

Annemarie Fritz  
Siegbert Schmidt  
Gabi Ricken (Hrsg.)

PÄDAGOGIK

# Handbuch Rechenschwäche

Lernwege, Schwierigkeiten  
und Hilfen bei Dyskalkulie

3. Auflage

Komplett überarbeitet.  
Für individuelle Förderung und  
differenzierten Unterricht

**BELTZ**

Fritz/Schmidt/Ricken (Hrsg.)  
Handbuch Rechenschwäche



Annemarie Fritz/Siegbert Schmidt/Gabi Ricken (Hrsg.)

# Handbuch Rechenschwäche

Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie

3. Auflage

**BELTZ**

Prof. Dr. *Annemarie Fritz*, Dipl.-Psychologin, lehrt Pädagogische Psychologie an der Universität Duisburg-Essen und ist als Distinguished Visiting Professor in Forschung und Lehre an der University of Johannesburg tätig.

Prof. Dr. *Siegbert Schmidt* lehrte Mathematikdidaktik an der Universität Köln.

Prof. Dr. *Gabi Ricken*, Dipl.-Psychologin, lehrt Sonderpädagogische Psychologie und Diagnostik an der Universität Hamburg.

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme.



Dieses Buch ist erhältlich als:  
ISBN 978-3-407-83188-0 Print  
ISBN 978-3-407-29505-7 E-Book (PDF)

3., vollständig überarbeitete u. erweiterte Auflage 2017

© 2017 Programm Beltz Pädagogik  
in der Verlagsgruppe Beltz · Weinheim Basel  
Werderstraße 10, 69469 Weinheim

Alle Rechte vorbehalten

Lektorat: Christine Wiesenbach  
Herstellung: Michael Matl  
Satz: text plus form, Dresden  
Druck und Bindung: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza  
Printed in Germany

Weitere Informationen zu unseren Autoren und Titeln finden Sie unter: [www.beltz.de](http://www.beltz.de)

# Inhalt

Vorwort .....	9
---------------	---

## **Einführung in die Problemlage**

*Jörg-Tobias Kuhn*

Rechenschwäche – eine interdisziplinäre Einführung .....	14
--	----

## **Entwicklung des Zahlenverständnisses aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven**

*Helga Krinzinger*

Entwicklung des Zahlenverständnisses aus neurokognitiver Sicht .....	32
--	----

*Sabine Peucker/Steffi Weißhaupt*

Entwicklung frühen numerischen Wissens .....	47
--	----

*Kristina Reiss/Andreas Obersteiner*

Kompetenzmodelle und Bildungsstandards: Mathematikleistung messen, beschreiben und fördern .....	66
---	----

## **Rechenschwäche und beeinflussende Faktoren**

*Korbinian Moeller/Elise Klein/Liane Kaufmann*

Bedeutung der neurokognitiven und bildgebenden Befunde für ein besseres Verständnis von Rechenschwierigkeiten .....	80
--	----

*Silvia Pixner*

Vorschulische mathematische Kompetenzen und Risikofaktoren für die Entwicklung einer Rechenschwäche oder einer Rechenstörung .....	96
---	----

<i>Michael Gaidoschik</i> Zur Rolle des Unterrichts bei der Verfestigung des zählenden Rechnens .....	111
<i>Dietmar Grube/Jenny Busch/Claudia Schmidt</i> Kognitive Bedingungen der Rechenschwäche .....	126
<i>Elisabeth Moser Opitz/Verena Schindler</i> Mathematiklernen im Kontext von sprachlichen Faktoren .....	141
<i>Michael von Aster/Larissa Rauscher/Juliane Kohn/Yasmin Eitel</i> Mathematikangst .....	156

### **Stolpersteine in der Entwicklung arithmetischer Kompetenz**

<i>Lisa Hefendehl-Hebeker</i> Entwicklung des Zahlenverständnisses im Mathematikunterricht .....	172
<i>Günter Krauthausen</i> Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen .....	190
<i>Rita Schultz/Elfriede Jakob/Hans-Dieter Gerster</i> Teile-Ganzes-Denken über Zahlen und Operationen: Herausforderung und Leitidee des Anfangsunterrichts .....	206
<i>Elfriede Jakob/Rita Schultz</i> Wege zur Beherrschung des Einmaleins im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts .....	225
<i>Hans-Dieter Gerster</i> Schriftliche Rechenverfahren verstehen – Methodik und Fehlerprävention .....	244
<i>Moritz Herzog/Annemarie Fritz/Antje Ehlert</i> Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses .....	266
<i>Sebastian Wartha</i> Rechenschwäche in der Sekundarstufe: Auswirkungen nicht überwindener Lernhürden der Primarstufe auf das Arbeiten mit Brüchen .....	286

## Diagnostik arithmetischer Kompetenzen

*Andreas Obersteiner/Kristina Reiss*

Interventionsstudien zur Förderung numerischer Basiskompetenzen  
rechenschwacher Kinder – ein Überblick über theoretische  
Grundlegungen und Förderansätze ..... 308

*Jan Lonnemann/Marcus Hasselhorn*

Diagnostik mathematischer Leistungen und Kompetenzen:  
Grundlagen, Verfahren und Forschungstrends ..... 323

*Stefan Voß/Simon Sikora/Bodo Hartke*

Lernverlaufsdiagnostik als zentrales Element  
der Prävention von Rechenschwierigkeiten ..... 339

*Marjolijn Peltenburg/Marja van den Heuvel-Panhuizen/Alexander Robitzsch*

Das mathematische Potenzial von Sonderschülern durch Einsatz  
neuer Technologien ausschöpfen ..... 356

*Christoph Selter*

Förderorientierte Diagnose und diagnosegeleitete Förderung ..... 375

## Förderung beim Erwerb arithmetischer Kompetenzen

*Andreas Schulz/Timo Leuders/Ulrike Rangel*

Arithmetische Basiskompetenzen am Übergang zu Klasse 5 –  
eine empirie- und modellgestützte Diagnostik als Grundlage  
für spezifische Förderentscheidungen ..... 396

*Wilhelm Schipper/Sebastian Wartha*

Diagnostik und Förderung von Kindern  
mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen ..... 418

*Birte Pöhler/Susanne Prediger*

Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung –  
Hintergründe und Ansätze einer Unterrichtseinheit  
zum Prozente verstehen, erklären und berechnen ..... 436

*Alexander Müller/Antje Ehlert/Annemarie Fritz*

Inklusiver Mathematikunterricht – notwendige methodische  
und organisatorische Veränderungsprozesse ..... 460

*Petra Scherer*

Produktives Mathematiklernen für alle –  
auch im inklusiven Mathematikunterricht?! ..... 478

Die Autorinnen und Autoren ..... 492

# Vorwort

Bildung in unserer modernen Gesellschaft bedeutet, über ausreichende Kompetenzen in den drei Schlüsselqualifikationen *Lesen*, *Schreiben* und *Rechnen* zu verfügen. Eine Abneigung gegen Mathematik zu haben, ist gesellschaftlich anerkannt, eine Stigmatisierung rechenschwacher Kinder bleibt deshalb häufig aus. Dies ist einerseits von Vorteil für deren Selbstbild und Motivation, andererseits bagatellisiert diese gesellschaftliche Anerkennung die Auswirkungen fehlender arithmetischer Kompetenzen für die Lebensqualität der Betroffenen. Kinder, die Schwierigkeiten im Erwerb mathematischer Konzepte haben, verlassen die Schule auf einem niedrigen Kompetenzlevel. Studien konnten zeigen, dass fehlende arithmetische Fertigkeiten in der Regel die beruflichen Perspektiven einschränken und zu Beschäftigungen im Niedriglohnbereich führen. Um dieser Folgeerscheinung schwacher Mathematikleistung zu begegnen und die schulischen sowie beruflichen Perspektiven von heutigen Grundschüler/innen nachhaltig zu verändern, bedarf es eines Umdenkens und einer gesellschaftlichen Anerkennung mathematischer Schwäche als förderwürdig. Der Problematik schwacher Mathematikleistungen kann und sollte in der Schule didaktisch begegnet werden, um auch rechenschwache Kinder gemäß ihrer Kompetenzniveaus zu fördern.

