Tobias Martin

Mathematik-Studienhilfen

Finanzmathematik

Grundlagen – Prinzipien – Beispiele

3., aktualisierte Auflage

HANSER

Tobias Martin

Finanzmathematik

Mathematik - Studienhilfen

Herausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Engelmann
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
Fakultät Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Zu dieser Buchreihe

Die Reihe Mathematik-Studienhilfen richtet sich vor allem an Studierende technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen an Hochschulen und Universitäten.
Die mathematische Theorie und die daraus resultierenden Methoden werden korrekt, aber knapp dargestellt. Breiten Raum nehmen ausführlich durchgerechnete Beispiele ein, welche die Anwendung der Methoden demonstrieren und zur Übung zumindest teilweise selbstständig bearbeitet werden sollten.
In der Reihe werden neben mehreren Bänden zu den mathematischen Grundlagen auch verschiedene Einzelgebiete behandelt, die je nach Studienrichtung ausgewählt werden können. Die Bände der Reihe können vorlesungsbegleitend oder zum Selbststudium eingesetzt werden.

Bisher erschienen:

Dobner/Engelmann, *Analysis 1*
Dobner/Engelmann, *Analysis 2*
Dobner/Dobner, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*
Gramlich, *Lineare Algebra*
Gramlich*, Anwendungen der Linearen Algebra*
Knorrenschild, *Numerische Mathematik*
Knorrenschild, *Vorkurs Mathematik*
Martin, *Finanzmathematik*
Nitschke, *Geometrie*
Preuß, *Funktionaltransformationen*
Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*
Stingl, *Operations Research – Linearoptimierung*
Tittmann, *Graphentheorie*

Finanzmathematik

Grundlagen – Prinzipien – Beispiele

von Prof. Dr. Tobias Martin

3., aktualisierte Auflage

mit 37 Bildern, 54 Beispielen und 69 Aufgaben

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor
Prof. Dr. Tobias Martin
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
FB Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften
http://www.imn.htwk-leipzig.de/~martin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-44187-3
E-Book-ISBN 978-3-446-44186-6

FSC www.fsc.org MIX Papier aus verantwortungsvollen Quellen FSC® C016439

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Tobias Martin, Leipzig
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Binden: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

»Der Weltuntergang steht bevor,
aber nicht so, wie Sie denken.
Dieser Krieg jagt nicht alles in die Luft,
sondern schaltet alles ab.«

Tom DeMarco
Als auf der Welt das Licht ausging

ca. 560 Seiten. Hardcover
ca. € 19,99 [D] / € 20,60 [A] / sFr 28,90
ISBN 978-3-446-43960-3
Erscheint im November 2014

Hier klicken zur Leseprobe

Sie möchten mehr über Tom DeMarco und seine Bücher erfahren.
Einfach reinklicken unter www.hanser-fachbuch.de/special/demarco

Vorwort

„Wozu brauche ich später schon die Mathematik?“ Dieser und ähnlichen Fragen begegnet man an unseren Schulen und Hochschulen immer wieder. Wenn die Antwort individuell auch ganz unterschiedlich ausfällt, so ist eines sicher: Ob bei der Verzinsung von Geldanlagen, der Aufnahme eines Darlehens, Kurs- und Renditevergleichen von Anleihen oder bei der Altersvorsorge – mit der Finanzmathematik kommt früher oder später jeder in Berührung.

Nach der Lektüre dieses Buches werden Sie erkennen, dass sich die beschriebenen Formeln und Prinzipien meist intuitiv und direkt auf viele praktische Probleme in der Welt der Finanzprodukte anwenden lassen. Darüber hinaus werden zum Verständnis der Zusammenhänge nur sehr wenige mathematische Kenntnisse und Techniken benötigt, ein Vorteil, den besonders der Leser ohne ausgeprägte mathematische Vorbildung zu schätzen weiß. Dennoch: Sie halten ein Mathematikbuch in den Händen, das die wichtigsten Grundlagen und Prinzipien der Finanzmathematik systematisch, logisch und in klarer Formelsprache erläutert. Zahlreiche, ausführlich besprochene Beispiele sind angefügt, sie werden ergänzt durch eine Reihe von Aufgaben mit Lösungen.

