Michael Staffa

Tragwerkslehre

Grundlagen, Gestaltung, Beispiele

Bauwerk BBB
Beuth

Tragwerkslehre

Michael Staffa

Tragwerkslehre

Grundlagen, Gestaltung, Beispiele

Statik

Hallenbau

Geschossbau

Räumliche Tragsysteme

Vordimensionierung

Querschnittstabellen

Bauwerk

© 2014 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich
Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: info@beuth.de

Titelabbildung: Leibnizbrücke Eberswalde, Martin Sauerzapfe

Druck und Bindung:
medienHaus Plump GmbH, Rheinbreitbach

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706.

ISBN 978-3-410-22910-0

Vorwort

Eine lebendige Tragwerkslehre soll die gestalterische Funktion von Tragwerken erlebbar machen. Das Entwerfen von Tragwerken schärft das Gefühl für die Übereinstimmung von Tragwerk und Gestalt.
Voraussetzung hierfür ist eine saubere Ausbildung im Grundlagengebiet Statik, das ohne Berechnungen nicht gelehrt werden kann. Aber: Ziel der Arbeit ist der Entwurf eines Tragwerks, nicht seine Berechnung. Ins Zentrum der Tragwerkslehre rückt die schnelle und einfache Vordimensionierung tragender Bauteile.
Tragwerke sind weder lästiges Übel noch ornamentaler Gebäudeschmuck. Sie sind genauso Entwurfsgegenstand wie die städtebauliche Einbindung, Farbgebung oder Lichteinfall.
Dieses Buch soll dem Leser und Studierenden die spannende Welt der Tragwerke öffnen und Mut zum Entwurf von Tragwerken machen.
Es führt damit weg von den Tragwerksplatzhaltern, die so gern bei Wettbewerben gezeigt werden.

ArchitektIn und IngenieurIn

Zwischen Architekt und Ingenieur herrscht im Alltag häuf g ein frostiges Klima. Ingenieure, die versuchen, den Entwurf wirklich zu verstehen und in Diskussion mit dem Architekten echten Tragwerksentwurf betreiben, sind noch seltener als Architekten, die offen für Entwurfsvorschläge ihres Tragwerksplaners sind. Die Probleme der Statik sind nun mal vorhanden, solange wir uns auf der Erde bewegen und werden durch Vertuschen bestimmt nicht gelöst. Im Gegenteil kann ein Entwurf oft erst durch die Auseinandersetzung mit dem Tragwerk und dem Tragwerksplaner zum Leben erweckt werden. Viele Entwürfe bekommen durch den Zwang zum Tragwerksentwurf erst ihren Halt. Dabei muss sich das Tragwerk nicht in den Vordergrund drängen. Oft wirkt es am Besten durch seine Zurückhaltung. Es ist unabdingbar, dass ein Dialog zwischen Architekt und Ingenieur stattf ndet. Dieser Dialog muss durch ein gemeinsames Verständnis, wie gemeinsame Sprache und Fachausdrücke möglichst unmissverständlich von beiden Seiten geführt werden.

Zur Vordimensionierung

Die Bemessung tragender Bauteile wird zunehmend komplizierter und beschränkt sich in der täglichen Arbeit eines Bauingenieurs nicht nur auf statische Fragen, sondern beinhaltet auch bauphysikalische, konstruktive, herstellungstechnische und weitere Belange.
Für den Tragwerksentwurf benötigen wir Näherungsformeln, mit denen man einfach und schnell Bauteildimensionen ermitteln kann. Diese sind grobe Richtwerte und keine wissenschaftliche Formeln und dürfen daher nicht zu eng gesehen werden. Die Angaben sollen Architekten oder Bauingenieur die Lage versetzen, schnell übliche statische Systeme in üblichen Materialien vorzubemessen.
Um das Buch möglichst einfach und übersichtlich zu halten, ist auf viele Differenzierungsmöglichkeiten verzichtet worden; entsprechend grob sind die Angaben zu verstehen.
Die meisten Vorbemessungsformeln werden lediglich in Abhängigkeit der Stützweite angegeben. Das ist natürlich äußerst grob, aber dafür sehr einfach. Eine exakte Lastermittlung widerspricht dem Sinn der schnellen Vordimensionierung. Alle Angaben beziehen sich auf übliche Stützweiten bzw Knicklängen bei üblichen Lasten.
Zur etwas genaueren Vordimensionierung von Unterzügen und Stützen haben wir Bemessungsdiagramme aufgestellt, in die Last und Stützweite bzw. Last und Knicklänge eingehen. Zur schnellen Ermittlung sind hier beispielhaft grobe Anhaltswerte für Deckenlasten angegeben.

Ich möchte mich herzlich für die Erstellung der Zeichnungen und Diagramme bei Birgit Goldmann, Harald Pietsch und Katharina Paschburg, ganz besonders aber bei Michael Janßen-Müller bedanken. Zudem danke ich Kai Niedereichholz und Björn Wolke für die kritische Begleitung bei der Entwicklung des Buches in den letzten Jahren.

Michael Staffa, Berlin 2014

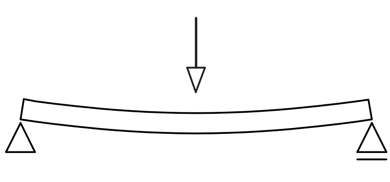
Inhalt

D Räumliche Tragsysteme

E Vordimensionierung

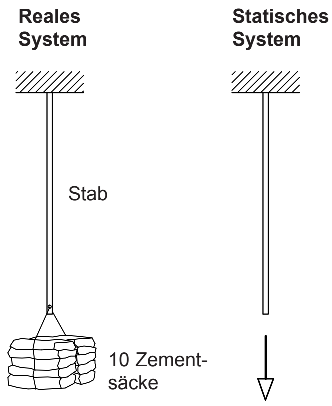
F Querschnittstabellen

Kapitel A:
Statik



1 Zugstütze

Eine Stütze, die an einer Decke hängend befestigt ist und von einer Last am unteren Ende belastet wird, muss diese Last durch die gesamte Stablänge bis zum Kopf der Stütze durchleiten. Die Befestigung am Stützenkopf muss diese Last ebenso aufnehmen können. Um die Kraft im Stab an beliebiger Stelle zu untersuchen, wenden wir ein Prinzip an, das uns noch oft weiterhelfen wird.
In der Statik werden Kräfte durch Pfeile dargestellt.

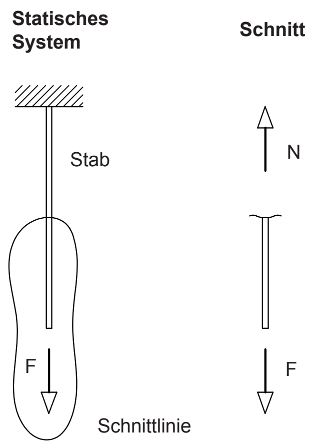


Schnittprinzip

Es funktioniert so: Der Stab wird in Gedanken an beliebiger Stelle durchgeschnitten. Das Stück Stab, das jetzt herunterfallen würde, soll aber nichts davon merken, also muss man die Kraft, die bisher in dem Stab gewirkt hat, jetzt beim Abschneiden anbringen. Diese Stabkraft heißt Normalkraft (N) und ist entgegengesetzt zur angehängten Kraft (F) gerichtet. Dadurch heben sich beide Kräfte auf und das abgeschnittene Stabende fällt nicht herunter.
Wir schreiben das als sogenannte Gleichgewichtsbedingung so:

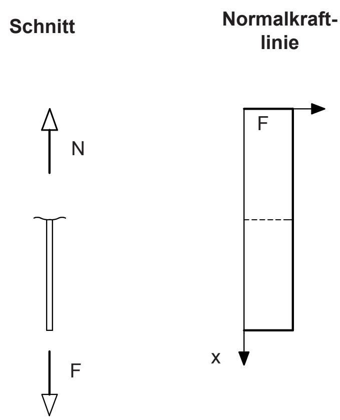
$$\Sigma F_V = 0 \qquad F - N = 0 \qquad N = F$$

Die Summe der vertikalen Kräfte muss Null ergeben, sonst fällt unser Stabstück herunter.



Normalkraftdiagramm

Wo immer man durchschneidet, findet man als Normalkraft die entgegengesetzte Größe der angehängten Last, vorausgesetzt, die Stütze wiegt selbst nichts oder jedenfalls sehr wenig im Vergleich zu der Last. Wir sagen: Die Normalkraft ist konstant über die Länge der Stütze. Man kann ein Diagramm zeichnen: Die Normalkraft an jeder Stelle der Stütze. Dies nennen wir Normalkraftlinie. Die Stabachse wird üblicherweise als x-Achse bezeichnet. Wir erhalten ein Diagramm, das uns für jede Stelle der Stütze die Größe der Normalkraft angibt. Vorläufig ist das noch nicht so spannend, da wie gesagt, die Normalkraft konstant über die Stützenlänge ist und wir dies wohl von vornherein ahnten. Später wird diese Darstellungsart aufregender und sehr wichtig für die Beurteilung eines Tragwerks werden.



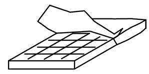
Einheiten von Gewichten und Kräften

Aus dem täglichen Leben sind uns Gewichte, gemessen z.B. in Kilogramm (kg) geläufig.
In der Statik rechnet man aber mit Kräften statt mit Gewichten. Die Grundeinheit der Kräfte heißt Newton (N), benannt nach dem gleichnamigen englischen Wissenschaftler. Ein Newton entspricht der Kraft, die von dem Gewicht von 100 g, also einer Tafel Schokolade, ausgeübt wird.

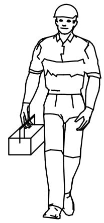
Da die Einheit ein bisschen klein für unsere Zwecke ist, benutzen wir das tausendfache Newton, das Kilo-Newton (kN). Es entspricht einem dicken Bauarbeiter mit Werkzeugkiste oder 100 kg.

Zehn dicke Bauarbeiter, also 10 kN, entsprechen dem Gewicht eines Kleinwagens, z.B. eines VW Polo. Bisher kannten wir diese Größenordnung als Tonne (t). Dies wiederum sind 1000 kg.

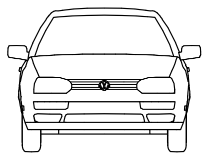
entspricht

1 N  100 g

Tafel Schokolade

1 kN  100 kg

Dicker Bauarbeiter

10 kN  1000 kg = 1 t

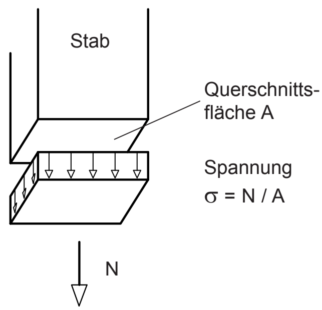
Kleinwagen

Spannung

Stellt man sich die Stütze horizontal geschnitten vor, dann zeigt jeder Schnitt die Querschnittsfläche. Auf diesen Querschnitt wirkt nun die besagte Normalkraft. Jeder Quadratzentimeter eines Querschnitts wird jeweils den gleichen Anteil an der unten angehängten Last tragen. Diese Beanspruchung eines Querschnittselements, z.B. eines Quadratzentimeters nennt man Spannung, Bezeichnung σ. Aus diesen Worten wird sogar deutlich, wie diese einfache Spannungsberechnung ausführt wird. Noch einmal: Jeder Quadratzentimeter der Querschnittsfläche trägt den gleichen Anteil an der Normalkraft. Ist die Last also zehn Zementsäcke groß und besteht die Querschnittsfläche aus zehn Quadratzentimetern, dann muss jeder Quadratzentimeter einen Zementsack tragen. Das heißt, man muss nur die Normalkraft F durch die Anzahl der Quadratzentimeter der Querschnittsfläche A teilen und erhält die Spannung. Die Spannung verteilt sich konstant über der Querschnittsfläche.