Nach wie vor lautet der Titel des Buches »Handbuch Rechenschwäche« und in einer ganzen Reihe von Beiträgen wird dieser Terminus benutzt. Es ist uns wichtig, herauszustellen, dass dem Buch kein medizinisch orientierter Störungsbegriff zugrunde liegt. Rechenschwächen, Rechenprobleme oder Rechenschwierigkeiten sollen nicht in Abhängigkeit von Intelligenztestwerten und erst dann als Problem betrachtet werden, wenn die Leistungsrückstände der Kinder beträchtlich sind. Insofern steht die Abgrenzung der Problematik nicht im Vordergrund. Vielmehr sind Rechenschwierigkeiten als unterschiedlich stark ausgeprägte Rückstände im Rahmen einer allgemeinen Entwicklung von Rechenkonzepten zu betrachten, auf die pädagogisch reagiert werden muss. Die im Handbuch fokussierte Problematik kann durchaus auch mit der Formulierung »Schwierigkeiten beim Rechnenlernen« beschrieben werden. Das Nachdenken über entsprechende spezifische Fördermaßnahmen setzt zugleich Differenzierungsangebote für alle frei. Favorisiert wird daher eine qualitative Analyse der verzögerten oder beeinträchtigten Rechenleistung, um gezielte Fördermaßnahmen für einige – sowie Differenzierungsangebote für alle – zu ermöglichen.

Die Konzeption des Buches sieht vor, in allen Kapiteln Fachdidaktiker/innen und Psychologinnen und Psychologen zu Wort kommen zu lassen. Entsprechend beschäftigt sich die *Einführung in die Problemlage* mit der Definition und den theoretischen Zugängen zur Rechenschwäche. Jörg-Tobias Kuhn gibt uns hier einen Überblick über alle drei wissenschaftlichen Sichtweisen der Rechenschwäche. Er stellt die medizinisch-neurologische, die psychologische und die mathematikdidaktische Sichtweise nebeneinander und zeigt durch das Hervorheben von Schnittstellen gemeinsame Handlungsfelder auf.

Der zweite Teil des Buches widmet sich der *Entwicklung des Zahlenverständnisses* bei Kindern. Im ersten Kapitel dieses Abschnitts stellt Helga Krinzing fest, dass die Neurowissenschaften das Potenzial besitzen pädagogische und kognitive Theorien zu validieren, während eben diese die Grenzen der Neurowissenschaften erweitern können. Sabine Peucker und Steffi Weißhaupt beschreiben in ihrem Artikel die Entwicklung numerischen Rechnens als hierarchische Organisation von Konzepten und Prozeduren. Sie betonen dabei besonders die Kohärenz, die dieser Entwicklung zugrunde liegt. Kristina Reiss und Andreas Obersteiner zeigen abschließend auf, welche Möglichkeiten die Auseinandersetzung mit Bildungsstandards und Tests im Hinblick auf die Einschätzung mathematischer Leistungen und die Prognose ihrer Entwicklung bietet. Darüber hinaus geht es darum, zu belegen, dass und wie die Praxis des Unterrichts von der Auseinandersetzung mit Testverfahren und ihrer konsequenten Nutzung profitieren kann.

Der dritte und vierte Buchabschnitt schließt daran an, indem erstens *Rechenschwäche und beeinflussende Faktoren* näher betrachtet und zweitens *Stolpersteine in der Entwicklung arithmetischer Kompetenz* erörtert werden. In ihrem Beitrag zur Bedeutung neurokognitiver und bildgebender Befunde zum besseren Verständnis bei Rechenschwäche, zeigen Korbinian Möller, Elise Klein und Liane Kaufmann, dass es sowohl bei Hirnfunktionen als auch bei der Hirnstruktur spezifische Unterschiede bei rechenschwachen Kindern gibt. Zudem stellen sie Interventionsprogramme vor, mit deren Hilfe es gelungen ist, Aktivierungsmuster im Gehirn bei rechenschwachen Kindern zu verändern. Ob vorschulische mathematische Kompetenzen ein prädiktiver Faktor für die Entwicklung einer Rechenschwäche sind, damit beschäftigt sich Silvia Pixner. Zugleich nimmt sie weitere Risikofaktoren nicht allein kognitiver Art in ihrem Beitrag mit in den Blick. Michael Gaidoschik wendet sich der Frage zu, welche fachdidaktischen Kriterien der Verfestigung des zählenden Rechnens entgegenwirken und die Verwendung von Ableitungsstrategien fördern können. Dietmar Grube, Jenny Busch und Claudia Schmidt geben einen Überblick darüber, welche übergeordneten kognitiven Bedingungsfaktoren die Voraussetzung für die individuelle Entwicklung des Rechnens sind und damit die individuell verfügbaren Ressourcen eines Kindes bestimmen. Elisabeth Moser Opitz und Verena Schindler nehmen in ihrem Buchbeitrag sprachliche Faktoren in Bezug auf das Erlernen von Mathematik in den Fokus. Besondere Beachtung für die Didaktik stellen hierbei die Bildungs- und Fachsprache dar. Im Kapitel von Michael von Aster, Larissa Rauscher, Juliane Kohn und Yasmin Eitel wird das Problem der Mathematikangst aufgezeigt und verdeutlicht,

dass ein frühes ängstliches Erleben im Zusammenhang mit Zahlen und Rechnen weitreichende Konsequenzen auf die mathematikbezogene Entwicklung eines Kindes haben kann.

Lisa Hefendehl-Hebeker ist die erste Autorin im Abschnitt Stolpersteine und Hürden. Sie legt in ihrem Beitrag zu diesem Buch dar, wie sich die unterschiedlichen Stufen der Zahlbereichserweiterung entwickeln und welche Anforderungen der ständigen Neuorientierung der Lernenden damit verbunden sind. Günter Krauthausen befasst sich im darauffolgenden Kapitel mit der Bedeutung des Kopf- und halbschriftlichen Rechnens in der Fachdidaktik und Schulpraxis. Die drei folgenden Kapitel stammen von der Arbeitsgruppe Hans-Dieter Gerster, Rita Schultz und Elfriede Jakob. Sie widmen sich den Herausforderungen des Anfangsunterrichts. Es wird das anfängliche Anzahlverständnis erläutert und thematisiert, wie im Unterricht von Anfang an Teile-Ganzes-Denken über Zahlbilder angeregt werden kann. Zudem stellen sie die Arbeit mit »Bauteilen zur Multiplikation« als einen Lernprozess auf dem Gebiet der Multiplikation vor. Hans-Dieter Gerster beschäftigt sich in seinem Beitrag mit der Methodik und der Fehlerprävention beim Verständnis schriftlicher Rechenverfahren. Grundlegend hierfür bezeichnet er algorithmisch strukturierte Handlungen mit konkretem Material. Sind die Handlungen am Material verstanden, können schriftliche Verfahren als kurze Handlungsprotokolle eingeführt werden. Moritz Herzog, Annemarie Fritz und Antje Ehlert beschäftigen sich im nachfolgenden Kapitel ausführlich mit Problemen im Stellenwertverständnis. Sie stellen ein Modell der Entwicklung des dezimalen Stellenwertverständnisses vor, das auf Grundlage einer empirischen Studie mit Schülern aus Nordrhein-Westfalen konzipiert wurde. Das vorletzte Kapitel dieses Buchabschnitts von Sebastian Wartha widmet sich der Rechenschwäche in der Sekundarstufe. Fokus hierbei ist die Diagnose und Förderung nicht überwundener Lernhürden der Primarstufe sowie die Auswirkung dieser auf das Arbeiten mit Brüchen.

Der fünfte Teil des Buches ist der *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* gewidmet. Jan Lonnemann und Marcus Hasselhorn geben zu Beginn einen Überblick über die aktuellen Testverfahren zur Diagnostik mathematischer Leistungen und Kompetenzen. Daran anschließend diskutieren Stefan Voß, Simon Sikora und Bodo Hartke die Bedeutung von formativer Evaluation am Beispiel curriculum-basierter Messverfahren (CBM) im Zusammenhang mit der Prävention von schulischem Misserfolg. Marjolijn Peltenburg, Marja van den Heuvel-Panhuizen und Alexander Robitzsch überprüfen in ihrem Beitrag anhand zweier niederländischer Studien, ob eine auf Informations- und Kommunikationstechnologie (IKT) basierende dynamische Erfassung der mathematischen Leistung geeignet ist, das mathematische Potenzial von Schüler/innen spezieller Grundschulen (SG Schüler/innen) aufzuzeigen. Christoph Selter macht in seinem Beitrag zur Diagnostik von Rechenschwäche deutlich, weshalb eine Diagnose förderorientiert und Förderung diagnosegleitet ausgerichtet sein sollten. Dem folgend stellen Andreas Schulz, Timo Leuders und Ulrike Rangel das Instrument »Lernstand 5« für die Diagnose und Förderung von arithmetischen Basiskompetenzen am Übergang zur Klasse 5 vor.

