrema;
Randmaximum bei $x = a$

Besitzt $f(x)$ in x_0 ein relatives Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$. Die Umkehrung ist i. Allg. nicht richtig. So besitzt $f(x) = x^3$ bei $x = 0$ kein Extremum, obwohl dort die erste Ableitung verschwindet.

Besitzt $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, dann hat die Funktion in x_0

a) ein relatives Maximum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

b) ein relatives Minimum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

Ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ bei x_0 garantiert ebenfalls ein Extremum.

Für den Fall, dass auch die zweite Ableitung null ist, leitet man so lange ab, bis sich eine von null verschiedene Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ einstellt. Ist n gerade, so liegt ebenfalls ein Extremum vor.

Beispiel: $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$; $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$; $f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^3 - 6x)$;

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3\sqrt{2}) \Rightarrow \text{Maximum}$$

Charakteristische Kurvenpunkte sind Wendepunkte, bei denen sich die Krümmungsrichtung ändert. Die Kurve wechselt die Seite der Wendetangente. Wendepunkte lassen sich als Extrempunkte der ersten Ableitung interpretieren. Insbesondere gilt:

Besitzt $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung, dann hat die Funktion in x_0 einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$;
 $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$; $f''(x) = 6x + 6$; $f'''(x) = 6$;
 \Rightarrow einziger Wendepunkt bei $x_0 = -1$

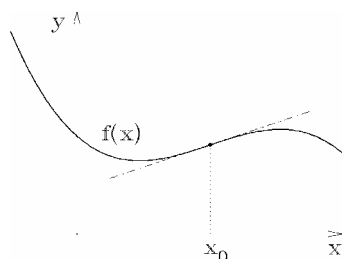


Bild 1.27 Wendetangente

1.3.3.3 Differenzial

Eine stetig differenzierbare Funktion wird in der Umgebung eines Punktes x_0 durch eine lineare Funktion (Tangente in $(x_0 | f(x_0))$) approximiert (Linearisierung).

Der Funktionszuwachs Δf bei Änderung des Arguments um dx ist näherungsweise dem Differenzial df .

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx df = f'(x_0) \cdot dx$$

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \pi \cdot x^2$; $f'(x) = 2\pi \cdot x$ beschreibt den Zusammenhang zwischen Radius und Flächeninhalt beim Kreis. Aus der Messung $x = 10 \pm 0,1$ ergibt sich eine Unsicherheit für den Flächeninhalt zu

$$\Delta f \approx df = (2\pi \cdot x) \cdot dx = 2\pi \cdot 10 \cdot 0,1 = 2\pi.$$

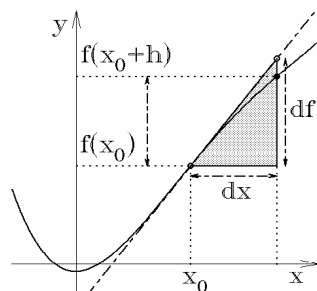


Bild 1.28 Differenzial

1.3.3.4 Taylorentwicklung

In der Umgebung des Entwicklungspunktes x_0 soll eine entsprechend oft differenzierbare Funktion $f(x)$ durch Polynome approximiert werden.

Taylorformel:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

wobei $R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \delta(x - x_0)]}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ mit $0 \leq \delta \leq 1$

Ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar und strebt das Restglied $R_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so erhält man die **Taylorreihe**:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Einige wichtige Reihenentwicklungen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Die Reihenentwicklung ermöglicht die Berechnung von Funktionswerten transzendenter Funktionen.

Beispiel: Der Wert von $\cos 0,5$ soll bis auf 6 Dezimalen genau errechnet werden. Eingesetzt in die Taylorreihe erhält man:

$$\cos 0,5 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0,5^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^4}{4!} - \frac{0,5^6}{6!} + \frac{0,5^8}{8!} - \dots$$

Bei alternierenden Reihen ist der Fehler bei Abbruch nach dem n -ten Glied kleiner als das erste weggelassene Glied: $|R_n| \leq \frac{0,5^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Für $n=3$ erhält man $|R_3| < 10^{-7}$.

$$\cos 0,5 = \underbrace{1 - \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^4}{4!} - \frac{0,5^6}{6!}}_{0,877582465\dots} + \frac{0,5^8}{8!} - \dots \approx 0,877604167\dots$$

1.3.3.5 Newton-Verfahren

Der Gedanke der Linearisierung kann auch dazu benutzt werden, eine nichtlineare Gleichung der Form $f(x) = 0$ näherungsweise iterativ zu lösen.

Ausgehend von einem Punkt x_0 in der Umgebung der gesuchten Lösung x^* bestimmt man im Kurvenpunkt $(x_0 | f(x_0))$ die Tangentengleichung

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Der Schnitt mit der x -Achse ($y=0$) ergibt mit $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ eine verbesserte Näherung. Dieser Prozess lässt sich beliebig oft wiederholen. Das Ver-

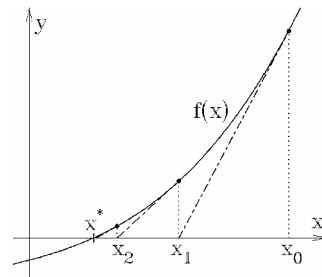


Bild 1.29 Newton-Verfahren

fahren konvergiert, wenn in der Umgebung der gesuchten Lösung $f'(x) \neq 0$ gilt und $f''(x)$ dort nicht das Vorzeichen wechselt. Ausgehend von einem Startwert x_0 nahe x^* erhält man die folgende Iterationsvorschrift zur näherungsweise Bestimmung der Nullstelle:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{Newton-Verfahren}$$

Beispiel: Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $e^x = 2 - x$. Die Skizze zeigt, dass eine eindeutige Lösung x^* des Problems im Intervall $[0, 1]$ vorliegt. Vor Anwendung des Newton-Verfahrens muss die Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$f(x) = e^x + x - 2 \stackrel{!}{=} 0; \Rightarrow f'(x) = e^x + 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n - 2}{e^{x_n} + 1}; \quad x_0 = 1$$

x_0	1,00000000000	x_3	0,44285672464
x_1	0,53788284273	x_4	0,44285440100
x_2	0,44561674852	x_5	0,44285440100

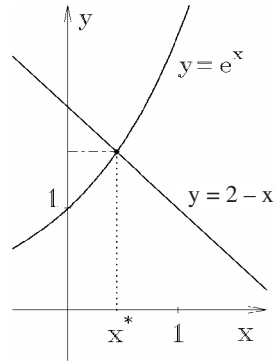


Bild 1.30 Nichtlineare Gleichung

1.3.3.6 Regel von de l'Hospital

Zur Berechnung von unbestimmten Ausdrücken kann ebenfalls die Reihenentwicklung herangezogen werden. Gilt $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so erhält man für $x \rightarrow x_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\overbrace{f(x_0)}^{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots}{\underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots} \\ &= \frac{f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots}{g'(x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0) + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots} \rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned}$$

Eine entsprechende Beziehung gilt auch für Ausdrücke $\frac{\infty}{\infty}$ und für Grenzübergänge $x \rightarrow \infty$.

Bei unbestimmten Ausdrücken $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ kann die Bestimmung des Grenzwerts $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ auf die Untersuchung von $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ zurückgeführt werden; existiert Letzterer, so auch der ursprüngliche Grenzwert und beide sind gleich.

Grenzwerte der Bauart $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 können durch Umformen auf die Standardsituation zurückgeführt werden.

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x \ln x}_{0 \cdot \infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}}_{\infty - \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x + x \sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^x}_{0^0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \right) = e^0 = 1$$

1.3.4 Integralrechnung

Zu diesem Themenbereich sind zwei Zugänge möglich. Zum einen kommt man beim Umkehren der Differenziation zum Integralbegriff; zum anderen durch die Aufgabe, den Inhalt eines durch Funktionsgraphen begrenzten Flächenstücks zu bestimmen.

1.3.4.1 Das bestimmte Integral

Über dem Intervall $[a, b]$ soll der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse bestimmt werden. Dazu wird der gesuchte Flächeninhalt durch Rechteckflächen approximiert. Strebt bei fortgesetzter Verfeinerung der Unterteilung die Summe der Rechteckflächen einem Grenzwert zu, so nennt man diesen Wert Integral über $f(x)$ zwischen a und b .

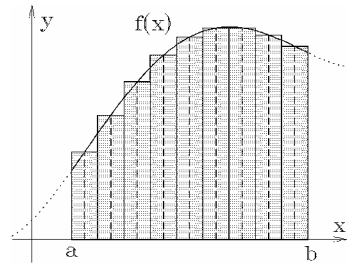


Bild 1.31 Bestimmtes Integral

Symbolisch: $\int_a^b f(x) dx$

Der Grenzwert muss unabhängig von der Art der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und der Wahl der Zwischenpunkte $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sein. Es muss nur sichergestellt sein, dass die maximale Breite der Teilintervalle bei der Folge der Verfeinerungen gegen null strebt.

Stetige Funktionen sind integrierbar, d. h., obiger Grenzwert existiert.

Ist $f(x) > 0$ im Integrationsintervall $[a, b]$, so lässt sich das Integral wie oben ausgeführt geometrisch als Fläche zwischen Kurve und x -Achse deuten. Wechselt $f(x)$ in $[a, b]$ das Vorzeichen, so kompensieren sich die Flächenteile über und unter der x -Achse.

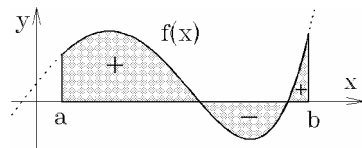


Bild 1.32 Orientierte Fläche

Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx; a < b < c \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{und} \quad \left| \int_a^b (f(x) + g(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx$$

Fläche zwischen zwei Kurven

Zwei Kurven schneiden sich für $x = a$ und $x = b$. Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ergibt sich als Integral über die Differenz „obere Kurve“ minus „untere Kurve“. Dies gilt auch für den Fall, dass sich das gesuchte Gebiet zum Teil in der oberen und zum Teil in der unteren Halbebene befindet. Addiert man nämlich zu beiden Funktionen eine genügend große Konstante, so liegt das zu bestimmende Gebiet in der oberen Halbebene.

$$F = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

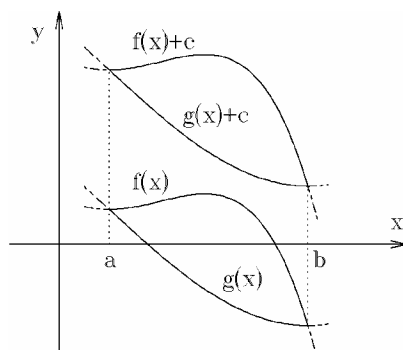


Bild 1.33 Fläche zwischen Kurven

1.3.4.2 Stammfunktion, Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Wählt man beim bestimmten Integral über $f(x)$ eine feste untere Grenze x_0 und lässt die obere Grenze variieren, so ergibt sich eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Ist $f(x) > 0$, so lässt sich $F(x)$ als Inhalt der Fläche zwischen x_0 und x unterhalb der Funktionskurve von $f(x)$ deuten. Zu einer Ausgangsfunktion $f(x)$ gibt es beliebig viele Stammfunktionen, die sich aber nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

Alle Stammfunktionen zu einer Ausgangsfunktion $f(x)$ nennt man das unbestimmte Integral von $f(x)$. Bei der symbolischen Schreibweise lässt man beide Integrationsgrenzen weg.

$$\int f(x) dx + c$$

Ist eine Stammfunktion bekannt, so kann damit das bestimmte Integral berechnet werden. Dabei führt jede Stammfunktion zum gleichen Resultat, da sich bei der Differenzbildung die additive Konstante weghebt.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Zwischen der Stammfunktion $F(x)$ und $f(x)$ besteht ein einfacher Zusammenhang:

Ist $f(x)$ stetig und $F(x)$ eine Stammfunktion, so ist $F(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x).$$

Das Integrieren – Aufsuchen einer Stammfunktion – ist die Umkehrung des Differenzierens. Der Differenzenquotient von $F(x)$ lässt sich wie folgt deuten:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\tau) d\tau$$

Da $f(x)$ stetig ist, gibt es eine Zwischenstelle $x \leq \tau \leq x+h$, so dass die Rechteckfläche $h \cdot f(\tau)$ gleich dem Integral ΔF ist.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\tau) \rightarrow f(x)$$

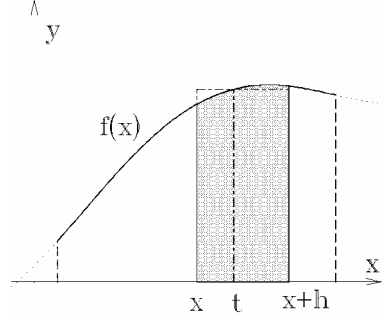


Bild 1.34 Hauptsatz

1.3.4.3 Grundintegrale, Integrationsregeln

Die unbestimmten Integrale der elementaren Funktionen ergeben sich durch Umkehrung der entsprechenden Differenziationsvorschriften. (Im Folgenden ohne Integrationskonstanten!)

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \alpha \neq -1$	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \tan x dx = -\ln \cos x $	$\int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1)$

Lineare Substitution: Ist $\int f(x) dx = F(x)$ bekannt, aber $\int f(ax+b) dx$ zu integrieren, so gilt: $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$

Beispiel: $\int \sin(2x+3) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+3)$

Substitution: Hat der Integrand die spezielle Gestalt $R(f(x)) \cdot f'(x)$, so gilt:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}; n \neq -1 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

Beispiele: $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3}; \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \ln|x^2+2x+2|$

Partielle Integration: Aus der Produktregel der Differenzialrechnung ergibt sich die folgende Möglichkeit der Umformung: $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

Beispiel: $\int \underbrace{x}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_f dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}$

1.3.5 Elementare Funktionen

Funktionen werden klassifiziert, je nachdem ob rationale, algebraische oder transzendente Rechenoperationen bei der Funktionsauswertung notwendig sind.

1.3.5.1 Rationale Funktionen

Bei der Auswertung sind nur die Rechenoperationen +, −, ·, : notwendig.

1. Polynome (ganzrationale Funktionen)

$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0; n$: Grad des Polynoms

Beispiele:

a) $y = a_0 + a_1x$ „Gerade“

a_0 : Achsenabschnitt in y -Richtung; a_1 : Steigung

b) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ „Parabel“ lässt sich durch quadratisches Ergänzen auf die Form bringen:

$y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0; a$: Formparameter ($a > 0$ nach oben; $a < 0$ nach unten) $S(x_0 | y_0)$: Scheitel;

c) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$; Polynome dritter Ordnung besitzen zwischen 1 und 3 Nullstellen, 0 bis 2 Extrema und genau einen Wendepunkt.

d) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Polynome vom Grad n besitzen bis zu n Nullstellen. Ist der Grad ungerade, so existiert mindestens eine Nullstelle – die Kurve kommt von $-\infty$ und geht nach ∞ . Bis zu $(n - 1)$ Extremwerte sind möglich; bei geradem Polynomgrad gibt es mindestens einen Extremwert. Zwischen Extremwerten liegt jeweils ein Wendepunkt.

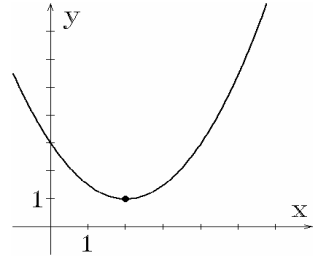


Bild 1.35 $y = 0,5 \cdot (x - 2)^2 + 1$

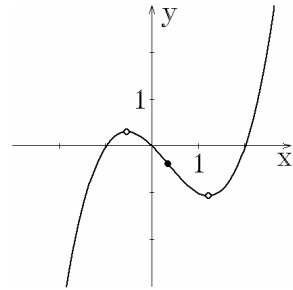


Bild 1.36 $y = x^3 - x^2 - 2x$

Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert die Zerlegung jedes Polynoms in Faktoren. Dabei kommen nur Linearfaktoren und nicht weiter zerlegbare quadratische Ausdrücke vor.

$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{l_i} \cdot \dots$

mit $\sum k_j + 2\sum l_i = n$

2. Gebrochenrationale Funktionen

$y = R_n^m(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$; $p_m(x), q_n(x)$: Polynome vom Grad m bzw. n teilerfremd

Die Nullstellen von $q_n(x)$ nennt man Polstellen; dort ist $R_n^m(x)$ nicht definiert. Beispiele:

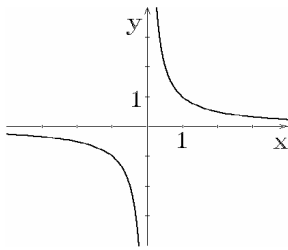


Bild 1.37 $y = \frac{1}{x}$

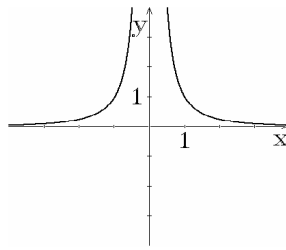


Bild 1.38 $y = \frac{1}{x^2}$

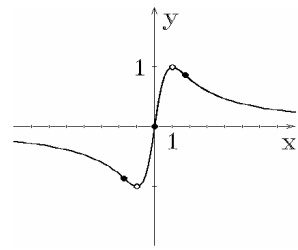


Bild 1.39 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Die Verhaltensweisen obiger Beispiele ist charakteristisch: Ist die Vielfachheit der Nullstelle des Nennerpolynoms ungerade, so findet ein Vorzeichenwechsel an der Polstelle statt – bei gerader Vielfachheit kein Vorzeichenwechsel. Ist der Grad des Nenners größer als der des Zählers, so ist die x -Achse Asymptote.

Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich bei bekannter Faktorzerlegung des Nennerpolynoms in einfache Summanden zerlegen (Partialbruchzerlegung)

$$y = R_5^4(x) = \frac{-x^4 + 2x^2 - 2x + 5}{(x^2 + 1) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D + Ex}{x^2 + 1}$$

Multipliziert man den Ausdruck mit dem Hauptnenner, so ergibt sich beim Vergleich der Zähler beider Seiten:

$$\begin{aligned} -x^4 + 2x^2 - 2x + 5 &= A(x^2 + 1)(x - 1)^2 + B(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) \\ &\quad + C(x^2 + 1)(x + 1) + D(x + 1)(x - 1)^2 + Ex(x + 1)(x - 1)^2 \\ &= A(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + B(x^4 - 1) + C(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\quad + D(x^3 - x^2 - x + 1) + E(x^4 - x^3 - x^2 + x) \\ &= x^4(A + B + E) + x^3(-2A + C + D - E) + x^2(2A + C - D - E) \\ &\quad + x(-2A + C - D + E) + (A - B + C + D) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome links und rechts ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten A, B, C, D, E :

$$\left. \begin{aligned} A + B + E &= -1 \\ -2A + C + D - E &= 0 \\ 2A + C - D - E &= 2 \\ -2A + C - D + E &= -2 \\ A - B + C + D &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2 \\ C &= 1 \\ D &= 1 \\ E &= 0 \end{aligned}$$

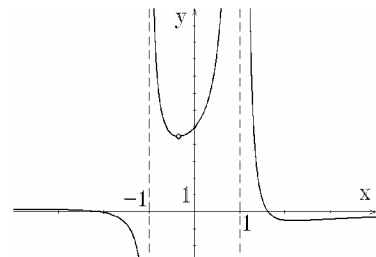


Bild 1.40 $y = R_5^4(x)$.

Ist der Grad des Nennerpolynoms größer als der Zählergrad, so ergeben sich beim Koeffizientenvergleich genauso viel Gleichungen wie Unbekannte.

$$R_5^4(x) = \frac{-x^4 + 2x^2 - 2x + 5}{(x^2 + 1) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Jeder Faktor des Nennerpolynoms $q_n(x)$ ergibt einen Summanden bei der Zerlegung. Linearfaktoren ergeben entsprechend ihrer Vielfachheit Summanden der Bauart:

$$(x - x_i)^{k_i} \mapsto \frac{K_1}{(x - x_i)} + \frac{K_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{K_{k_i}}{(x - x_i)^{k_i}}$$

Für die quadratischen Polynome erhält man:

$$(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{k_j} \mapsto \frac{A_1 + B_1 x}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)} + \frac{A_2 + B_2 x}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^2} + \dots + \frac{A_{k_j} + B_{k_j} x}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{k_j}}$$

Bringt man – wie beim obigen Beispiel – alle Summanden auf den Hauptnenner, so ergibt sich im Zähler ein Polynom der Ordnung $(n - 1)$. Führt man dann den Koeffizientenvergleich durch, so erhält man für den Fall, dass das ursprüngliche Zählerpolynom vom Grad kleiner als n war, ein eindeutig lösbares Gleichungssystem.

Wenn beim Ausgangsproblem der Zählergrad $m \geq n$ ist, so kann der ganze Anteil abgespalten werden (Polynomdivision).

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \underbrace{x + 1}_{\text{Asymptote}} + \frac{x^2 + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

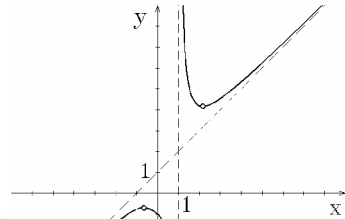


Bild 1.41 $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

1.3.5.2 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen ergeben sich beim „Auflösen“ einfacher algebraischer Gleichungen.

1. Quadratwurzel aus einem linearen Ausdruck

$y = f(x) = \sqrt{ax + b}$;

$f(x)$ ist deutbar als Umkehrfunktion einer Parabel. Der Scheitel liegt in $S(-\frac{b}{a} | 0)$.

Je nach Vorzeichen von a ist die Parabel nach rechts oder links geöffnet.