Welche Form der Querschnitt hat, rund, eckig, rohr- oder T-förmig, ist dabei egal. Es kommt nur auf die Größe der Querschnittsfläche an, also auf die Anzahl der Quadratzentimeter des Materials im Querschnitt.

Spannung in einer Zugstütze



Spannung infolge Normalkraft

σ = **N / A** [kN / cm²]

N:	Normalkraft	kN
A:	Querschnittsfläche	cm²

Spannungsnachweis

Um herauszubekommen, ob die Stütze hält oder ob sie versagt, müssen wir uns die Zugfestigkeit des Materials ansehen, die in einem Baustofflabor bestimmt wird. Stahl und besonders Holz sind Werkstoffe, deren Eigenschaften Streuungen aufweisen. Dadurch gibt es keine konstanten Werte für die Festigkeiten. Für die statische Berechnung eines Bauteils – wir nennen dies Bemessung – wird ein statistischer Rechenwert der Festigkeit angenommen. Beim Baustoff Holz soll dieser Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erreicht werden. Bei Stahl nimmt man einen vergleichbaren Wert, die Streckgrenze. Dieser wird in einem späteren Kapitel erläutert. Wir wollen diese Festigkeiten hier Grenzzugspannungen nennen.

Einige Grenzzugspannungen f_t zeigt die nebenstehende Tabelle. Der Index t steht für den englischen Ausdruck für Zugfestigkeit, tensile strength.

Wir müssen allerdings von der Grenzzugfestigkeit ein gutes Stück entfernt bleiben, um sicher zu sein, dass das Bauteil nicht versagt.

In der Realität wird daher mit mehreren Sicherheitsbeiwerten gearbeitet, die etwas kompliziert anzuwenden sind. Eigenlasten erhalten den Sicherheitsbeiwert 1,35 und Nutzlasten 1,5. Der Baustoff Stahl erhält den Beiwert 1,1. Beim Baustoff Holz ist es etwas komplizierter.

Da diese sogenannten Teilsicherheitsbeiwerte für unser Ziel nicht direkt zum Verständnis beitragen, wollen wir hier ein vereinfachtes Modell einführen, das die Sicherheitsbeiwerte der Belastung zu dem Wert 1,45 zusammenfasst. Die Sicherheitsbeiwerte der Festigkeiten sind bereits in den Angaben der Grenzspannung enthalten.

Der Spannungsnachweis geht dann so:

Die vorhandene Spannung vorh σ multipliziert mit dem Sicherheitsbeiwert muss kleiner sein als die Grenzzugspannung f_t .

Grenzzugspannung f_t (ca.)

Vollholz	
S 10	0,9 kN/cm²
S 13	1,1 kN/cm²
Brettschichtholz	
GL 24c (BS 11)	0,9 kN/cm²
GL 28c (BS 14)	1,0 kN/cm²
GL 32c (BS 16)	1,2 kN/cm²
(Klammern: alte Bezeichnung)	
Stahl	
S 235	21,8 kN/cm²
S 355	32,7 kN/cm²

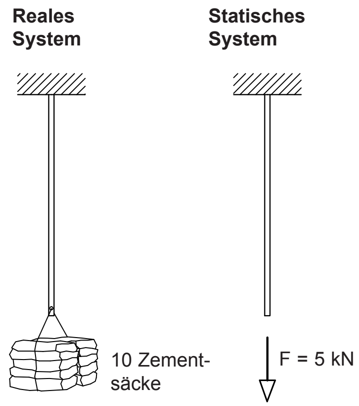
Sicherheitsbeiwert der Belastung (ca.)

$\gamma = 1{,}45$

Spannungsnachweis für Zugspannung

$\gamma \cdot \text{vorh}\ \sigma \quad < \quad f_t$

Rechenbeispiel Zugstütze



Zehn Zementsäcke hängen an einer Stütze mit quadratischem Querschnitt 2 cm x 2 cm. Wie groß ist die Spannung?
Zehn Zementsäcke wiegen 10 · 50 kg = 500 kg, d.h. eine halbe Tonne oder ein halber VW Polo oder 5 dicke Bauarbeiter. Korrekt formuliert haben wir an die Stütze 5 kN angehängt:

$F = 5$ kN

Die Querschnittsfläche beträgt 2 · 2 cm², also
$A = 2 \cdot 2 = 4$ cm²

Die Normalkraft ist gleich groß wie die angehängte Last. Die Spannung beträgt mit dem Sicherheitsbeiwert γ:

$$\sigma = \gamma \cdot N\,[\mathrm{kN}] / A\,[\mathrm{cm^2}] = 1{,}45 \cdot 5 / 4 = 1{,}81\ \mathrm{kN/cm^2}$$

Aber hält das, oder reißt die Stütze durch? Das wiederum hängt vom Material der Stütze ab. Wir haben noch nicht festgelegt, ob die Stütze aus Holz oder Stahl sein soll.
Die auftretende Spannung ist unabhängig vom Material.

Im Fall einer Holzstütze aus normalem Bauholz mit der Güte S10 sieht der Spannungsnachweis folgendermaßen aus.

$$\sigma = 1{,}81\ \mathrm{kN/cm^2} > \sigma_t = 0{,}9\ \mathrm{kN/cm^2}$$

Da ist leider die berechnete Spannung deutlich größer als die Genzzugspannung unserer Holzstütze. Die Wahrscheinlichkeit ist zu groß, dass die Stütze versagt. Welchen Querschnitt müsste die Stütze haben? Vielleicht 3cm x 3cm?

Spannungsnachweis für eine Stahlstütze mit der Materialgüte S 235 des gleichen Querschnitts:

$$\sigma = 1{,}81\ \mathrm{kN/cm^2}\ \text{(s.o.)} < \sigma_t = 21{,}8\ \mathrm{kN/cm^2}$$

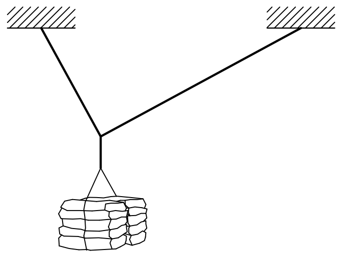
In Stahl darf die Stütze ausgeführt werden. Sie ist dann sogar nur sehr gering ausgenutzt. Man könnte sie deutlich dünner konstruieren. Probieren Sie es doch einmal mit 10mm x 10mm! (Im Stahlbau werden Maße immer in Millimetern angegeben.)

2 Einfaches Stabwerk

Seilwerk

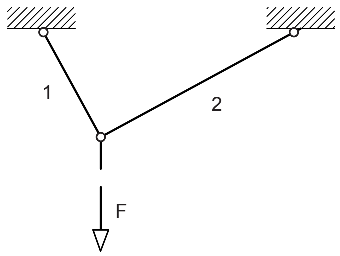
Komplizierter wird es jetzt: wir haben zwei Seile, die am Fußpunkt verbunden sind, dort wird eine Last angehängt, zum Beispiel wieder unsere zehn Zementsäcke.
Dieses Tragwerk ist in der Skizze dargestellt.

Reales Tragwerk



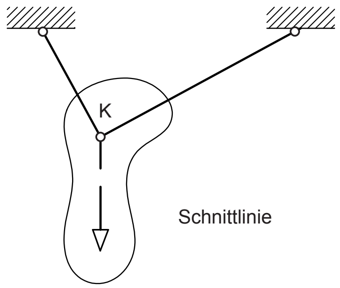
Der Bauingenieur zeichnet nicht das reale Tragwerk, sondern vereinfacht es und nennt es statisches System. Die Last wird dabei als Pfeil gezeichnet. Sie wird sich vermutlich irgendwie in beide Seile aufteilen.
Wieder ist natürlich die Frage, ob das Tragwerk hält oder ob die Seile reißen, oder umgekehrt, wie dick müssen die Seile sein, damit sie nicht reißen? Dazu müssen wir wieder einen Spannungsnachweis führen, für jedes Seil einen eigenen. Für einen Spannungsnachweis benötigt man aber die Normalkraft. Wie groß sind denn die Normalkräfte in den Seilen?

Statisches System



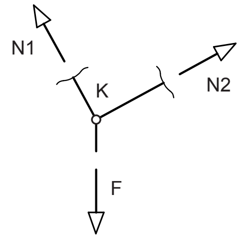
Knotenschnitt

Wir wenden wieder das Schnittprinzip an. Wir schneiden den Knoten ab. Der Knoten ist die Stelle, an der die beiden Seile zusammenkommen.
Der Statiker sagt, er schneidet den Knoten frei.



Der freigeschnittene Knoten ist in der Skizze dargestellt. Jetzt müssen die Normalkräfte N1 und N2, die vorher in den Seilen gewirkt haben, an den freigeschnittenen Knoten angebracht werden, damit der Knoten nicht herunterfällt. Alle an dem Knoten wirkenden Kräfte müssen sich aufheben, es muss Gleichgewicht herrschen. Das bedeutet, dass alle Kräfte am Knoten aneinandergehängt insgesamt null ergeben müssen, sonst bewegt sich der Knoten und das soll er nicht.
Unsere Disziplin heißt ja Statik.

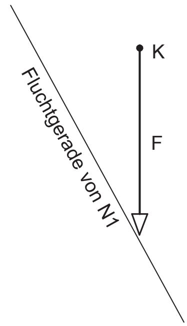
Knotenschnitt



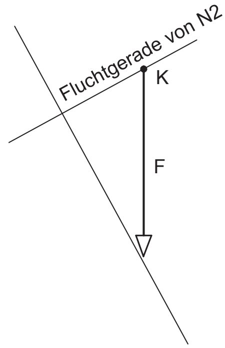
Krafteck

Konstruieren des Kraftecks

Wir zeichnen ein neues Diagramm, das Krafteck. Wir gehen so vor: Wir bringen am Knoten K zunächst die äußere Kraft F an. Sie zeigt vom Knoten nach unten und ist maßstäblich gezeichnet, also für die 5 kN z.B. 5 cm. Dann tragen wir die Fluchtgerade des Seils 1 am Endpunkt der Kraft F an. In welche Richtung die Normalkraft N1 zeigt, nach oben links oder unten rechts, können wir im Moment noch nicht wissen.