Abschließend werden im letzten Teil Möglichkeiten der *Förderung beim Erwerb arithmetischer Kompetenz* unter dem Blickwinkel von Inklusion diskutiert. Hier beginnen Andreas Obersteiner und Kristina Reiss mit einem Überblick zur derzeitigen Forschungslage für Förderansätze bei Rechenschwierigkeiten. Sie diskutieren die teilweise kontroversen Ergebnisse und stellen den hohen Forschungsbedarf heraus. Wilhelm Schipper und Sebastian Wartha schließen daran an, indem sie Diagnose, Prävention und Förderung bei Lernhürden im arithmetischen Anfangsunterricht diskutieren. Birte Poehler und Susanne Prediger nehmen uns mit auf einen Exkurs und verdeutlichen die Bedeutsamkeit der Verstehens- und Sprachförderung für den Verständniserwerb mathematischer Konzepte. Daran anschließend berichten Alexander Müller, Antje Ehlert und Annemarie Fritz in ihrem Beitrag von der Konfrontation der Schulen mit einer wachsenden Heterogenität innerhalb der Schülerschaft und diskutieren, wie die Schulen auf diese Herausforderung mit konzeptionellen wie organisatorischen Maßnahmen reagieren müssen. Den Abschlussbeitrag dieses Handbuchs verfasste Petra Scherer. Sie befasst sich mit den Anforderungen für einen inklusiven Mathematikunterricht, der sich an einer Unterrichtskonzeption des entdeckenden Lernens und produktiven Übens orientiert.

Damit liegt ein Handbuch vor, das als Grundlage für die Arbeit in erziehungswissenschaftlichen wie fachdidaktischen Seminaren ebenso genutzt werden kann wie in psychologischen. Wir hoffen darauf, mit den vorliegenden Beiträgen Anstöße und Anregungen zu geben, die zu einer reflektierten Praxis beim Fördern ebenso wie im regulären Unterricht beitragen mögen.

Die Herstellung der dritten, völlig überarbeiteten Auflage des »Handbuch Rechenschwäche« wurde von mehreren Personen unterstützt, denen wir an dieser Stelle herzlich danken möchten. Unser Dank gilt dem Beltz Verlag, der die dritte Auflage anregte und uns mit Heike Gras und Christine Wiesenbach Lektorinnen an die Hand gab, die uns in jedem Schritt des Prozesses kompetent und umsichtig unterstützten. Ganz besonders danken möchten wir den Mitarbeiter/innen der Universität Essen: Giordana Matera, Julia Hartmann und Lars Orbach für ihre stets engagierte, kompetente und mit Humor und Gelassenheit getragene Unterstützung bei der Überarbeitung der Beiträge und bei den vielen administrativen Aufgaben. Danke!

Duisburg-Essen/Köln, im November 2016

*Annemarie Fritz, Siegbert Schmidt*

# **Einführung in die Problemlage**

## Rechenschwäche – eine interdisziplinäre Einführung

Rechnen und Zahlenverständnis spielen für die schulische und gesundheitliche Entwicklung im Kindes- und Jugendalter eine wichtige Rolle. So konnten beispielsweise Duncan et al. (2007) zeigen, dass grundlegende mathematische Fähigkeiten zur Zeit des Schuleintritts den wichtigsten Prädiktor für die spätere schulische Leistung darstellten, während Ritchie und Bates (2013) herausfanden, dass frühe Mathematikleistungen im Alter von sieben Jahren den sozioökonomischen Status im mittleren Erwachsenenalter vorhersagten. Im Gegenzug konnten Kohn, Wyszkon und Esser (2013) nachweisen, dass bei Kindern und Jugendlichen mit stark beeinträchtigten Rechenfähigkeiten ein höheres Risiko für psychische Auffälligkeiten (z. B. hyperkinetische Symptome) bestand, im Erwachsenenalter korrelierten Rechenschwierigkeiten mit einer höheren Vulnerabilität für Depression (Parsons/Bynner 2005). Die Zusammenhänge zwischen Rechenfähigkeiten bzw. -schwierigkeiten und individuellem Bildungsgrad, psychischer Gesundheit oder finanziellem Status blieben auch nach Kontrolle relevanter Faktoren (z. B. Intelligenz, Lesefertigkeiten) überwiegend bestehen.

Einer der Hauptgründe für Rechenschwierigkeiten ist das Vorliegen einer Rechenschwäche. Personen werden allgemein dann als rechenschwach bezeichnet, wenn sie bei ansonsten durchschnittlicher Begabung deutliche Defizite im Bereich des grundlegenden Rechnens aufweisen. Problematisch am Begriff der Rechenschwäche ist, dass dieser bis heute nicht in allgemein anerkannter Weise definiert ist. Zudem existieren in der Literatur weitere Begriffe wie Rechenstörung oder Dyskalkulie, die teils synonym mit Rechenschwäche verwendet, teilweise jedoch auch davon abgegrenzt werden. Darauf soll im Folgenden kurz eingegangen werden.

### Zur Definition der Rechenschwäche

Rechenschwache Kinder zeigen aus *klinisch-diagnostischer Sicht* trotz einer im Normalbereich liegenden Intelligenz ( $IQ > 85$ ) Rechenleistungen, die deutlich unterhalb der alters- und klassentypischen Leistung liegen. Liegt die Rechenleistung zusätzlich deutlich unter dem individuellen Intelligenzniveau, wird von einer Rechenstörung oder Dyskalkulie gesprochen (z. B. in der ICD-10, Kapitel V, F81.2, WHO – World Health Organization 2005). Weist ein Kind neben Rechenschwierigkeiten eine unterdurchschnittliche Intelligenz ( $IQ \leq 85$ ) sowie weitere umfassende Lernbeeinträch-

tigungen auf, spricht man hingegen von einer Lernbehinderung. Rechenschwierigkeiten können demnach mit allgemeinen kognitiven Defiziten (Lernbehinderung) oder spezifischen Problemen im Bereich der Mathematik (Rechenschwäche, Rechenstörung) verbunden sein. *Schulrechtlich* wird in Deutschland von Schülerinnen und Schülern »mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen« gesprochen (KMK 2007), wenn erhebliche Minderleistungen bzw. Leistungsversagen im Bereich Mathematik vorliegen. Die Feststellung der besonderen Schwierigkeiten im Rechnen ist Aufgabe der Schule. Obwohl in den Schulgesetzen der deutschen Bundesländer keine exakten Grenzwerte für besondere Schwierigkeiten im Rechnen genannt werden, wird zumindest die intellektuelle Beeinträchtigung als Verursachungsfaktor ausgeschlossen. Zwischen den Bundesländern bestehen große Unterschiede in der schulrechtlichen Situation rechenschwacher Kinder: »von der kompletten Nicht-Berücksichtigung der Rechenschwäche im Schulrecht bis hin zum Notenschutz und der Gewährleistung umfangreicher Fördermaßnahmen« (Lambert 2015, S. 262).

Die Diagnose einer Rechenstörung nach ICD-10 ist in Deutschland die Grundlage für den Zugang zu speziellen Förderprogrammen. Die Unterscheidung zwischen Rechenschwäche und Rechenstörung ist allerdings wissenschaftlich umstritten, da bisherige Studien keine substanziellen Unterschiede zwischen Kindern mit Rechenschwäche und Rechenstörungen bei einfachen oder komplexen mathematischen Aufgaben nachweisen konnten (Ehlert/Schroeders/Fritz-Stratmann 2012). In der aktuellen Version des DSM-5 (American Psychiatric Association 2013), dem zentralen Klassifikationssystem psychischer Störungen in den USA, wurde zudem vollständig auf eine Unterscheidung zwischen Rechenschwäche und Rechenstörung verzichtet, allerdings wird auch dort die Rechenschwäche von der Lernbehinderung abgegrenzt. Im Folgenden wird daher für Rechenschwierigkeiten bei normal ausgeprägter Intelligenz einheitlich der Begriff Rechenschwäche verwendet.