Das Buch folgt in seinem Aufbau der klassischen Gliederung der elementaren Finanzmathematik und ist deshalb als Begleitmaterial zu vielen Kursen über Finanzmathematik an Hoch- und Fachschulen, allgemeinbildenden Schulen und in Wirtschaftsunternehmen geeignet. Es spricht dabei insbesondere Studierende aller Fachrichtungen sowie Beschäftigte in kaufmännischen Berufen, im Bank- und Versicherungswesen sowie in der Verwaltung an. Inhaltlich reicht der Bogen von einfachen Verzinsungsfragen über Zahlungsströme, Renten, Tilgungs- und Abschreibungsprozesse bis hin zu Kurs- und Renditeberechnungen.

Aufgrund des beschränkten Umfangs können nur die wichtigsten Begriffe und Grundlagen erläutert werden, eine Ergänzung durch weiterführende Lehrbücher ist daher empfehlenswert. Auf stochastische Modelle wurde ganz verzichtet. Andererseits bietet die knappe Darstellung gute Möglichkeiten, das Buch zur Prüfungsvorbereitung oder auch als Formelsammlung bzw. Nachschlagewerk zu verwenden. Ganz in diesem Sinne sind wichtige Formeln, Definitionen, Sätze und Beispiele jeweils grafisch und auch unmittelbar verbal gekennzeichnet.

Mein Dank gilt meiner Familie für die Unterstützung und dem Fachbuchverlag Leipzig für die Aufnahme dieses Titels in die „Mathematik-Studienhilfen“, besonders Frau Christine Fritzsch, die mit zahlreichen Hinweisen in stets sehr angenehmer Zusammenarbeit zum Gelingen beigetragen hat.

Leipzig, im Sommer 2014 Tobias Martin

Inhaltsverzeichnis

Häufig verwendete Symbole

a	Agiosatz
$A(...)$	Arithmetisches Mittel
A_t	Zahlungsstrom, Annuität (Kap.5), Abschreibung (Kap.6)
c	Zunahme-/Abnahmefaktor
C_0	Kurs
d	Abzinsungs-/Diskontierungsfaktor, konstante Differenz (Kap.1), Disagiosatz (Kap.7)
d_t	Diskontfolge
D	Duration eines Zahlungsstroms
$G(...)$	Geometrisches Mittel
G_0	Nettobarwert einer Investition
G_t	Nettokapitalwert einer Investition
i, i_t	Zinssatz, Nominalzinssatz, Prozentsatz (Kap.1), Zinsintensität (Kap. 2.8)
i_0	innerer Zinssatz einer Investition
i_m	exponentiell proportionaler Zinssatz
i^*	Rendite, Realzinssatz, Effektivzinssatz (Kap.2)
j_t	Tilgungssatz, Abschreibungssatz (Kap.6)
K	Kapital, Grundwert, Bezugsgröße (Kap. 1), Nennwert (Kap.7)
K_0	Barwert
K_0^*	Realbarwert
K_t	Zeitwert, Kapitalwert, Restschuld (Kap.5), Rest-/Buchwert (Kap.6)
K'_t	Zeitwert einer vorschüssigen Rente
K_n	Endwert
m	Anzahl Zinsperioden pro Jahr/pro Ratenperiode
n	Anzahl Zinsperioden bzw. Raten-/Annuitätenperioden
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, ...\}$
p	Zinsfuß, Prozentfuß (Kap.1)
q	Verzinsungs-/Aufzinsungsfaktor (je Periode), konstanter Faktor (Kap.1)
q_t	Verzinsungsfolge, -funktion
r	Ersatzrate
R	Rate
R_n	Gesamtwert einer Rente
S	Schrottwert
t	Zeitparameter
$\bar{t}$	mittlerer Zahlungstermin
τ	Zeitparameter im verfeinerten Modell
T_t	Tilgungsanteil
V	Konvexität eines Zahlungsstroms
Z	Zinsen, Prozentwert (Kap.1)
Z_t	Zinsen, Zinsanteil (Kap.5)

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Prozentrechnung

Das „Rechnen mit Prozenten“ ist Bestandteil der Elementarmathematik. Weil jedoch einerseits häufig Fehler beim Umgang mit Prozentangaben gemacht werden, andererseits eine sichere Beherrschung der einschlägigen Rechenregeln in der Finanzmathematik unerlässlich ist, wollen wir die wichtigsten Grundbegriffe hier wiederholen.