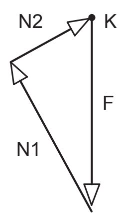


Mit der zweiten Normalkraft N2 müssen wir wieder den Ausgangspunkt K treffen. Die Gerade, die die Flucht von N2 angibt, muss durch den Ausgangspunkt gehen. Da gibt es nur eine Möglichkeit.



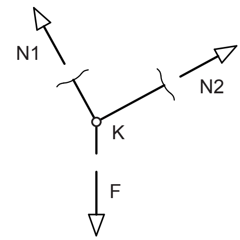
Jetzt ist auch die Richtung der Kräfte N1 und N2 klar. Sie müssen wie in der Zeichnung dargestellt verlaufen, um das Krafteck zu schließen.
Ihre Pfeilspitze kann eingetragen und ihre Größe ausgemessen werden.
Wenn das Krafteck geschlossen ist, herrscht am Knoten Gleichgewicht.
Damit werden zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt:

$$\Sigma F_V = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma F_H = 0$$



Knotenschnitt

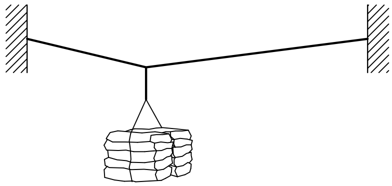
Wir kontrollieren noch, ob im Knotenschnitt die Kräfte so angenommen wurden, wie wir es jetzt herausbekommen haben:
N1 zeigt in beiden Skizzen nach links oben, N2 nach rechts oben. Im Knotenschnitt sieht man, dass beide am Knoten ziehen, also sind es Zugkräfte.
Das war ja eigentlich von Anfang an klar.



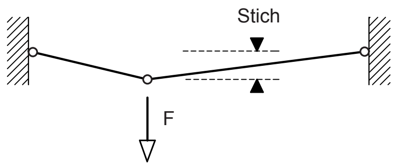
Seilwerk mit geringem Stich

Sehen wir doch einmal, was die Seilkräfte machen, wenn wir den Durchhang des Seils sehr gering wählen. Wieder hängen Zementsäcke an einem Seil.

Reales Tragwerk

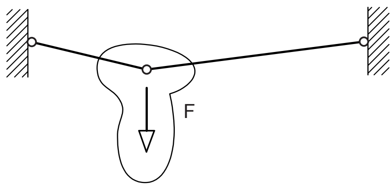


Statisches System

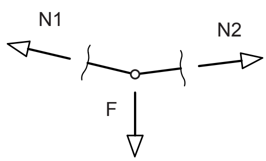


Den Durchhang nennen wir Stich. Den Abstand der beiden Seilenden nennen wir Stützweite.
Das Vorgehen ist dasselbe wie vorher. Wir legen einen Knotenschnitt.

Schnittlinie

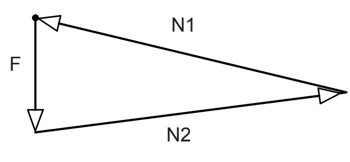


Knotenschnitt



Wir sehen am Krafteck, dass etwas Erstaunliches passiert. Die Seilkräfte sind um ein Mehrfaches größer als die angehängte Kraft.

Krafteck

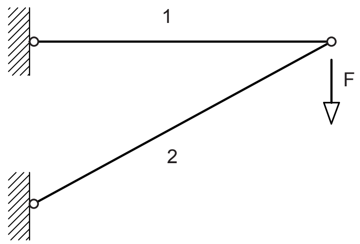


Wenn wir das Spiel weitertreiben und den Stich noch mehr verkürzen, werden die Kräfte extrem groß. Bei einem gerade gespannten Seil ohne Stich werden sie unendlich groß.
Das sagt uns, dass Seile ohne Stich, also ohne Durchhang, keine Last aufnehmen können.
Das weiß nicht jeder Architekt!

Strebenbock

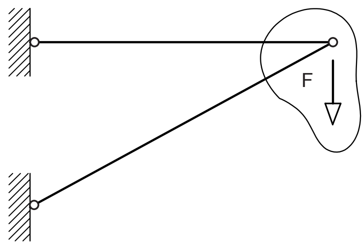
Wir wissen jetzt, wie man eine Last an zwei Seile anhängen kann. Interessant könnte sein, eine Last an zwei Stäbe anzuhängen, von denen wir nicht wissen, ob sie eine Zug- oder eine Druckkraft erhalten.
Raten Sie doch einmal, wie das bei dem dargestellten System ist.

System Strebenbock



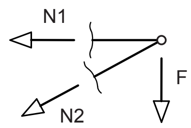
Natürlich legen wir wieder unseren bekannten Knotenschnitt.

Schnittlinie



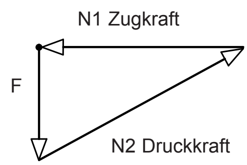
Da wir die Richtung der Stabkräfte nicht kennen, tragen wir ganz dogmatisch eine Zugkraft ein. Das nennt der Bauingenieur eine positive Normalkraft. Eine Zugkraft zieht am Knoten. Eine Druckkraft würde auf den Knoten drücken und wir würden sie negative Normalkraft nennen.

Knotenschnitt



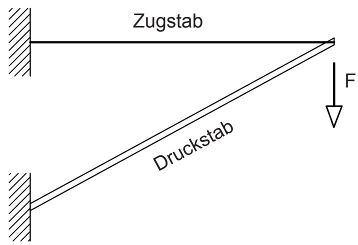
Im Krafteck sehen wir, dass N1 in dieselbe Richtung zeigt, die wir im Knotenschnitt angenommen haben. Es ist also wie angenommen eine Zugkraft.
N2 hingegen zeigt in die andere Richtung als im Knotenschnitt angenommen. Es ist also real eine Druckkraft; sie drückt auf den Knoten.

Krafteck



Nun ist leicht einzusehen, dass eine Zugkraft von einem Seil aufgenommen werden kann, also sehr dünn sein kann. Der statische Nachweis für den Zugstab kann wie für eine Zugstütze erfolgen.
Eine Druckkraft hingegen kann von einem Seil nicht aufgenommen werden, hier muss ein kräftigerer Stab eingebaut werden. Der Nachweis dafür wird in einem späteren Kapitel behandelt.

Reales Tragwerk



Beispiele Zug- und Druckstützen

Der einfachste Fall einer Zugstütze ist das hängende Seil. Hier hängt ein Stahlbetonfertigteil an einem Mobilkran. Das vertikale Sei teilt sich in zwei gespreizte Seile, Die angreifenden Seilkräfte am Verzweigungspunkt müssen sich aufheben, sonst fällt das Betonteil herunter.

Ein einfaches Stabwerk besitzt diese Ampel. Die Dicke der beiden Stäbe des Auslegers zeigt an welches ein Zug- und welches ein Druckstab ist.

Diese Balkons in Hamburg sind nachträglich angebaut worden. Die schrägen Stahlstäbe bilden mit den seitlichen Randträgern Strebenböcke.

Auf dem Olympiagelände in München sind nicht nur die Seile, die das Dach der Olympiahalle halten, zugbeansprucht, sondern auch alle anderen Seile des Dachs selbst. Das ist dann aber sehr viel komplizierter zu rechnen, als bisher in diesem Kapitel.

Auch hier ist eine Last an Seilen aufgehängt. Ein Flugzeug schwebt über dem Dach des Technikmuseums in Berlin.
Man kann sich aber auch vorstellen, dass die etwas dickeren schrägen Seile oberhalb auch zugbelastet sind. Da es keine Seile sind, sondern Stahlrohre, nennen wir sie besser Zugstäbe.

Das Dach des Müngersdorfer Stadions in Köln wird von Schrägseilen getragen. Der Pylon, das ist die Stütze, ist natürlich druckbeansprucht. Das soll man ihm auch ansehen.

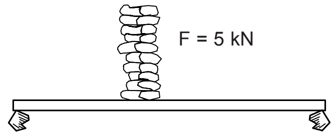
Komplizierter wird es hier. Man kann zunächst nicht erkennen, welche von den Stäben zug- und welche druckbeansprucht sind. Diese Tragwerke, wir nennen sie Fachwerke, werden wir in einem späteren Kapitel behandeln.

Die Form der Baumstütze des Flughafens Stuttgart leitet sich von der Bedingung ab, dass alle „Äste“ des Baums gleichförmig druckbeansprucht sein sollen.

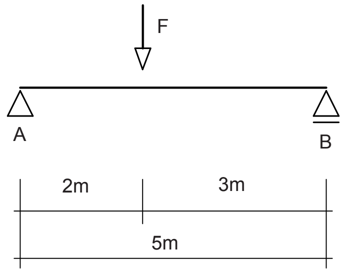
3 Auflagerkräfte des Biegeträgers

Seiltragwerke sind aber eher selten. Wir wollen uns daher mit dem häufigsten und nicht ganz einfachen statischen System beschäftigen:
Ein Brett wird von zwei Steinen unterstützt, den Auflagern, und ist mit unserem Zementsackhaufen belastet. Das Brett wird sich nun durchbiegen, möglicherweise sogar durchbrechen. Letzteres sollten wir mit den nun folgenden kleinen Berechnungen verhindern. Das statische System nennen wir einen Träger auf zwei Stützen, auch wenn die untergelegten Steine keine Stützen sind.
Sicherlich wird der Träger seinerseits wiederum auf seine Auflager (die untergelegten Steine) drücken. In der folgenden Überlegung lassen wir das Eigengewicht des Trägers zur Vereinfachung weg.

Reales System



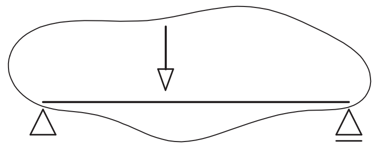
Statisches System



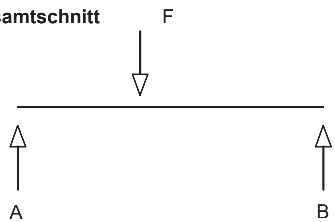
Gesamtschnitt

Als Erstes wollen wir uns diese Kräfte am Auflager (Auflagerkräfte) ansehen. Wieder machen wir Kräfte, die man ja von außen nicht erkennen kann, durch einen Schnitt sichtbar. Wir schneiden immer an den Stellen, an denen wir die Kräfte ermitteln wollen. Außerdem macht man immer einen Rundschnitt, d.h. dass die Schnittlinie geschlossen sein muss. Wir stellen das durch die dargestellte Wolke dar. Also schneiden wir den gesamten Träger frei. Der Schnitt geht genau zwischen den Steinen und dem Brett hindurch. Damit es nicht herunterfällt, bringen wir die Kräfte, die vermutlich dort wirken, am freigeschnittenen Brett an. Das sind die Auflagerkräfte A und B, deren Größe wir noch nicht kennen. Voraussetzung ist wieder, dass Gleichgewicht an unserem freigeschnittenen Träger herrscht. Wir ahnen vielleicht schon, dass die Auflagerkraft A größer sein muss als B. Das soll jetzt berechnet werden. Dafür wird nur am letzten Bild, dem Gesamtschnitt, gearbeitet.