Zur Diagnostik einer Rechenschwäche werden nach ICD-10 und DSM-5 standardisierte und normierte Mathematiktests eingesetzt. Diese Art der Diagnosestellung weist jedoch einige Probleme auf. Zwar erfüllen Mathematiktests in der Regel psychometrische Gütekriterien, die Diagnosekriterien für eine Rechenschwäche variieren jedoch in der Literatur (z. B. Prozentrang < 3 nach ICD-10, Prozentrang < 7 im DSM-5). Die konkrete Auswahl des Diagnosekriteriums hat Auswirkungen auf die individuellen kognitiven Profile der untersuchten rechenschwachen Kinder, welche bei liberaleren Kriterien oft heterogener sind (Murphy et al. 2007). Auch unterscheiden sich standardisierte Mathematiktests teils stark in ihrer inhaltlichen Ausrichtung voneinander; so fokussieren einige Tests auf curriculare Inhalte, während andere stärker basale Vorläuferfähigkeiten erfassen. Je nach eingesetztem Testverfahren können sich die Testergebnisse auf individueller Ebene damit mehr oder weniger deutlich unterscheiden. Dies sind einige der Gründe für die teils uneinheitliche empirische Befundlage zur Rechenschwäche.

Der vorliegende Beitrag soll einen Überblick zu drei verschiedenen, sich überlappenden wissenschaftlichen Sichtweisen der Rechenschwäche geben: (1) die medizinisch-neurologische, (2) die psychologische und (3) die mathematikdidaktische

Sichtweise. Dabei wird, vereinfachend gesprochen, aus medizinisch-neurologischer sowie psychologischer Sicht der Schwerpunkt eher auf die Beschreibung kausaler Mechanismen und Risikofaktoren für Rechenschwäche sowie die Entwicklung und Diagnostik mathematischer Fähigkeiten gelegt, während die mathematikdidaktische bzw. schulpädagogische Perspektive stärker die Gestaltung von Unterricht und Fördermaßnahmen sowie deren Einfluss auf das Rechnen thematisiert. Trotz der unterschiedlichen Akzentuierungen dieser Forschungstraditionen gibt es viele Gemeinsamkeiten und etliche Bereiche, in denen der »Blick über den Tellerrand« von gegenseitigem Nutzen ist.

## **Die medizinisch-neurologische Sichtweise der Rechenschwäche**

Die medizinisch-neurologische Sichtweise befasst sich mit der Identifikation und Beschreibung unterschiedlicher Erklärungsfaktoren für das Zustandekommen einer Rechenschwäche, wobei neurologischen Aspekten eine besondere Bedeutung zukommt. Zur Erklärung von Lern- und Entwicklungsbeeinträchtigungen wie Rechenschwäche, Lese-Rechtschreibschwäche (LRS) oder Aufmerksamkeitsdefizit-/Hyperaktivitätsstörung (ADHS) wurden »multiple deficit«-Modelle vorgeschlagen (Butterworth/Kovas 2013). Lern- und Entwicklungsbeeinträchtigungen werden dabei als Resultat einer komplexen Interaktion genetischer, neuronaler, kognitiver und umweltbezogener Faktoren beschrieben (Abb. 1). Während auf der biologischen Ebene genetische Risikofaktoren oder spezifische neuronale Anomalien relevant sind, impliziert die kognitive Ebene relevante psychologische Konstrukte (z. B. Aufmerksamkeit). Die Verhaltensebene schließlich umfasst beobachtbares Verhalten (z. B. Testleistung). Umweltfaktoren können z. B. Aspekte wie die häusliche Lernumgebung oder der sozioökonomische Status sein. Dieser multikausale Ansatz postuliert, dass innerhalb und zwischen den verschiedenen Ebenen komplexe Zusammenhänge bestehen, die für das Zustandekommen von Lernschwierigkeiten verantwortlich sind.

### *Genetische Risikofaktoren und Komorbidität*

Im Hinblick auf Risikofaktoren der Rechenschwäche zeigten sich deutliche genetische Einflüsse (Alarcón et al. 1997), doch die Befunde stützen ebenso die substanzielle Auswirkung von Umwelteinflüssen. Wie weiter unten ausgeführt wird, zeigen Kinder mit einer Rechenschwäche zudem auf neuronaler Ebene funktionelle und strukturelle Abweichungen, insbesondere in Bereichen des parietalen und präfrontalen Kortex. Als zentrale Ursache der Rechenschwäche wurde eine Beeinträchtigung der mentalen Repräsentation von Zahlen und Mengen vorgeschlagen (Butterworth/Varma/Laurillard 2011), die Annahme eines singulären Kausalfaktors für das Auftreten der Rechenschwäche wird jedoch gegenwärtig kritisch diskutiert. Rechenschwache Kinder weisen häufig zusätzliche (komorbide) Beeinträchtigungen schriftsprachlicher Fähig-

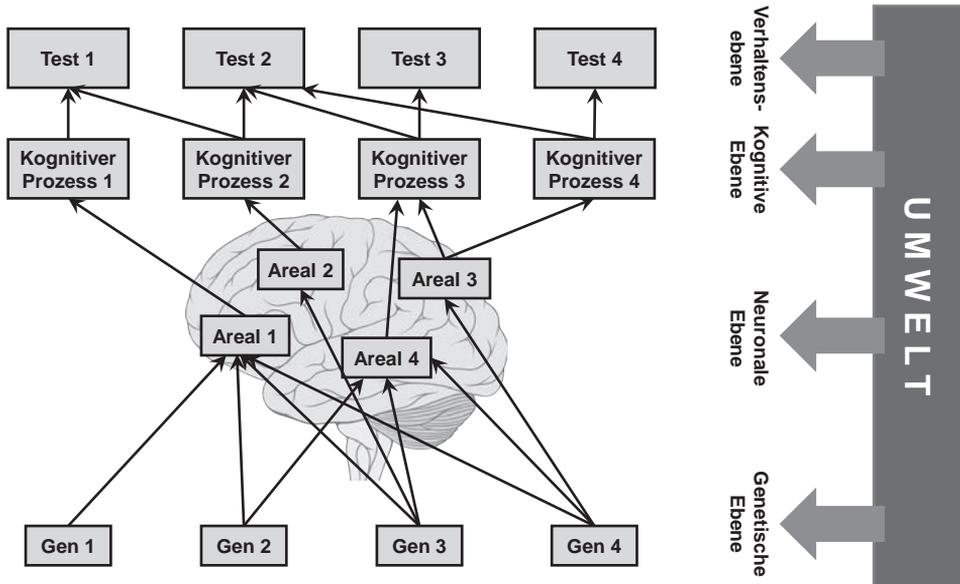


Abb. 1: Ebenen im »multiple deficit«-Modell (nach Butterworth/Kovas 2013; Gehirnabbildung von Lynch/Jaffe 2006 reproduziert unter den Bedingungen der Creative Commons Attribution License)

keiten (LRS) oder der Aufmerksamkeit (ADHS) auf. So zeigten in einer Studie von Moll et al. (2014) etwa zwei Drittel aller rechenschwachen Kinder eine zusätzliche Lernschwäche im Bereich Lesen und/oder Rechtschreiben; die Komorbidität von Rechenschwäche und ADHS hingegen variiert zwischen 5 Prozent und 30 Prozent (DuPaul/Gormley/Laracy 2013).

Studien zum Zusammenhang von Rechenschwäche und LRS zeigten, dass diese beiden Störungsbilder weitgehend unabhängig voneinander sind, wobei Rechenschwäche mit einem Zahlenverarbeitungsdefizit, LRS mit einem phonologischen Verarbeitungsdefizit einhergeht (Landerl et al. 2009). Dennoch zeigten auch Kinder mit LRS selektive Defizite bei der Bearbeitung solcher mathematischer Aufgaben, die die Verarbeitung verbaler Information erforderten, wie Abzählen oder mathematischer Faktenabruf (Moll/Göbel/Snowling 2015). Sowohl bei Kindern mit Rechenschwäche als auch mit LRS fanden sich Defizite in allgemeinen kognitiven Fähigkeiten wie dem Arbeitsgedächtnis oder der Verarbeitungsgeschwindigkeit, so dass diese als gemeinsame Risikofaktoren für die Entwicklung einer Lernschwäche gesehen werden können (Willcutt et al. 2013). Kinder mit ADHS hingegen zeigen häufig Beeinträchtigungen beim Abruf mathematischer Fakten, beim Kopfrechnen oder bei Textaufgaben (Tosto et al. 2015). ADHS-Symptomatik und Rechenschwäche scheinen sich trotz teilweiser Überlappung aber überwiegend unabhängig voneinander auf basisnumerische und arithmetische Fertigkeiten auszuwirken (Kuhn et al. im Druck). Diese Befunde unterstreichen, dass bei der Diagnostik einer Rechenschwäche auch die detaillierte Ab-

klärung weiterer Lernschwierigkeiten und die Erfassung relevanter kognitiver Fähigkeiten notwendig sind.