Prozentrechnung ist Verhältnisrechnung: Ein bestimmter Anteil einer Grundgröße wird umgerechnet in den entsprechenden Teil von 100 („pro cent“ (lat.) = je Hundert). Wir wollen mit folgenden Variablen arbeiten:

K **Grundwert**, Grundgröße, Basiswert, Basisgröße, Bezugsgröße
Z **Prozentwert** (Anteil am Grundwert, kann kleiner als K, größer als K oder auch negativ sein)
p **Prozentfuß**

Die Wertebereiche der Variablen bestehen dabei aus allen reellen Zahlen mit der Ausnahme, dass $K \neq 0$ gefordert wird.

Nach obiger verbaler Beschreibung gilt

$$\frac{Z}{K} = \frac{p}{100}. \tag{1.1}$$

Diese Gleichung kann – entsprechend der Aufgabenstellung – nach der gesuchten Größe umgestellt werden. Den durch die Gleichung (1.1) ausgedrückten Wert bezeichnet man als **Prozentsatz** i, also ist

$$\frac{Z}{K} = i. \tag{1.2}$$

Bemerkung: K und Z können wahlweise auch mit Einheiten versehen werden (die ineinander umrechenbar sein müssen). Aus (1.1) und (1.2) erkennt man hingegen, dass p und i dimensionslos sind.

Der Prozentsatz i wird oft in % („Prozent“) angegeben, also in der Schreibweise

$$i = \frac{p}{100} = p\,\%. \tag{1.3}$$

Das Symbol % stellt also lediglich eine abkürzende Schreibweise für „ein Hundertstel" dar (bzw. für die Division durch 100).

Häufig benutzt man die Wendung „p % von K", z. B. „18 % von allen gültigen Wählerstimmen". Dies ist als Multiplikation des Prozentsatzes mit dem Grundwert zu verstehen.

Beispiel 1.1: *Prozentsatz und Prozentfuß*

a) $23\,\% = \frac{23}{100} = 0{,}23;\;\; 367\,\% = \frac{367}{100} = 3{,}67;$

$\frac{1}{4}\,\% = \frac{1/4}{100} = 0{,}0025;\;\; 100\,\% = \frac{100}{100} = 1;\;\; -6{,}8\,\% = -\frac{6{,}8}{100} = -0{,}068.$

b) 18 % von 50 Mio. ergibt $\frac{18}{100} \cdot 50.000.000 = 9.000.000;$

107 % von 1:20 min ergibt $\frac{107}{100} \cdot 80\,\text{s} = 85{,}6\,\text{s} = 1:25{,}6\,\text{min}$. ■

Beispiel 1.2: *Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz*

a) Von 120 Klausurteilnehmern haben 87 die Klausur bestanden. Wie hoch ist die Quote der „Durchfaller" (in Prozent)?
b) Auf einen Netto-Warenwert von 1.150,00 € werden 19 % Mehrwertsteuer (MwSt.) erhoben. Wie hoch ist der Mehrwertsteuerbetrag?
c) Bei einem Skontosatz von 3 % ergibt sich ein Skontobetrag von 11,25 €. Wie hoch war der ursprüngliche Rechnungsbetrag?

Lösung: a) $i \underset{(1.2)}{=} \frac{Z}{K} = \frac{(120-87)\,\text{Teilnehmer}}{120\,\text{Teilnehmer}} = 0{,}275 = 27{,}5\,\%.$

b) $Z \underset{(1.2)}{=} K \cdot i = 1.150\,€ \cdot 0{,}19 = 218{,}50\,€.$

c) $K \underset{(1.2)}{=} \frac{Z}{i} = \frac{11{,}25\,€}{0{,}03} = 375{,}00\,€.$ ■

Bemerkungen:
1. Statt p % schreibt man gelegentlich auch p v.H. („vom Hundert")
2. Neben der Angabe in % verwendet man auch die Angabe ‰ („in Promille" = je Tausend). Dann ist anstelle von (1.3) zu schreiben: $i = q/1000 = q$ ‰.