Schnittlinie



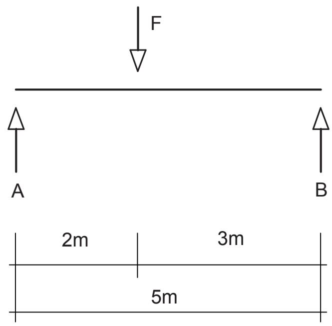
Gesamtschnitt



Gleichgewichtsbedingungen

Der Träger darf nicht herunterfallen, d.h. alle Kräfte in vertikaler Richtung müssen in der Summe null ergeben. Er darf aber auch nicht horizontal davonfahren, d.h. alle Kräfte in horizontaler Richtung müssen null ergeben. Außerdem darf unser Träger sich nicht drehen, d.h. alle Kräfte, die an ihm drehen wollen, müssen sich aufheben, sonst wird der Träger zu einem Propeller. Kräfte können nur eine Drehung verursachen, wenn sie einen Hebelarm gegenüber dem Drehpunkt haben. Als Drehpunkt können wir einen beliebigen Punkt annehmen, er muss sich nicht einmal auf dem Träger befinden. Er kann sogar 100 km weit weg sein, wobei dies sicherlich unpraktisch wäre. Der Effekt, den eine Kraft in Zusammenarbeit mit ihrem Hebelarm auslöst, heißt Drehmoment oder einfach Moment.

Gesamtschnitt



Alle genannten Bedingungen – die drei Gleichgewichtsbedingungen – sehen als Gleichungen so aus wie rechts dargestellt.

Gleichgewichtsbedingungen

1. Alle Vertikalkräfte müssen sich aufheben
$$\Sigma \mathbf{F_V = 0}$$
2. Alle Horizontalkräfte müssen sich aufheben
$$\Sigma \mathbf{F_H = 0}$$
3. Alle Momente müssen sich aufheben
$$\Sigma \mathbf{M = 0}$$

Probieren wir doch einmal die erste Gleichgewichtsbedingung aus. Als positiv nehmen wir die nach unten wirkenden Kräfte an, also ist F positiv, die Auflagerkräfte negativ. (Man kann das auch andersherum machen, das Ergebnis bleibt dasselbe. Die Natur kennt nicht „positiv" und „negativ".)
Alle Kräfte in vertikaler Richtung schlicht aufsummiert und zu null gesetzt, das sieht so aus:

$$\Sigma F_V = 0 \qquad F - A - B = 0$$
$$5\ \text{kN} - A - B = 0$$

Das ergibt, wie wir sehen, eine Gleichung mit den beiden noch Unbekannten A und B und ist damit nicht lösbar. Wie sieht es mit der zweiten Gleichgewichtsbedingung aus?

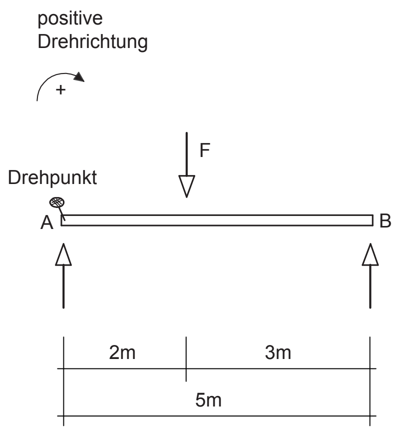
$$\Sigma F_H = 0 \qquad ??$$

Es gibt ja gar keine horizontal wirkende Kraft. Die Summe nicht vorhandener Kräfte ist selbstverständlich null. Also auch das führt uns nicht weiter.

Nun bleibt uns natürlich noch die dritte Gleichgewichtsbedingung:

Σ M = 0

Σ M = 0 (Drehpunkt A)



Dies bedeutet in Worten: Unser Träger darf sich nicht drehen. Wirkt eine Kraft auf ihn mit einem Hebelarm, dann dreht er sich. Das ist ein Moment: die Kraftgröße, die eine Drehung bewirkt.
Soll keine Drehung des Trägers erfolgen – es soll ja kein Propeller werden, wir sind in der Statik – müssen sich alle Kräfte mit ihrem Hebelarm multipliziert aufheben.

Praktischerweise nehmen wir als Drehunkt, der wie gesagt frei wählbar ist, eines der Auflager, z.B. A. Wir sprechen hier von einer Drehung in der Zeichenebene.
Wir stellen uns vor: Wir schneiden einen Träger aus Pappe aus und nageln ihn am Auflager A mit einem Nagel auf dem Tisch fest, so dass er sich nur noch um den Nagel drehen kann. Die Auflagerkraft A hat keinen Hebelarm bezüglich des Pappbalkens, sie geht ja genau durch den Nagel. Die Kraft F aber hat den Hebelarm 2 m, die Auflagerkraft B den Hebelarm 5 m. Das Moment rechnet sich als Kraft mal Hebelarm. Die Kraft F möchte den Träger rechts um den Nagel drehen, die Kraft B links herum. Wir müssen jetzt wieder die positive Richtung festlegen. Nehmen wir praktischerweise die Rechtsdrehung als positiv, dann übt F mit seinem Hebelarm ein positives Moment aus. B übt mit seinem Hebelarm ein negatives Moment aus.

Beide Momente müssen sich aufheben. Der Träger soll ja eben nicht ein Propeller sein.

Als Gleichung sieht das so aus:

Σ M = 0 (Drehpunkt A)

F [kN] · 2 [m] – B [kN] · 5 [m] = 0

F ist bekannt: 5 kN

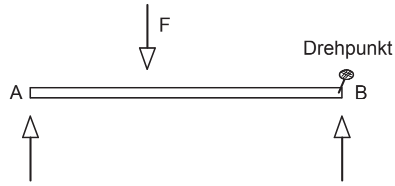
5 [kN] · 2 [m] – B [kN] · 5 [m] = 0

Wir lösen nach der Unbekannten B auf, das ergibt

B = 5 [kN] · 2 [m] / 5 [m] B = 2 kN

Wir rechnen noch schnell die andere Auflagerkraft mit dem Drehpunkt um Auflager B:

Σ M = 0 (Drehpunkt B)



Σ M = 0 (Drehpunkt B)

A [kN] · 5 [m] – F [kN] · 3 [m] = 0

A = 5 [kN] · 3 [m] / 5 [m]

A = 3 kN

Wir können jetzt $\Sigma F_V = 0$ als Kontrollrechnung nehmen. Die Gleichgewichtsbedingungen müssen ja immer erfüllt sein und dürfen sich nicht widersprechen.

Wir tun dies so:

Kontrolle mit

$\Sigma F_V = 0$ F – A – B = 0

(Hatten wir oben schon aufgestellt)

ergibt

5 [kN] – 3 [kN] – 2 [kN] = 0

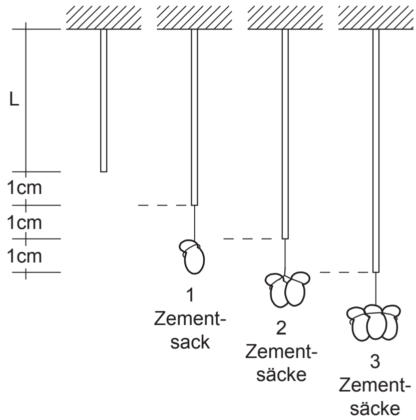
0 = 0

Die Kontrolle stimmt; andernfalls hätten wir uns verrechnet.

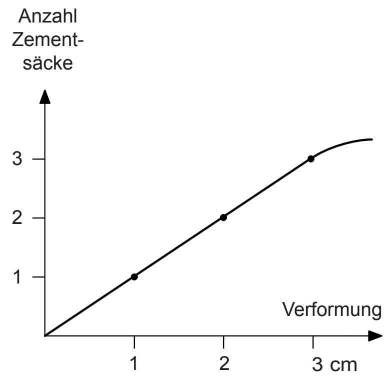
4 Spannungs-Dehnungs-Verhalten

Wir kennen jetzt die Auflagerkräfte unseres statischen Systems; ob das mit Zementsäcken belastete Brett durchbricht oder nicht, wissen wir aber immer noch nicht. Dazu benötigen wir einen Spannungsnachweis wie im Kapitel bei der Zugstütze. Beim Biegeträger ist das komplizierter.
Um dies zu erläutern, müssen wir ein wenig ausholen.

Modellversuch
Zunächst betrachten wir wieder einen Zugstab. Zur besseren Vorstellung denken wir ihn uns als dickes Gummiband. Hängt man einen Zementsack an das Gummiband, verformt es sich um eine bestimmte Länge, z.B. 1 cm. Belastet man das Gummiband mit einem weiteren Zementsack, verformt es sich beispielsweise um einen weiteren Zentimeter.
Dies können wir mehrere Male wiederholen. Bleibt das Verhalten des Zugstabs weiterhin so konstant, sprechen wir von einem linearen Dehnungsverhalten.



Wir können ein Diagramm zeichnen, in dem die Anzahl der Zementsäcke über der Verlängerung aufgetragen ist. Das Diagramm ergibt in unserem Beispiel eine Gerade. Entlastet man das Gummiband, geht auch die Verformung komplett zurück. Wir nennen dies elastisches Dehnungsverhalten.
Ab einem gewissen Punkt fängt das Verhalten an, nichtlinear zu werden. Ein zusätzlicher Zementsack bewirkt eine zusätzliche Verformung von mehr als 1 cm. Zumindest ist dies bei Stahl so. Bei Entlastung geht die Verformung nicht mehr komplett zurück; es bleibt eine Restverformung bestehen. Man nennt dies den plastischen Bereich.

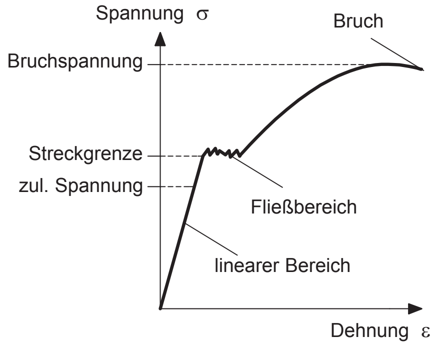


Um in dieser Überlegung wirklich nur die Materialeigenschaften zu erfassen, also unabhängig von den Versuchsvorgaben Stablänge und Stabquerschnitt zu sein, wird die Auslenkung auf die Stablänge bezogen: Verformung durch Stablänge, genannt Dehnung ε.
Die Dehnung ist z.B. cm/cm, d.h. einheitslos. Die Anzahl der Zementsäcke wird mit der Querschnittsfläche in Spannung umgerechnet. Man erhält ein Diagramm, in dem die Spannung über der Dehnung aufgetragen ist, ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Für den Baustoff Stahl ist so ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm hier skizziert. Der soeben mit Zementsäcken erläuterte lineare Bereich heißt nach seinem Entdecker Robert Hooke (1635–1703) Hooke´scher oder linearer Bereich. Nach diesem beginnt der plastische Bereich (auch Fließbereich), ein Zustand, in dem durch die hohe Spannung und eine Umlagerung im Molekulargefüge des Stahls große Dehnungen bei nur geringem Spannungszuwachs erfolgen. Danach beginnt ein Verfestigungsbereich. Der Stahl zeigt nach erfolgter Umlagerung wieder weniger Dehnung bezogen auf den Spannungszuwachs. Bei Erreichen einer inzwischen sehr hohen Spannung reißt der Stahl.