### *Kernsysteme der Quantitätsverarbeitung*

Nach medizinisch-neurologischer Sichtweise ist für ein Verständnis der Rechenschwäche hilfreich, elementare mathematische Vorläuferfähigkeiten in den Blick zu nehmen. In der Literatur werden allgemein zwei grundlegende kognitive Mechanismen als präverbale »Kernsysteme« der Quantitätsverarbeitung diskutiert (Feigenson et al. 2004): ein System zur approximativen Repräsentation größerer Mengen (»approximate number system« – ANS) sowie eines zur exakten Repräsentation kleiner Mengen (»object tracking system« – OTS). Es wird angenommen, dass die Beeinträchtigung eines oder beider dieser angeborenen Kernsysteme zur Ausbildung einer Rechenschwäche führen kann, da sie in etlichen Entwicklungsmodellen eine wichtige Grundlage für komplexere mathematische Fähigkeiten bilden (s. u.). Eine Beeinträchtigung der Kernsysteme wird auch als *Kerndefizit* bezeichnet (Butterworth et al., 2011).

Mittlerweile konnten etliche Studien zeigen, dass das ANS bei rechenschwachen Kindern beeinträchtigt ist. In einer Studie von Piazza et al. (2010) wurden rechenschwache Kinder sowie unterschiedliche Kontrollgruppen mit einer Mengenvergleichsaufgabe untersucht. Die Mengenvergleichsaufgabe erforderte dabei die Entscheidung darüber, welche von zwei nebeneinander auf dem Computerbildschirm dargebotenen Punktmengen (12–20 bzw. 24–40 Punkte) quantitativ größer war, wobei die quantitative Nähe der beiden gezeigten Punktwolken systematisch variiert wurde. Die Autoren konnten zeigen, dass die im Mittel zehnjährigen rechenschwachen Kinder, insbesondere bei quantitativ näher beieinanderliegenden Punktmengen, etwa dieselbe Präzision zeigten wie fünfjährige Kinder ohne Rechenschwäche. Die Beeinträchtigung des ANS ist bei Rechenschwäche jedoch keinesfalls immer gegeben. So untersuchte eine Studie von Rousselle und Noël (2007), ob sich Kinder mit und ohne Rechenschwäche bei symbolischen (Zahlen) und nichtsymbolischen (Mengen) Vergleichsaufgaben unterschieden. Die Autorinnen fanden zwar erwartungsgemäß Gruppenunterschiede bei einstelligen Zahlenvergleichen, nicht jedoch bei Mengenvergleichen gleicher Größenordnung. Der Befund wurde so interpretiert, dass bei einer Rechenschwäche nicht zwingend jede Art von Mengenrepräsentation beeinträchtigt sein muss. Stattdessen ist laut Rousselle und Noël (2007) bei Rechenschwäche vor allem die Aktivierung einer abstrakten Mengenrepräsentation durch Symbole (Zahlen) beeinträchtigt (Zugangsdefizithypothese). Studien, die anhand früh erfasster, grundlegender numerischer Fertigkeiten die Mathematikleistung in der Grundschule vorhersagen (z. B. Sasanguie et al. 2013), kommen häufig zu demselben Schluss: Insbesondere die Qualität der frühen Zahlenverarbeitung und das Zahlenverständnis, weniger die Unterscheidung und Verarbeitung von nichtsymbolischen Mengen, sind für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bedeutsam.

Das zweite Kernsystem der Quantitätsverarbeitung (OTS) dient der schnellen, exakten, nicht-zählenden Erfassung kleiner Mengen, was als Simultanerfassung (»subitizing«) bezeichnet wird. Im Gegensatz zum seriellen Abzählen ist Simultanerfassung ein paralleler Prozess, wobei bei Erwachsenen die Obergrenze bei etwa vier simultan erfassbaren Objekten liegt. Eine Habituationsstudie mit sechs Monate alten Säuglingen (Starkey/Cooper 1980) konnte in diesem Zusammenhang zeigen, dass die Säuglinge 2 von 3 Punkten, nicht aber 4 von 6 Punkten reliabel unterscheiden konnten, obwohl beide Stimulismengen dasselbe Verhältnis aufwiesen. Diese und weitere Befunde stützen die Annahme, dass die Simultanerfassung ein qualitativ anderer Prozess ist als das Abschätzen größerer Mengen.

Einige Arbeiten zeigen Beeinträchtigungen der Simultanerfassung bei Rechenschwäche. So konnten Schleifer und Landerl (2011) zeigen, dass der Anstieg der Reaktionszeiten im Mengbereich der Simultanerfassung (1 bis 3 Objekte) bei rechenschwachen Kindern steiler war als in der Kontrollgruppe. Dies deutet möglicherweise darauf hin, dass die Anzahl der parallel erfassbaren Objekte bei Rechenschwäche geringer ist und früher gezählt werden muss. Eine Arbeit von Ashkenazi, Mark-Zigdon und Henik (2013) konnte zudem belegen, dass strukturierte Mengendarstellungen bei Kindern ohne Rechenschwäche zu schnellerer Simultanerfassung führen, was bei rechenschwachen Kindern jedoch nicht der Fall war, d. h. bei Rechenschwäche können Defizite in der Mustererkennung vorliegen (Mulligan 2011).

### *Neurophysiologie der Zahlenverarbeitung und des Rechnens*

Im Hinblick auf die Entwicklung des Rechnens zeigt sich auf neurophysiologischer Ebene eine zunehmende funktionale Spezialisierung bestimmter neuronaler Areale für das Lösen arithmetischer Aufgaben. Eine Studie mit bildgebendem Verfahren (funktionelle Magnetresonanztomographie, fMRT) fand, dass jüngere Kinder beim Verifizieren einfacher Additions- und Subtraktionsaufgaben vorrangig ein frontales neuronales Netzwerk aktivierten, das u. a. mit exekutiven Funktionen assoziiert ist (Rivera et al. 2005). Ältere Probanden zeigten hingegen erhöhte neuronale Aktivität in linkshemisphärischen Arealen, die mit dem automatisierten Abrufen von (Rechen-) Fakten in Verbindung gebracht werden. Eine fMRT-Studie von Qin et al. (2014) wies zudem nach, dass die Häufigkeit, mit der Rechenfakten aus dem Gedächtnis abgerufen werden konnten, von der zuvor gemessenen Qualität der neuronalen Verbindungen zwischen Neocortex und Hippocampus abhing. Der Hippocampus ist an der Enkodierung von Informationen ins Langzeitgedächtnis beteiligt, so dass Gedächtnisprozesse für die Automatisierung einfacher Rechenprozesse eine zentrale Rolle zu spielen scheinen.

Die Gehirnaktivität von Kindern mit Rechenschwäche zeigen während der Mengenverarbeitung und des Rechnens einige markante Abweichungen. Eine Meta-Analyse von fMRT-Studien (Kaufmann et al. 2011) ergab, dass rechenschwache Kinder allgemein geringere neuronale Aktivität in zahlenverarbeitenden Arealen, jedoch

höhere Aktivität in außéparietalen Gehirnbereichen zeigten. Dies kann auf die Verwendung abweichender Rechenstrategien (z. B. Zählstrategien) oder auf kompensatorische Prozesse (z. B. höhere Aktivität des Arbeitsgedächtnisses) hinweisen. Zudem zeigen sich auch hirnstukturelle Abweichungen bei Rechenschwäche. So wiesen Rotzer et al. (2008) ein geringeres Ausmaß grauer und weißer Zellen in zahlenverarbeitenden Arealen nach (s. Beitrag von Krinzinger und Beitrag von Möller/Klein/Kaufmann i. d. Bd.).

Zusammenfassend liegen mittlerweile zahlreiche Ergebnisse vor, die nahelegen, dass rechenschwache Kinder in zwei angeborenen präverbalen Kernsystemen der Quantitätsverarbeitung (ANS und OTS) sowie beim Rechnen Beeinträchtigungen aufweisen, die sich sowohl neuronal als auch auf Verhaltensebene zeigen. Es ist gegenwärtig jedoch nicht vollständig geklärt, inwieweit die beiden Kernsysteme sich gegenseitig sowie das Verständnis des Kardinalitätsprinzips beeinflussen, das für die weitere Entwicklung des Rechnens zentral ist. Nach dem Kardinalitätsprinzip entspricht das letzte Zahlwort beim Abzählen einer Menge der Mächtigkeit dieser Menge (Gelman/Gallistel 1978). Kinder verstehen das Kardinalitätsprinzip, wenn sie auf Aufforderung beliebige Mengen herstellen können (»Gib mir vier Murmeln« – »give-a-number task«, Wynn 1992). Doch wie entwickelt sich das Verständnis von Kardinalität? Einige Autoren schlagen vor, dass Zahlen ihre kardinale Bedeutung durch eine Verbindung mit den analogen Größenrepräsentationen des ANS erlangen (Gallistel/Gelman 1992), während andere postulieren, dass das Verständnis des Kardinalitätsprinzips ausschließlich auf dem OTS basiert, indem es sich sequentiell, beginnend mit kleinen Mengen, aufbaut (Le Corre/Carey 2007). Eine abschließende Beantwortung dieser Fragen steht noch aus, auch im Hinblick auf die Bedeutung der Kernsysteme für die Entwicklung von Rechenfähigkeiten, welche im Rahmen der psychologischen Sichtweise der Rechenschwäche als Nächstes beschrieben werden soll.