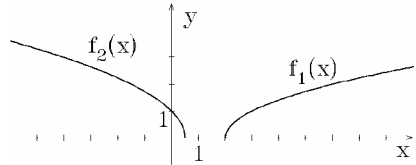


Bild 1.42 $y = f_1(x) = \sqrt{x-2}$; $y = f_2(x) = \sqrt{1-2x}$

2. Quadratwurzel aus einem quadratischen Ausdruck

$y = f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$;

$f(x)$ ergibt sich beim „Auflösen“ einer Kegelschnittgleichung: $y^2 - ax^2 - bx - c = 0$

Dabei liegt der Mittelpunkt stets auf der x -Achse. Für $a < 0$ erhält man die obere Hälfte einer Ellipse. Für $a > 0$ ergibt sich der obere Teil einer Hyperbel.

a) $y = f_1(x) = \sqrt{-4x^2 + 16x - 12}$; Kegelschnittgleichung: $\frac{y^2}{4} + \frac{(x-2)^2}{1} = 1$

Ellipse mit Mittelpunkt $M(2|0)$ und Halbachsen $a = 1, b = 2$;

b) $y = f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - x}$; Kegelschnittgleichung: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$; Hyperbel mit Mittelpunkt $M(2|0)$ und Halbachsen $a = 2, b = 1$; geöffnet längs x -Achse.

c) $y = f_3(x) = \sqrt{x^2 + 4}$;
Kegelschnittgleichung:

$-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} = 1$;

Hyperbel mit $M(0|0)$ und Halbachsen $a = 1, b = 1$;
geöffnet längs y -Achse.

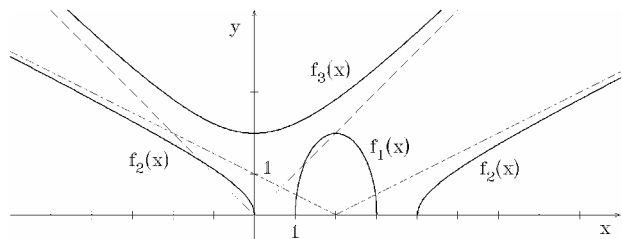


Bild 1.43 Wurzelfunktionen $f_i(x)$

3. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

$$y = f(x) = x^r = (\sqrt[q]{x})^p; \quad r = \frac{p}{q}, \quad p: \text{ganze Zahl}, \quad q: \text{natürliche Zahl}$$

$f(x)$ ergibt sich als Lösung von $y^q - x^p = 0$.

Wenn q gerade ist, so ist $f(x)$ nur für positive Argumente definiert. Ist p negativ, so ist gegebenenfalls auch noch $x = 0$ auszuschließen. Die folgenden Skizzen zeigen das Wachstumsverhalten für verschiedene Werte von r . Alle Kurven gehen durch (1|1).

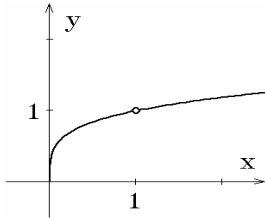


Bild 1.44 $y = x^{\frac{1}{4}}$

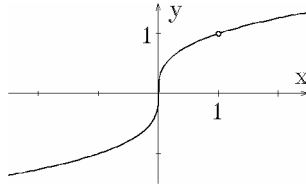


Bild 1.45 $y = x^{\frac{1}{3}}$

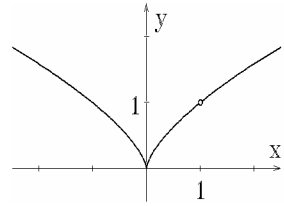


Bild 1.46 $y = x^{\frac{2}{3}}$

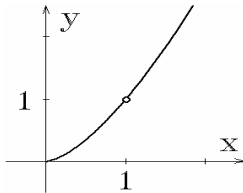


Bild 1.47 $y = x^{\frac{3}{2}}$

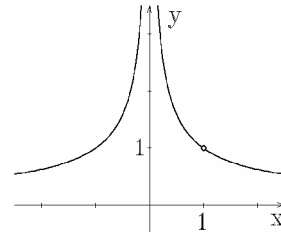


Bild 1.48 $y = x^{-\frac{2}{3}}$

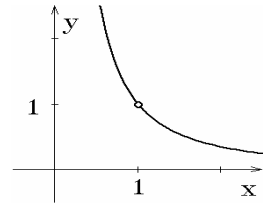


Bild 1.49 $y = x^{-\frac{3}{2}}$

1.3.5.3 Transzendente Funktionen

Die Bestimmung der Funktionswerte erfordert einen Grenzprozess. In der Regel lässt sich die Berechnung auf die Summation einer Reihe zurückführen.

1. Exponentialfunktion und Logarithmus

$$y = f(x) = a^x; \quad a > 0; \quad a \neq 1$$

Exponentialfunktion zur Basis a

$y = a^x$ ist streng monoton und besitzt daher eine Umkehrfunktion – die zugehörige Logarithmusfunktion.

$$y = f^{-1}(x) = \log_a x \quad \text{Logarithmusfunktion zur Basis } a$$

Für spezielle Basen hat sich eingebürgert:

$$\log_{10} x = \lg x; \quad \log_e x = \ln x$$

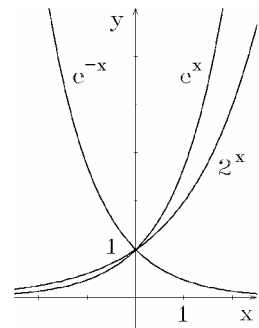


Bild 1.50 $y = e^x, 2^x, e^{-x}$

Die wichtigste Basis ist die Zahl $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\dots$. Die zugehörige Exponentialfunktion nennt man e-Funktion $y = e^x$. Sie beschreibt das Wachstumsverhalten bei kontinuierlichem Zuwachs. Alle Exponentialfunktionen lassen sich auf die e-Funktion zurückführen; alle Logarithmusfunktionen auf den natürlichen Logarithmus.

$$y = f(x) = a^x = e^{x \ln a}; \quad y = f^{-1}(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Um Potenzen für nichtrationale Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ zu erklären, muss α zunächst durch eine rationale Zahlenfolge approximiert werden und anschließend durch Grenzwertbetrachtungen die Potenz definiert werden. Begrifflich ist es einfacher, die e-Funktion als Reihe (Taylorreihe) einzuführen.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Eine in der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige zusammengesetzte Exponentialfunktion ist die so genannte Gauß'sche Glockenkurve.

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}; \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

Sie beschreibt zufällige Abweichungen vom Sollwert.

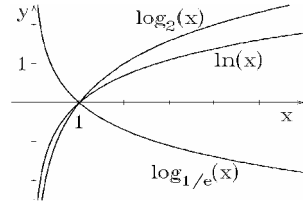


Bild 1.51 Logarithmusfunktion

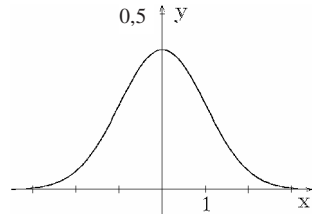


Bild 1.52 Gauß'sche Glockenkurve

2. Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß: Der Öffnungswinkel wird durch den Bogen x am Einheitskreis bestimmt. Mit der traditionellen Gradmessung α° ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$2\pi \hat{=} 360^\circ \Rightarrow x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Die Winkelfunktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ sind ursprünglich als Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck erklärt. Am Einheitskreis lässt sich im 1. Quadranten der Sinuswert als y-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis deuten.

Der Kosinuswert entspricht der x-Koordinate. Der Punkt auf dem Einheitskreis kann in beliebiger Position auf dem Einheitskreis platziert werden. Auch für Winkelwerte $\varphi > 2\pi$ und $\varphi < 0$ lässt sich ein entsprechender Punkt auf dem Einheitskreis finden. Erklärt man

$\cos \varphi$: x-Koordinate des Punktes auf Einheitskreis
 $\sin \varphi$: y-Koordinate des Punktes auf Einheitskreis

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}; \quad \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

so können diese trigonometrischen Funktionen auf ganz \mathbb{R} definiert werden.

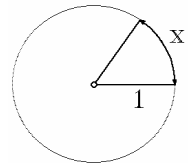


Bild 1.53 Bogenmaß

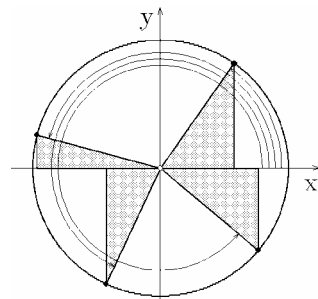


Bild 1.54 Winkelfunktionen

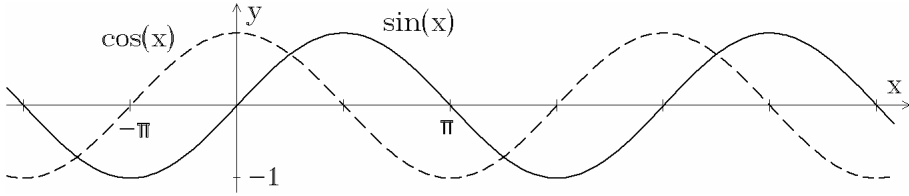


Bild 1.55 Sinus- und Kosinusfunktion

Die Sinus- und Kosinusfunktion gehen durch Verschiebung um $\pi/2$ ineinander über.

$$\sin \varphi = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right); \quad \cos \varphi = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

Für sämtliche Winkelwerte gilt:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

$$\sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi; \quad \cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$$

Beim Umformen trigonometrischer Ausdrücke sind die Additionstheoreme hilfreich:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

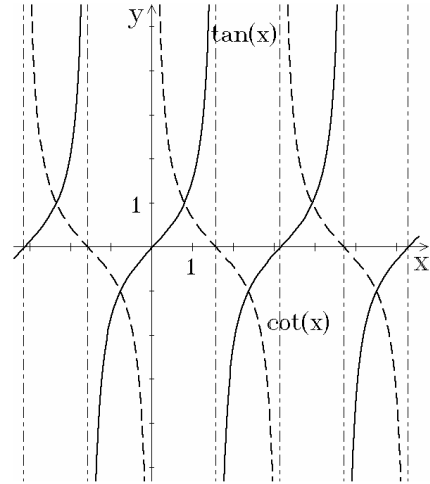


Bild 1.56 Tangens und Kotangens

Durch komplexe Interpretation können solche Fragestellungen i. Allg. vereinfacht werden. Sinus- und Kosinusfunktionen werden zur Darstellung harmonischer Schwingungen benutzt. Die allgemeine Darstellung erfolgt mit den Parametern Amplitude A , Kreisfrequenz ω und Nullphasenwinkel φ_0 :

$$x_s(t) = A \sin(\omega \cdot t - \varphi_0) = A \sin[\omega \cdot (t - \varphi)] ; \quad \text{mit } \varphi = \frac{\varphi_0}{\omega} \quad \text{Sinusschwingung}$$

$$x_c(t) = A \cos(\omega \cdot t - \varphi_0) = A \cos[\omega \cdot (t - \varphi)] ; \quad \text{mit } \varphi = \frac{\varphi_0}{\omega} \quad \text{Kosinusschwingung}$$

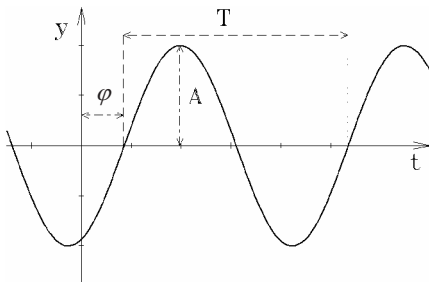


Bild 1.57 $x_s(t) = 2 \sin [1,4 \cdot (t - 0,85)]$

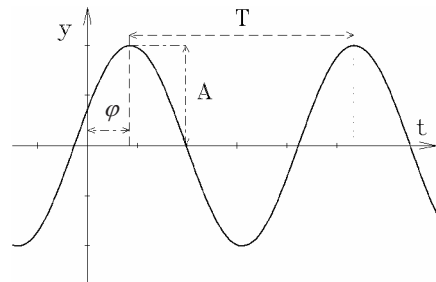


Bild 1.58 $x_c(t) = 2 \cos [1,4 \cdot (t - 0,85)]$

Die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion lassen sich jeweils in einem π -breiten Intervall umkehren. Aus diesen Monotonie-Intervallen wählt man vereinbarungsgemäß das Intervall mit der kleinsten nichtnegativen Zahl aus. Man erhält die Arcus-Funktionen. Es gelten die Zusammenhänge:
 $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$; $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$

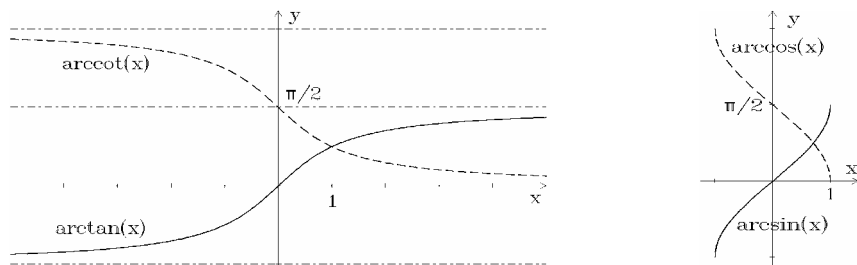


Bild 1.59 $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

$f(x)$	Def.-Bereich	Wertebereich	$f^{-1}(x)$	Def.-Bereich	Wertebereich
$\sin x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$(-\infty, \infty)$	$\arctan x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot x$	$x \neq k\pi$	$(-\infty, \infty)$	$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$

1.4 Funktionen mehrerer Variabler

In Naturwissenschaft und Technik hängen physikalische Größen wie z. B. Temperaturverteilung T , Druck p , elektrostatisches Potenzial U von mehreren Variablen ab.

$$T = T(x, y, z, t); \quad p = p(V, T); \quad U = U(x, y, z)$$

Die Übertragung der Grundbegriffe der Analysis auf den mehrdimensionalen Fall wird exemplarisch für den Fall $n = 2$ dargestellt.

1.4.1 Grafische Darstellung, Isoquanten (Höhenlinien)

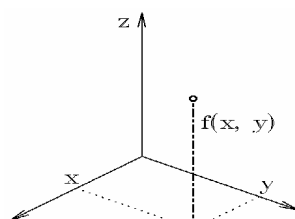


Bild 1.60 $z = f(x, y)$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) \text{ bzw.}$$

$$z = f(x, y); \quad D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

Alle Bildpunkte ergeben als Graph eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

Eine exakte Darstellung ist nur im räumlichen Modell möglich. Möglicher Ausweg: Schrägbild, Isoquanten (Kurven in der (x, y) -Ebene mit gleichem Funktionswert)

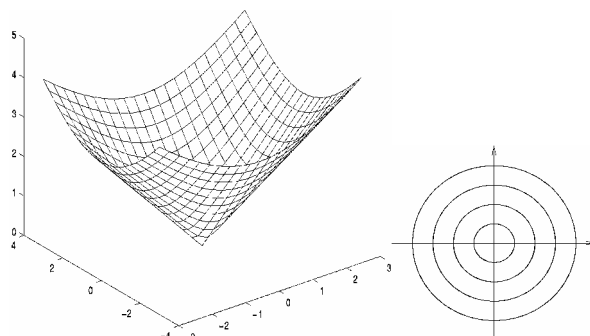


Bild 1.61 $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.4.2 Partielle Ableitungen

Bei einer Funktion $z = f(x, y)$ wird eine Variable festgehalten. Man erhält eine Funktion einer reellen Veränderlichen, die sich nach den üblichen Regeln differenzieren lässt.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Andere Bezeichnungen:

$$f_x(x, y); f_y(x, y); D_x f; D_y f; \partial_x f; \partial_y f;$$

Geometrisch bedeutet dieses Vorgehen, die Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$ zu schneiden. Die Steigung der Schnittkurve im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist die partielle Ableitung nach x .

Höhere Ableitungen werden entsprechend erklärt. Die Reihenfolge der Differenziation darf vertauscht werden, wenn alle beteiligten Ableitungen stetig sind.

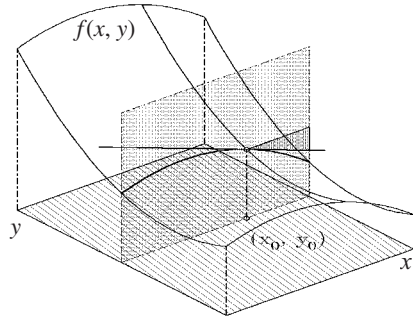


Bild 1.62 Partielle Ableitung

Beispiel: $z = f(x, y) = x^2 y + \sin(x + 2y); f_x = 2xy + \cos(x + 2y); f_y = x^2 + 2 \cos(x + 2y);$
 $f_{xx} = 2y - \sin(x + 2y); f_{yy} = -4 \sin(x + 2y); f_{xy} = 2x - 2 \sin(x + 2y).$

Verallgemeinerte Kettenregel

$f(x, y)$ besitze partielle Ableitungen und $x(t), y(t)$ seien ebenfalls differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $F(t) = f(x(t), y(t))$ ebenfalls differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dF}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

1.4.3 Richtungsableitung, Gradient

Man betrachtet Veränderungen der Funktion $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) längs der Richtung $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \cos \alpha, y_0 + t \cdot \sin \alpha)$$

Die Ableitung nach der Variablen t für $t=0$ nennt man Richtungsableitung. Die Kettenregel ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \sin \alpha$$

$$f(x, y) = 6 - x^2 + y^2; f_x = -2x; f_y = 2y;$$

$$(x_0, y_0) = (1, 1); \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1);$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \{(-2 \cdot 1) \cdot 2 + (2 \cdot 1) \cdot (-1)\} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

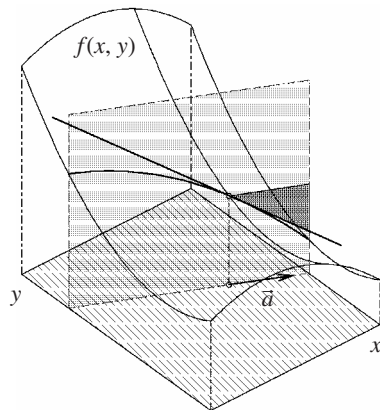


Bild 1.63 Richtungsableitung Beispielrechnung nebenstehend

Man fasst die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ zu einem Vektor zusammen und nennt diesen Ausdruck Gradient: $\text{grad } f = (f_x, f_y)^T$.

Damit lassen sich viele Beziehungen übersichtlicher darstellen, z. B. erhält man die Richtungsableitung als Skalarprodukt zwischen Gradient und Richtungsvektor: $\text{grad } f \cdot \vec{a}$.

Der Gradientenvektor gibt die Richtung des stärksten Anstiegs (Falllinie) auf der Fläche an.

1.4.4 Tangentialebene, totales Differenzial

Die Funktion soll in der Umgebung von (x_0, y_0) durch die Tangentialebene approximiert werden (Linearisierung):

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Für kleine Änderung der Variablen x, y kann die Änderung der abhängigen Variablen $\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ durch das totale Differenzial angenähert werden:

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y) \cdot dx + f_y(x, y) \cdot dy$$

Soll der Einfluss der relativen Veränderungen abgeschätzt werden, so ergibt sich daraus:

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{dz}{z} = \frac{f_x(x, y) \cdot dx + f_y(x, y) \cdot dy}{f(x, y)} = \frac{f_x(x, y) \cdot x}{f(x, y)} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{f_y(x, y) \cdot y}{f(x, y)} \cdot \frac{dy}{y}$$

Beispiel: Der Gesamtwiderstand z einer Parallelschaltung hängt von den Einzelwiderständen x, y wie folgt ab: $z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y}$. Für die Einzelwiderstände $x = 100 \Omega$, $y = 400 \Omega$ soll der Einfluss der relativen Ungenauigkeiten der Einzelwiderstände auf den Gesamtwiderstand mit dem totalen Differenzial abgeschätzt werden.

$$\left. \frac{f_x \cdot x}{f} = \frac{y}{x + y} \right|_{\substack{x=100 \\ y=400}} = \frac{4}{5}; \quad \left. \frac{f_y \cdot y}{f} = \frac{x}{x + y} \right|_{\substack{x=100 \\ y=400}} = \frac{1}{5}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{4}{5} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{dy}{y}$$

1.4.5 Extrema

Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen für $z = f(x, y)$

Wenn an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Maximum oder Minimum vorliegen soll, so muss dort die Tangentialebene waagrecht sein, d. h. $f_x(x_0, y_0) = 0$; $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Ob dann ein relatives Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt, wird entschieden durch:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \quad \begin{cases} D > 0 \Rightarrow \text{Extremum} \\ D < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

Liegt ein Extremum vor, so entscheidet das Vorzeichen von $S = f_{xx}(x_0, y_0)$ darüber, ob dies ein relatives Maximum oder Minimum ist: $S > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $S < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

Bei Funktionen von mehr als zwei Variablen lautet die notwendige Bedingung für ein Extremum analog: $\partial x_i f(x_1, \dots, x_n) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$. Hinreichende Bedingungen ergeben sich aus der Vorzeichendiskussion der Glieder zweiter Ordnung der Taylorentwicklung.

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Soll die Funktion $z = f(x, y)$ unter der zusätzlichen Bedingung $g(x, y) = 0$ extremal werden, so kann man eine Variable eliminieren. Gilt $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, so wird in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion $y(x)$ definiert mit $g(x, y) = 0$ und $y'(x) = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)}$. Setzt man $y(x)$ in die Ausgangsfunktion ein, so ergibt sich ein eindimensionales Problem.

$$\frac{d}{dx} : f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \quad (*)$$

Die Bestimmung von $y(x)$ ist oft problematisch. Explizit benötigt wird nur die Ableitung $y'(x)$, die sich auf f_x und g_y zurückführen lässt. Damit identisch ist die

$$f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \quad (2)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (3)$$

Lösung des nebenstehenden Systems mit der Hilfsvariablen λ : (2) nach λ aufgelöst in (1) ergibt (*)

Führt man die Lagrange-Funktion $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ein, so können die Gleichungen (1) ... (3) als partielle Ableitungen von $F(x, y, \lambda)$ gedeutet werden.