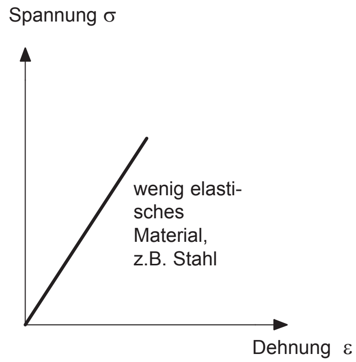
Spannungs-Dehnungs-Diagramm



Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist eine wichtige Auskunft über das Verhalten des Materials unter Spannung, eine Art Fingerabdruck des Materials. Der wichtigste Parameter ist die Neigung des linearen Bereichs. Ist die Neigung flach, handelt es sich um ein elastisches Material, z.B. Gummi, ist sie steil, um ein weniger elastisches Material, z.B. Stahl.

Elastizitätsmodul

Die Neigung der Geraden im linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms wird Elastizitätsmodul E oder kurz E-Modul genannt und wird ausgedrückt durch den Bruch Spannung [kN/cm²] durch Dehnung [-], hat also die Einheit kN/cm² wie eine Spannung.



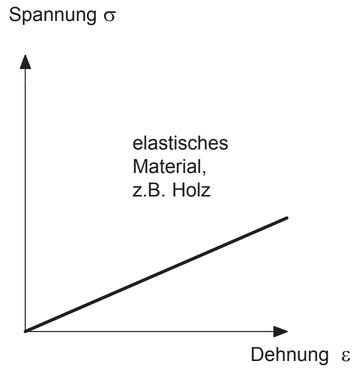
$$E = \sigma / \varepsilon$$

Kennt man den E-Modul, ergibt sich aus dieser Gleichung die Dehnung ε eines Stabes unter der Spannung σ.

$$\varepsilon = \sigma / E$$

ε ist die Verformung je Längeneinheit, mit der Stablänge multipliziert ergibt sich also die Gesamtdehnung des Stabes.

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon = L \cdot \sigma / E$$



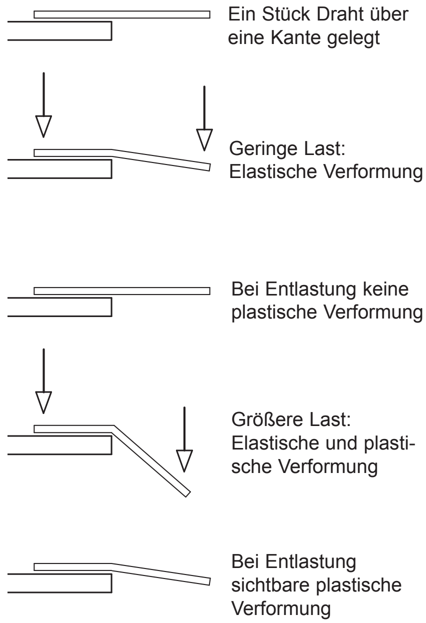
In diesem linearen Bereich sind bei Entlastung keine plastischen (bleibenden) Dehnungen vorhanden.

Die Dehnungen im anschließenden Fließbereich sind bei Stahl plastische Verformungen, d.h. bei Entlastung geht der Stahl nicht in seine ursprüngliche Form zurück.

Elastische und plastische Verformung

Das Phänomen der elastischen und plastischen Verformung ist ein Alltagsphänomen, das jeder kennt.

Verformung eines Stückes Draht



Als Beispiel nehmen wir ein Stück Draht, das über eine Tischkante gelegt wird.

Der Draht wird mit dem Finger ein wenig hinuntergedrückt. Er verformt sich elastisch.

Die Verformung geht nach Entlastung vollständig zurück.

Wird der Draht kräftiger hinuntergedrückt, kommt er über den elastischen in den plastischen Bereich.

Es bleibt bei Entlastung eine plastische Verformung zurück.

Auch das Knicken eines Blatt Papiers zu einem bleibenden Falz entspricht solch einer plastischen Verformung.

Der bautechnisch nutzbare Bereich ist der lineare Bereich (Hooke´scher Bereich) und auch den benutzen wir zur Sicherheit nicht voll bis zur Fließgrenze, sondern nur bis zur Grenzspannung kurz vor Beginn des Fließbereichs.

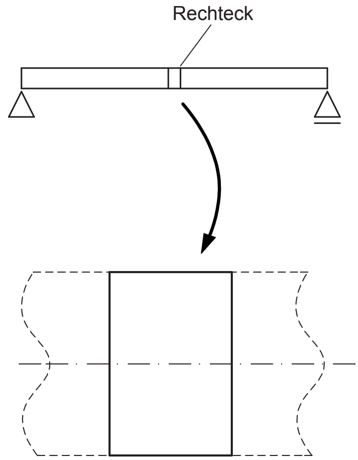
Allerdings ist es für unser Sicherheitskonzept sehr wichtig geworden, wie sich das Material bei Überlastung, also im Fließbereich verhält. Der ausgeprägte Fließbereich ist für unsere Sicherheit sehr gut. Wir können bei Überlastung eines Trägers aus Stahl große Verformungen wahrnehmen, ohne dass der Träger bricht und werden dadurch gewarnt.

“Schlechte” Stähle mit niedriger Festigkeit haben einen ausgiebigeren Fließbereich als “gute”, sind also aus Sicherheitsgründen immer zu bevorzugen. Dies gilt auch für andere Materialien, eine hohe Festigkeit ist keineswegs immer gut!

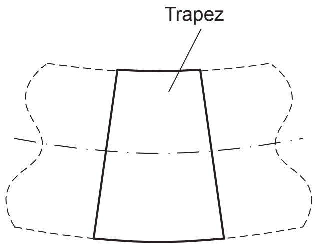
5 Balkenbiegung

Dehnung infolge Biegung

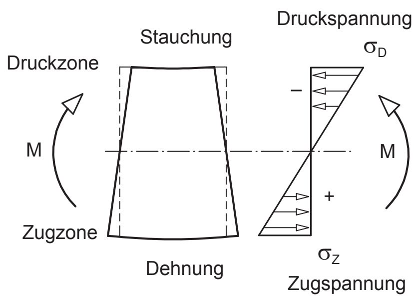
Auch bei der Biegung eines Trägers entstehen Verformungen und daher Spannungen.
Betrachten wir einmal einen einfachen Träger auf zwei Stützen. Auf der Mitte dieses Trägers markieren wir mit zwei vertikalen Strichen einen rechteckigen Bereich.



Wird der Träger durch Belastung gekrümmt, dann verformt sich dieser Bereich zu einem Trapez. An der Trapezform können wir ablesen, dass offensichtlich der obere Rand des Rechtecks kürzer geworden ist, also gedrückt wurde und der untere Rand länger, also gezogen wurde, so dass eben ein Trapez entsteht. Die Trägermitte (gestrichelte Linie) hat offensichtlich keine Längenänderung erfahren. Wir können also folgern, dass am oberen Trägerrand Druckspannungen herrschen und am unteren Rand Zugspannungen.



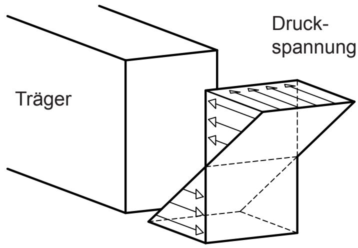
Zeichnen wir das Rechteck und das Trapez übereinander, dann können wir direkt die Dehnungen im Querschnitt des Trägers ablesen. Sie sind in der Mitte null und wachsen offensichtlich linear bis zum Maximalwert am Rand nach oben bzw. unten an. Der Mensch muss hier wieder einem von beiden ein negatives Vorzeichen geben und das ist, wie schon bei den Normalkräften, die Druckspannung.
Diese Verformung und das daraus entstehende Spannungsbild wird von Biegung hervorgerufen und entspricht dem Biegemoment M, das **in** dem Träger wirkt.



Spannung infolge Biegung

Aus dem oben erläuterten Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung können wir folgern: Wenn zwischen Dehnung und Spannung ein linearer Zusammenhang herrscht (Hooke´scher Bereich), dann muss die Verteilung der Spannungen im Querschnitt ebenso linear wie die Dehnungen aussehen. Eine doppelte Dehnung bewirkt doppelte Spannung. Am oberen Rand muss die maximale Druckspannung herrschen, am unteren Rand die maximale Zugspannung. In Trägermitte ist die Dehnung null, dann kann auch keine Spannung vorhanden sein. Die Diagramme Dehnung über der Querschnittshöhe und Spannung über der Querschnittshöhe – wie hier skizziert – müssen ähnlich aussehen, nur natürlich mit anderen Einheiten.

Spannungsbild infolge Biegung



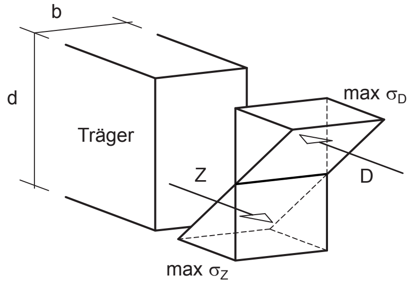
Es gibt Materialien, die eindeutig keinen Hooke´schen Bereich haben, also von Anfang an keinen linearen Spannungs-Dehnungs-Bereich, z.B. Beton. Dann versagt diese Theorie und es wird erst recht kompliziert. Auch bleiben die Querschnitte nur bei stabförmigen Bauteilen bei Krümmung eben. Für uns reichen diese Bedingung und das Hooke´sche Gesetz zunächst aus.

Widerstandsmoment

Natürlich ist die ganze Querschnittsbreite mit der Spannung belegt, so dass zwei Spannungskeile entstehen, einer auf der oberen Druckspannungsseite und einer auf der unteren Zugspannungsseite.
In der Mitte des Querschnitts ist die Spannung über die ganze Querschnittsbreite und Trägerlänge null.
Der obere Querschnittsrand weist die maximale Druckspannung, der untere Rand die maximale Zugspannung auf.
Die beiden Spannungskeile sind die Reaktionen des Trägers auf die Biegung, genauer gesagt auf die Krümmung. Die Krümmung eines Trägerstücks wird hervorgerufen von einer Kraftgröße, die wir Biegemoment oder einfach Moment nennen. Dieses Moment ist identisch mit der Wirkung der beiden Spannungskeile.
Wir benötigen für einen Spannungsnachweis eine Formel, die es erlaubt, aus einem Moment und einer Querschnittsgröße die vorhandene maximale Spannung auszurechnen. Diese Formel wollen wir jetzt entwickeln.

Die Spannungskeile können ersetzt werden durch je eine resultierende Kraft, die im Drittelspunkt des Keils ansetzt. Die beiden Resultierenden sind gleich groß, und bilden ein entgegengesetztes Kräftepaar. Dies ist ein weiteres Bild für das Biegemoment um die Mittelachse des Trägers.