## **Die psychologische Sichtweise der Rechenschwäche**

Die psychologische Perspektive misst Entwicklungsmodellen der Zahlenverarbeitung sowie der Vorhersage der Rechenleistung bzw. -schwäche durch kognitive und nicht-kognitive Prädiktoren eine hohe Bedeutung bei. Die Entwicklung der Zahlenverarbeitung stellt eine zentrale Voraussetzung für das Rechnen dar, weshalb darauf als Erstes eingegangen werden soll.

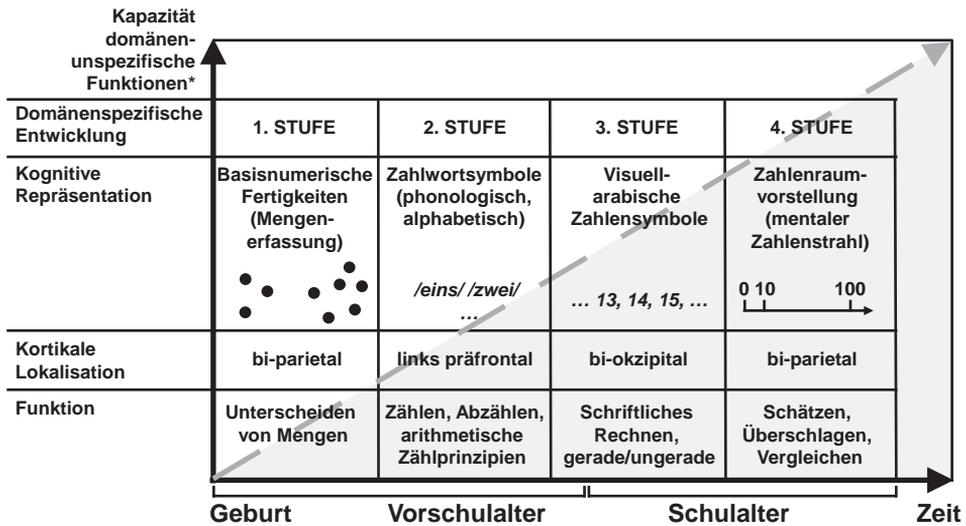
### *Entwicklungsmodelle der Zahlenverarbeitung*

Entwicklungsmodelle des Zahlenverständnisses (z. B. Fritz/Ricken 2008; Krajewski/Schneider 2009; von Aster et al. 2005) nehmen an, dass die Zahlenverarbeitung auf den oben beschriebenen präverbalen Kernsystemen der Quantitätsverarbeitung

(ANS/OTS) beruht. Basierend auf diesen Kernsystemen können Kinder z. B. noch vor dem Erwerb des Zählens Mengen vergleichen («Wo ist mehr?») oder erkennen, dass Mengen von Objekten in Untermengen aufteilbar und wieder zusammenfügbar sind (protoquantitative Schemata, Resnick 1992; s. Beitrag von Peucker/Weißhaupt i. d. Bd.). Parallel dazu kommen Kinder (z. B. durch Kinderlieder) schon früh mit Zählwörtern in Verbindung und beginnen, Wissen über die Zahlwortreihe und den Zählvorgang selbst zu entwickeln. Ein ganz entscheidender Schritt erfolgt dann, wenn Kinder lernen, Zählwörter mit den entsprechenden Mengen in Verbindung zu bringen und so ein Verständnis der Kardinalität entwickeln (••• = »drei«). Dieses Verständnis baut sich sukzessive auf und ist in der Regel ab dem Alter von etwa 3–4 Jahren vorhanden (Sarnecka/Goldman/Slusser 2015). Der nächste Schritt besteht dann darin, im Vorschulalter bzw. in der ersten Schulklasse Mengen und Zählwörter mit Zahlsymbolen zu verbinden («drei» = 3). Dabei ist neben der stabilen kognitiven Verknüpfung von Zahl und Menge kritisch, dass Zahlen auch als Zerlegungen und Zusammensetzungen anderer Zahlen gedacht werden können (Teil-Ganzes-Konzept, Resnick 1992). Erst wenn eine Zahl auch so aufgefasst werden kann, dass sie die Relation von zwei anderen Zahlen abbildet («5 ist 2 mehr als 3» bzw. »der Abstand von 5 und 3 ist 2«), kann ein vertieftes Verständnis von Rechenoperationen (z. B. Addition und Subtraktion als inverse Operationen) aufgebaut werden (s. Unterkapitel »die mathematikdidaktische Sichtweise der Rechenschwäche« i. d. Beitrag).

Es differenzieren sich mit zunehmendem Alter entsprechend drei Repräsentationsformen für Mengen bzw. Zahlen heraus: Eine zunächst präverbale, analoge Größenrepräsentation (•••, s. Unterkapitel »Kernsysteme der Quantitätsverarbeitung« i. d. Beitrag) wird ergänzt durch eine sprachlich-alphabetische Repräsentation von Zahlen («drei»), die später durch eine visuell-arabische Repräsentation der Zahl («3») vervollständigt wird. Diese drei Repräsentationsformen sind im Erwachsenenalter zwar funktional miteinander verbunden, jedoch in unterschiedlichen Regionen des Gehirns lokalisiert («Triple-Code-Modell«, Dehaene 1992). Von Aster et al. (2005) betten die drei beschriebenen Repräsentationsformen der Zahl in ein Modell ein, das die Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen mit der parallel verlaufenden Reifung allgemeiner kognitiver Funktionen in Beziehung setzt (Abb. 2). Die Entwicklung der drei beschriebenen Zahlenrepräsentationsformen auf den Stufen 1 bis 3 des Modells mündet nach von Aster et al. (2005) schließlich in der Ausformung einer abstrakten Zahlenraumvorstellung (Stufe 4), d. h. eines mentalen Zahlenstrahls, bei dem Zahlen in räumlicher Form repräsentiert sind. Mittlerweile gibt es Evidenz dafür, dass schon Säuglinge größere Mengen mit stärkerer räumlicher Ausdehnung verbinden (z. B. Lourenco/Longo, 2010). Nach von Aster et al. (2005) ist jedoch die Verbindung solcher intuitiven Vorstellungen mit erworbenem (Zahlen-)Wissen, also die Konstruktion einer abstrakt-symbolischen, ordinalen Zahlenraumvorstellung, die Voraussetzung für den Umgang mit größeren Zahlen und komplexeren mathematischen Fähigkeiten.

Die bereits erwähnte Heterogenität kognitiver Profile bei Rechenschwäche kann im Rahmen dieses Modells zumindest teilweise erklärt werden: So gibt es Kinder,



\* Aufmerksamkeit, Arbeitsgedächtnis, Sprache, Senso-Motorik, visuell-räumliche Verarbeitung

Abb. 2: Das Vier-Stufen-Entwicklungsmodell der Zahlenverarbeitung (nach von Aster/Shalev, 2007)

deren Kernsysteme der Mengenverarbeitung beeinträchtigt sind (Stufe 1), und die damit eine sehr tiefgreifende Störung der Mengenrepräsentation aufweisen, die sich auf praktisch alle Bereiche der Zahlenverarbeitung und des Rechnens auswirkt. Andererseits können die Kernsysteme intakt sein, während die Verbindung zwischen Mengen und Zahlwörtern beeinträchtigt ist, was z. B. bei LRS aufgrund der damit verbundenen phonologischen Verarbeitungsdefizite der Fall sein kann (Stufe 2), oder die Verbindung von arabischen Zahlen und zugrundeliegenden Mengen ist beeinträchtigt (Stufe 3, s. Zugangsdefizithypothese im Unterkapitel »Kernsysteme der Quantitätsverarbeitung« i. d. Beitrag). Obgleich es plausibel ist, angesichts der Komplexität des Rechnens von verschiedenen Subtypen der Rechenschwäche auszugehen – so fand z. B. von Aster (2000) einen »tiefgreifenden«, einen »sprachlichen« und einen »arabischen« Subtyp – ist die empirische Befundlage für stabile Subtypen bisher nicht ausreichend.