Beispiel: Die Oberfläche einer zylindrischen Dose mit vorgegebenem Volumen soll minimal werden.

$$F_r = 4\pi r + 2\pi h + \lambda \cdot 2\pi r h = 0 \quad (1)$$

$$F_h = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad (2)$$

$$F_\lambda = \pi h r^2 - V_0 = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f(r, h) &= 2\pi r(r+h) \\ g(r, h) &= \pi h r^2 - V_0 \equiv 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \Rightarrow (1) \Rightarrow h = 2r \Rightarrow (3)$$

$$F(r, h, \lambda) = 2\pi r(r+h) + \lambda \cdot (\pi h r^2 - V_0)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}$$

Diese Strategie lässt sich auf Funktionen mit n Variablen und k Nebenbedingungen übertragen. Gesucht wird nach Extrema der Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; j = 1, 2, \dots, k$. Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion mit $(n + k)$ Variablen

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Eine notwendige Bedingung für bedingte Extrema ergibt sich aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

1.4.6 Mehrfachintegrale

Der eindimensionale Integralbegriff ergibt sich als Grenzwert der Zerlegungssumme $\sum_{i=1}^b f(x_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. Dieser Grenzwert ist für $f(x) > 0$ deutbar als Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und dem Integrationsintervall $[a, b]$. Analog lässt sich ein Integrationsbegriff für $z = f(x, y)$ über einen zweidimensionalen Bereich erklären. Als approximative Zerlegung des Gebiets können achsenparallele Rechtecke benutzt werden.

Bei glatter Berandung und stetigem $f(x, y)$ strebt bei Verfeinerung der Unterteilung die Zerlegungssumme gegen einen Grenzwert:

$$\sum f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \rightarrow I = \iint_G f(x, y) d(x, y)$$

I lässt sich als iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$I = \iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

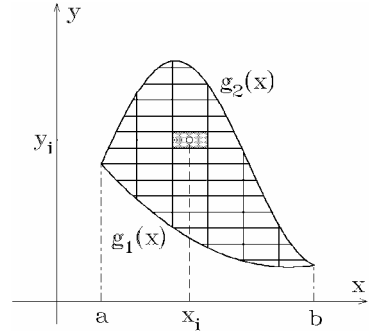


Bild 1.64 Zweidimensionales Integral

I kann für positives $f(x, y)$ als Volumen zwischen der Fläche $z = f(x, y)$ und dem Integrationsgebiet gedeutet werden.

Entsprechend kann für Funktionen $f(x, y, z)$ ein Integral über ein räumliches Gebiet erklärt werden. Als approximative Zerlegung des Gebiets dienen achsenparallele Quader. Bei glatter Berandung und stetigem $f(x, y, z)$ strebt die Zerlegungssumme gegen einen Grenzwert:

$$\sum f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \rightarrow I$$

Wird das räumliche Gebiet in z -Richtung durch die Funktionen $h_1(x, y)$ und $h_2(x, y)$ begrenzt, so lässt sich das räumliche Integral auf ein ebenes Gebietsintegral über die Projektion G^* in der x, y -Ebene zurückführen. Man erhält das iterierte Integral:

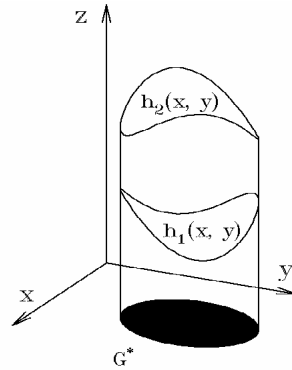


Bild 1.65 Dreidimensionales Integral

$$I = \iiint_G f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{G^*} \left[\int_{z=h_1(x, y)}^{z=h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d(x, y)$$

Beispiel: Schwerpunkt einer Halbkugel mit Radius 1; Mittelpunkt im Ursprung; aus Symmetrie gilt $x_s = y_s = 0$.

$$z_s = \frac{\iiint_G z \cdot d(x, y, z)}{\underbrace{\iiint_G 1 \cdot d(x, y, z)}_{\frac{2\pi}{3}}}; \quad I = \iiint_G z \cdot d(x, y, z) = \iint_{G^*} \left[\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} z \cdot dz \right] \cdot d(x, y)$$

$$I = \iint_{G^*} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} d(x, y) = \iint_{G^*} \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) d(x, y); \quad G^* = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

Die Transformation auf Polarkoordinaten ergibt:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\int_{r=0}^{r=1} \frac{1}{2} (1-r^2) \cdot r dr \right] d\varphi = \pi \int_{r=0}^{r=1} (r-r^3) dr = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_s = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8}$$

1.5 Vektoranalysis

1.5.1 Kurven im \mathbb{R}^2

Eine Kurve in Parameterdarstellung wird durch zwei von einem Parameter t abhängenden Gleichungen erklärt. Beide Gleichungen ordnen jedem t genau einen Punkt zu. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}; a \leq t \leq b$

Kurven in expliziter Darstellung $y = f(x)$ können auch in Parameterform gebracht werden: $x = t, y = f(t)$.

Beispiel: Zykloide

Ein Kreis rollt auf einer Geraden ab. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt eine Umdrehung.

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t; & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

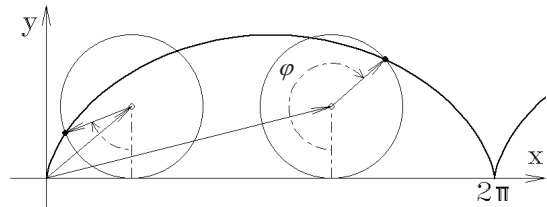


Bild 1.66 Zykloide

Der Tangentenvektor bestimmt sich wieder als Grenzlage des Sekantenvektors:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)] = \begin{pmatrix} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Ableitungen nach dem Parameter t werden i. Allg. mit einem Punkt gekennzeichnet. Ist $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$, so kann der Tangenteneinheitsvektor bestimmt werden.

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Der Normaleneinheitsvektor ergibt sich zu:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

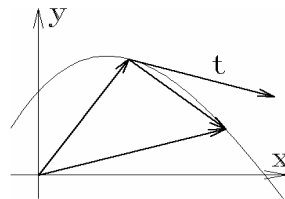


Bild 1.67 Tangentenvektor

Eine Kurve heißt glatt, wenn die Parameterfunktionen $x(t), y(t)$ im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar sind und dort überall $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$ gilt.

Für $t = 2\pi$ gilt bei der Zykloide $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$. Die Kurve besitzt dort eine Spitze.

Das Bogenelement der Kurven lautet: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \cdot dt$

Bei expliziten Darstellungen in kartesischen bzw. Polarkoordinaten erhält man daraus:

$$y = f(x): ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx \quad r = r(\varphi): ds = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} \cdot d\varphi$$

$$\text{Kurvenlänge} \quad L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

Für den Flächeninhalt des Segments, das von der Kurve und den Ortsvektoren $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(b)$ begrenzt wird, gilt:

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b |x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)| \, dt$$

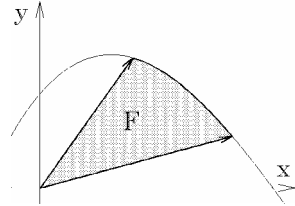


Bild 1.68 Flächeninhalt

1.5.2 Kurvenintegrale

Zwei stetige Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ werden zu einer vektorwertigen Funktion $\vec{f} = (f_1(x, y), f_2(x, y))^T$ zusammengefasst. Jedem Punkt $(x|y)$ wird dadurch ein Vektor zugeordnet. Dieser Vektor hat häufig die Bedeutung einer Kraft, etc.

Arbeit ergibt sich als Skalarprodukt zwischen Kraft- und Wegvektor. Um die verrichtete Arbeit längs eines Wegs zu bestimmen, muss über $\vec{f} \cdot d\vec{r} = (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds$ summiert werden.

$$\text{Man erhält: } A = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds.$$

Interpretiert man das Vektorfeld als Geschwindigkeit einer Strömung, so erhält man den Fluss durch die Kurve, indem man über $(\vec{f} \cdot \vec{n}) \cdot ds$ aufsummiert.

Setzt man die Parameterdarstellung der Kurve ein, so erhält man für die differentielle Arbeit:

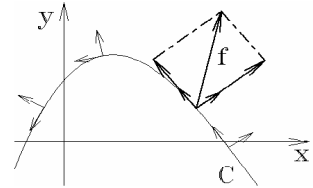


Bild 1.69 Linienintegrale

$$\vec{t} \cdot ds = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}_{=ds} dt = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt \quad \text{analog für den Fluss} \quad \vec{n} \cdot ds = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} dt$$

$$A = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds = \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_2(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)] dt \quad \text{Arbeitsintegral}$$

$$F = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) - f_2(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t)] dt \quad \text{Flussintegral}$$

Beispiel: Arbeits- und Flussintegral für das Vektorfeld $\vec{f} = (2x + y, x - 2y)^T$ längs der Normalparabel zwischen $x = -1$ und $x = 1$.

$$C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}_{\perp}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \cdot ds = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t - 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot dt = (2t + 3t^2 - 4t^3) \cdot dt$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{\perp}(t) \cdot ds = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t - 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot dt = (-t + 6t^2 + 2t^3) \cdot dt$$

$$A = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds = \int_{-1}^1 [2t + 3t^2 - 4t^3] \cdot dt = [t^2 + t^3 - t^4]_{-1}^1 = 2$$

$$F = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \int_{-1}^1 [-t + 6t^2 + 2t^3] \cdot dt = [-\frac{1}{2}t^2 + 2t^3 + \frac{1}{2}t^4]_{-1}^1 = 4$$

1.5.3 Potenzial, Gradientenfeld

Das Arbeitsintegral zwischen zwei Punkten ist i. Allg. von der Form der Verbindungskurve abhängig. Ist dagegen das Arbeitsintegral wegunabhängig, so existiert analog zum Begriff der Stammfunktion ein Potenzial. Gleichwertig: für geschlossene Kurve $\oint_C (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds = 0$:

$$U(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds \quad \text{In diesem Fall kann jedes Arbeitsintegral} \quad \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} (\vec{f} \cdot \vec{t}) \cdot ds = U(\vec{x}_2) - U(\vec{x}_1)$$

als Potentialdifferenz dargestellt werden:

Für den Zusammenhang zwischen Kraftfeld und Potenzial gilt: $\text{grad } U = \vec{f}$. Ein solches Vektorfeld nennt man auch Gradientenfeld.

Interessiert man sich bei vorgegebenem Feld \vec{f} dafür, ob ein Potenzial existiert, so erhält man dafür die notwendige Bedingung: $\underline{\partial_y f_1} = \underline{\partial_y U_x} = U_{x y} = U_{y x} = \underline{\partial_x U_y} = \underline{\partial_x f_2}$

Diese Eigenschaft ist auch bei einem einfach zusammenhängenden Gebiet hinreichend. Ein Gebiet nennt man einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne dass dabei das Gebiet verlassen werden muss.

$$\text{Beispiel: } \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{y}{1+x^2+y^2} + 2y \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} f_2$$

Bedingung für Potenzialfeld ist erfüllt!

$$U_x = f_1 = \frac{x}{1+x^2+y^2} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + C(y)$$

$$U_y = \frac{y}{1+x^2+y^2} + C'(y) = f_2 = \frac{y}{1+x^2+y^2} + 2y \Rightarrow$$

$$C'(y) = 2y \Rightarrow C(y) = y^2 \Rightarrow U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + y^2 + K$$

1.5.4 Divergenz, Rotation, Integralsätze

Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven können in Gebietsintegrale über ihr Inneres überführt werden. (Man kann diese Integralsätze als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung deuten).

Wird das Vektorfeld \vec{f} als Geschwindigkeitsfeld interpretiert, so lässt sich eine spezifische Quellstärke definieren. Dazu bringt man ein achsenparalleles Rechteck in die Strömung ein und bestimmt während eines Zeitraums Δt die ein- bzw. austretende Flüssigkeitsmenge. Die Flüssigkeitsbilanz wird getrennt für die x - und y -Richtung aufgestellt.

Durch die Fläche bei x bzw. $x + \Delta x$ tritt ein:

$$f_1(x, y) \cdot \Delta t \cdot \Delta y \quad \text{bzw.} \quad f_1(x + \Delta x, y) \cdot \Delta t \cdot \Delta y$$

Daraus ergibt sich die Differenz in x -Richtung

$$\Delta V_x = \left[\frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right] \cdot \Delta t$$

Analog erhält man die Bilanz in y -Richtung:

$$\Delta V_y = \left[\frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right] \cdot \Delta t$$

Die beiden Differenzenquotienten streben gegen die partiellen Ableitungen und man erhält die spezifische Quellstärke: $\text{div } \vec{f} = \partial_x f_1(x, y) + \partial_y f_2(x, y)$

Betrachtet man das von der Kurve C eingeschlossene Gebiet G , so muss das Integral über die Divergenz des Feldes mit der durch die Randkurve fließenden Flüssigkeitsmenge übereinstimmen. (Integralsatz von Gauß)

$$\int_C (\vec{f} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \iint_G (\text{div } \vec{f}) \cdot d(x, y)$$

Hierbei ist die Orientierung des Normalenvektors so zu wählen, dass dieser ins Äußere des Gebiets zeigt. Setzt man die Parameterdarstellung ein, so ergibt sich:

$$\int_a^b [f_1(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) - f_2(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t)] dt = \iint_G [\partial_x f_1(x, y) + \partial_y f_2(x, y)] d(x, y)$$

Das Linienintegral lässt sich auch als Arbeitsintegral interpretieren. Setzt man

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \text{so ergibt sich:} \quad \int_a^b [g_1 \cdot \dot{x} + g_2 \cdot \dot{y}] dt = \iint_G [\partial_x g_2 - \partial_y g_1] d(x, y)$$

Man bezeichnet den Ausdruck $\text{rot } \vec{g} = \partial_x g_2 - \partial_y g_1$ als Rotation des Feldes \vec{g} . Er stellt die spezifische Wirbelstärke eines Feldes dar.

Gradientenfelder sind wirbelfrei, d. h., es gilt stets $\text{rot}(\text{grad } U) = 0$.

Eine wichtige Rolle spielen Felder, die quellen- und wirbelfrei sind, d. h. für die gilt: $\text{rot } \vec{f} = 0, \text{div } \vec{f} = 0$. Wirbelfreiheit bedeutet, dass \vec{f} ein Potenzial besitzt, also darstellbar ist:

$\vec{f} = \text{grad } U$. Das zugehörige Potenzial erfüllt die Laplace-Gleichung:

$$\text{div}(\text{grad } U) = U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

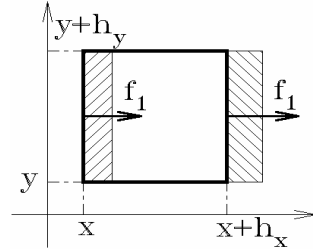


Bild 1.70 Quellstärke $h_x = \Delta x, \dots$

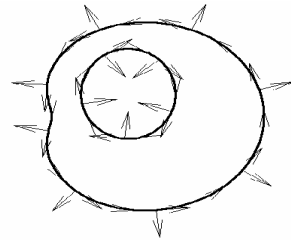


Bild 1.71 Orientierung der Normalen

1.6 Differenzialgleichungen

Eine Gleichung zwischen einer unbekanntem Funktion $y(x)$, ihren Ableitungen bis zur Ordnung n und der unabhängigen Variablen x heißt gewöhnliche Differenzialgleichung n -ter Ordnung $F(x; y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Die allgemeine Lösung $y(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$ enthält n Integrationskonstanten. Die Gesamtheit aller Lösungen bildet eine n -parametrische Kurvenschar. Spezielle oder partikuläre Lösungen erhält man durch zusätzliche Bedingungen. Man unterscheidet:

- **Anfangswertproblem:** Bedingungen für $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ an einer Stelle x_0 .
- **Randwertproblem:** Bedingungen für $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ an mehr als einer Stelle.

An dieser Stelle wird nur das Anfangswertproblem (AWP) behandelt. Es ist lokal eindeutig lösbar, wenn F und die partiellen Ableitungen nach $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ stetig sind.

1.6.1 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Durch die Gleichung $y' = f(x, y)$ wird jedem Punkt $(x|y)$ aus dem Definitionsbereich von $f(x, y)$ eine Steigung zugeordnet. Geometrisch lässt sich dies dadurch veranschaulichen, dass man im Punkt $(x|y)$ einen kleinen Tangentenabschnitt der Lösungskurve abträgt. Dieses Richtungsfeld gibt einen qualitativen Überblick über den Verlauf der Lösungskurven. Lösen einer Differenzialgleichung bedeutet geometrisch das Einpassen von Lösungskurven in das vorgegebene Richtungsfeld. Durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird eine spezielle Kurve ausgewählt.

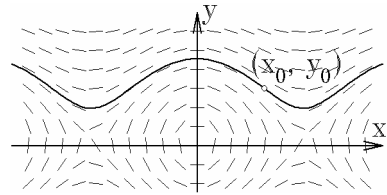


Bild 1.72 Richtungsfeld

Richtungsfeld. Durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird eine spezielle Kurve ausgewählt.

Separierbare Differenzialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ „Trennung der Variablen“

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{h(x)dx}{H(x)+C} \Rightarrow y = y(x; C)$$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y = \tan(\ln(x) + C)$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung $y' + g(x) \cdot y = r(x)$

Für $r(x) = 0$ heißt die Differenzialgleichung linear homogen, sonst inhomogen. Die Lösung der Ausgangsgleichung lässt sich als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung darstellen: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

Allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -g(x) \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int g(x)dx \Rightarrow y_H = C \cdot e^{-G(x)} = C \cdot y_1(x)$$

Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten

Ansatz: $y(x) = C(x) \cdot y_1(x)$ eingesetzt in inhomogene Differenzialgleichung ergibt:

$$C'(x) \cdot y_1(x) + C(x) \cdot \underbrace{[y_1'(x) + g(x) \cdot y_1(x)]}_{=0} = r(x) \Rightarrow C'(x) = \frac{r(x)}{y_1(x)} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int \frac{r(x)}{y_1(x)} dx \Rightarrow y(x) = \underbrace{y_1(x)}_{y_p} \cdot \int \frac{r(x)}{y_1(x)} dx + \underbrace{K}_{y_H} \cdot y_1(x)$$

Beispiel: $y' + \frac{y}{x} = 3x$; Lösung: $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \frac{K}{x} + x^2$

homogen: $y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + K \Rightarrow \frac{\pm e^K}{x} = \frac{C}{x}$

inhomogen: $y_p = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = 3x \Rightarrow C' = 3x^2 \Rightarrow C = x^3$

1.6.2 Lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung

Differenzialgleichungen höherer Ordnung sind nur in Ausnahmefällen explizit lösbar. Sind bei einer linearen Differenzialgleichung die Koeffizienten von x unabhängig (konstant), so existiert eine geschlossene Lösungstheorie.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x); \quad a_i \in \mathbb{R}; \quad r(x): \text{ Störfunktion}$$

Die Grundlösungen der homogenen DGL ergeben sich mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$; $\lambda \in \mathbb{C}$ aus den Lösungen der Gleichung $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Ein Polynom vom Grad n besitzt n Nullstellen; diese sind reell oder paarweise konjugiert komplex, eventuell mehrfach. Zu jeder Nullstelle λ_k gehört eine Grundlösung y_k nach folgendem Schema:

- λ_k reell, Vielfachheit l_k : $y_k = e^{\lambda_k x}$, $y_{k+1} = x \cdot e^{\lambda_k x}$, ..., $y_{k+l_k} = x^{l_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}$
- $\lambda_k = a \pm ib$ komplex, Vielfachheit l_k : $y_k = e^{ax} \cos bx$, $y_{k+1} = e^{ax} \sin bx$
 $y_{k+2} = x \cdot e^{ax} \cos bx$, $y_{k+3} = x \cdot e^{ax} \sin bx$, ..., $y_{k+2l_k} = x^{l_k-1} \cdot e^{ax} \sin bx$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt sich als Linearkombination der Grundlösungen:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$$

Eine **spezielle Lösung des inhomogenen Problems** erhält man häufig durch die Ansätze:

Störglied: $r(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad Ae^{kx} \quad A \cos mx + B \sin mx$

Ansatz: $y_p(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n \quad Ae^{kx} \quad A \cos mx + B \sin mx$

Ist das Störglied bereits Lösung der zugehörigen homogenen DGL (Resonanzfall), so muss der einfache Ansatz noch mit x multipliziert werden (bei k -facher Nullstelle mit x^k).