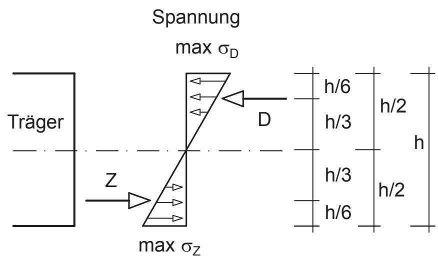
Resultierende Kräfte der Spannungskeile



Die Größe einer Resultierenden ist der Rauminhalt eines Spannungskeils. Ein Spannungskeil ist ein dreieckiges Prisma, der Rauminhalt also die Dreiecksfläche multipliziert mit der Prismenhöhe:

$Z = (1/2 \cdot \max \sigma_D \cdot h / 2) \cdot b = D$

Das Moment, das das Kräftepaar um die Mittelachse bildet, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$. Drehpunkt ist der Spannungsnullpunkt.
Es ist identisch mit der Momentenwirkung der beiden Spannungskeile.



$M = D \cdot h/3 + Z \cdot h / 3$
D und Z werden eingesetzt:

$M = \max \sigma_D \cdot b \cdot h^2 / 6$

Nach $\max \sigma_D$ aufgelöst ergibt sich:

$\max \sigma_D = M / (b \cdot h^2 / 6)$

Es zeigt sich ein Ausdruck unter dem Bruch, der unsinnigerweise Widerstandsmoment W genannt wird.

$$W = b \cdot h^2 / 6$$

Das ist kein Moment, es ist ein Querschnittswert, also ein reiner Geometriewert. Er hat nichts mit dem Material zu tun, ist also bei Gummi- und Stahlträger gleich groß. Er wird beim Rechteckquerschnitt aus Höhe und Breite gebildet, wobei die Querschnittshöhe im Quadrat eingeht. Je größer das Widerstandsmoment, desto kleiner ist die Spannung, die unseren Träger zum Einsturz bringen möchte. Ist die Spannung zu hoch, hilft es am meisten, die Querschnittshöhe zu vergrößern. Die Vergrößerung der Querschnittsbreite ist bei weitem nicht so wirksam.

Widerstandsmoment für Rechteckquerschnitte

$W = b \cdot h^2 / 6$		cm^3
b	Trägerbreite	cm
h	Trägerhöhe	cm

Spannung infolge eines Moments

Wir können jetzt die Spannung infolge Biegung einfacher ausdrücken. Die Spannung auf der Druckseite ist bei symmetrischen Querschnitten genauso groß wie die Spannung auf der Zugseite.

$$\max \sigma = M / W$$

Spannung infolge Moment

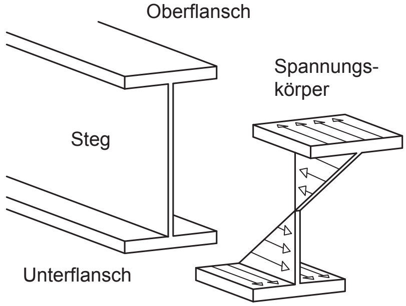
max σ = M / W [kN/cm²]

M:	Moment	kNm
W:	Widerstandsmoment	cm³

Querschnittsformen für Biegeträger

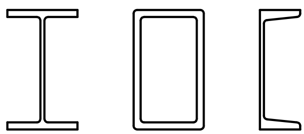
Die Spannung am oberen und unteren Rand ist extremal. Diese Querschnittsstellen würden also als erstes versagen. Andererseits beteiligen sie sich auch viel effektiver als die mittleren Teile des Querschnitts am Aufbau des inneren Moments.
Daher ist es sinnvoll, Querschnittsformen entsprechend zu formen. Bei teuren Materialien ist das üblich. Z.B. nutzt man dies bei Stahl aus und formt den Querschnitt als Doppel-T-Profil. Diese Querschnittsform versucht möglichst viel Querschnittsfläche dorthin zu bringen, wo auch die Spannung groß ist. Das bedeutet, dass ein großes Moment aufgenommen werden kann. Eine solche Querschnittsform hat im Vergleich zur verbrauchten Stahlmenge ein großes Widerstandsmoment.

Spannungskörper eines Doppel-T-Profils



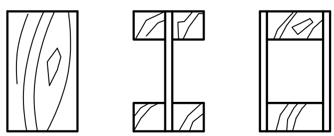
Querschnitte für Biegeträger

Stahl



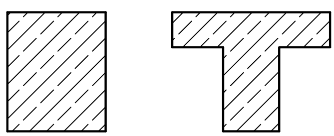
In Stahl gibt es noch andere Querschnitte wie das Rechteckrohr oder das U-Profil. Auch sie versuchen, große Teile ihrer Querschnittsfläche möglichst weit vom Spannungsnullpunkt entfernt anzuordnen.

Holz



Auch bei Holz versucht man für Biegeträger solche Formen zu entwickeln. Die Formen sind natürlich bei den verschiedenen Materialien auf Grund der Herstellung und Materialeigenschaften unterschiedlich. So hat der häufigste Holzbalken nach wie vor einen Rechteckquerschnitt; er ist eben viel einfacher herzustellen und das Material ist viel billiger als Stahl. Da muss man sich nicht so eine große Mühe bei der Querschnittsgestaltung geben.

Beton



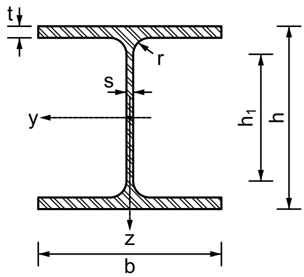
Auch der Beton hat seine Eigenheiten. Die häufigste Querschnittsform für Stahlbetonträger ist T-förmig.

Die Widerstandsmomente für solche komplizierteren Querschnittsformen kann man aus Tabellen entnehmen. Eine solche Tabelle für Stahlprofile ist hier abgebildet.

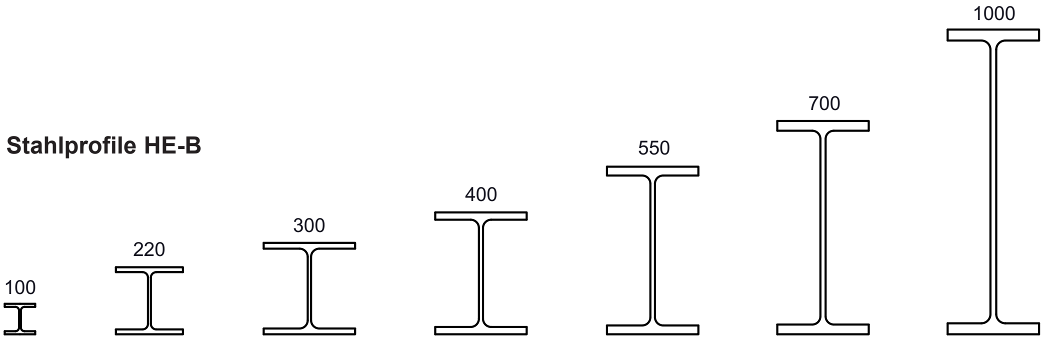
In der linken Spalte steht die Bezeichnung des Profils, z.B. HE-B 400. Dieses Profil ist 400 mm hoch und 300 mm breit. Die Dicken der einzelnen Bleche Oberflansch, Unterflansch und Steg können der Tabelle entnommen werden. Ebenso die Querschnittsfläche A (falls das Profil z.B. eine Hängestütze sein soll), das Gewicht G pro lfd. m, das Widerstandsmoment W_y, und andere Werte, die uns später noch interessieren werden.

Die Maße im Stahlbau werden in Millimetern angegeben.

HE-B-Profil



Stahlprofile HE-B



HE-B	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm	h_1 mm	A cm^2	G kN/m	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	i_z cm
100	100	100	6	10	12	56	26,0	0,204	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53
120	120	120	6,5	11	12	74	34,0	0,267	864	144	5,04	318	52,9	3,06
140	140	140	7	12	12	92	43,0	0,337	1.510	216	5,93	550	78,5	3,58
160	160	160	8	13	15	104	54,3	0,426	2.490	311	6,78	889	111	4,05
180	180	180	8,5	14	15	122	65,3	0,512	3.830	426	7,66	1.360	151	4,57
200	200	200	9	15	18	134	78,1	0,613	5.700	570	8,54	2.000	200	5,07
220	220	220	9,5	16	18	152	91,0	0,715	8.090	736	9,43	2.840	258	5,59
240	240	240	10	17	21	164	106	0,832	11.260	938	10,3	3.920	327	6,08
260	260	260	10	17,5	24	177	118	0,93	14.920	1.150	11,2	5.130	395	6,58
280	280	280	10,5	18	24	196	131	1,03	19.270	1.380	12,1	6.590	471	7,09
300	300	300	11	19	27	208	149	1,17	25.170	1.680	13,0	8.560	571	7,58
320	320	300	11,5	20,5	27	225	161	1,27	30.820	1.930	13,8	9.240	616	7,57
340	340	300	12	21,5	27	243	171	1,34	36.660	2.160	14,6	9.690	646	7,53
360	360	300	12,5	22,5	27	261	181	1,42	43.190	2.400	15,5	10.140	676	7,49
400	400	300	13,5	24	27	298	198	1,55	57.680	2.880	17,1	10.820	721	7,40
450	450	300	14	26	27	344	218	1,71	79.890	3.550	19,1	11.720	781	7,33
500	500	300	14,5	28	27	390	239	1,87	107.200	4.290	21,2	12.620	842	7,27
550	550	300	15	29	27	438	254	1,99	136.700	4.970	23,2	13.080	872	7,17
600	600	300	15,5	30	27	486	270	2,12	171.000	5.700	25,2	13.530	902	7,08
650	650	300	16	31	27	534	286	2,25	210.600	6.480	27,1	13.980	932	6,99
700	700	300	17	32	27	582	306	2,40	256.900	7.340	29,0	14.400	963	6,87
800	800	300	17,5	33	30	674	334	2,62	359.100	8.980	32,8	14.900	994	6,68
900	900	300	18,5	35	30	770	371	2,91	494.100	10.980	36,5	15.820	1.050	6,53
1000	1000	300	19	36	30	868	400	3,14	644.700	12.890	40,1	16.280	1.090	6,38

Schnittprinzip

Das Gedankenmodell des Schnittprinzips haben wir bereits benutzt, um die Auflagerkräfte eines Trägers auszurechnen. Wir hatten den Träger von seinen Auflagern freigeschnitten und die Auflagerkräfte angebracht. Wir schneiden immer an der Stelle, an der uns eine Kraftgröße interessiert.
Diesmal interessieren uns die Kraftgrößen an einer bestimmten Stelle **in** dem Träger selbst, zum Beispiel an der Stelle, an der wir vermuten, dass der Träger dort bricht. Das herausgeschnittene Trägerstück soll aber nichts von diesem chirugrischen Eingriff merken. Wir müssen also die Kräfte anbringen, die an den jetzt durchgeschnittenen Stellen gewirkt haben.
Jede der geschnittenen Stellen kann in der Zeichenebene drei Bewegungsarten ausführen: nach rechts oder links, nach oben oder unten und die Schnittstelle kann sich drehen.
Den drei Bewegungen ensprechen natürlich wieder drei Kraftgrößen: Normalkraft, Querkraft und Moment. Diese Kraftgrößen, die in dem Träger wirken, sind nur zu sehen, wenn wir ihn schneiden. Die Normalkraft haben wir bereits bei der Zugstütze kennengelernt. In den folgenden Kapiteln werden wir uns mit dem Moment beschäftigen.