### Kognitive und nicht-kognitive Prädiktoren der Rechenleistung

Bei der Vorhersage von zukünftigen Mathematikleistungen spielen einerseits unspezifische, eher *allgemeine* kognitive Fähigkeiten wie z. B. das Arbeitsgedächtnis eine Rolle (s. Beitrag von Grube/Busch/Schmidt und Beitrag von Moser Opitz/Schindler i. d. Bd. für die Rolle weiterer kognitiver und sprachlicher Fähigkeiten). Das Arbeitsgedächtnis ist ein kognitives System, das die gleichzeitige Speicherung und Verarbeitung von Information ermöglicht und dementsprechend von zentraler Bedeutung für

Lernvorgänge ist (Swanson/Alloway 2012). Mittlerweile gibt es Evidenz dafür, dass Rechenschwäche mit Defiziten in allen Bereichen des Arbeitsgedächtnisses einhergehen kann. So sind einerseits die visuell-räumliche und phonologische Speicherkomponente des Arbeitsgedächtnisses betroffen (Swanson/Jerman 2006). Andererseits kann auch die zentrale Exekutive, eine Arbeitsgedächtniskomponente, die die Aufmerksamkeit kontrolliert und aktuell bewusste Informationen verarbeitet, bei Rechenschwäche beeinträchtigt sein (Peng/Fuchs, 2016).

Neben allgemeinen sind *spezifische* kognitive Vorhersagemerkmale für die Mathematikleistung bedeutsam, die bei defizitärer Ausprägung zur Entstehung einer Rechenschwäche führen können (s. Beitrag von Pixner i. d. Bd.). Die Zahlenverarbeitung stellt einen robusten Indikator für zukünftige Mathematikleistungen dar. Sie wird oft über die Geschwindigkeit von Zahlenvergleichen erfasst (»Welche Zahl ist größer?«). Eine Längsschnittstudie ergab, dass eine im Kindergarten durchgeführte Zahlenvergleichsaufgabe die Mathematikleistung in der ersten Klasse gut vorhersagen konnte (Toll et al. 2015). Neben der Zahlenverarbeitung sind Zählwissen und Zählfertigkeiten im Kindergarten bedeutsame Vorhersagemerkmale späterer mathematischer Leistungen (z. B. Vorwärts-, Rückwärts- oder Weiterzählen, Aunola et al. 2004; Zählgeschwindigkeit, Reeve et al. 2012).

Ein wichtiger *nicht-kognitiver* Prädiktor für Mathematikleistungen ist die Mathematikangst, welche eine negative affektive Reaktion auf Situationen darstellt, die den Umgang mit Zahlen oder Rechnen erfordern (s. Beitrag von von Aster et al. i. d. Bd.). Mathematikangst und -leistung weisen in Meta-Analysen einen mittelstarken Zusammenhang auf (Ma 1999). Dabei kann Mathematikangst einerseits dadurch Rechenfähigkeiten beeinträchtigen, dass mathematikängstliche Personen Situationen vermeiden, in denen sie rechnen müssten, so dass weniger gerechnet wird. Andererseits bewirkt Mathematikangst während des Rechnens eine Überlastung des Arbeitsgedächtnisses durch dysfunktionale Gedanken (Ashcraft/Kirk 2001). Das Arbeitsgedächtnis ist jedoch z. B. an der Speicherung von rechnerischen Zwischenergebnissen sowie der Auswahl effizienter Rechenstrategien beteiligt (van der Ven et al. 2012), weshalb seine Überlastung zu geringeren Mathematikleistungen führt. Mathematikangst stellt somit einen wichtigen Prädiktor für das Auftreten einer Rechenschwäche dar.

Zur Frage der Stabilität von Rechenschwäche ergaben längsschnittliche Studien, dass etwa zwei Drittel der untersuchten rechenschwachen Kinder im zeitlichen Verlauf auch weiterhin die Kriterien für Rechenschwäche erfüllen (zusammenfassend Mazzocco/Räsänen 2013). Besonders hohe zeitliche Stabilität wurde für Defizite bei einfachen Rechenaufgaben berichtet (z. B.  $3 + 5$ ), die in Tests mit einem Zeitlimit vorgegeben werden. Kinder ohne Rechenschwäche am Ende der Grundschule lösen diese Aufgaben überwiegend per Abruf des Ergebnisses aus dem Langzeitgedächtnis, während rechenschwache Kinder auch in höheren Schulklassen noch häufig zählend rechnen (Ostad 1997). Letztere weisen in solchen Aufgaben längsschnittlich zudem einen geringeren Zuwachs richtig gelöster Aufgaben als Kinder ohne Rechenschwäche auf, so dass sich bereits zu Beginn vorhandene Unterschiede noch vergrößern (z. B.

Jordan/Hanich/Kaplan 2003). Persistente Defizite im Abruf mathematischer Fakten sind einer der am besten replizierten Befunde für eine Rechenschwäche im Schulalter.

### Die mathematikdidaktische Sichtweise der Rechenschwäche

Neben der Betrachtung individueller rechenbezogener Vorstellungen und Denkprozesse liegt der Fokus mathematikdidaktischer Arbeiten zur Rechenschwäche auf der Analyse unterrichtlicher Praktiken, die das Entstehen einer Rechenschwäche vermeiden oder auch begünstigen können. Im Folgenden wird zunächst beschrieben, wie einseitige Vorstellungen von Zahlen und mathematischen Operationen zu einer Rechenschwäche führen können. Abschließend wird kurz auf relevante Maßnahmen eingegangen, die helfen können, solche einseitigen Vorstellungen zu überwinden.

Aus mathematikdidaktischer Sicht sind einseitige Vorstellungen von Zahlen eine typische Auffälligkeit rechenschwacher Kinder (Gerster 2003). Für sie entsprechen Zahlen Positionen in der Reihe der Zahlwörter, d. h. sie wissen, dass die Zahl 4 auf die 3 folgt und dass die Zahl 7 später auf die 6 folgt (ordinaler Zahlenbegriff, Abb. 3/a). Zusätzlich wissen viele rechenschwache Kinder, dass das letztgenannte Zahlwort die Anzahl der ausgezählten Objekte widerspiegelt (»last-word-rule«). Die Zahl 3 entspricht damit dem Anfangsstück der Zahlwortreihe bis 3, die Zahl 4 dem Anfangsstück der Zahlwortreihe bis 4 und so fort (Abb. 3/b). Dieses Wissen reicht allerdings nicht aus, um die Beziehungen der Zahlen 3, 4 und 7 bei der Aufgabe  $3 + 4 = 7$  zu erkennen. Um zu verstehen, dass die 7 sich aus der 3 und 4 zusammensetzt, muss die 7 als *zerlegbar* gedacht werden (Teil-Ganzes-Konzept, s. Beitrag von Schultz/Jakob/Gerster i. d. Bd.). Eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis des Teil-Ganzes-Konzeptes ist die Einsicht, dass die 4 nicht nur auf die 3 in der Zahlwortreihe folgt, sondern auch *um 1 größer ist* als die 3 (Sukzessorfunktion, Izard et al. 2008). Aus diesem Wissen lässt sich dann folgern, dass (1) die kleinere in der größeren Zahl *enthalten* ist und folglich (2) größere Zahlen sich aus kleineren Zahlen zusammensetzen oder in diese zerlegen lassen (Teil-Ganzes-Konzept). Daraus ergibt sich dann

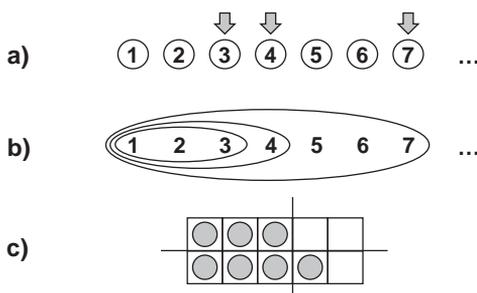


Abb. 3: Zahlen als (a) Positionen, (b) Anfangsstücke der Zahlwortreihe oder (c) dargestellt als gegliederte Quantität (nach Gerster 2003)

(3) wiederum, dass der mit einer Zahl gemeinte Wert aus der Verknüpfung anderer Zahlen gedacht werden kann, d. h. Zahlen können auch selbst quantitative *Relationen zu anderen Zahlen* repräsentieren ( $7 = 3 + 4$ , aber auch  $7 = 9 - 2$ ). Das Teil-Ganzes-Schema und die Fähigkeit, Zahlen (auch) als Relationen zu anderen Zahlen denken zu können, bilden den Übergang zum Rechnen, wobei dieser fließend und nicht eindeutig definiert ist (Häsel-Weide 2016).