Oft und gerade in der Finanzmathematik will man wissen, welcher Wert aus einer vorgegebenen Grundgröße K entsteht, wenn man sie um einen bestimmten Zuschlag erhöht (z. B. Kapital um Zins) bzw. Abschlag verringert (z. B. Rechnungsbetrag um Skonto), der seinerseits einen bestimmten festen Anteil der Grundgröße ausmacht. Für den veränderten Wert $K^* = K + Z$ gilt dann wegen (1.2)

$$K^* = (1+i)K. \tag{1.4}$$

In diesem Zusammenhang bezeichnet man

- im Fall $i > 0$ ($\Leftrightarrow$ $K^* > K$): i als **Zuwachsrate** und $1 + i$ als **Zuwachsfaktor**,
- im Fall $i < 0$ ($\Leftrightarrow$ $K^* < K$): i als **Abnahmerate** und $1 + i$ als **Abnahmefaktor**.

Beispiel 1.2 (Fortsetzung): *Zuwachs-/Abnahmefaktor*

> b) Wie groß ist der Brutto-Warenwert (inkl. MwSt.)?
> c) Wie hoch war der Zahlbetrag (Rechnung abzüglich Skonto)?

Lösung: b) $K^* = (1 + i)K = 1{,}19 \cdot 1.150\ € = 1.368{,}50\ €$,
c) $K^* = (1 + i)K = 0{,}97 \cdot 375\ € = 363{,}75\ €$. ■

Das Beispiel 1.2 macht deutlich, dass es bei allen Anwendungen wichtig ist, auf welchen Grundwert K sich die Prozentsätze beziehen. Will man etwa im Beispiel 1.2b den Nettowert (ohne MwSt.) aus dem Bruttowert 1.368,50 € berechnen, so wäre es falsch, einen Abnahmefaktor $1 - i = 1 - 19\ \% = 0{,}81$ auf den Bruttowert anzuwenden (das würde 1.108,49 € ergeben, der Nettowert betrug jedoch 1.150 €). Der Grund für diese Abweichung besteht darin, dass der Netto- und nicht der Bruttowert Grundgröße für die prozentuale Mehrwertsteuer ist.

Umgangssprachlich bedeutet eine „Erhöhung von K um $p\ \%$" genau die mittels (1.4) beschriebene Multiplikation des Grundwerts K mit dem zugehörigen Zuwachsfaktor $1 + i$. Diese Formulierung wird allerdings ungenau, wenn der Grundwert (auf den sich der Prozentsatz bezieht) dabei weggelassen wird. Insbesondere beim Vergleich von Prozentsätzen zum selben Grundwert wird ihre Differenz deshalb in **Prozentpunkten** (**%-Punkte**) ausgedrückt.

Beispiel 1.3: *Prozentsätze und Prozentpunkte*

> Der Beitragssatz zur gesetzlichen Rentenversicherung der Arbeiter und Angestellten betrug 1992 noch 17,7 %, im Jahr 2014 jedoch 18,9 % des jeweiligen Bruttoeinkommens (max. der Beitragsbemessungsgrenze). Beschreiben Sie diesen Zuwachs prozentual!

Lösung: Die Steigerung beträgt 1,2 %-Punkte, bezogen auf das Bruttoeinkommen. Wollte man den Beitrag 1992 jedoch als Bezugsgröße wählen, so ist der Beitragssatz 2014 wegen $1 + i = \frac{18{,}9\%}{17{,}7\%} \approx 1{,}067797$ um rund 6,78 % höher als jener 22 Jahre zuvor. ■

Betrachtet man mehrere Zuwächse bzw. Abschläge, so ist zu beachten: Grundsätzlich lassen sich Prozentsätze nur dann sinnvoll vergleichen, addieren oder subtrahieren, wenn sie sich *auf den gleichen Grundwert beziehen*. Sind etwa $Z_1, \ldots, Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, Prozentwerte zum gleichen Grundwert K und

$$i_k = \frac{Z_k}{K}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

die zugehörigen Prozentsätze, so ergibt sich

$$K^* = K + \sum_{k=1}^{n} Z_k = K + \sum_{k=1}^{n} K i_k = K(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k). \tag{1.5}$$

Diese Gleichung ist also anzuwenden, wenn mehrere Zu-/Abschläge *zugleich* auf eine bestimmte Bezugsgröße erhoben werden.

Beispiel 1.2 (Fortsetzung): *Mehrere Zu-/Abschläge zugleich*

a) Neben den 27,5 % Durchfallern erreichten weitere 17,5 % der 120 Klausurteilnehmer die Note 4. Wie viele Teilnehmer erhielten eine Note 3 oder besser?