Schwingungsdifferentialgleichung: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \hat{x} \cdot \cos \omega_E t$

Homogen: Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ ergibt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Fall $\delta = 0$ ungedämpfte Schwingung $x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

Fall $\delta < \omega_0$ schwache Dämpfung $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{=\omega_d}$

$$x_H(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

Fall $\delta = \omega_0$ aperiodischer Grenzfall $\lambda_{1,2} = -\delta$ $x_H(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 + C_2 t)$

Fall $\delta > \omega_0$ starke Dämpfung $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$ reell $x_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Inhomogene Differentialgleichung

Fall $\delta = 0$ a) $\omega_0 \neq \omega_E \Rightarrow x_p(t) = \frac{\hat{x}_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \cos(\omega_E t)$

b) $\omega_0 = \omega_E \Rightarrow x_p(t) = \frac{\omega_0 \hat{x}_E}{2} \cdot t \cdot \sin(\omega_E t)$ Resonanz

Fall $\delta > 0$ Ansatz: $x_p(t) = A_1 \cos(\omega_E t) + A_2 \sin(\omega_E t) = \hat{x}_p \cos(\omega_E t - \varphi)$

Rechnung vereinfacht sich durch komplexen Ansatz: $x_p(t) = \hat{x}_p \cdot e^{i(\omega_E t - \varphi)}$

$$-\omega_E^2 \cdot \hat{x}_p \cdot e^{i(\omega_E t - \varphi)} + 2i\delta\omega_E \cdot \hat{x}_p \cdot e^{i(\omega_E t - \varphi)} + \omega_0^2 \cdot \hat{x}_p \cdot e^{i(\omega_E t - \varphi)} = \hat{x}_E \cdot e^{i\omega_E t}$$

Zeitabhängigkeit fällt weg:

$$((\omega_0^2 - \omega_E^2) + 2i\delta\omega_E) \cdot \hat{x}_p = \hat{x}_E \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_p = \frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \\ \tan \varphi = \frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \end{cases}$$

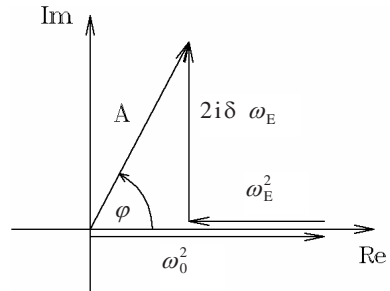


Bild 1.73 Frequenzgang

Obige Beziehung beschreibt den Amplituden- und Phasenfrequenzgang des Systems.

1.6.3 Systeme von Differentialgleichungen

Für mehrdimensionale Probleme ergeben sich Systeme von Differentialgleichungen.

Differentialgleichungen höherer Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ lassen sich mittels der Substitution $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$ in ein System überführen.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t; x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(t; x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t; x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

Für lineare Differenzialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten existiert eine geschlossene Lösungstheorie. Die Lösung erfolgt analog zum skalaren Fall in zwei Stufen.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \cdot e^{\lambda t}$ zur Lösung des zugehörigen homogenen Systems führt zu einem Eigenwertproblem (vgl. Abschnitt 1.2.4.3). Erhält man dabei ein vollständiges System von Eigenvektoren $\{\mathbf{a}_i\}$, so ergibt sich die allgemeine Lösung zu $\mathbf{x}_H(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{a}_i \cdot e^{\lambda_i t}$.

Zur Ermittlung einer speziellen Lösung $\mathbf{x}_p(t)$ des inhomogenen Problems führen häufig Ansätze entsprechend der Bauart der Störfunktionen $r_i(t)$ zum Ziel. Die Gesamtlösung erhält man wieder durch Überlagerung der allgemeinen Lösung des homogenen Systems und einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_p(t)$.

Der homogene Anteil $\mathbf{x}_H(t)$ stellt dabei die „Eigenschwingungen“ des Systems dar, die partikuläre Lösung $\mathbf{x}_p(t)$ ist die „Antwort“ des Systems auf die Störfunktion. Bei den meisten Anwendungen muss das „Eigenleben“ des Systems mit fortschreitender Zeit abklingen. Dies ist gewährleistet, wenn alle Eigenwerte in der linken Halbebene der komplexen Zahlenebene liegen.

Ein System heißt asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte gilt: $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + \overbrace{+2\cos 2t - 2\sin 2t}^{r_1} \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + \overbrace{-\cos 2t - \sin 2t}^{r_2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

Bestimmen des Eigenvektors zu $\lambda_1 = 1 + 2i$: $\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbf{x}}_H(t) = \mathbf{a}_1 \cdot e^{i(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t (\cos 2t + i \sin 2t) = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} + i \cdot e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(2)}}$$

Die homogene Lösung \mathbf{x}_H ergibt sich als Linearkombination von $\mathbf{x}^{(1)} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{x}}\}$,

$$\mathbf{x}^{(2)} = \text{Im}\{\tilde{\mathbf{x}}\} : \mathbf{x}_H(t) = C_1 \cdot \mathbf{x}^{(1)} + C_2 \cdot \mathbf{x}^{(2)} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) \\ C_1 \cos(2t) - C_2 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Der Störansatz $\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(2t) + B_1 \sin(2t) \\ A_2 \cos(2t) + B_2 \sin(2t) \end{pmatrix}$ eingesetzt in $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}$ ergibt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2A_1 \sin(2t) + 2B_1 \cos(2t) \\ -2A_2 \sin(2t) + 2B_2 \cos(2t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_p} = \underbrace{\begin{pmatrix} (A_1 + 4A_2) \cos(2t) + (B_1 + 4B_2) \sin(2t) \\ (-A_1 + A_2) \cos(2t) + (-B_1 + B_2) \sin(2t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich für Sinus- und Kosinusglieder bei beiden Komponenten führt auf ein lineares Gleichungssystem für $\{A_1, B_1, A_2, B_2\}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & | & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -4 & | & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = -2 \\ B_1 = 2 \\ A_2 = 1 \\ B_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -2 \cos(2t) + 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

1.6.4 Numerische Verfahren

Der Grundgedanke numerischer Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ist, die sich kontinuierlich ändernde Steigung durch die Steigung(en) an einem oder mehreren diskreten Punkten zu ersetzen. Als Näherung ergibt sich ein Polygonzug durch die Stützstellen $\{(x_i, y_i)\}$.

Beim Eulerverfahren wird die Steigung nur am Ausgangspunkt des jeweiligen Teilintervalls abgegriffen und man erhält den Algorithmus:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned}$$

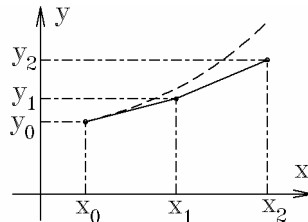


Bild 1.74 Eulerverfahren

Das Eulerverfahren ist relativ ungenau. Zur Verbesserung der Genauigkeit greift man in der „Nähe“ der vermuteten Lösungskurve weitere Steigungen (= rechte Seite der Differentialgleichung) ab und errechnet daraus eine mittlere Steigung für das Teilintervall $[x_n, x_{n+1}]$.

Gebräuchlich ist der klassische Runge-Kutta-Algorithmus, der an vier Stellen Steigungen abgreift und daraus für den Gesamtschritt einen gewichteten arithmetischen Mittelwert errechnet. Pro Schritt sind vier Funktionsauswertungen der rechten Seite notwendig.

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \text{ „Eulerschritt“} \\ k_2 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned}$$

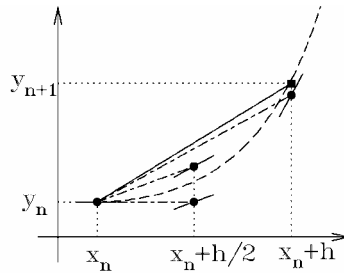


Bild 1.75 Runge-Kutta-Verfahren

Bild: $y' = 2(x - \frac{1}{5})(y + \frac{1}{2})$; $y(\frac{1}{5}) = \frac{1}{2}$; $h = 1$

Diese Vorgehensweise ist direkt auf Differentialgleichungssysteme übertragbar.

Weiterführende Literatur

Bartsch, H.-J.: Taschenbuch mathematischer Formeln. 21. Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag 2007
 Burg, K.; Haf, H.; Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure. 5 Bände. Stuttgart: Teubner Verlag 2002, 2003, 2006, 2007
 Dietmaier, C.: Mathematik für Wirtschaftsingenieure. Leipzig: Fachbuchverlag 2005
 Dürschmabel, K.: Mathematik für Ingenieure. Stuttgart: Teubner Verlag 2004
 Erven, J.; Schwägerl, D.: Mathematik für Ingenieure. 2. Auflage. München: Oldenbourg Verlag 2002
 Fetzer, A.; Fränkel, H.: Mathematik. Lehrbuch für naturwissenschaftliche Studiengänge. 2 Bände. Berlin: Springer Verlag 2004, 1999
 Leupold, W.: Mathematik – ein Studienbuch für Ingenieure. 2 Bände. Leipzig: Fachbuchverlag 2003, 2006

- Papula, L.:* Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 3 Bände. Wiesbaden: Vieweg Verlag 2001
- Preuß, W.; Wenisch, G.:* Lehr- und Übungsbuch Mathematik. 3 Bände. Leipzig: Fachbuchverlag 2003, 2003, 2001
- Rießinger, Th.:* Mathematik für Ingenieure. Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium. Berlin: Springer Verlag 2005
- Schwarz, H.:* Numerische Mathematik. 4. Auflage. Stuttgart: Teubner Verlag 2001
- Schäfer, W.; Trippler, G.:* Kompaktkurs Ingenieurmathematik. 3. Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag 2004
- Stingl, P.:* Mathematik für Fachhochschulen. 7. Auflage. München Wien: Carl Hanser Verlag 2003

2

Physik

Prof. Dr. rer. nat. Dr. h.c. Rolf Martin
Hochschule Esslingen

2.1 Einleitung, Stellung der Physik

Die Physik ist die Grundlage der Technik. Der Ingenieur setzt im Rahmen seiner Arbeit physikalische Gesetze zur Lösung technischer Probleme ein. Die in der Physik seit Jahrhunderten entwickelte Methode der Modellierung komplexer Zusammenhänge und Reduktion auf einfache Systeme hat sich dabei als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Verschiedene Teilgebiete der Physik erfuhren bei der Ingenieurausbildung eine derartige Spezialisierung, dass sie aus dem Gesamtverband der Physik herausgelöst wurden und als eigenständiges Fachgebiet behandelt werden. So enthält auch dieses Buch spezielle Abschnitte für die Technische Mechanik, die Strömungsmechanik, die Thermodynamik, die Elektrotechnik/Elektronik und die Festkörperphysik (Abschn 4.7, 4.8, 11.1, 16.2). Daher wird in diesem Abschnitt Physik nach einer Übersicht vor allem auf die Akustik und die Optik eingegangen.

Die Aufteilung der Physik in ihre verschiedenen Gebiete ist in Bild 2.1 schematisch dargestellt. Zu jedem Teilgebiet sind zwei praktische Anwendungen aufgeführt, die Erkenntnisse aus der Physik in die Technik umsetzen.

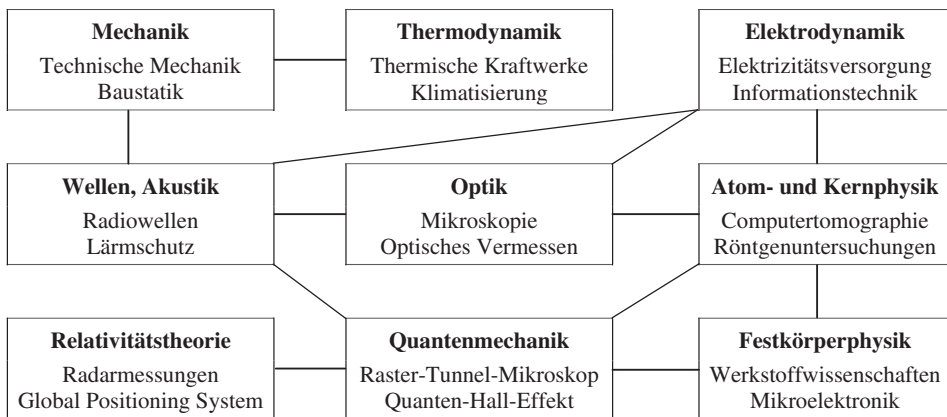


Bild 2.1 Teilgebiete der Physik mit den wichtigsten Querverbindungen und einigen technischen Anwendungen

2.2 Mechanik

Die Grundlagen der Mechanik wurden von Newton geschaffen, auf dessen Axiomensystem die Mechanik und letztlich die ganze klassische Physik aufbaut (Tabelle 2.1).

Die Stärke der Physik ist die saubere Definition physikalischer Systeme. Der Zustand eines Systems wird durch Zustandsgrößen beschrieben, für die Gesetze bezüglich deren Änderung bzw. Erhaltung gefunden wurden. Als Beispiele dienen die Begriffe **Energie**, **Impuls** und **Drehimpuls** und die für sie gefundenen **Erhaltungssätze**, die in Tabelle 2.2 dargestellt sind.

Tabelle 2.1 Newton'sche Axiome

Axiom	Beschreibung	Gleichung
1. Axiom Trägheitsprinzip	Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, falls er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, diesen Bewegungszustand zu ändern	$F = 0$ $\rightarrow v = \text{const}$
2. Axiom Dynamisches Grundgesetz	Die Änderung der Bewegungsgröße (Impuls) ist proportional zur Kraft und hat die Richtung, in der die Kraft wirkt	$F = \frac{d}{dt}(mv)$ für $m = \text{const} \rightarrow F = ma$
3. Axiom Wechselwirkungsprinzip	Zu jeder Aktion existiert eine gleich große entgegengesetzte Reaktion. Die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Körpern sind stets entgegengesetzt gerichtet und gleich groß	$F_{1,2} = -F_{2,1}$

Tabelle 2.2 Erhaltungssätze der Mechanik

Energiesatz	Impulssatz	Drehimpulssatz
Die Gesamtenergie eines Systems ändert sich in dem Maße, wie durch äußere Kräfte Arbeit am System verrichtet wird $dE_{\text{ges}} = d(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = dW$	Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses $p = \sum p_k$ eines Systems ist proportional zur resultierenden äußeren Kraft F_a $\frac{dp}{dt} = F_a = \sum F_{a,k}$	Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses (Drall) $L = \sum L_k$ eines Systems ist proportional zum resultierenden äußeren Drehmoment M_a $\frac{dL}{dt} = M_a = \sum M_{a,k}$
Energieerhaltungssatz	Impulserhaltungssatz	Drehimpulserhaltungssatz
In einem abgeschlossenen System, in dem nur konservative Kräfte wirken, bleibt die Gesamtenergie konstant $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}$ $dE_{\text{kin}} = -dE_{\text{pot}}$	Haben die auf ein System einwirkenden äußeren Kräfte keine Resultierende, dann bleibt der Gesamtimpuls des Systems konstant $p = \sum p_k = \text{const}$, falls $F_a = \sum F_{a,k} = 0$	Ist die Vektorsumme der äußeren Drehmomente null, dann bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant $L = \sum L_k = \text{const}$, falls $M_a = \sum M_{a,k} = 0$

2.3 Akustik

Die Akustik behandelt die Aussendung, die Übertragung und den Empfang von Schallwellen; das sind mechanische Wellen, die sich in elastischen Stoffen (Gase, Flüssigkeiten und Festkörper) ausbreiten. Das menschliche Ohr ist im Stande, Frequenzen zwischen etwa 16 Hz und 16 kHz wahrzunehmen. Schall mit Frequenzen unterhalb 16 Hz wird als **Infraschall**, oberhalb 16 kHz als **Ultraschall** bezeichnet. Die wichtigsten Formelzeichen sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

Tabelle 2.3 Wichtige Formelzeichen der Akustik

Formelzeichen	SI-Einheit	Bedeutung
A	m^2	äquivalente Absorptionsfläche
c	m/s	Schallgeschwindigkeit
f	Hz	Frequenz
I	W/m^2	Intensität
L	dB	Pegel
p	$\text{Pa} = \text{N/m}^2$	Druck
P	W	Leistung
S	m^2	Fläche
t	s	Zeit
Z	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	Schallkennimpedanz
λ	m	Wellenlänge
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz

2.3.1 Schallwellen

Je nach Übertragungsmedium wird ein Schallereignis als Luftschall, Flüssigkeitsschall oder Körperschall bezeichnet. Der Wellentyp hängt ebenfalls vom Übertragungsmedium ab. In Gasen und Flüssigkeiten können sich lediglich Dichteschwankungen, d. h. **Longitudinalwellen** (Schwingungsrichtung parallel zur Fortpflanzungsrichtung) ausbreiten. In Festkörpern, die Schubspannungen aufnehmen können, laufen auch **Transversalwellen** (Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, z. B. Schub-, Torsions- und BiegeWellen).

2.3.1.1 Schallgeschwindigkeit

Breiten sich beispielsweise Dichteschwankungen (Druckschwankungen) als Longitudinalwelle längs der x -Achse in Luft aus, dann gilt für die raum-zeitliche Abhängigkeit des Druckes p die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Nach d'Alembert wird diese Differenzialgleichung gelöst von Funktionen des Typs $p(x, t) = p(x \pm ct)$. Insbesondere ist bei sinusförmiger Erregung die Lösung

$$p(x, t) = p_s + p_w = p_s + \hat{p} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

p_s ist der statische Luftdruck, p_w der **Schallwechseldruck** mit der Amplitude \hat{p} . Die Kreisfrequenz ω und die **Wellenzahl** k sind zeitlich und räumlich analog definiert:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Während die Periodendauer T eine zeitliche Periode beschreibt, steht die **Wellenlänge** λ für eine räumliche Periode. Die Frequenz f und die Wellenlänge λ sind mit der **Phasengeschwindigkeit** c der Welle verknüpft gemäß

$$c = \lambda f = \omega/k$$

Ergebnisse für die Phasengeschwindigkeit c verschiedener Wellentypen sind in Tabelle 2.4 zusammengestellt.

Tabelle 2.4: Schallgeschwindigkeit für verschiedene Wellentypen

Wellentyp	Phasengeschwindigkeit	Erläuterungen
Longitudinalwellen in Gasen	$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT}$	κ Isentropenexponent p Druck ρ Dichte
Longitudinalwellen in Flüssigkeiten	$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	R spezifische Gaskonstante T thermodynamische Temperatur
Longitudinalwellen in dünnen Stäben	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	K Kompressionsmodul E Elastizitätsmodul μ Poisson-Zahl
Longitudinalwellen in unbegrenzten Körpern	$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$	G Schubmodul I Flächenträgheitsmoment A Fläche
Torsionswellen in dünnen Rundstäben	$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	λ Wellenlänge ω Kreisfrequenz σ Zugspannung
Biegewellen in dünnen Stäben	$c = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}$	Ein Stab gilt als dünn, wenn die Querdimensionen kleiner sind als die Wellenlänge
Biegewellen in Platten Plattendicke $h < \lambda$ Plattenbreite $b \gg \lambda$	$c = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(1-\mu^2)}} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A(1-\mu^2)}}$	
Seilwellen	$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$	

2.3.1.2 Schallfeldgrößen

Alle Wellenphänomene werden durch eine Wellengleichung derselben Struktur beschrieben. So gilt beispielsweise für die Auslenkung y der Atome eines Festkörpers, in dem eine Welle in x -Richtung läuft,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Eine Lösung dieser Wellengleichung ist eine ebene Welle der Form

$$y(x, t) = \hat{y} \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Die Geschwindigkeit $v = \partial y / \partial t$ der schwingenden Teilchen wird als **Schnelle** bezeichnet und beträgt

$$v(x, t) = \hat{y} \omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \hat{v} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Die **Schnellenamplitude** $\hat{v} = \hat{y}\omega$ ist bei einer ebenen Welle zu jeder Zeit und an jedem Ort proportional zur Amplitude \hat{p} des Schallwechseldruckes:

$$\hat{v} = \frac{1}{\rho c} \hat{p} = \frac{\hat{p}}{Z}$$

Die Konstante

$$Z = \rho c = \frac{\hat{p}}{\hat{v}}$$

wird als **Wellenwiderstand** oder **Schallkennimpedanz** bezeichnet. Wie beim Ohm'schen Gesetz der Elektrotechnik verknüpft der Wellenwiderstand Ursache (Spannung, Druck) mit Wirkung (Strom, Schnelle). Tabelle 2.5 zeigt einige Zahlenwerte.

Tabelle 2.5 Dichte ρ , Schallgeschwindigkeit c von Longitudinalwellen sowie Schallkennimpedanz Z_0 einiger Stoffe beim Normdruck $p_n = 101,3$ kPa

Material		ρ in kg/m ³	c in m/s	Z_0 in kg/(m ² · s)
Luft	0 °C	1,29	331	427
Luft	20 °C	1,21	344	416
Luft	40 °C	1,13	387	436
Wasser	0 °C	1000	1403	$1,40 \cdot 10^6$
Wasser	20 °C	988	1483	$1,47 \cdot 10^6$
Wasser	40 °C	992	1529	$1,52 \cdot 10^6$
Stahl		7850	6000	$47,1 \cdot 10^6$
Beton		2200	4200	$9,20 \cdot 10^6$
Marmor		2600	6200	$16,1 \cdot 10^6$
Glas		2500	5300	$13,3 \cdot 10^6$

Schallaufnehmer (Mikrofone) messen den **Effektivwert** des Schallwechseldruckes:

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p_w^2(x, t) dt}$$

Bei sinusförmigen Schallwellen gilt

$$p_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}$$

Werden an einem Ort n Schallwellen aus verschiedenen (nicht kohärenten) Quellen überlagert, dann ist der Effektivwert des Schallwechseldruckes

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{i,\text{eff}}^2}$$

Die **Energiedichte** $w = dE/dV$ in einer Schallwelle ist proportional zum Quadrat der Kreisfrequenz ω sowie der Schwingungsamplitude \hat{y} :

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho c^2} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z_0 c}$$

Die Energiestromdichte oder **Intensität** I ist die auf die Fläche S bezogene Leistung P , die von einer Schallwelle übertragen wird:

$$I = \frac{P}{S} = wc = \frac{1}{2} \rho \omega^2 c^2 \hat{y}^2 = \frac{P_{\text{eff}}^2}{Z_0}$$

Die Schall-Leistung P , die eine Schallquelle aussendet, ergibt sich, wenn die Intensität auf einer geschlossenen Oberfläche (z. B. Kugel) um die Quelle aufintegriert wird (Tabelle 2.6):

$$P = \int_S I \, dS$$

Die Intensität ist in einer idealen (verlustlosen) ebenen Welle konstant. Infolge der Verteilung der Energie auf immer größere Flächen nimmt aber bei anderen Wellenformen die Intensität mit zunehmendem Abstand von der Quelle ab. Bild 2.2 zeigt eine Zusammenstellung für linien- und punktförmige Quellen.