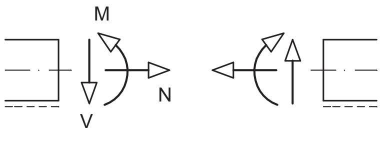
Schnittgrößen

N	Normalkraft	[kN]
V	Querkraft	[kN]
M	Moment (auch: Biegemoment)	[kNm]

Vorzeichenregelung

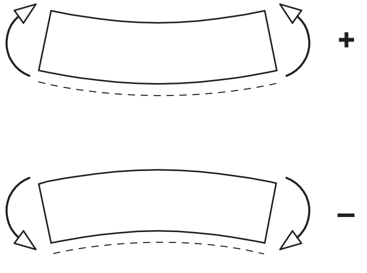
Natürlich muss sich der Mensch wieder einigen, was man als positive und was als negative Schnittgrößen bezeichnet. In der Abbildung sind die positiven Richtungen der drei Kraftgrößen eingetragen. Sie sehen auf den ersten Blick ein wenig merkwürdig aus. Das liegt daran, dass sich beim Wiederzusammenfügen der Trägerstücke die eingetragenen Kraftgrößen aufheben müssen. Beim Zusammenfügen darf keine Kraftgröße als äußere Kraft übrigbleiben. Die Kraftgrößen wirken ja **in** dem Träger und sind keine äußeren Kräfte.

Positive Schnittgrößen



Ein Träger auf zwei Stützen, ganz normal von oben belastet, also nach unten durchbiegend, erhält positive Momente.

Positives und negatives Moment und die entsprechende Krümmung



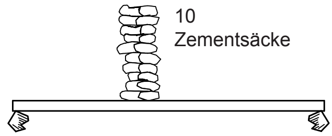
Entsprechend sind die Momente eines nach oben gebogenen Trägers negativ.

Die bei einem positiven Moment unter Zugspannung stehende Seite wird oft gestrichelt markiert.

6 Bemessung eines Biegeträgers mit Einzellast

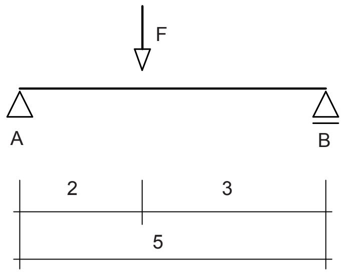
Am Beispiel aus Abschnitt 3 wollen wir jetzt einen Träger bemessen, d.h. wir wollen feststellen, wie dick und wie breit ein Holzbalken sein müsste, um die 10 Zementsäcke zu tragen.

Reales System



Wir dürfen vermuten, dass sich der Träger unter seiner Last durchbiegt und daher in dem Träger innere Momente vorhanden sind. Wir dürfen weiter vermuten, dass die am schlimmsten beanspruchte Stelle des Trägers diejenige direkt unter der Einzellast ist, jedenfalls haben wir das wohl im Gefühl.

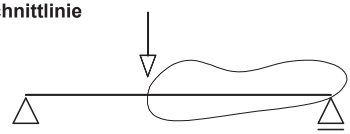
Statisches System



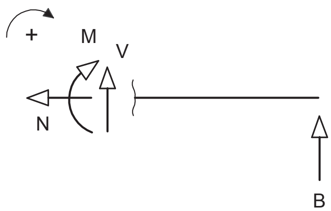
Schnitt

Dieses Moment macht man mit einen Schnitt durch den Träger sichtbar. Schnitte sind auch hier immer Rundschnitte; wir schneiden also eine Trägerseite komplett ab. Der Träger darf davon nichts merken, wir müssen also die Kräfte, die in dem Träger gewirkt haben, einzeichnen. Diese Kraftgrößen nennt man Schnittgrößen, weil sie erst mit dem Schnitt sichtbar werden.
Entsprechend den Gleichgewichtsbedingungen können eine Kraft in horizontaler Richtung (genannt Normalkraft N), eine Kraft in vertikaler Richtung (Querkraft V) und ein Moment M in der Schnittfläche vorhanden sein und müssen zunächst einmal eingetragen werden.

Schnittlinie



Schnitt



Um das Moment an der Schnittstelle auszurechnen, ist die Gleichgewichtsbedingung Σ M = 0 die einzig mögliche. Der Drehpunkt ist auch hier wieder frei wählbar, man nimmt am besten die Schnittstelle S. Um dies deutlich zu machen, kennzeichnen wir die Summe der Momente mit dem Index S. Momente sind wieder Kräfte multipliziert mit ihrem Hebelarm. Das Schnittmoment M ist bereits ein Moment und benötigt keinen Hebelarm.
Die Normalkraft N und die Querkraft V gehen durch den Drehpunkt und haben damit keinen Hebelarm:

$\Sigma M_S = 0$ (Drehpunkt Schnittstelle)

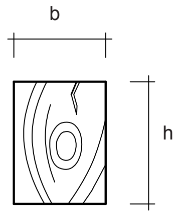
$M - B\,[\text{kN}] \cdot 3\,[\text{m}] = 0$

$M = B\,[\text{kN}] \cdot 3\,[\text{m}]$

Mit dem Ergebnis aus Abschnitt 3, B = 2 kN, ergibt sich
M = 2 kN · 3 m = 6 kNm

Die Einheit des Moments spiegelt die Rechenoperation wider: Kraft mal Hebelarm.
Übrigens ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma F_H = 0$ eigentlich schon durch Hinsehen, dass N = 0 sein muss. Es gibt nur eine horizontale Kraft; die muss dann natürlich null sein.

Balkenquerschnitt



Widerstandsmoment

W = b h² / 6

Spannungsnachweis

Was für ein Holzquerschnitt wird die Zementsäcke über die Stützweite von 5 m tragen? Schätzen Sie doch einmal! Wir versuchen es mit dem Querschnitt b/d = 10/14 cm. Die Höhe sollte normalerweise größer sein als die Breite, um Material zu sparen. Die Höhe ist ja entscheidender als die Breite, siehe Formel für das Widerstandsmoment.

Widerstandsmoment
W = b [cm] h² [cm²] / 6 = 10 · 14² / 6 = 327 cm³

Maximale Spannung
vorh σ = M [kNcm] / W [cm³]
= 6 · 100 / 327 = 1,84 kN/cm²

Wir müssen mit den Einheiten aufpassen! Um die Einheit kN/cm² zu erhalten, muss das Moment in kNcm umgeformt werden, dafür multiplizieren wir mit 100.
Diese Spannung muss mit der Grenzbiegespannung f_m verglichen werden. Diese ist bei dem Material Holz höher als die Grenzzugspannung. Bei Stahl sind es dieselben Werte wie bei den Zugspannungen.
Einige Grenzbiegespannungen zeigt die nebenstehende Tabelle. Wir verwenden das Holz der Güte S10.
Auch müssen wir wieder den Sicherheitsbeiwert berücksichtigen.

γ · vorh σ = 1,45 · 1,84 = 2,76 kN/cm²
> f_m = 1,5 kN/cm²

Wir müssen also einen größeren Querschnitt probieren, vielleicht 10/16 cm?
Wenn die vorhandene Spannung kleiner ist als die zulässige, kann der Querschnitt gewählt werden.

Wir nennen diesen Vorgang bemessen.

Spannungsnachweis für Biegung

$\gamma \cdot \text{vorh}\ \sigma < f_m$

Sicherheitsbeiwert der Belastung (ca.)

γ = 1,45

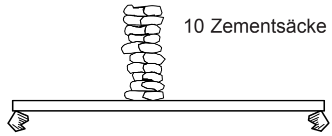
Grenzbiegespannungen f_m (ca.)

Vollholz	
S 10	1,5 kN/cm²
S 13	1,8 kNcm²
Brettschichtholz	
GL 24c (BS 11)	1,5 kN/cm²
GL 28c (BS 14)	1,7 kN/cm²
GL 32c (BS 16)	2,0 kN/cm²
(Klammern: alte Bezeichnung)	
Stahl	
S 235	21,8 kN/cm²
S 355	32,7 kN/cm²

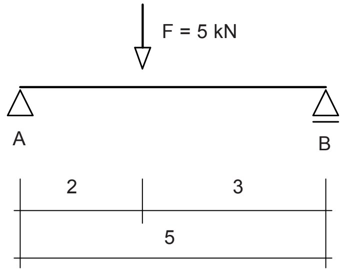
7 Momentenlinie eines Biegeträgers mit Einzellast

Der Träger wird, wenn wir richtig bemessen haben, sicherlich halten. Trotzdem ist es interessant zu wissen, wie sich denn die Momente an den anderen Stellen des Trägers verhalten.
Daraus lassen sich Rückschlüsse auf die Formgebung des Tragwerks ziehen.

Reales System



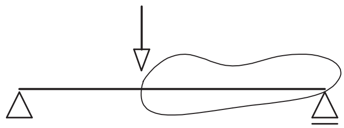
Statisches System



Schnitt 1

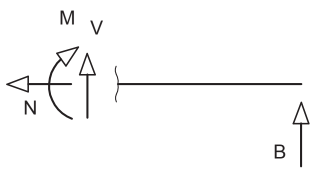
Die Schnittlinie 1 stellt den im vorherigen Kapitel ausgeführten Schnitt dar.

Schnittlinie 1



Aus Schnitt 1 folgt mit $\Sigma\, M_S = 0$ wie eben beschrieben $M_S = 6$ kNm.

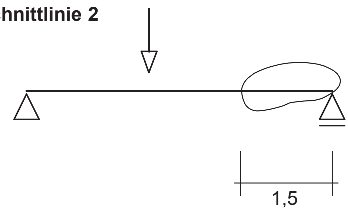
Schnitt 1



Schnitt 2

Untersuchen wir eine weitere Stelle in der Mitte zwischen Einzellast und rechtem Auflager, skizziert in der Schnittlinie 2.

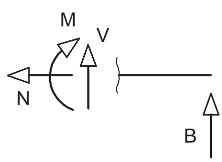
Schnittlinie 2



Mit der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma\, M_S = 0$ wie im Schnitt 1 ergibt sich die Gleichung:

$M = 2\,[kN] \cdot 1{,}5\,[m] \quad = \quad 3\,kNm$

Schnitt 2

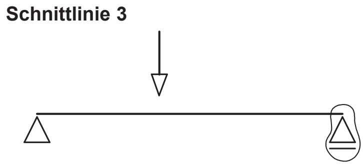


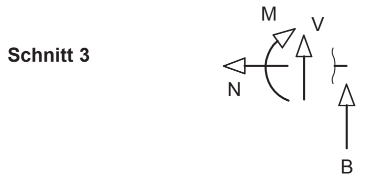
Schnitt 3

Mit einem dritten Schnitt direkt am Auflager B erhalten wir einen weiteren Punkt für ein Momentendiagramm, das wir gleich zeichnen wollen.