Lösung: $K^* \underset{(1.5)}{=} 120 \text{ Teiln.} \cdot (1 - 27{,}5\% - 17{,}5\%) = 120 \cdot 0{,}55 = 66 \text{ Teilnehmer.}$ ■

Werden hingegen mehrere prozentuale Zu- bzw. Abschläge *nacheinander* erhoben, d. h., *Grundwert für den nächsten Zu-/Abschlag ist jeweils die bereits durch vorherige Zu-/Abschläge veränderte Bezugsgröße*, so muss man (1.4) rekursiv anwenden. Mit entsprechenden Prozentsätzen $i_1, \ldots, i_n$ ist anzusetzen

$$K_k = K_{k-1}(1 + i_k), \quad k = 1, \ldots, n, \; K_0 = K.$$

Daraus ergibt sich für den resultierenden Wert $K^* = K_n$ durch Aufmultiplizieren:

$$K^* = K \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k). \tag{1.6}$$

Beispiel 1.4: *Mehrere Zu-/Abschläge nacheinander*

Ein Mitarbeiter zahlt nach Abzug von 15 % Personalrabatt, Aufschlag von 19 % MwSt. und Abzug von 3 % Skonto 474,88 € für ein firmeneigenes Produkt. Wie hoch ist der unrabattierte Nettoverkaufspreis?

Lösung: $K^* \underset{(1.6)}{=} K(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3).$

$$\Rightarrow K = \frac{K^*}{(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)} = \frac{474{,}88 \text{ €}}{(1 - 0{,}15)(1 + 0{,}19)(1 - 0{,}03)} = 484{,}00 \text{ €}. \; ■$$

Bemerkung: (1.5) und (1.6) zeigen, dass es aufgrund der Kommutativität der Addition bzw. Multiplikation gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Zu-/Abschläge erhoben werden.

Die genannte Unterscheidung ist auch bei der Frage nach der **durchschnittlichen Zuwachsrate** mehrerer Zuwachs-/Abnahmeraten $i_1, \ldots, i_n$ zu treffen. Darunter versteht man eine (einheitliche) Zuwachs- bzw. Abnahmerate i, die bei n-maliger Anwendung den gleichen Wert K^* liefert. Mit (1.5) erhält man bei *gleichzeitig* anzuwendenden Zu-/Abschlägen den Ansatz

$$K(1+ni) = K(1+\sum_{k=1}^{n} i_k)$$

und daraus ergibt sich

$$i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_k = A(i_1, \ldots, i_n). \tag{1.7}$$

Definition 1.1: *Arithmetisches und geometrisches Mittel*

Seien $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, nichtnegative reelle Zahlen,. Wir bezeichnen mit

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{bzw.} \quad G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

das **arithmetische** bzw. **geometrische Mittel** dieser Zahlen.

Die durchschnittliche Zuwachsrate berechnet sich demnach aus dem **arithmetischen Mittel** der einzelnen Zuwachs-/Abnahmeraten, d. h. $i = A(i_1, ..., i_n)$. Wegen

$$1+i \underset{(1.7)}{=} \frac{1}{n}(n+\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(1+i_\nu) = A(1+i_1, \ldots, 1+i_n) \tag{1.7'}$$

gilt diese Aussage übrigens auch für die Zuwachs-/Abnahmefaktoren.

Bei *nacheinander* anzuwendenden Zu-/Abschlägen hat man hingegen

$$K(1+i)^n \underset{(1.6)}{=} K\prod_{k=1}^{n}(1+i_k), \text{ d. h.}$$

$$1+i = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+i_k)} = G(1+i_1, \ldots, 1+i_n). \tag{1.8}$$

Hier ist der durchschnittliche Zuwachsfaktor also mit Hilfe des **geometrischen Mittels** aus den einzelnen Zuwachs-/Abnahmefaktoren zu berechnen. Beispiele dazu werden wir in späteren Kapiteln behandeln.

1.2 Arithmetische und geometrische Folgen

Betrachtet man die zeitliche Entwicklung eines Kapitals an bestimmten diskreten Zeitpunkten, so hat man es aus analytischer Sicht mit Folgen reeller Zahlen zu tun. Unter bestimmten Voraussetzungen genügen diese Folgen relativ einfachen Bildungsgesetzen. Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ wird im Folgenden stets die Menge der natürlichen und mit $\mathbb{R}$ die der reellen Zahlen bezeichnet.