Tabelle 2.6 Schall-Leistung und Schall-Leistungspegel (Abschn. 2.3.1.3) einiger Quellen

Schallquelle	Leistung P in W	Leistungspegel L_w in dB
Unterhaltungssprache (Mittelwert)	$1 \cdot 10^{-5}$	70
Menschliche Stimme (Höchstwert)	$3 \cdot 10^{-3}$	95
Flügel (fortissimo)	$2 \cdot 10^{-1}$	113
Trompete (fortissimo)	$3 \cdot 10^{-1}$	115
Pauke, Orgel (fortissimo)	$1 \cdot 10^1$	130
Großlautsprecher	$1 \cdot 10^2$	140
Düsenflugzeug	$1 \cdot 10^5$	170

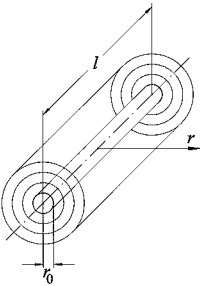
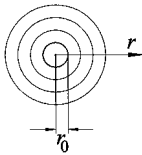
	Lineare Schallquelle	Punktförmige Schallquelle
Geometrie		
Wellenform	Zylinderwelle	Kugelwelle
Amplitude des Schallwechseldrucks	$\hat{p}(r) = \hat{p}(r_0) \sqrt{\frac{r_0}{r}}$	$\hat{p}(r) = \hat{p}(r_0) \frac{r_0}{r}$
Schallintensität	$I(r) = I(r_0) \frac{r_0}{r} = \frac{P/l}{2\pi r}$	$I(r) = I(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{P}{4\pi r^2}$
Abnahme des Schallpegels bei Verdoppelung des Abstandes von der Quelle	$\Delta L = 3 \text{ dB}$	$\Delta L = 6 \text{ dB}$

Bild 2.2 Geometrieabhängigkeit von Schallfeldgrößen im Fernfeld

Mit zunehmender Entfernung von der Schallquelle nimmt die Intensität infolge von **Dämpfung** ab. Dabei wird Schwingungsenergie durch innere Reibung, polytrope Zustandsänderungen und Relaxationserscheinungen in Wärme umgewandelt. Für die Abnahme der Intensität I mit zunehmendem Abstand r von der Quelle gilt

$$I(r) = I(r_0) e^{-\alpha(r-r_0)}$$

Der **Dämpfungskoeffizient** α ist abhängig von der Frequenz sowie von Eigenschaften des Übertragungsmediums. Bild 2.3 zeigt eine Darstellung des Luftdämpfungskoeffizienten. Bei $f = 1$ kHz beträgt der Dämpfungskoeffizient $\alpha \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, was einer Pegelabnahme von $\Delta L \approx 4,8 \text{ dB/km}$ entspricht.

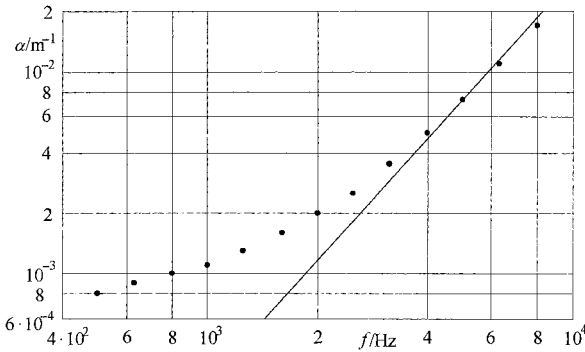


Bild 2.3 Dämpfungskoeffizient α von Luft bei 20 °C, 70 % relativer Feuchte und 101,3 kPa Luftdruck in Abhängigkeit von der Frequenz f . Die Gerade entspricht einer quadratischen Abhängigkeit $\alpha \sim f^2$

Schallwellen an Grenzflächen

An der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichen Schallkennimpedanzen wird ein Teil der einfallenden Welle reflektiert, und ein Teil durchgelassen (transmittiert). Bei senkrechtem Einfall müssen die Intensitäten der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen aus Gründen der Energieerhaltung folgende Bedingung erfüllen:

$$I_e = I_r + I_t$$

Aus der Stetigkeitsbedingung für die Schallschnellen

$$\hat{v}_e + \hat{v}_r = \hat{v}_t$$

folgen schließlich die in Bild 2.4 angegebenen Beziehungen für den **Reflexions-** und **Transmissionsgrad** bei senkrechtem Einfall.

	Reflexionsfaktor:	$r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_e} = \frac{\hat{v}_r}{\hat{v}_e} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$
	Reflexionsgrad:	$\rho = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$
	Transmissionsgrad:	$\tau = \frac{I_t}{I_e} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1 - \rho$

Bild 2.4 Reflexion und Transmission von Schallwellen an Grenzflächen, Beziehungen bei senkrechtem Einfall

An schallharten Grenzflächen ($Z_2 \gg Z_1$) wird die Welle praktisch vollständig reflektiert; dabei erleidet die Schnelle einen Phasensprung um π : $\hat{v}_r = -\hat{v}_e$. An schallweichen Grenzflächen ($Z_2 \ll Z_1$) wird die Welle ohne Phasensprung reflektiert: $\hat{v}_r = \hat{v}_e$. In beiden Fällen bildet sich vor der Grenzfläche eine **stehende Welle** aus mit ortsfesten Knoten und Bäuchen jeweils im Abstand einer halben Wellenlänge (Bild 2.5).

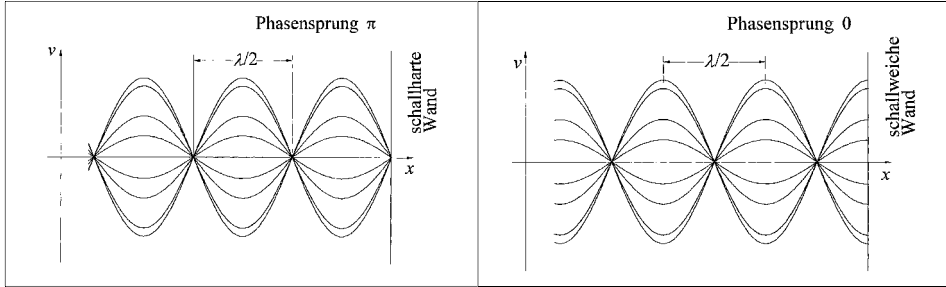


Bild 2.5 Stehende Schallwellen vor schallharter bzw. schallweicher Wand

2.3.1.3 Pegelmaße

Die im letzten Abschnitt definierten Schallfeldgrößen Schalldruck, -schnelle, -intensität und -leistung variieren in der Regel über viele Zehnerpotenzen. Um handliche Größen zu erhalten, werden sie üblicherweise als logarithmische Pegelmaße in Dezibel (dB) angegeben. Dies kommt auch der etwa logarithmischen Empfindung des menschlichen Ohres entgegen. In Tabelle 2.7 sind die Definitionsgleichungen mit den in DIN 45630 festgelegten Bezugswerten zusammengestellt. Bei einer Schallkennimpedanz von $Z_0 = 400 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, wie sie Luft bei Raumtemperatur etwa aufweist (Tabelle 2.5), sowie einer Bezugsfläche von $S_0 = 1 \text{ m}^2$ ergeben sich gleiche Pegelwerte.

Tabelle 2.7: Schallpegel

Pegel	Definition	Bezugsgröße
Schalldruck	$L_p = 10 \lg \frac{p_{\text{eff}}^2}{p_{\text{eff},0}^2} \text{ dB} = 20 \lg \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \text{ dB}$	$p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$
Schallschnelle	$L_v = 10 \lg \frac{v_{\text{eff}}^2}{v_{\text{eff},0}^2} \text{ dB} = 20 \lg \frac{v_{\text{eff}}}{v_{\text{eff},0}} \text{ dB}$	$v_{\text{eff},0} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Schallintensität	$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}$	$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
Schallleistung	$L_W = 10 \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB}$	$P_0 = 10^{-12} \text{ W}$

Pegel dürfen nicht algebraisch addiert werden! Lediglich die Intensitäten verschiedener Schallwellen bzw. die Quadrate der Schalldrücke können addiert werden. Man muss also beispielsweise aus verschiedenen Intensitätspegeln L_i zunächst die Intensitäten berechnen gemäß

$$I_i = I_0 \cdot 10^{\frac{L_i}{10 \text{ dB}}}$$

diese dann addieren und wieder in einen Pegel umwandeln:

$$L_{ges} = 10 \lg \frac{I_{ges}}{I_0} \text{ dB} = 10 \lg \left(\sum 10^{\frac{L_i}{10}} \right) \text{ dB}$$

Beispiel

Drei Schallquellen erzeugen jeweils die Pegel $L_1 = 60 \text{ dB}$, $L_2 = 62 \text{ dB}$ und $L_3 = 64 \text{ dB}$. Der Gesamtpegel ist dann

$$L_{ges} = 10 \lg(10^6 + 10^{6.2} + 10^{6.4}) \text{ dB} = 67,1 \text{ dB}$$

2.3.2 Schallempfindung

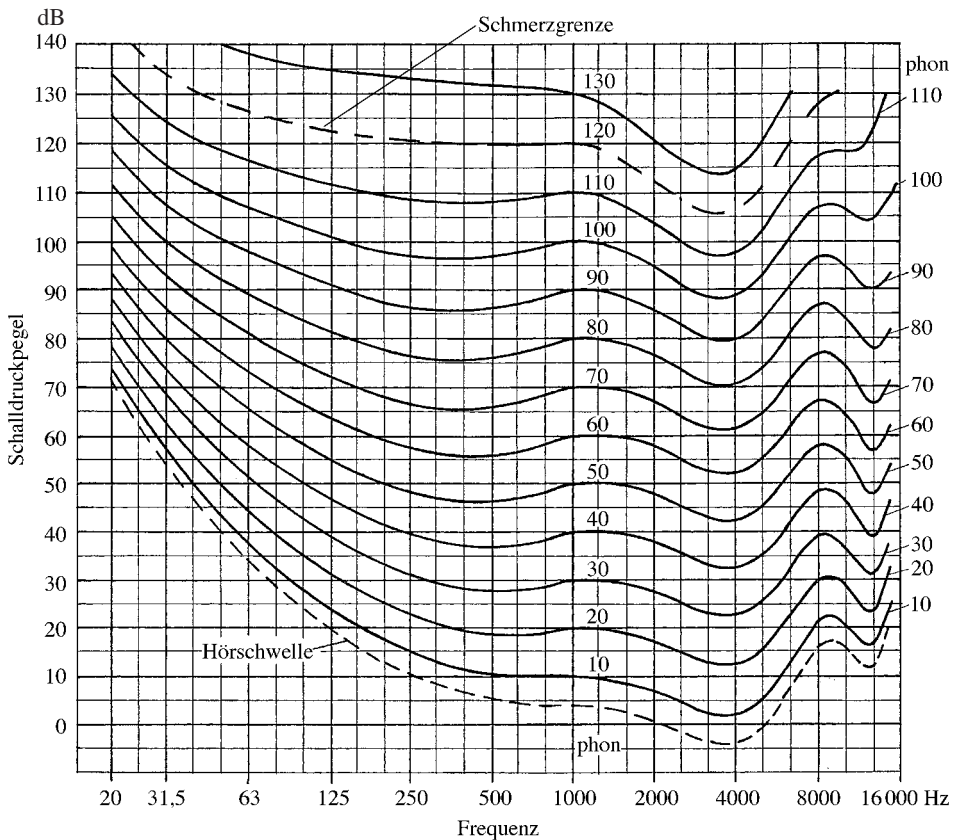


Bild 2.6 Kurven gleicher Lautstärkepegel für Sinustöne im freien Schallfeld bei zweiohrigem Hören

Lautstärke

Infolge der frequenzabhängigen Empfindlichkeit des Ohrs führen gleiche Schallpegel bei unterschiedlichen Frequenzen zu unterschiedlichen Schallempfindungen. Ein Maß für die Stärke der subjektiven Wahrnehmung ist der **Lautstärkepegel**. Nach DIN 45630 beträgt der Lautstärkepegel

eines Schalls n phon, wenn von normal hörenden Beobachtern der Schall als gleich laut beurteilt wird wie ein Sinuston der Frequenz 1 kHz, dessen Schalldruckpegel n dB beträgt. Der Zahlenwert des Lautstärkepegels in phon bei der Frequenz $f = 1$ kHz ist also gleich dem Schalldruckpegel in dB (Bild 2.6):

$$L_S (1 \text{ kHz})/\text{phon} = L_p (1 \text{ kHz})/\text{dB}$$

Lautheit

Der Lautstärkepegel L_S steigt nicht proportional zur empfundenen Lautstärke an. Vielmehr entspricht eine empfundene Verdoppelung der Lautstärke einem Zuwachs des Lautstärkepegels um 10 phon. Ein proportional zur Schallwahrnehmung ansteigendes Maß ist die **Lautheit** S , die in sone gemessen wird (Bild 2.7):

$$S = 2^{0,1 \left(\frac{L_S}{\text{phon}} - 40 \right)} \text{ sone}$$

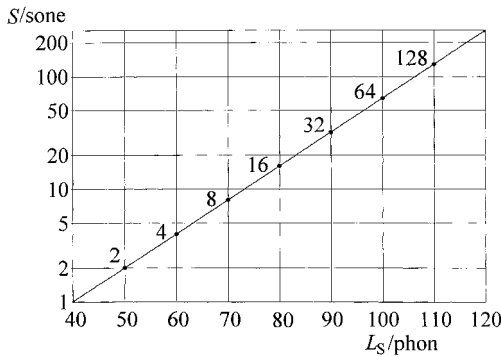


Bild 2.7 Zusammenhang zwischen der Lautheit S in sone und der Lautstärke L_S in phon

Bewertete Schallpegel

Aus Bild 2.6 geht hervor, dass zum Beispiel ein Ton der Frequenz $f = 63$ Hz, der den Lautstärkepegel $L_S = 80$ phon hervorbringt, einen Schalldruckpegel von $L_p = 89$ dB besitzt. Für die gleiche Lautstärke genügt aber bei $f = 500$ Hz bereits der Schalldruckpegel 76 dB oder 80 dB bei $f = 1$ kHz. Der **bewertete Schallpegel** berücksichtigt diese frequenzabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs, indem zu den terz- oder oktavweise gemessenen Schallpegeln L_i eine frequenzabhängige Abschwächung Δ_i addiert wird. So ist beispielsweise der A-bewertete Schallpegel L_A eines Schallspektrums

$$L_A = 10 \lg \left(\sum 10^{\frac{L_i + \Delta_{A,i}}{10 \text{ dB}}} \right) \text{ dB(A)}$$

Die **Pegelabschwächungen** Δ_i sind in DIN EN 60651 festgelegt und in Bild 2.8 dargestellt. Die A-Bewertung, die vorzugsweise verwendet wird, entspricht etwa der inversen 40-phon-Kurve von Bild 2.6 und sollte für Lautstärken unter 90 phon benutzt werden. Für gehörschädigenden Lärm von über 100 phon wird die C-Bewertung herangezogen.

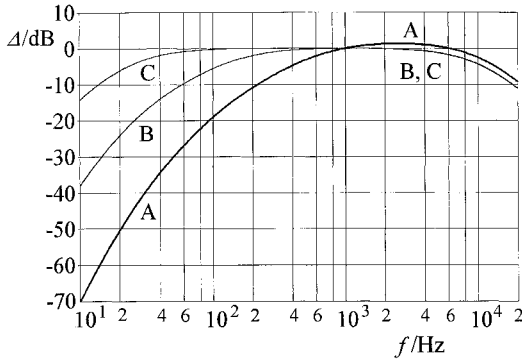


Bild 2.8 Pegelabschwächungen Δ bei A-, B- und C-Bewertung

In DIN EN 60651 sind analytische Ausdrücke angegeben, mit denen man die Pegelabschwächungen berechnen kann. Zahlenwerte für die A-Bewertung zeigt Tabelle 2.8. Dabei ist das Frequenzband in Terzintervalle eingeteilt. Für die Mittenfrequenzen der **Terzfilter** gilt

$$f_m = \sqrt{f_o f_u} = 10^{0,1n} \text{ Hz}, \text{ wobei } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tabelle 2.8 Schallpegelabschwächung Δ_A für A-Bewertung, untere (f_u) und obere (f_o) Grenzfrequenz sowie Mittenfrequenz (f_m) von Terzfiltern (gerundete Nennfrequenzen nach DIN 45401)

f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A dB	f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A dB
14,1	17,8	16	-56,7	562	708	630	-1,9
17,8	22,4	20	-50,5	708	891	800	-0,8
22,4	28,2	25	-44,7	891	1 122	1 000	0
28,2	35,5	31,5	-39,4	1 122	1 413	1 250	+0,6
35,5	44,7	40	-34,6	1 413	1 778	1 600	+1,0
44,7	56,2	50	-30,2	1 778	2 239	2 000	+1,2
56,2	70,7	63	-26,2	2 239	2 818	2 500	+1,3
70,7	89,1	80	-22,5	2 818	3 548	3 150	+1,2
89,1	112	100	-19,1	3 548	4 467	4 000	+1,0
112	141	125	-16,1	4 467	5 623	5 000	+0,5
141	178	160	-13,4	5 623	7 079	6 300	-0,1
178	224	200	-10,9	7 079	8 913	8 000	-1,1
224	282	250	-8,6	8 913	11 220	10 000	-2,5
282	355	315	-6,6	11 220	14 130	12 500	-4,3
355	447	400	-4,8	14 130	17 780	16 000	-6,6
447	562	500	-3,2	17 780	22 390	20 000	-9,3

Die obere und die untere Grenzfrequenz stehen im Verhältnis einer Terz: $f_o/f_u = \sqrt[3]{2} = 1,26$, die Bandbreite ist $\Delta f = 0,232 f_m$.

Im Allgemeinen ist die Auflösung eines Terzfilters ausreichend. Für Grobanalysen werden Oktavfilter eingesetzt.

Mittelwerte

Zur einfachen Beschreibung zeitlich schwankender Pegel wird ein **Mittelungspegel** benutzt. Nach DIN 45641 wird der **äquivalente Dauerschallpegel** L_{eq} empfohlen, der über die Mittelungsdauer T alle Geräusche gemäß ihrer Stärke und Dauer erfasst:

$$L_{\text{eq}} = 10 \cdot \lg \left[\frac{1}{T} \int_0^T 10^{\frac{L_A(t)}{10 \text{ dB}}} dt \right] \text{ dB(A)} = 10 \cdot \lg \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \left(t_i \cdot 10^{\frac{L_{A,i}}{10 \text{ dB}}} \right) \right] \text{ dB(A)}$$

2.3.3 Raumakustik

In Räumen erfährt ein Hörer Schalleindrücke sowohl vom direkten als auch vom indirekten (gestreuten) Schall. Die **Hörsamkeit** eines Raumes ist abhängig von den Intensitäten und Laufzeiten des direkten und indirekten Schalls. So sollte beispielsweise in einem Veranstaltungsraum die Schallenergie, die in den ersten 50 ms bei den Hörern ankommt, mindestens 1/20 der durch Nachhall später ankommenden Energie sein.

Pegel des diffusen Schallfeldes

Vielfachreflexionen im Raum bewirken, dass die Energiedichte des Schalls im Mittel überall gleich groß ist. Ein solches Schallfeld wird als **diffuses Schallfeld** bezeichnet. Ist in einem Raum die Intensität des diffusen Schalls I_{diffus} , dann beträgt die gesamte Schallleistung, die von den Wänden des Raumes absorbiert wird,

$$P_{\text{ges}} = \frac{1}{4} I_{\text{diffus}} \sum S_i \alpha_i = \frac{1}{4} I_{\text{diffus}} A$$

Die **äquivalente Absorptionsfläche** A ist eine fiktive Fläche mit dem Absorptionsgrad $\alpha = 1$, welche die gleiche Absorption besitzt wie die gesamte Oberfläche des Raumes mit allen darin befindlichen Gegenständen: $A = \sum S_i \alpha_i$. Der Absorptionsgrad α_i der Oberfläche S_i ist definiert als das Verhältnis von absorbiertener Intensität I_a zu einfallender Intensität I_e : $\alpha = I_a/I_e$.

Im stationären Gleichgewicht muss die Leistung P einer Schallquelle im Raum von den Oberflächen vollständig geschluckt (absorbiert) werden. Damit gilt

$$I_{\text{diffus}} = \frac{4P}{A}$$

und für den Schallintensitätspegel des diffusen Schallfeldes mit $S_0 = 1 \text{ m}^2$

$$L_{\text{diffus}} = L_W - 10 \lg \frac{A}{4S_0} \text{ dB}$$

Der diffuse Schallpegel ist also umso kleiner, je größer die äquivalente Absorptionsfläche ist. In üblichen Wohnräumen kann man mit $A \approx 10 \text{ m}^2$ rechnen.