Mit $\Sigma M_S = 0$ ergibt sich

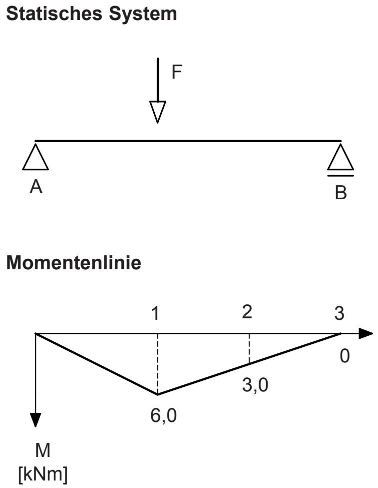
$M = 2\ [kN] \cdot 0\ [m] \quad = \quad 0\ kNm$





Momentenlinie

Wir können jetzt alle drei erhaltenen Momente in ein Diagramm eintragen. Zur Orientierung ist das statische System noch einmal darüber aufgezeichnet.
Die drei errechneten Momente ergeben rechts von der Einzellast eine Gerade. Das Momentendiagramm auf der linken Trägerseite muss sich aber genauso verhalten: Am Ende des Trägers auf der linken Seite muss das Moment ebenso null sein wie auf der rechten Seite, unter der Einzellast muss es 6 kNm sein. Mit Schnitten entsprechend um die linke Trägerseite können wir dies verifizieren.
Man erhält ein Diagramm welches das Moment an jeder Stelle des Trägers angibt. Wir nennen solche Diagramme zukünftig Momentenlinien. Solch eine Momentenlinie ist eine wichtige Voraussetzung zur Beurteilung von Tragwerken und ihrer Formgebung.
Auch sehen wir eigentlich erst jetzt, dass wir im vorigen Kapitel an der richtigen Stelle bemessen haben. Die Stelle der Einzellast ist in der Tat die Stelle des größten Moments. Das hatten wir ja auch so vermutet. Aber wir werden noch sehen, dass das Gefühl auch täuschen kann.

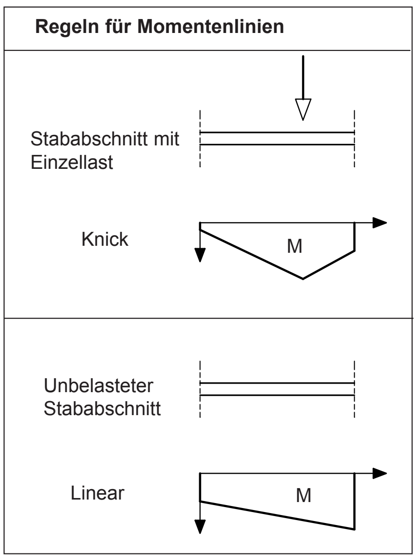


Erste Regeln für Momentenlinien

Schon jetzt lassen sich zwei Gesetzmäßigkeiten für Momentenlinien erkennen:

1. An der Stelle, an der eine Einzellast angreift, hat die Momentenlinie einen Knick.

2. An einem unbelasteten Stababschnitt, z.B. zwischen Auflager A und der Einzellast greift ja weiter keine Last an, ist die Momentenlinie linear.

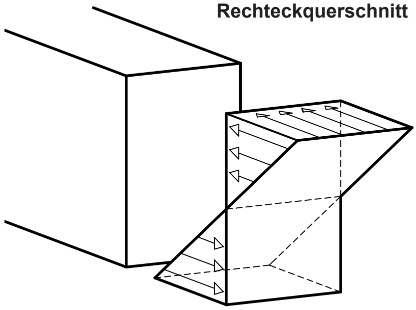


Momentenlinie und Form

Einige Überlegungen zur Formgebung: Wir haben einen Träger statisch nachgewiesen, so nennen wir den Spannungsnachweis, der über die gesamte Länge den gleichen Querschnitt besitzt. Für den Nachweis nehmen wir natürlich die Stelle des maximalen Moments.

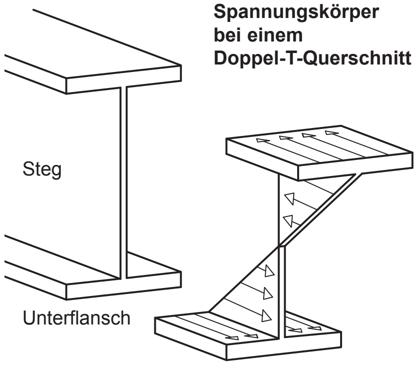
Betrachten wir die Spannungsverteilung im Rechteckquerschnitt, erkennen wir, dass die zulässige Spannung höchstens am oberen und unteren Rand des Querschnitts ausgenutzt sein kann. Besonders im mittleren Bereich des Querschnitts ist das Material nur sehr gering ausgenutzt. Wenn man weiterhin bedenkt, dass das maximale Moment nur an einer kleinen Stelle direkt unter der Einzellast auftritt, kann man folgern, dass die voll ausgenutzten Stellen des Trägers extrem klein sind. Also, nur an der Stelle des maximalen Moments und dort nur am oberen und unteren Querschnittsrand kann die zulässige Spannung ausgenutzt sein. Das weitaus meiste Material des Trägers ist hier unnötig eingesetzt. Diese Art des Lastabtrags ist ziemlich uneffektiv. Wir könnten jetzt auf verschiedene Arten reagieren.

Spannungskörper bei einem Rechteckquerschnitt



1.
Entsprechend unseren Überlegungen entfernen wir die Querschnittsbereiche, die wenig Spannung erhalten. Das heißt, wir formen den Querschnitt allein aus einem dünnen Streifen am oberen und auch am unteren Rand.
Diese beiden Streifen, genannt Flansche, müssen natürlich noch verbunden werden, z. B. mit einem dünnen senkrecht stehenden Steg.
So entsteht ein sogenannter Doppel-T-Querschnitt, der aus Holz aber selten ist. Aus teurem Material, z.B. Stahl, ist er ausgesprochen sinnvoll und häufig.

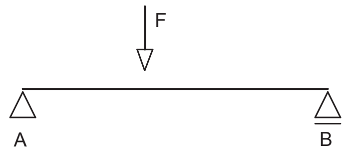
Spannungskörper bei einem Doppel-T-Querschnitt



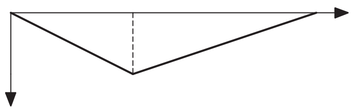
2.
Wir folgen der Momentenlinie mit der Bauhöhe.

Dies bedeutet, wir versuchen zu erreichen, dass das Widerstandsmoment an jeder Stelle des Trägers gerade so groß ist, dass die maximale Spannung in dem jeweiligen Querschnitt gut ausgenutzt ist.

Statisches System

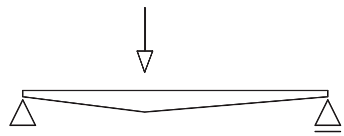


Momentenlinie



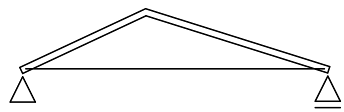
Nach dieser Überlegung müsste die Querschnittshöhe im Auflager auf null auslaufen, da das Moment null ist. Das geht, wie man vermuten kann, nicht, da noch andere Kräfte wirken, die wir bisher vernachlässigen. Außerdem ist es konstruktiv notwendig. Daher braucht der Träger auch im Auflager eine gewisse Bauhöhe.

Mögliche Formgebung

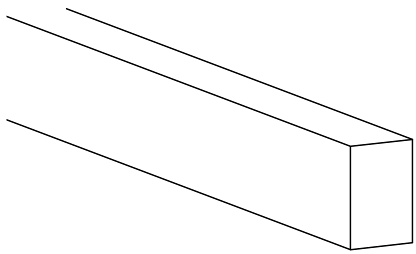


3.
Wir nehmen ein anderes Tragwerk, das mit seinem Umriss die Momentenlinie umfährt.

Anderes Tragwerk

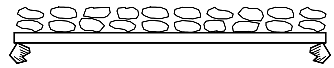


4.
Wir kümmern uns einfach nicht um Spannungsbild und Momentenlinie, nehmen trotzdem den uneffektiven Rechteckquerschnitt und folgen auch in der Form des Trägers nicht der Momentenlinie.
Das wird sogar bei den meisten Träger so gemacht. Es lohnt sich einfach nicht bei kleinen Trägern Material zu sparen.



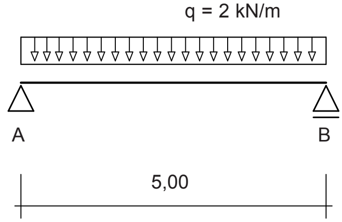
8 Momentenlinie eines Biegeträgers mit Streckenlast

Reales System



Wir untersuchen einen Träger auf zwei Stützen, belastet durch 20 längs aufgereihte Säcke.
20 Säcke à 50 kg sind 20 · 0,50 kN = 10 kN.
Das entspricht 1000 kg oder einer Tonne. Es ist die Einheit einer Einzellast. Das gezeigte Lastbild ist aber keine Einzellast.
Wir brauchen für das dargestellte Lastbild eine neue Einheit. Wir beschreiben die Belastung in der Einheit Last je laufenden Meter, also kN/m (gesprochen: Kilo-Newton pro Meter).
Solch eine Last nennen wir Streckenlast.

Statisches System

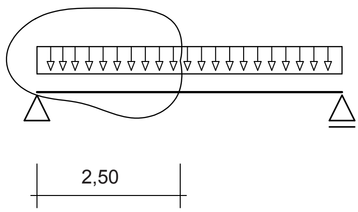


In unserem Fall: $q = 10\ [kN] / 5\ [m] = 2{,}0\ kN/m$

Die Gesamtlast ist 10 kN. Jedes Auflager trägt die Hälfte, also 5 kN.
Mathematisch formuliert: $A = q \cdot L / 2$

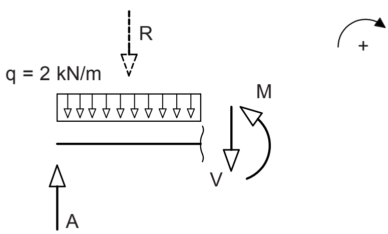
Wir vermuten, dass in der Mitte des Trägers das größte Moment auftritt. Jedenfalls entspricht es unserer Erfahrung, dass der Träger in der Mitte brechen würde.

Schnittlinie 1



Schnitt 1
Wie auch bisher setzen wir wieder die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_S = 0$ mit dem Drehpunkt Schnittstelle an. Die Berechnung erfolgt am System im Schnitt 1, nicht am Gesamtsystem.

Schnitt 1



Statt der Streckenlast setzen wir ihre Resultierende an, welche in der Mitte des herausgeschnittenen Trägerstücks angreift:

$R = 2{,}0\ kN/m \cdot 2{,}5\ m = 5\ kN$

$A\ [kN] \cdot 2{,}5\ [m] - R\ [kN] \cdot 1{,}25\ [m] - M\ [kNm] = 0$

$M = 6{,}25\ kNm$