Definition 1.2: *Folge*

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl eindeutig eine reelle Zahl zuordnet, heißt **reellwertige Zahlenfolge** oder kurz **Folge**. Das Argument $n \in \mathbb{N}$ heißt **Index** und dessen Bild $a_n \in \mathbb{R}$ (***n*-tes**) **Glied** der Folge.

Bezeichnung: $a = (a_n) = (a_n)_{n=1,2,\ldots} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Kurz gesagt versteht man unter einer Folge nichts anderes als eine abzählbare Menge reeller Zahlen, in der eine Reihenfolge der Elemente (durch Indizierung) festgelegt ist. Gelegentlich beginnt man mit der Indizierung auch bei $n = 0$. In diesen Fällen ist eine Folge genau genommen als Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ aufzufassen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Wir werden dies ab und zu auch so handhaben.

Einige aus der Analysis bekannte Eigenschaften, die Folgen aufweisen können, sind:

- (a_n) heißt **monoton wachsend** (bzw. **streng monoton wachsend**), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} > a_n$).
- (a_n) heißt **monoton fallend** (bzw. **streng monoton fallend**), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \leq a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).
- (a_n) heißt **alternierend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.
- (a_n) heißt **nach oben beschränkt** (bzw. **nach unten beschränkt**), wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$). Eine **beschränkte** Folge ist nach oben *und* nach unten beschränkt.
- (a_n) heißt **konvex** (bzw. **konkav**), wenn für alle $n \geq 2$ gilt:

  $\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \geq a_n$ (bzw. $\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \leq a_n$). Man spricht auch hier von strenger Konvexität (bzw. Konkavität), wenn die Ungleichung für alle $n \geq 2$ mit dem echten Größer- (bzw. Kleiner-)Zeichen erfüllt ist.

Das Monotonieverhalten sowie die Konvexität bzw. Konkavität einer Folge kann aus dem Verhalten einer passenden Funktion abgeleitet werden: Ist $f = f(x)$ eine

Funktion, die auf $[1,\infty)$ definiert ist, und $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge mit $a_n = f(n)$, so ergeben sich Monotonie- bzw. Konvexitätseigenschaften der Folge (a_n) aus den jeweiligen Monotonie- bzw. Konvexitätseigenschaften der Funktion *f*. In einigen Beweisen werden wir diese Tatsache benutzen.

Von besonderer Bedeutung ist außerdem der Konvergenzbegriff. Danach konvergiert eine Folge, wenn sich ihre Glieder mit wachsendem Index immer mehr einer festen Zahl annähern. Genauer formulieren wir (vgl. [10], Def. 3.3):

Definition 1.3: *Konvergenz und Grenzwert einer Folge*

Eine Folge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ heißt **konvergent**, wenn eine feste reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ existiert, der sog. **Grenzwert** von (a_n), so dass gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Bezeichnung: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

Beispiel 1.5: *Konvergenz und Divergenz*

Man untersuche nachstehende Folgen (a_n) auf Konvergenz:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ c) $a_n = nd,\ d \in \mathbb{R}$, d) $a_n = q^n,\ q \in \mathbb{R}$,

e) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Lösung: a) Die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ ist streng monoton fallend, beschränkt (durch 0 nach unten und 1 nach oben) und konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (eine sog. **Nullfolge**).

b) Die Folge lautet $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots)$, es handelt sich um eine alternierende, beschränkte und konvergente Nullfolge.

c) Das Verhalten dieser Folge $(d, 2d, 3d, 4d, \ldots)$ hängt von d ab:
$d > 0$: streng monoton wachsend, unbeschränkt und divergent
$d = 0$: konstante Nullfoge
$d < 0$: streng monoton fallend, unbeschränkt und divergent

d) Das Verhalten dieser Folge $(q, q^2, q^3, q^4, \ldots)$ hängt von q ab:
$q > 1$: streng monoton wachsend, divergent
$q = 1$: konstant, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
$0 < q < 1$: streng monoton fallende Nullfoge
$q = 0$: konstante Nullfoge
$-1 < q < 0$: alternierende Nullfolge
$q \leq -1$: alternierend, divergent

e) Diese Folge ist streng monoton wachsend, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \approx 2{,}71828$. ■

Die Frage, ob eine gegebene Folge konvergiert, ist nicht immer leicht zu beantworten. Dazu sei auf die einschlägige Literatur zur Analysis verwiesen, z. B. [10], Kapitel 3.