Beispiel

Die Leistung einer Schallquelle ist $P = 1 \text{ mW}$. Bei einer äquivalenten Absorptionsfläche von $A = 10 \text{ m}^2$ ergibt sich ein diffuser Schallintensitätspegel von

$$L_{\text{diffus}} = 10 \lg \frac{10^{-3} \text{ W}}{10^{-12} \text{ W}} \text{ dB} - 10 \lg \frac{10 \text{ m}^2}{4 \text{ m}^2} \text{ dB} = 90 \text{ dB} - 4 \text{ dB} = 86 \text{ dB}$$

Hallradius

Wird in der Mitte eines Raumes eine punktförmige Schallquelle mit der Leistung P aufgestellt, dann nimmt die Intensität mit dem Quadrat des Abstandes ab (Bild 2.2):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Derjenige Abstand r_H von der Quelle, bei dem die Intensität $I(r_H)$ des Direktschalls gleich ist der Intensität I_{diffus} des diffusen Schallfeldes, wird als **Hallradius** bezeichnet (Bild 2.9):

$$r_H = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$$

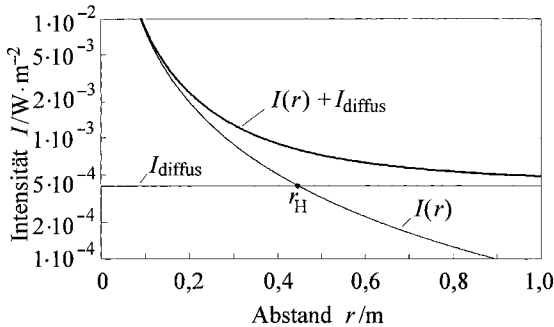


Bild 2.9 Zur Definition des Hallradius

Nachhallzeit

Wenn in einem Raum ein bestimmter Schallpegel herrscht, so gilt für den Zeitverlauf der im Raum vorhandenen Energie E nach Abschalten der Schallquelle

$$E(t) = E(0) e^{-\frac{cA}{4V} t}$$

mit V : Rauminhalt, c : Schallgeschwindigkeit und A : äquivalente Absorptionsfläche.

Eine exponentielle Abnahme der Schallenergie bedeutet, dass der Schallpegel L linear mit der Zeit abnimmt (Bild 2.10).

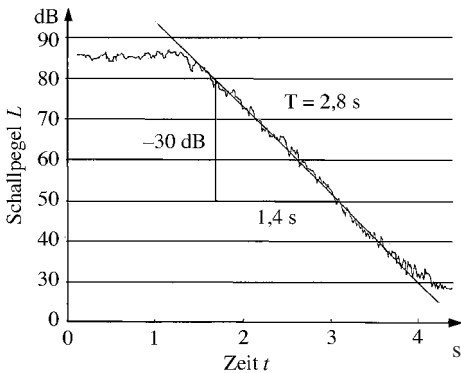


Bild 2.10 Bestimmung der Nachhallzeit eines Konzertsalles aus dem Schallpegelabfall des diffusen Schallfeldes

Die **Nachhallzeit** T ist nach DIN 52216 die Zeit, in welcher der Schallpegel um $\Delta L = 60$ dB abnimmt. Damit gilt

$$T = \frac{24 \ln 10}{c} \cdot \frac{V}{A}$$

Für Luftschall mit $c = 340$ m/s beträgt die Nachhallzeit

$$T = 0,163 \frac{s}{m} \cdot \frac{V}{A}$$

Diese als **Sabine'sche Formel** bekannte Gleichung gestattet die Berechnung der äquivalenten Absorptionsfläche A aus der gemessenen Nachhallzeit T .

2.3.4 Körperschalldämmung

Die Körperschalldämmung hat die Aufgabe, die Einleitung von Körperschall in andere Bauteile (Böden, Fundamente) zu minimieren. Dazu werden in der Praxis schwingende Maschinen über elastische und dämpfende Lagerungen (Gummi-, Kork-, Schaumstoffmatten und Ähnliches) mit dem Boden verbunden. Ein solches schwingungsfähiges System ist schematisch in Bild 2.11 a) skizziert.

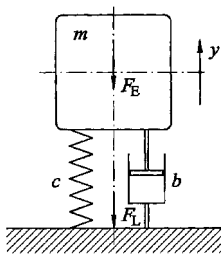
Wird beispielsweise durch eine innere Unwucht eine periodische erregende Kraft

$$F_E(t) = \hat{F}_E e^{j\omega t}$$

auf die Maschine ausgeübt, dann schwingt die Maschine mit der Auslenkung

$$y(t) = \hat{y} e^{j(\omega t - \gamma)t}$$

a)



b)

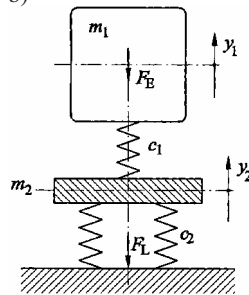


Bild 2.11 Modelle elastischer Maschinenaufstellungen: a) viskoelastisches Einmassensystem, b) doppelt-elastisches Zweimassensystem

wobei die Amplitude $\hat{y}(\omega)$ die aus der Schwingungslehre bekannte Resonanzkurve zeigt. Die Lagerkraft, die in den Boden eingeleitet wird, ist

$$F_L = cy + b\dot{y} ;$$

c ist die Federkonstante des Dämmmaterials und b die viskose Dämpfungskonstante. Für die Amplitude der Lagerkraft folgt:

$$\hat{F}_L = \hat{F}_E \sqrt{\frac{1 + 4D^2 (\omega/\omega_0)^2}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4D^2 (\omega/\omega_0)^2}}$$

Hier ist $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m}$ der Dämpfungsgrad und $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ die Eigenkreisfrequenz.

Die Reduzierung der Krafteinleitung in den Boden wird beschrieben durch den **Isolierwirkungsgrad**

$$\eta = \frac{\hat{F}_E - \hat{F}_L}{\hat{F}_E} = 1 - \frac{\hat{F}_L}{\hat{F}_E}$$

Bild 2.12 zeigt, dass eine Isolation erst wirksam wird für Frequenzen $\omega > \sqrt{2} \omega_0$. Je höher die Erregerfrequenz im Vergleich zur Eigenfrequenz, umso besser ist die Isolation der schwingenden Maschine gegenüber dem Untergrund. Für den dämpfungsfreien Fall ($D = 0$) gilt bei Erregerfrequenzen oberhalb der Eigenfrequenz

$$\eta = \frac{(\omega/\omega_0)^2 - 2}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}$$

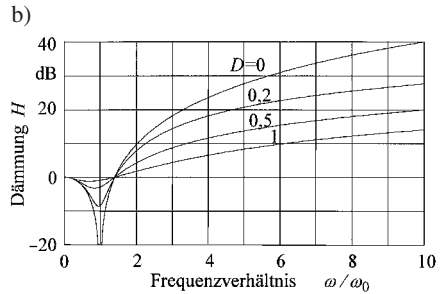
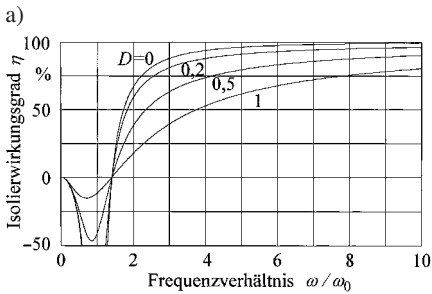


Bild 2.12 a) Isolierwirkungsgrad η und b) Dämmung H eines viskoelastischen Einmassensystems. Parameter ist der Dämpfungsgrad D

Vielfach wird die Reduktion der Krafteinleitung in den Boden auch in logarithmischem Maß als **Schwingungsdämmung H** in dB angegeben (Bild 2.12 b):

$$H = 20 \lg \frac{\hat{F}_E}{\hat{F}_L} \text{ dB} = 20 \lg \frac{1}{1-\eta} \text{ dB} = -20 \lg (1-\eta) \text{ dB}$$

Die Amplitude der in den Boden eingeleiteten Lagerkraft nimmt im dämpfungsfreien Fall für hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ mit steigender Frequenz ab gemäß $\hat{F}_L \sim 1/\omega^2$.

Mit anderen Worten: Die Dämmung H steigt mit 12 dB pro Oktave an. Eine noch stärkere Dämmung mit bis zu 18 dB pro Oktave bringt die doppelte elastische Aufstellung nach Bild 2.11 b).

2.4 Optik

Die Optik beschreibt Phänomene im Zusammenhang mit der Ausbreitung von Licht. Die wichtigsten Formelzeichen sind in Tabelle 2.9 zusammengestellt.

Tabelle 2.9: Wichtige Formelzeichen der Optik

Formelzeichen	SI-Einheit	Bedeutung
a, a'	m	Gegenstands-, Bildweite
c	m/s	Lichtgeschwindigkeit
D, D'	dpt = 1/m	gegenstand-, bildseitiger Brechwert
f, f'	m	gegenstand-, bildseitige Brennweite
n	1	Brechzahl
β'	1	Abbildungsmaßstab
Γ'	1	Vergrößerung
λ	m	Wellenlänge

2.4.1 Geometrische Optik

Obwohl Licht eine transversale elektromagnetische Welle darstellt, kann die Lichtausbreitung durch **Strahlen**, das sind Normalen auf Wellenflächen, beschrieben werden. Diese geometrische oder **Strahlenoptik** ist anwendbar, wenn Beugungseffekte vernachlässigbar sind, d. h., wenn die Abmessungen der Gegenstände und Blenden groß sind gegen die Wellenlänge des Lichts (sichtbares Licht hat Wellenlängen zwischen 380 und 780 nm).

Die Gleichungen, die im Folgenden dargestellt werden, gelten nur für den Fall der **Paraxialstrahlen**, das sind Strahlen, die gegenüber der optischen Achse kleine Winkel und Abstände aufweisen (**Gauß'sche Optik**).

2.4.1.1 Lichtstrahlen und Abbildung

Lichtstrahlen, die von einem Objektpunkt O ausgesandt werden, können durch ein optisches System wieder vereinigt werden. Der Schnittpunkt der Strahlen liefert entweder eine **reelle** oder eine **virtuelle Abbildung** (Bild 2.13).

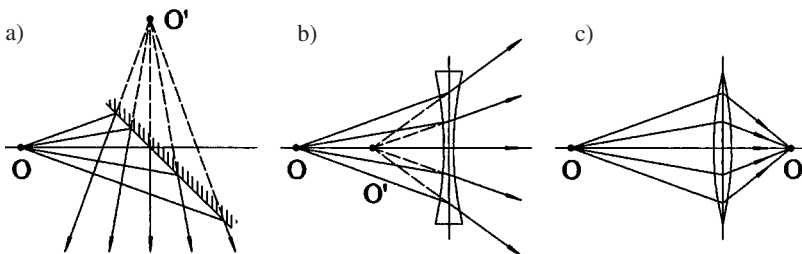


Bild 2.13 Formen der optischen Abbildung: a) und b) sind virtuelle, c) ist eine reelle Abbildung

Die Richtung eines Lichtstrahls wird beispielsweise durch **Reflexion** an einer spiegelnden Fläche oder durch **Brechung** an einer Grenzfläche verschiedener Materialien geändert.

2.4.1.2 Reflexion

Bei der Reflexion eines Lichtstrahls an einer ebenen Fläche gilt das **Reflexionsgesetz** (Bild 2.14):

Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene, wobei der Reflexionswinkel ε_r gleich dem Einfallswinkel ε ist.

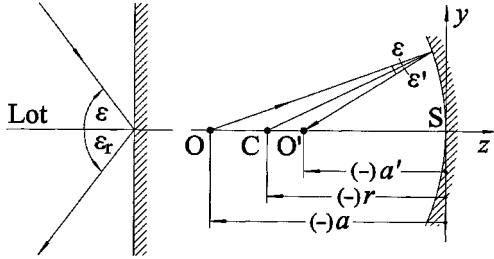


Bild 2.14 Reflexion von Lichtstrahlen an einer a) ebenen Fläche und b) konkaven Kugelfläche (Hohlspiegel). Die in Klammern gesetzten Vorzeichen sollen an die Vorzeichenkonvention erinnern.

Versieht man die Winkel mit Vorzeichen gemäß der in der technischen Optik üblichen Vorzeichenkonvention (DIN 1335), dann gilt: $\varepsilon = -\varepsilon_r$.

Wie Bild 2.13 a) zeigt, liefert ein Planspiegel ein virtuelles Bild. Dabei erscheint der Bildpunkt O' genau so weit hinter dem Spiegel, wie der Objektpunkt O vor dem Spiegel liegt.

Beim sphärischen **Hohlspiegel** (Bild 2.14b) wird ein Lichtstrahl, der von einem Objektpunkt O ausgeht, am Spiegel gemäß Reflexionsgesetz reflektiert, d. h. $\varepsilon = -\varepsilon'$. Der Schnittpunkt des reflektierten Strahls mit der optischen Achse (z -Achse) liefert den Bildpunkt O' . Für paraxiale Strahlen gilt für die Bildweite a' in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite a und dem Spiegelradius r :

$$a' = -\frac{ra}{r - 2a}$$

Dabei ist wieder die Vorzeichenkonvention nach DIN 1335 zu beachten: Alle Strecken, die vom Koordinatenursprung aus nach links bzw. nach unten gemessen werden, sind negativ, entsprechend sind Strecken nach rechts oder oben positiv.

Kommen Strahlen aus dem Unendlichen ($a = -\infty$), dann ist der Bildpunkt für alle Strahlen derselbe; er wird als **Brennpunkt** bezeichnet. Sein Abstand vom Scheitel ist die **Brennweite**

$$f' = r/2$$

Durch Kombination der beiden Beziehungen folgt die **Abbildungsgleichung**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}$$

Von einem Gegenstand, der die Höhe y besitzt, wird ein Bild mit der Höhe y' entworfen, wobei der **Abbildungsmaßstab** β' folgender Gleichung genügt:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}$$

Beim **Konvex-** oder **Wölbspiegel** gelten die obigen Gleichungen ebenfalls, lediglich die Brennweite ist

$$f' = -r/2$$

2.4.1.3 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen optischen Eigenschaften, so spaltet der Strahl auf: Ein Teilstrahl wird reflektiert und ein zweiter dringt mit geänderter Richtung in das zweite Medium ein, er wird gebrochen (Bild 2.15 a).

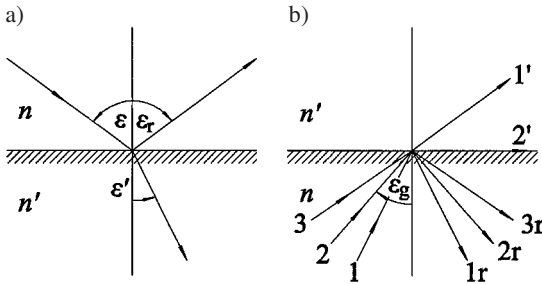


Bild 2.15 Lichtbrechung: Übergang vom
a) optisch dünneren zum optisch dichteren,
b) optisch dichteren zum optisch dünneren
Medium

Für die Winkel relativ zum Lot gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$$

Die **Brechzahl** n ist das Verhältnis von Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 zur Lichtgeschwindigkeit c in Materie:

$$n = \frac{c_0}{c}$$

Für den Fall des Übergangs von einem optisch dichteren in ein dünneres Medium ($n > n'$, Bild 2.15 b) tritt für Einfallswinkel $\varepsilon > \varepsilon_g$ **Totalreflexion** auf. Das bedeutet, dass kein gebrochener Strahl auftritt (z. B. Strahl 3 \rightarrow 3r in Bild 2.15 b). Der **Grenzwinkel** der Totalreflexion ε_g beträgt

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n'}{n}$$

Die Totalreflexion wird ausgenutzt bei der optischen Datenübertragung auf Lichtwellenleitern (Glasfasern).

2.4.1.4 Abbildung durch Linsen

Dünne Linsen

Linsen bestehen meist aus Glas oder Kunststoff und werden gewöhnlich durch sphärische Flächen begrenzt. **Konvexlinsen** sind in der Mitte dicker als am Rand und fokussieren aus dem Unendlichen kommende Parallelstrahlen in einem Brennpunkt (Bild 2.16). Sie werden als **Sammellinsen** bezeichnet. **Konkavlinsen** (am Rand dicker als in der Mitte) wirken als **Zerstreuungslinsen**.







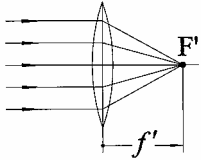
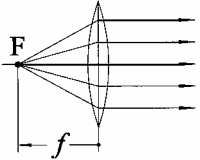
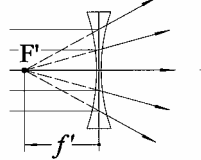
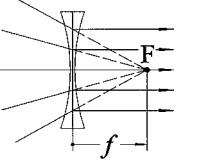
					
bikonvex	plankonvex	konkavkonvex	bikonkav	plankonkav	konvexkonkav
$r_1 > 0, r_2 < 0$ $f' > 0$	$r_1 = \infty, r_2 < 0$ $f' > 0$	$r_1 < r_2 < 0$ $f' > 0$	$r_1 < 0, r_2 > 0$ $f' < 0$	$r_1 = \infty, r_2 > 0$ $f' < 0$	$r_2 < r_1 < 0$ $f' < 0$
Sammellinsen			Zerstreuungslinsen		
 			 		

Bild 2.16 Linsenformen

Für dünne, beidseitig von Luft umgebene Linsen aus einem Material mit Brechzahl n_L , wobei der Radius der linken Kugelfläche mit r_1 , derjenige der rechten Fläche mit r_2 bezeichnet wird, gilt für die **Brennweite** f' :

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{1}{f}$$

Die Maßeinheit für den **Brechwert** D' ist die **Dioptrie**: $[D'] = 1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$.

Nach Bild 2.17 kann das Bild eines Gegenstandes mit Hilfe von ausgewählten Strahlen konstruiert werden. Rechnerisch ergibt sich die **Abbildungsgleichung**

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$$

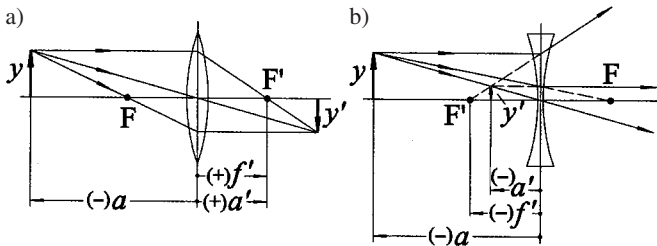


Bild 2.17 Bildkonstruktion bei
a) Sammellinse,
b) Zerstreuungslinse

Bildweite a' , Gegenstandsweite a und Brennweite f' sind wieder vorzeichenrichtig (DIN 1335) einzusetzen. Der **Abbildungsmaßstab** β' verknüpft Bildgröße y' und Gegenstandsgröße y mit Bild- und Gegenstandsweite:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$$

Dicke Linsen

Bei dicken Linsen werden die Brennweiten f' und f von den **Hauptebenen** H' und H aus gemessen, deren Konstruktion aus Bild 2.18 hervorgeht.

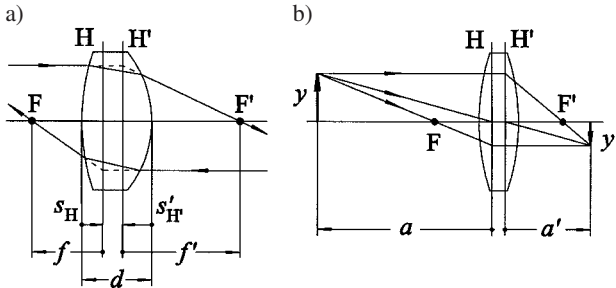


Bild 2.18 Dicke Linsen: a) Lage der Hauptebenen, b) Bildkonstruktion

Für eine Linse der Dicke d sind die Abstände der Hauptebenen von den Scheiteln

$$s_{H'} = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r_1} \quad \text{und} \quad s_H = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r_2}$$

Die Brennweite einer dicken Linse ist

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n_L - 1)^2}{n_L} \frac{d}{r_1 r_2}$$

Für Bild- und Gegenstandsweite a' und a sowie die Höhen y' und y gelten dieselben Gleichungen wie bei dünnen Linsen.

2.4.1.5 Optische Instrumente

Auge

Das Auge entwirft von Gegenständen reelle, Kopf stehende Bilder auf der lichtempfindlichen Netzhaut. Die Brechung der Lichtstrahlen erfolgt vor allem an der gekrümmten Grenzfläche zwischen Luft und Hornhaut. Beim normalsichtigen entspannten Auge werden aus dem Unendlichen kommende Parallelstrahlen auf die Netzhaut fokussiert (Bild 2.19a).

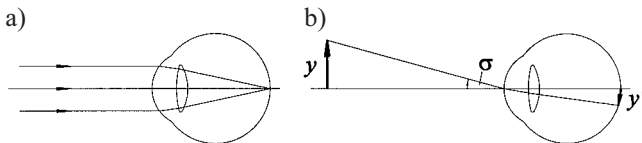


Bild 2.19 Menschliches Auge (vereinfachte Darstellung): a) Einstellung auf Unendlich, b) Definition des Schwinkels

Gegenstände, die im Endlichen stehen, werden auf der Netzhaut dadurch scharf abgebildet, dass durch Veränderung der Krümmung der Augenlinse die Brechkraft erhöht wird. Dieser Vorgang der Anpassung der Augenlinse an verschiedene Gegenstandsweiten wird als **Akkommodation** bezeichnet. Als Abstand, in dem ein normalsichtiger Mensch Gegenstände ohne Anstrengung betrachten kann, wurde festgelegt:

Die **Bezugssehweite** beträgt $a_B = -25 \text{ cm}$.

Fotoapparat

Der Fotoapparat ähnelt dem menschlichen Auge: Ein Objektiv entwirft das Bild eines Gegenstandes auf einem lichtempfindlichen Film (Bild 2.20). In Abhängigkeit von der Gegenstandsweite a muss der Abstand zwischen Filmebene und Objektiv (Bildweite a') verändert werden. Im Prinzip werden nur Gegenstandspunkte scharf abgebildet, die einen definierten Abstand a vom Objektiv haben, die also in einer Ebene liegen. Lässt man aber eine gewisse Unschärfe u' auf dem Film zu, dann wird der Bereich zwischen der vorderen a_v und der hinteren Gegenstandsweite a_h scharf abgebildet:

$$a_v = \frac{af'^2}{f'^2 - u'k(a+f')} \quad \text{und} \quad a_h = \frac{af'^2}{f'^2 + u'k(a+f')}$$

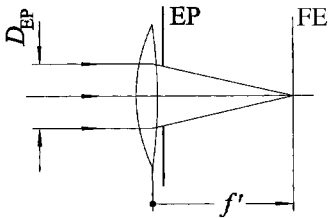


Bild 2.20 Fotoapparat auf Unendlich eingestellt. EP: Eintrittspupille (Blende), FE: Filmebene

$\Delta a = a_v - a_h$ ist die **Schärfentiefe**; k ist die **Blendenzahl**, deren Abstufungen in DIN 4522 festgelegt sind:

$$k = \frac{f'}{D_{EP}}, \quad k = 1; 1,4; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22$$

dabei ist D_{EP} der Durchmesser der Eintrittspupille. Als Faustformel für die zulässige Unschärfe gilt $u' \approx \text{Formatdiagonale}/1000$.