Wir befassen uns nun mit zwei speziellen Formen von Folgen, die in der Finanzmathematik sehr häufig auftreten: arithmetische und geometrische Folgen.

Definition 1.4: *Arithmetische Folge*

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **arithmetisch**, wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} - a_n = d = \text{konst.} \tag{1.9}$$

Bei einer arithmetischen Folge ist also die *Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant* für alle Indizes. Kennt man zusätzlich $a_1 = a$, so ist durch Angabe dieser Differenz d die gesamte Folge eindeutig bestimmt:

$$(a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots)$$

Man erhält also aus (1.9) sofort sowohl die **rekursive Darstellung**

$$a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n + d \ \ \text{für } n\in\mathbb{N},$$

als auch (mittels vollständiger Induktion) die **explizite Darstellung** einer arithmetischen Folge:

$$\boxed{a_n = a + (n-1)d,\ \ n\in\mathbb{N}} \tag{1.10}$$

(*explizite Darstellung einer arithmetischen Folge, Startindex* 1)

Eine arithmetische Folge haben wir bereits in Beispiel 1.5c kennen gelernt (mit $a = d$). Das nächste Beispiel zeigt eine weitere, mehr wirtschaftlich orientierte Anwendung.

Beispiel 1.6: *Arithmetische Folge*

Ein Unternehmen wies im Jahr 2013 einen Umsatz von 400 Mio. € aus. Der Umsatz soll jährlich um 45 Mio. € gesteigert werden. Welchen Umsatz würde das Unternehmen im Jahr 2021 erreichen?

Lösung: a_n bezeichne den Umsatz im Jahr $2012 + n$. Die Umsatzdifferenz zweier aufeinanderfolgender Jahre beträgt konstant 45 Mio. €, es handelt sich also um eine arithmetische Folge. Wir haben also $a = a_1 = 400$ Mio. €, $d = 45$ Mio. €.
Mit Hilfe von Formel (1.10) ergibt sich der Umsatz im Jahr $2021 = 2012 + 9$ als $a_9 = 400$ Mio. € + $(9-1)\cdot 45$ Mio. € = 760 Mio. €. ■

Arithmetische Folgen sind für $d \neq 0$ stets divergent, für positives d streben sie nach $+\infty$, für negatives d gegen $-\infty$. Im Fall $d = 0$ sind sie konstant (identisch gleich a).

Definition 1.5: *Geometrische Folge*

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gliedern $a_n \neq 0$ heißt **geometrisch**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{konst.} \tag{1.11}$$

Bei einer geometrischen Folge ist demnach der *Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant* für alle Indizes. Kennt man zusätzlich $a_1 = a$, so ist durch Angabe des Quotienten q wiederum die gesamte Folge eindeutig bestimmt:

$$(a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots)$$

Man erhält also aus (1.11) analog oben sowohl die **rekursive Darstellung**

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n q \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

als auch (wiederum mittels vollständiger Induktion) die **explizite Darstellung** einer geometrischen Folge:

$$\boxed{a_n = aq^{n-1},\quad n \in \mathbb{N}} \tag{1.12}$$

(*explizite Darstellung einer geometrischen Folge, Startindex* 1)

Bemerkungen:
1. Die expliziten Darstellungen (1.10) und (1.12) kann man auch als Definition einer arithmetischen bzw. geometrischen Folge auffassen. Bei (1.12) wird dadurch auch der in Definition 1.5 ausgeschlossene Fall $a_n = 0$ (entspricht $q = 0$) einbezogen. Dies wollen wir im Weiteren so verstehen.
2. *Beginnt die Folge mit Index* 0, so lauten die expliziten Darstellungen einer arithmetischen Folge $a_n = a + nd$ bzw. einer geometrischen Folge $a_n = a\,q^n$.

Im Beispiel 1.5d war uns bereits eine geometrische Folge begegnet (mit $a = q$). Nachfolgend zwei weitere Beispiele aus unterschiedlichen Bereichen.

Beispiel 1.7: *Geometrische Folge*

Ein Aktionär schätzt ein, dass der Wert seines Aktienportfolios jährlich um 8 % steigen könnte. Gegenwärtig beträgt er 6.000 €. Welchen Wert hätte dann sein Portfolio in 10 Jahren (ohne Zu- und Verkauf)?