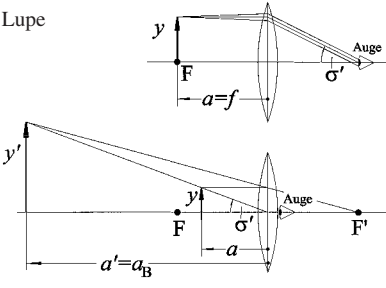
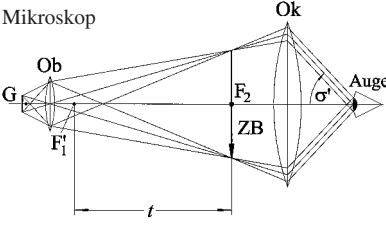
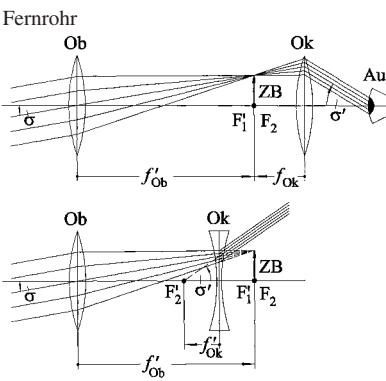
Vergrößerungsinstrumente

Bild 2.19b) zeigt, dass die Größe des Netzhautbildes abhängt vom **Schwinkel** σ , unter dem ein Objektpunkt erscheint. Die Aufgabe von vergrößernden Instrumenten ist es also, diesen Schwinkel zu vergrößern. Als **Vergrößerung** Γ' eines optischen Instrumentes (Tabelle 2.10) wird deshalb definiert:

$$\Gamma' = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} \approx \frac{\sigma'}{\sigma}$$

σ ist der Schwinkel ohne und σ' derjenige mit Instrument.

Tabelle 2.10 Vergrößernde Instrumente

Strahlengang	Merkmale, Vergrößerung
<p>Lupe</p> 	<p>Normalvergrößerung: $\Gamma'_L = -\frac{a_B}{f'}$</p> <p>Voraussetzung ist, dass der Gegenstand in der vorderen Brennebene steht. Das Auge ist auf Unendlich eingestellt.</p> <p>Vergrößerung bei Akkomodation, so dass das virtuelle Bild in der Bezugssehweite a_B entsteht:</p> $\Gamma'_{L,A} = -\frac{a_B}{f'} + 1$
<p>Mikroskop</p> 	<p>Das Objektiv Ob entwirft vom Gegenstand G ein vergrößertes Zwischenbild ZB, das durch das Okular Ok betrachtet wird. Vergrößerung:</p> $\Gamma'_M = \beta'_{Ob} \Gamma'_{Ok} = \frac{t}{f'_{Ob}} \cdot \frac{a_B}{f'_{Ok}}$ <p>β'_{Ob}: Abbildungsmaßstab Objektiv Γ'_{Ok}: Lupenvergrößerung Okular t: Tubuslänge</p>
<p>Fernrohr</p> 	<p>Aus dem Unendlichen kommende Parallelstrahlen werden vom Objektiv Ob zu einem Zwischenbild ZB vereinigt, das durch das Okular Ok betrachtet wird.</p> <p>Beim Kepler'schen oder astronomischen Fernrohr entsteht ein Kopf stehendes (negative Vergrößerung), beim Galilei'schen oder holländischen Fernrohr ein aufrechtes Bild (positive Vergrößerung).</p> $\Gamma'_F = -\frac{f'_{Ob}}{f'_{Ok}}$

2.4.2 Wellenoptik

2.4.2.1 Interferenz

Kohärenz

Licht als elektromagnetische Welle erzeugt Interferenzeffekte. Das bedeutet, dass bei der Überlagerung von zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge im Überlagerungsgebiet Verstärkung oder Auslöschung auftreten kann, je nach Gangunterschied der beiden Wellen. Bild 2.21 zeigt zwei Wellenzüge, wobei die elektrische Feldstärke der ersten Welle gegeben ist durch

$$E_1 = \hat{E} \cos(\omega t - kx)$$

diejenige der zweiten Welle durch

$$E_2 = \hat{E} \cos\left(\omega t - kx + 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}\right) = \hat{E} \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

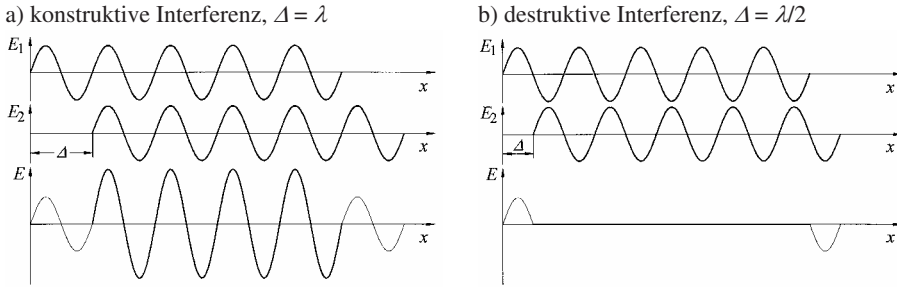


Bild 2.21 Momentbilder zweier Wellenzüge, die sich beide in x-Richtung bewegen

Die zweite weist gegenüber der ersten einen Phasenunterschied φ bzw. einen **Gangunterschied** Δ auf. Die Feldstärke der resultierenden Welle beträgt im Überlagerungsgebiet

$$E = 2\hat{E} \cos\left(\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right) \cos\left(\omega t - kx + \pi\frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

Man beobachtet **konstruktive Interferenz** für Gangunterschiede

$$\Delta = m \cdot \lambda, \quad \text{wobei } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

und **destruktive Interferenz** für

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{wobei } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Bild 2.21 zeigt, dass nur solche Wellen interferenzfähig sind, die sich im Beobachtungsgebiet überlagern und eine feste Phasenbeziehung haben. Solche Wellen nennt man **kohärent**. Wird der Gangunterschied Δ größer als die Länge der Wellenzüge, dann ist keine Interferenz mehr beobachtbar. Die größte Verschiebung, bei der noch Interferenzen beobachtet werden können, ist gleich der Länge der Wellenzüge und wird als **Kohärenzlänge** bezeichnet. Nach dem Fourier'schen Integraltheorem ist die Kohärenzlänge l mit der spektralen Frequenzbreite Δf des Lichts und der Lichtgeschwindigkeit c verknüpft gemäß $l \approx \frac{c}{\Delta f}$.

Diese Kohärenzlänge variiert von ungefähr 1 μm bei Verwendung von Weißlicht bis zu mehreren Kilometern bei Lasern. Wegen ihrer hohen Kohärenz sind also Laser besonders gut geeignet für Interferenzuntersuchungen.

Michelson-Interferometer

Interferenzen lassen sich gezielt mit Hilfe von Interferometern untersuchen und für messtechnische Zwecke auswerten. Für verschiedene Fragestellungen wurden verschiedene Interferometertypen entwickelt. Beispielhaft soll hier das Interferometer nach Michelson vorgestellt werden (Bild 2.22).

Licht der Quelle Q (z. B. Laser) fällt auf einen halbdurchlässigen Strahlteiler T. Die Teilstrahlen in den beiden Ästen fallen auf die Spiegel S_1 und S_2 und werden nach erneuter Reflexion bzw. Transmission am Strahlteiler im unteren Teil zu Interferenz gebracht, wo das Ergebnis mit Hilfe

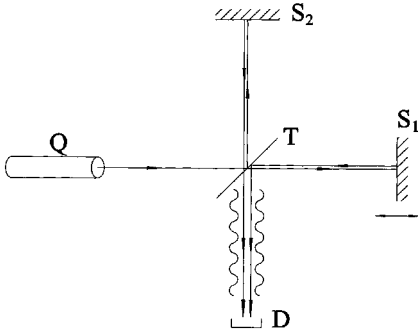


Bild 2.22 Schematische Anordnung des Michelson-Interferometers

des Detektors D (Auge, Photodiode) beobachtet wird. Ist die optische Weglänge zwischen Strahlteiler und S_1 bzw. S_2 gleich lang, dann ergibt sich phasengleiche Überlagerung, also konstruktive Interferenz. Dieser Zustand ist in Bild 2.22 skizziert. Wird nun beispielsweise der Spiegel S_1 um $\lambda/4$ in Strahlrichtung verschoben, dann entsteht ein Gangunterschied von $\Delta = \lambda/2$ zwischen den beiden Teilstrahlen und es wird Auslöschung, d. h. destruktive Interferenz, beobachtet. Wird der Spiegel kontinuierlich verschoben, so entstehen am Ort des Detektors periodisch Maxima und Minima. Mit dem Michelson-Interferometer lassen sich somit durch Auszählen solcher Ereignisse Wegstrecken und damit Längen auf Bruchteile der Lichtwellenlänge genau messen.

Dünne Schichten

Dünne Schichten wie beispielsweise Seifenhäute, Ölfilme, Oxid- und Aufdampfschichten zeigen je nach Dicke und Blickrichtung im Weißlicht verschiedene Interferenzfarben. Als Anwendungsbeispiel solcher Interferenzen soll die Funktion einer **reflexvermindernden Schicht** auf optischen Gläsern beschrieben werden (Bild 2.23).

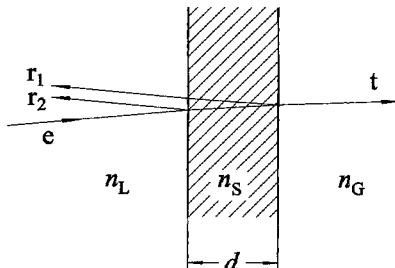


Bild 2.23 Reflexvermindernde Schicht oder dielektrischer Spiegel. e : einfallender, t : transmittierter Strahl, r_1 und r_2 reflektierte Strahlen. Brechzahl der Luft: n_L , der Schicht: n_S und des Glases: n_G

Bei senkrechtem Einfall weisen die beiden reflektierten Strahlen einen Gangunterschied von $\Delta = 2d$ auf. Innerhalb der Aufdampfschicht ist die Lichtwellenlänge reduziert auf λ/n_S . Zur Auslöschung (destruktive Interferenz) kommt es beim Gangunterschied

$$\Delta = 2d = \frac{\lambda}{2n_S} (2m + 1).$$

Die notwendige Schichtdicke beträgt damit

$$d = \frac{\lambda}{4n_S} (2m + 1), \quad \text{mit } m=0, 1, 2, 3 \dots$$

Die Beseitigung der Reflexion gelingt also nur für eine ganz bestimmte Wellenlänge λ . Bei Verwendung von Weißlicht optimiert man beispielsweise für grünes Licht mit $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Eine vollständige Auslöschung der reflektierten Wellen r_1 und r_2 wird nur erreicht, wenn ihre Amplituden gleich groß sind. Dies ist der Fall, wenn die Brechzahl n_S der Schicht folgender Bedingung genügt:

$$n_S = \sqrt{n_G} .$$

Wird die Schichtdicke so gewählt, dass die beiden Teilstrahlen r_1 und r_2 konstruktiv interferieren, dann erhält man einen **dielektrischen Spiegel**. Dies ist der Fall für die Schichtdicken

$$d = \frac{\lambda}{2n_S} m, \quad \text{mit } m = 1, 2, 3 \dots$$

2.4.2.2 Beugung am Spalt

Lichtstrahlen breiten sich im homogenen Raum geradlinig aus. Falls ein Hindernis die freie Ausbreitung stört, wird das Licht um das Hindernis herum gebeugt. Dies ist ein typischer Welleneffekt, der beispielsweise auch bei Schallwellen beobachtet wird. Trifft eine ebene Welle (Parallelstrahlen) auf einen Spalt (Bild 2.24), so breitet sich die Welle hinter dem Spalt auch in die geometrischen Schattengebiete hinein aus.

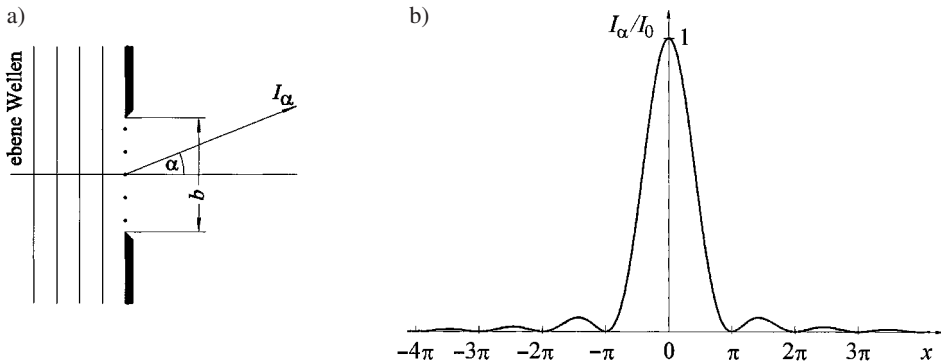


Bild 2.24 Beugung am Spalt: a) geometrische Anordnung mit Lage der Sender Huygens'scher Elementarwellen. Der Spalt ist senkrecht zur Zeichenebene nicht begrenzt. b) Intensitätsverlauf in großem Abstand mit $x = \pi(b/\lambda) \sin \alpha$

Nach Huygens kann die Wellenausbreitung bestimmt werden, wenn jeder Punkt auf einer Wellenfläche als Sender einer Kugelwelle aufgefasst wird. Die Überlagerung aller dieser so genannten **Huygens'schen Elementarwellen** liefert die Intensität hinter dem Spalt. Bei **Fraunhofer'scher Beugung** wird in großem Abstand vom Spalt an einer Wand die Interferenzfigur betrachtet. Infolge von konstruktiver und destruktiver Interferenz der einzelnen Elementarwellen ergibt sich für die Intensität I_α in Richtung des Winkels α (Bild 2.24 a) folgender Verlauf:

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{\sin^2 \left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2}$$

der in Bild 2.24b) dargestellt ist. I_0 ist die Intensität in Geradeausrichtung ($\alpha = 0$), b ist die Spaltbreite. Ein zentraler heller Streifen ist symmetrisch von dunklen und hellen Streifen umgeben. Für die Lage der Nullstellen (Dunkelheit) folgt:

$$\sin \alpha_m = \pm m \frac{\lambda}{b}, \quad \text{mit } m = 1, 2, 3 \dots$$

Beugung an der Lochblende

Der technisch wichtige Fall der Beugung an der Lochblende liefert an einer weit entfernten Wand ein helles kreisrundes zentrales Beugungsscheibchen, das etwa 84 % der durch das Loch gehenden Energie aufnimmt. Dieses **Airy-Scheibchen** ist von konzentrischen dunklen und hellen Ringen umgeben. Der Intensitätsverlauf ist ähnlich dem in Bild 2.24b), wird aber durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2, \quad \text{mit } x = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha$$

d ist der Durchmesser der Lochblende, $J_1(x)$ ist die Besselfunktion erster Ordnung. Nullstellen der Funktion, d. h. dunkle Ringe, ergeben sich für folgende Winkel:

$$\sin \alpha_1 = 1,220 \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \alpha_2 = 2,233 \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \alpha_3 = 3,238 \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \alpha_4 = 4,241 \frac{\lambda}{d} \quad \text{usw.}$$

Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Da in vielen optischen Instrumenten das Licht durch kreisförmige Blenden (Linsenfassungen) eintritt, beschränkt die Beugung an der Lochblende das Auflösungsvermögen. Fällt beispielsweise bei einem Fernrohr das parallele Licht eines Sterns ins Objektiv, dann ist dessen Zwischenbild in der Brennebene nicht ein Punkt, wie in der geometrischen Optik angenommen wird (Tabelle 2.10), sondern ein Airy'sches Beugungsscheibchen. Ein benachbarter Stern kann nur dann getrennt wahrgenommen werden, wenn dessen Beugungsscheibchen genügend weit vom ersten entfernt ist. Zwei Objektpunkte sind sicher zu trennen, wenn sie unter einem Winkel δ erscheinen, der folgender Bedingung genügt (**Rayleigh-Kriterium**): $\delta \geq 1,22 \frac{\lambda}{d}$, wobei d der Durchmesser des Objektivs ist. Beim Mikroskop lassen sich nach Abbe zwei Objektpunkte trennen, wenn ihr Abstand y folgender Bedingung genügt:

$$y \geq \frac{\lambda}{n \sin \sigma} = \frac{\lambda}{A_N}$$

Hier ist n die Brechzahl des Mediums vor dem Objektiv und σ der halbe Öffnungswinkel des in das Objektiv eintretenden Strahlenbüschels. $A_N = n \sin \sigma$ heißt **numerische Apertur**, wobei $A_N \approx 1$. Daher kann man mit Mikroskopen Objekte von der Größenordnung der verwendeten Lichtwellenlänge auflösen.

2.4.2.3 Beugung am Gitter

Mehrere regelmäßig angeordnete Spalte (Bild 2.25 a) bezeichnet man als Beugungsgitter. Bei Fraunhofer'scher Betrachtung entsteht in großem Abstand vom Gitter eine Reihe von hellen und dunklen Streifen, deren Intensitätsverlauf in Bild 2.25 b) dargestellt ist und folgender Beziehung genügt:

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(p \pi \frac{g}{\lambda} \sin \alpha\right)}{p^2 \left(\pi \frac{g}{\lambda} \sin \alpha\right)^2}$$

p ist die Zahl der interferierenden Spalte, b die Spaltbreite und g der Spaltabstand, die Gitterkonstante.

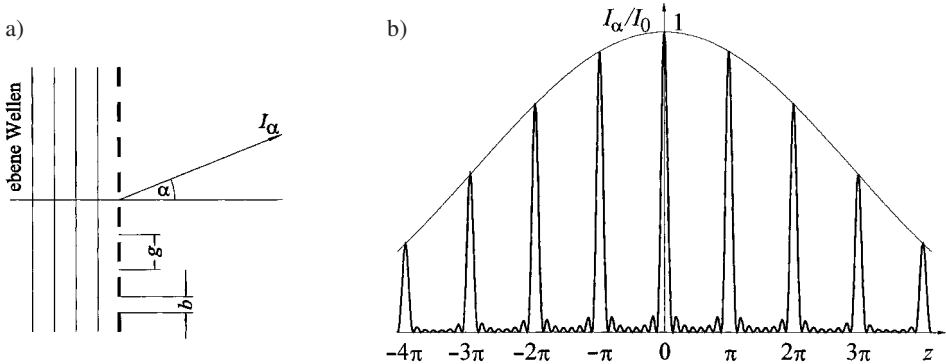


Bild 2.25 Beugung am Gitter: a) geometrische Anordnung. Die Gitterstege sind senkrecht zur Zeichenebene nicht begrenzt. b) Intensitätsverlauf in großem Abstand für $p = 8$ Spalte und $g/b = 7$; $z = \pi(g/\lambda) \sin \alpha$

Der erste Faktor ist die bereits bekannte Spaltbeugungsfunktion, der zweite Faktor die Interferenzfunktion des Gitters. Die Interferenzfunktion hat Hauptmaxima bei $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$ (Bild 2.25 b). Sie wird durch die Spaltfunktion moduliert, die als Einhüllende sichtbar ist. Unter folgenden Winkeln treten Hauptmaxima auf:

$$\sin \alpha_m = \pm m \frac{\lambda}{g}, \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Die Maxima werden umso schärfer, je mehr Spalte an der Interferenz beteiligt sind.

Beugungsgitter werden in **Spektrometern** eingesetzt, um Lichtwellenlängen zu messen. Kommerzielle Spektrometer benutzen meist Reflexionsgitter mit mehreren tausend Spalten.

2.4.3 Quantenoptik

2.4.3.1 Lichtquanten

Experimente zum lichtelektrischen Effekt, die mit der klassischen Physik nicht vereinbar waren, führten Einstein zur Aufstellung seiner **Lichtquantenhypothese**. Danach wird Licht aufgefasst als ein Strom von Lichtquanten oder **Photonen**, von denen jedes eine ganz bestimmte Energie transportiert. Die Energie eines Photons beträgt

$$E_{\text{ph}} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

dabei ist $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ die Planck'sche Konstante, f die Lichtfrequenz, c die Lichtgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge. Das Produkt aus Planck'scher Konstante und Lichtgeschwindigkeit ist $hc = 1,24 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{eV}$.

Eine monochromatische Lichtquelle (Laser, LED) sendet also Photonen mit gleicher Energie E_{ph} aus. Damit lässt sich die Strahlungsleistung Φ der Lichtquelle folgendermaßen ausdrücken:

$$\Phi = \dot{N}_{\text{ph}} E_{\text{ph}}$$

\dot{N}_{ph} ist der Photonenstrom, d. h. die Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Photonen.

Obwohl Lichtquanten keine Ruhemasse besitzen, kann ihnen nach Einsteins Äquivalenzprinzip von Masse und Energie eine Masse zugeordnet werden:

$$m = \frac{E_{\text{ph}}}{c^2} = \frac{hf}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$$

Damit besitzen die Photonen aber auch einen Impuls p , der beispielsweise beim Strahlungsdruck der Photonen zu Tage tritt:

$$p = mc = \frac{h}{\lambda}$$

2.4.3.2 Emission und Absorption von Licht

Bei der Wechselwirkung mit den Atomen der Materie wird die Energie in ganzen Quanten dem Lichtfeld zugeführt (Emission) oder vom Lichtfeld abgegeben (Absorption). Die Elektronen der Atome können sich nach den Regeln der Quantenmechanik nur auf ganz bestimmten Energieniveaus aufhalten (Bild 2.26). Ein Übergang zwischen diesen erlaubten Energieniveaus ist nur möglich, wenn die Differenzenergie zu- oder abgeführt wird. Bei optischen Prozessen wird dies von Photonen übernommen (es gibt auch andere Möglichkeiten der Energieübertragung).

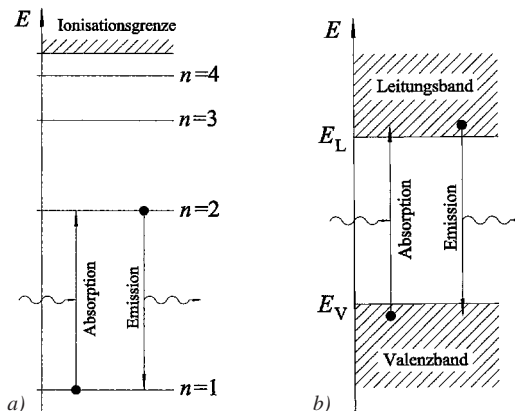


Bild 2.26 Absorption und Emission von Licht: a) Einzelatome (Gase) mit scharfen Energieniveaus, b) Festkörper (hier: Halbleiter) mit breiten erlaubten Energiebändern

Aus Bild 2.26b) ist ablesbar, dass in einem Halbleiter nur solche Photonen absorbiert werden, deren Energie ausreicht, um Elektronen vom Valenzband über die verbotene Zone ins Leitungsband zu heben. Es muss also die Bedingung

$$E_{\text{ph}} = hf = \frac{hc}{\lambda} \geq E_g \quad \text{oder} \quad \lambda \leq \frac{hc}{E_g}$$

erfüllt sein. Für den Halbleiter Si mit einer Energielücke von $E_g = 1,11 \text{ eV}$ bedeutet dies, dass nur Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda \leq 1,12 \mu\text{m}$ absorbiert wird. Solarzellen aus Si nützen vom Sonnenspektrum also nur einen Teil zur Energiegewinnung aus.

2.4.3.3 Laser

Bereits 1917 postulierte Einstein, dass neben der spontanen Emission von Photonen (Bild 2.26) auch **stimulierte Emission** auftreten sollte (Bild 2.27). Das bedeutet, dass ein bereits vorhandenes Photon mit passender Energie, das z. B. durch spontane Emission entstand, Elektronen zu Übergängen aus einem höheren in ein tieferes Niveau stimulieren kann. Die dabei erzeugten Photonen verstärken das induzierende Photon, so dass schließlich eine Lichtwelle mit hoher Intensität entsteht. Das Wort Laser ist eine Abkürzung für **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation.

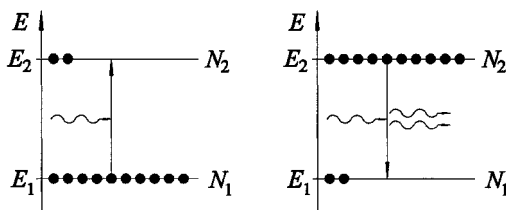


Bild 2.27 Wechselwirkung des Lichtfeldes mit einem atomaren System: a) Absorption im thermodynamischen Gleichgewicht, b) stimulierte Emission bei Besetzungsinversion

Bei normalem Glühlicht entstehen Photonen in völlig unkorrelierten Elementarakt, was dazu führt, dass inkohärente kurze Wellenzüge ausgesandt werden. Bei einem Laser hat man es dagegen mit einem kollektiven Phänomen, d. h. einem Synergie-Effekt, zu tun: Alle stimuliert erzeugten Photonen koppeln phasenrichtig an die Ausgangswelle an, so dass eine Lichtwelle mit hoher Kohärenzlänge entsteht.

In einem System von Atomen sind die niedrigen Energiezustände immer stärker besetzt als die hohen. Beispielsweise sind die Besetzungszahlen N_1 und N_2 der beiden Energiezustände E_1 und E_2 in Bild 2.27 a) im thermodynamischen Gleichgewicht gegeben durch den Boltzmann-Faktor

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

mit der Boltzmann-Konstante k und der thermodynamischen Temperatur T . Daher ist im Normalfall $N_2 \ll N_1$. Das bedeutet aber, dass eine einlaufende Welle stets Übergänge von unten nach oben hervorruft, also eine Absorption auftritt. Soll die stimulierte Emission einsetzen, dann müssen mehr Elektronen im hohen Niveau als im niedrigen sein (Bild 2.27b). Es muss deshalb als so genannte **erste Laserbedingung** eine **Besetzungsinversion** vorliegen, die künstlich herbeigeführt wird (Tabelle 2.11).

Tabelle 2.11 Methoden zur Erzeugung der Besetzungsinversion

Lasertyp	Materialbeispiele	Methode
Festkörperlaser	Rubin, Nd-YAG	optisches Pumpen durch Blitzlampe oder Dauerstrichlampe
Gaslaser	He-Ne, Kr, Ar, CO ₂	Elektronenstöße in einer Gasentladungsröhre
Halbleiterslaser	GaAs, GaAlAs, InGaAsP	pn-Übergang aus hochdotierten Halbleitern in Vorwärtsrichtung betrieben

Als **zweite Laserbedingung** bedarf ein stabil schwingender Laser eines Resonators, der für eine positive **Rückkopplung** sorgt. Am häufigsten werden Fabry-Perot-Resonatoren verwendet, bei denen das Licht zwischen zwei Spiegeln hin- und herläuft und eine stehende Welle aufbaut. Die Geometrie des Resonators legt die genaue Laserwellenlänge fest. Mindestens einer der Spiegel muss teildurchlässig sein, damit an ihm der Laserstrahl ausgekoppelt werden kann.

Ein nahezu paralleler Laserstrahl vom Durchmesser D lässt sich mit einer Sammellinse der Brennweite f' fokussieren. Der Fokusbereich d ist beugungsbegrenzt (Abschn. 2.4.2.2) und beträgt näherungsweise

$$d \approx \lambda \frac{f'}{D}$$

Die damit erzielbaren Bestrahlungsstärken sind so groß, dass alle absorbierenden Substanzen verdampfen und somit bearbeitet werden können. Diese Eigenschaft sowie die hervorragende räumlich und zeitliche Kohärenz eröffnen dem Laser viele Einsatzgebiete (Tabelle 2.12).

Tabelle 2.12 Anwendungen des Lasers

Materialbearbeitung	Optische Messtechnik	Nachrichtentechnik	Medizin
Bohren, Schneiden, Härten, Schweißen, Abtragen (Trimmen von Schwingquarzen, Widerständen, Kondensatoren), Beschichten	Interferometrie, Holographie, Entfernungsmessung, Satellitenvermessung, Leitstrahl beim Tunnel-, Straßen- und Brückenbau	Optische Nachrichtenübertragung mit modulierten Halbleiterslasern, Datenspeicherung und -wiedergabe mit CDs und DVDs	Laserskalpell, Öffnung verschlossener Blutgefäße, Netzhautanheftung, Abtragung an der Hornhaut, Zerstörung von Krebszellen

Weiterführende Literatur

- Dobrinski, P.; Krakau, G.; Vogel, A.: Physik für Ingenieure. 11. Auflage. Stuttgart: Teubner 2006
 Hering, E., Martin, R., Stohrer, M.: Physik für Ingenieure. 9. Auflage. Berlin: Springer 2004
 Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik. 19. Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag 2007
 Leute, U.: Physik. 2. Auflage. München: Hanser 2004
 Lindner, H.: Physik für Ingenieure. 17. Auflage Leipzig: Fachbuchverlag 2006
 Maute, D.: Technische Akustik und Lärmschutz. Leipzig: Fachbuchverlag 2006
 Meschede, D.: Gerthsen Physik. 23. Auflage. Berlin: Springer 2006
 Möser, M.: Technische Akustik. 6. Auflage. Berlin: Springer 2004
 Paus, H. J.: Physik. 3. Auflage. München: Carl Hanser Verlag 2007
 Schröder, G.; Treiber, H.: Technische Optik. 10. Auflage. Würzburg: Vogel 2006
 Stroppe, H.: Physik. 13. Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag 2005

3

3

Chemie

Dipl.-Ing. Wolfgang Schulz
Wave GmbH Stuttgart

Tabelle 3.1 Wichtige Formelzeichen

Formelzeichen	SI-Einheit	Weitere	Bedeutung
m	kg	g	Masse
n	mol	mmol kmol	Stoffmenge 1 mol ist die Teilchenzahl, die aus genau so vielen Teilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg ^{12}C enthalten sind.
$M(\text{X})$	kg/mol	g/mol	Die Masse der Stoffmenge 1 Mol (Molmasse, Molare Masse) $M(\text{X}) = m(\text{X})/n(\text{X}) = N_{\text{A}} \cdot m(1 \text{ X})$.
V_{m}	l	cm^3 ml	Volumen von 1 Mol eines idealen Gases im Normzustand (273,15 K; 101,3 kPa) $V_{\text{m}} = 22,414 \text{ l Molvolumen}$.
N_{A}	mol^{-1}		Die Avogadro-Konstante N_{A} ist die Anzahl der Teilchen in einem Mol eines Stoffes: $N_{\text{A}} = 6,02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
$A_{\text{r}}(\text{X})$	g/g		Relative Atommasse des Elements X bezogen auf das Nuklid ^{12}C . $A_{\text{r}}(\text{X}) = m(1 \text{ X})/[1/12 \cdot m(^{12}\text{C})]$.
c	mol/l	mol/m^3	Stoffmengenkonzentration (Molarität) $c = n/V_{\text{Lösung}}$.

Alle chemischen Stoffe lassen sich in **heterogene** und **homogene** Stoffe unterteilen. Heterogene Stoffe setzen sich aus mehreren, in sich jeweils homogenen Phasen zusammen, die sich auf Grund ihrer unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften auf mechanischem Wege trennen lassen. Die Materie besteht aus **Elementen** und deren **Verbindungen** (Moleküle).

Nukleonen sind Kernspezies (Neutronen und Protonen).

Nuklide sind Atomspezies aus Protonen, Neutronen und Elektronen (z. B. ^{12}C , ^{14}N , ^{56}Fe)

Elemente lassen sich nicht in andere Stoffe zerlegen und bestehen aus Nukliden gleicher Protonenzahl (Kernladungszahl).

Ordnungszahl Z ist die Anzahl der Protonen im Atomkern.

Massenzahl A ist die Summe der Nukleonen.

Isotope sind Nuklide mit gleicher Protonenzahl, aber unterschiedlicher Neutronenzahl. Die Schreibweise lautet:

Massenzahl A Elementsymbol Beispiel: $^{12}_6\text{C}$ $^{13}_6\text{C}$ $^{14}_6\text{C}$
Ordnungszahl Z

Atome sind die kleinsten Teilchen der Elemente.

Ionen sind elektrisch geladene Atome oder Moleküle.

Moleküle sind die kleinsten Teile einer chemischen Verbindung und bestehen aus zwei oder mehreren miteinander verbundenen Atomen.

3.1 Atombau und chemische Bindung

Atome sind die **kleinsten Bausteine** aller Stoffe. Als **neutrale Atome** bilden sie die **Elemente**, als elektrisch geladene Atome (**Ionen**) und **Moleküle** stellen Sie die Grundbausteine für **Verbindungen** dar.

3.1.1 Atombau

Atome setzen sich aus den drei Grundbausteinen **Neutronen**, **Protonen** und **Elektronen** zusammen, deren Eigenschaften in Tabelle 3.2 zusammengestellt sind.

Tabelle 3.2 Eigenschaften der Atombausteine

	Teilchen	Symbol	Ladung C	Ruhemasse kg	u
Atomkern	Proton	p, H^+	$+1,6022 \cdot 10^{-19}$	$1,673 \cdot 10^{-27}$	1,0073
	Neutron	n	0	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,0087
Atomhülle	Elektron	e^-	$-1,6022 \cdot 10^{-19}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055

Rund 99,9 % der gesamten Masse eines Atoms sind im Atomkern konzentriert, dessen Durchmesser etwa 1/10000 des Atomdurchmessers entspricht. Zur Vereinfachung wird die Masse im atomaren Bereich in atomaren Masseneinheiten u angegeben.

Die atomare Masseneinheit u ist 1/12 der Masse des Kohlenstoffisotops ^{12}C .
 $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Der **Atomkern** setzt sich aus **Protonen** und **Neutronen** zusammen, wobei die Anzahl der Protonen das Atom charakterisiert, beispielsweise beim Kohlenstoffatom durch 6 Protonen. Der Atomkern wird von der Atomhülle umgeben. Sie wird durch die Elektronen gebildet, deren Anzahl den Protonen entspricht. Die Verteilung der **Elektronen** in der Atomhülle bestimmt die **chemischen Eigenschaften** des Elements.

Atomorbitale sind **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** der Elektronen eines Atoms um den Atomkern und werden mathematisch durch die Wellenfunktion beschrieben.

3.1.2 Periodensystem der Elemente

Im Periodensystem sind alle chemischen Elemente systematisch nach ähnlichem Reaktionsverhalten angeordnet. Die waagerechten Zeilen von 1 bis 7 werden als **Perioden** bezeichnet, die Spalten 1 bis 18 als **Gruppen**, und zwar IA bis VIIIA als **Hauptgruppen** und IB bis VIIIB als **Nebengruppen** (Bild 3.1).

HG		Nebengruppen										Hauptgruppen (HG)							
I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B	VIII B	VIII B	VIII B	10	IB	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		

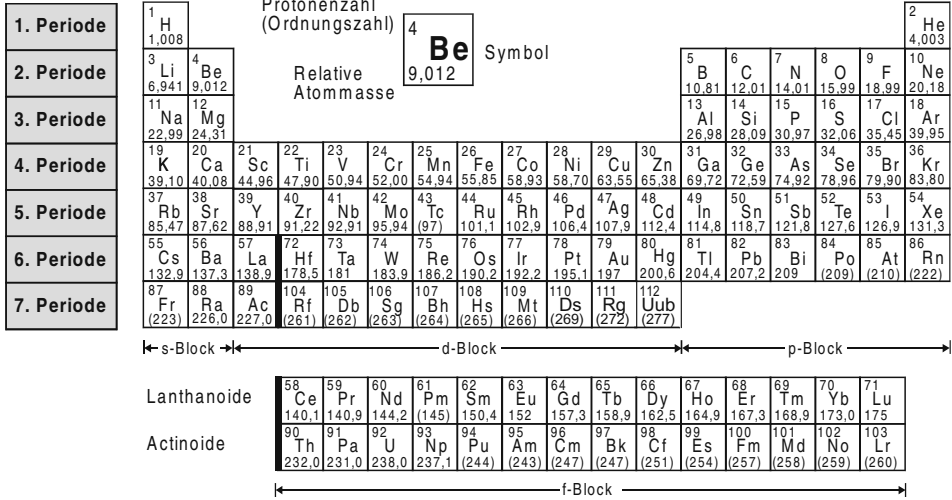


Bild 3.1 Periodensystem der Elemente

Im Bild 3.2 sind die Abhängigkeiten einiger Eigenschaften der Atomkerne von der Stellung im Periodensystem bzw. der Ordnungszahl angegeben.

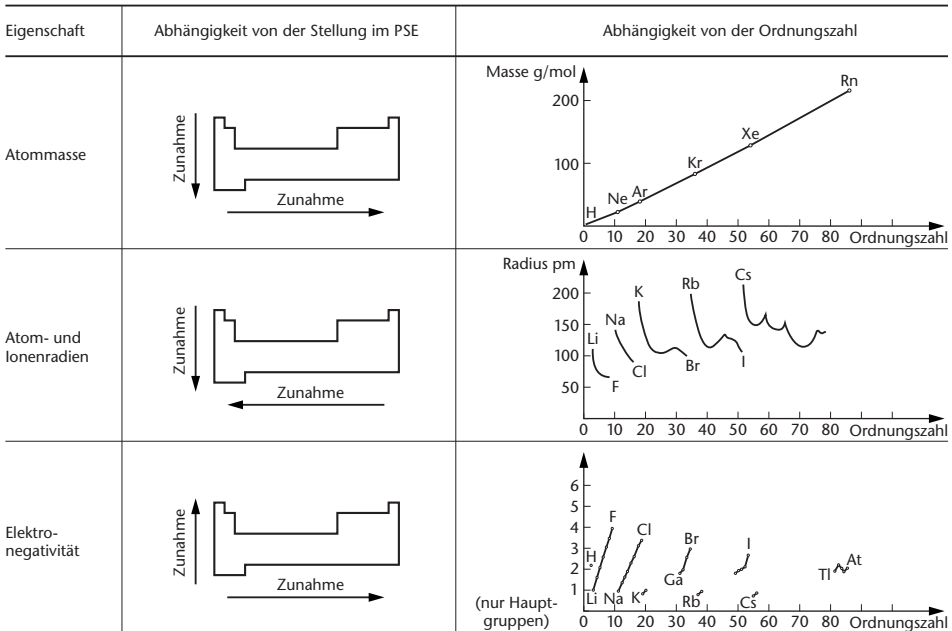


Bild 3.2 Gesetzmäßigkeiten atomarer Eigenschaften im Periodensystem der Elemente

Eigenschaft	Abhängigkeit von der Stellung im PSE	Abhängigkeit von der Ordnungszahl
Elektronenaffinität		
Ionisierungsenergie		
Metallischer Charakter		Entlang der Diagonalen von Be nach Po stehen die Halbmetalle
Maximale Oxidationsstufe		

Bild 3.2 Gesetzmäßigkeiten atomarer Eigenschaften im Periodensystem der Elemente (Fortsetzung)

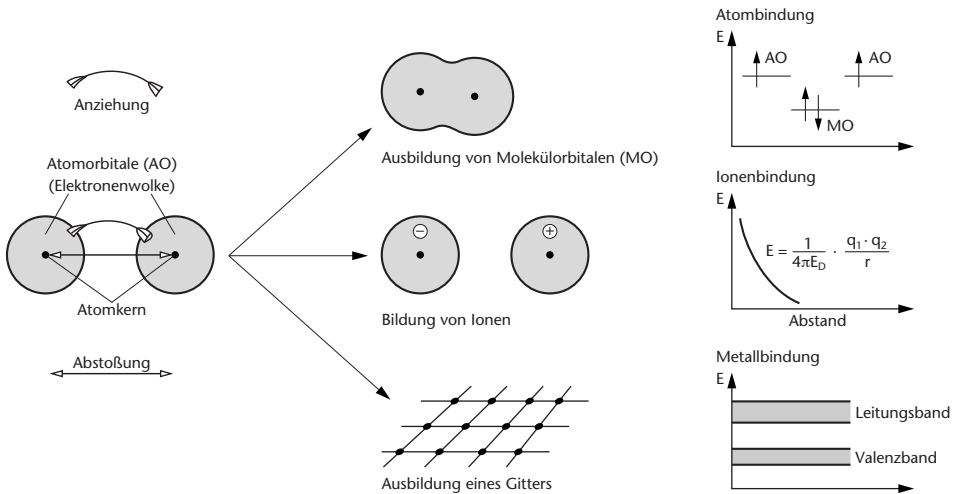


Bild 3.3 Schematische Darstellung der Ausbildung einer Bindung zwischen zwei Atomen

3.1.3 Chemische Bindung

3.1.3.1 Beschreibung der Bindungsarten

In Bild 3.3 ist schematisch die Wechselwirkung zwischen zwei Atomen zur Ausbildung einer Bindung dargestellt.

Triebkraft für alle chemischen Bindungen ist das Bestreben der Atome, in **energetisch günstigere Zustände** überzugehen. In Tabelle 3.3 sind die Bindungsarten mit den charakteristischen Merkmalen gegenübergestellt.

Tabelle 3.3 Gegenüberstellung der Bindungsarten

Merkmal	Bindung			Intermolekulare Wechselwirkung	
	Atombindung homöopolare – kovalente –	Ionenbindung heteropolare –	Metallbindung		
Art der beteiligten Atome	Nichtmetallatome	Metallatom und Nichtmetallatom	Metallatome	Atome und Moleküle	
Charakter der Atome	elektroneutral	elektropositiv und elektronegativ	elektropositiv		
Prinzip Vorgänge in der Elektronenhülle	Die Atomorbitale der Bindungspartner überlappen sich zu energetisch günstigeren Molekülorbitalen, die von den Elektronen der Bindungspartner besetzt werden (Bildung gemeinsamer Elektronenpaare)	Bildung von entgegengesetzt geladenen Ionen durch Transfer von Elektronen zwischen den Bindungspartnern	Abgabe von Valenzelektronen in ein Band. Die Atomorbitale aller Metallatome in einem Kristall überlagern sich zu Energiebändern, die von den Elektronen aller Metallatome besetzt werden	elektrische Anziehungskräfte infolge Dipolwechselwirkung	
Eigenschaften	räumlich gerichtete Bindung, Bindungspartner liegen in Molekülen vor	ungerichtete Bindung durch elektrostatische Wechselwirkung, Anordnung der Bindungspartner in einem regelmäßigen Gitter	ungerichtete Bindung, Anordnung der positiven Metallionen in einem regelmäßigen Gitter	schwach kurze Reichweite	
Art der entstehenden Teilchen	Moleküle	Netzwerk, Gitter	positive und negative Ionen	loser Atom- oder Molekülverband	
Kristallgitter (in festem Zustand)	Molekül-gitter	Atomgitter	Ionengitter	Metallgitter	Atom- bzw. Molekül-gitter