Lösung: a_n sei der Wert des Portfolios im Jahr n der Betrachtung (bezogen auf einen festen Stichtag im Jahr). Die geplante jährliche Steigerung bezieht sich jeweils auf das Vorjahr, man hat also eine konstante jährliche Zunahmerate von 8 % und demnach einen konstanten Zunahmefaktor $a_{n+1}/a_n = 1 + i = q = 1{,}08$. Die Portfoliowerte bilden also eine geometrische Folge. Wenn der Portfoliowert am Stichtag $a_1 = a = 6.000$ € beträgt, so ist er in 10 Jahren gleich $a_{1+10} = a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1}$ $= 6.000$ € $\cdot\, 1{,}08^{10} = 12.953{,}55$ €. ■

Beispiel 1.8: *Geometrische Folge*

> Die Masse a eines radioaktiven Stoffes zerfällt während der Halbwertzeit T zu 50 %. Nach wie viel Perioden der Länge T ist weniger als 1 % der Ausgangsmasse vorhanden?

Lösung: a_n sei die vorhandene Masse nach $n-1$ Perioden der Länge T. Dann bildet (a_n) eine geometrische Folge mit $a_1 = a$ und $q = 0{,}5$. Also ist anzusetzen

$$a_n = a \cdot 0{,}5^{n-1} < 0{,}01 \cdot a.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu $100 < 2^{n-1} \Leftrightarrow n-1 > \log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6{,}64.$

Nach 7 Perioden ist damit weniger als 1 % der Ausgangsmasse vorhanden. ■

Die Eigenschaften einer geometrischen Folge hängen von a und q ab:

- Für $|q| < 1$ konvergiert die Folge gegen Null. Im Fall $q = 1$ ist sie konstant (identisch gleich a) und für alle anderen q divergiert sie.
- Monotones Verhalten weist die Folge für $q > 0$ auf. Bei positivem a ist sie beispielsweise streng monoton wachsend für $q > 1$, aber streng monoton fallend für $0 < q < 1$.
- Für $q < 0$ ist die Folge alternierend.

Sehr oft interessiert man sich für Summen von Folgengliedern. Dabei treten immer wieder die Summen der ersten n Glieder sowie die Summe über alle Folgenglieder auf. Dies führt zu folgender

Definition 1.6: *Partialsummen und Reihe*

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ***n*-te Partialsumme** der Folge. Die Folge $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ der Partialsummen nennt man die **Reihe** über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konvergiert (s_n), so heißt die Reihe konvergent, andernfalls divergent.

Bezeichnung: $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Für allgemeine Beispiele soll wieder auf die Literatur verwiesen werden.

Beispiel 1.9: *Reihen*

Man untersuche die Partialsummen der Folge (a_n) mit $a_n = n$.

Lösung: Für die Partialsummen gilt die bekannte Formel $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(Beweis mit vollständiger Induktion) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. ■

Wenden wir diese Begriffe nun auf die oben definierten arithmetischen bzw. geometrischen Folgen an. Im Falle einer *arithmetischen Reihe* gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d) = a\sum_{k=1}^{n} 1 + d\sum_{k=1}^{n} (k-1) = an + d\sum_{\nu=0}^{n-1} k,$$

also erhält man unter Zuhilfenahme von Beispiel 1.9 die Partialsumme

$$\boxed{s_n = an + d\,\frac{(n-1)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.} \tag{1.13}$$

(*Partialsumme einer arithmetischen Folge, Startindex* 1)

Durch Umformung erhält man aufgrund von (1.10)

$$s_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) = \frac{n}{2}(a+a+(n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{1.14}$$

Diese alternative Summenformel kann man bequem anwenden, sofern das letzte zu addierende Folgenglied a_n bekannt ist.

Beispiel 1.6 (Fortsetzung): *Endliche arithmetische Reihe*

Zu bestimmen ist die Summe der Umsätze für die Jahre 2013 bis 2021 des Unternehmens (bei Eintreten der geplanten Steigerungen).

Lösung: $s_9 = a \cdot 9 + d \cdot \frac{9\cdot 8}{2} = 400\,\text{Mio.}\,€ \cdot 9 + 45\,\text{Mio.}\,€ \cdot \frac{9\cdot 8}{2} = 5.220\,\text{Mio.}\,€.$

Alternative: $s_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_{12}) = 4{,}5 \cdot (400 + 760)\,\text{Mio.}\,€ = 5.220\,\text{Mio.}\,€.$ ■