Kinder, die (noch) kein Verständnis des Teil-Ganzes-Konzeptes oder der Zahl als Relation entwickelt haben, sind gezwungen, Rechenaufgaben zählend zu lösen. Sie verstehen Addieren als Aufforderung zum Weiterzählen und Subtrahieren als Aufforderung zum Rückwärtszählen (Gerster 2003), ohne dass die Gegenläufigkeit dieser mathematischen Operationen klar wird ( $3 + 5 = 8$ ;  $8 - 5 = 3$ ). Soll also die Aufgabe  $7 - 3$  ausgerechnet werden, wird von der Position 7 um 3 Schritte rückwärts gezählt. Dieses Vorgehen ist insbesondere bei Aufgaben mit größeren Zahlen fehleranfällig und aufwändig, wodurch das Einprägen von Faktenwissen (Rechenaufgabe und zugehöriges Ergebnis) erschwert und damit das Zählen als Lösungsstrategie gleichzeitig verfestigt wird (Baroody/Bajwa/Eiland 2009). Zudem ist das Verständnis des Dezimalsystems, das Zahlen als Zusammensetzung von Einern, Zehnern etc. repräsentiert, beeinträchtigt.

Insbesondere zu Beginn der ersten Schulklasse ist das Zählen, oft unter Verwendung der Finger, die häufigste Strategie zum Lösen von Rechenaufgaben (Gaidoschik 2012). Ist zu Beginn der Schulzeit die Häufigkeit der Fingerverwendung beim Rechnen noch positiv mit der Anzahl gelöster Rechenaufgaben korreliert, wird dieser Zusammenhang zum Ende der zweiten Klasse aber negativ (Jordan et al. 2008). Zählen als Lösungsstrategie, anfangs durchaus normal, steht also zunehmend für schwache Rechenleistungen. Kinder ohne Schwierigkeiten im Rechnen zeigen hingegen von Beginn an ein breiteres Repertoire an Strategien, d. h. neben zählbasierten Strategien werden häufiger gedächtnisbasierte Strategien (direkter Gedächtnisabruf oder Ableitung:  $3 + 4 \rightarrow 3 + 3 + 1 = 7$ ) verwendet (Geary et al. 2004). Die bewusste Verwendung von Ableitungsstrategien beim Rechnen führt bei Kindern des ersten Schuljahres dazu, dass Rechenaufgaben später vermehrt per Faktenabruf gelöst werden (Gaidoschik 2012).

Ein wichtiges Ziel von Fördermaßnahmen für rechenschwache Kinder ist es, das Zählen als wichtigste Rechenstrategie zu überwinden. Dazu muss einerseits sichergestellt werden, dass die Kinder Zahlen als strukturierte Anzahlen erkennen und zerlegen können, was durch strukturierende Mengendarstellungen erleichtert werden kann (Abb. 3/c)). So fand Moser Opitz (2008), dass die Verwendung von strukturierten Mengenbildern die Häufigkeit der Verwendung von Abzählstrategien beim Rechnen deutlich reduzierte. Andererseits ist erforderlich, ein tragfähiges Operationsverständnis aufzubauen, so dass Addition und Subtraktion nicht als Aufforderung zum Zählen, sondern als *Veränderung* von Mengen gedacht werden. Konkrete Veränderungshandlungen an geeignetem Material ( $\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet$ ) können dann durch zunehmende Abstrahierung als gedankliche Operationen ( $3 + 2$ ) verinnerlicht werden (Wartha/Schulz 2011). Auf dieser Grundlage können schließlich einerseits Kernaufgaben au-

tomatisiert werden (z. B. Verdoppelungsaufgaben, Gerster 2013), die das Lösen von Rechenaufgaben mittels Ableitung ermöglichen, andererseits können z. B. durch den Vergleich von Rechenaufgaben Ableitungsstrategien erarbeitet werden ( $3 + 4$ ,  $13 + 4$ ,  $23 + 4$ , Häsel-Weide 2016).

## Literatur

- Alarcón, M./DeFries, J. C./Light, J. G./Pennington, B. F. (1997): A Twin Study of Mathematics Disability. In: *Journal of Learning Disabilities* 30, S. 617–623.
- American Psychiatric Association (2013): *DSM-5: Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*. 5. Aufl. Washington, DC: Author.
- Ashcraft, M. H./Kirk, E. P. (2001): The Relationships Among Working Memory, Math Anxiety, and Performance. In: *Journal of Experimental Psychology: General* 130, S. 224–237.
- Ashkenazi, S./Mark-Zigdon, N./Henik, A. (2013): Do Subitizing Deficits in Developmental Dyscalculia Involve Pattern Recognition Weakness? In: *Developmental Science* 16, S. 35–46.
- Aster, M. G. v. (2000): Developmental Cognitive Neuropsychology of Number Processing and Calculation: Varieties of Developmental Dyscalculia. In: *European Child & Adolescent Psychiatry* 9, S. 41–57.
- Aster, M. G. v. (2013): Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. In: Aster, M. G. v./Lorenz, J. H. (Hrsg.): *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 15–38.
- Aster, M. G. v./Kucian, K./Schweizer, M./Martin, E. (2005): Rechenstörungen im Kindesalter. In: *Monatsschrift Kinderheilkunde* 153, S. 614–622.
- Aunola, K./Leskinen, E./Lerkkanen, M./Nurmi, J. (2004): Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. In: *Journal of Educational Psychology* 96, S. 699–713.
- Baroody, A. J./Bajwa, N. P./Eiland, M. (2009): Why Can't Johnny Remember The Basic Facts? In: *Developmental Disabilities Research Reviews* 15, S. 69–79.
- Butterworth, B./Kovas, Y. (2013): Understanding Neurocognitive Developmental Disorders Can Improve Education for All. In: *Science* 340, S. 300–305.
- Butterworth, B./Varma, S./Laurillard, D. (2011): Dyscalculia: From Brain to Education. In: *Science* 332, S. 1049–1053.
- Dehaene, S. (1992): Varieties of Numerical Abilities. In: *Cognition* 44, S. 1–42.
- Duncan, G. J./Dowsett, C. J./Claessens, A./Magnuson, K./Huston, A. C./Klebanov, P./Japel, C. (2007): School Readiness and Later Achievement. In: *Developmental Psychology* 43, S. 1428–1446.
- DuPaul, G. J./Gormley, M. J./Laracy, S. D. (2013): Comorbidity of LD and ADHD: Implications of DSM-5 for Assessment and Treatment. In: *Journal of Learning Disabilities* 46, S. 43–51.
- Ehlert, A./Schroeders, U./Fritz-Stratmann, A. (2012): Kritik am Diskrepanzkriterium in der Diagnostik von Legasthenie und Dyskalkulie. In: *Lernen und Lernstörungen* 1, S. 169–184.
- Feigenson, L./Dehaene, S./Spelke, E. (2004): Core Systems of Number. In: *Trends in Cognitive Sciences* 8, S. 307–314.
- Fritz, A./Ricken, G. (2008): *Rechenschwäche*. München: Ernst Reinhardt.
- Gaidoschik, M. (2012): First-graders' Development of Calculation Strategies: How Deriving Facts Helps Automate Facts. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 33, S. 287–315.
- Gallistel, C. R./Gelman, R. (1992). Preverbal and Verbal Counting and Computation. In: *Cognition* 44, S. 43–74.

- Geary, D. C./Hoard, M. K./Byrd-Craven, J./DeSoto, M. C. (2004): Strategy Choices in Simple and Complex Addition: Contributions of Working Memory and Counting Knowledge for Children With Mathematical Disability. In: *Journal of Experimental Child Psychology* 88, S. 121–151.
- Gelman, R./Gallistel, C. R. (1978): *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gerster, H.-D. (2003): Schwierigkeiten beim Erwerb arithmetischer Konzepte im Anfangsunterricht. In: Lenart, F./Holzer, N./Schaupp, H. (Hrsg.): *Rechenschwäche, Rechenstörung, Dyskalkulie – Erkennung, Prävention, Förderung*. Graz: Leykam, S. 154–160.
- Gerster, H.-D. (2013): Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In: Aster, M. G. v./Lorenz, J. H. (Hrsg.): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*, 2. überarb. und erw. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 195–229.
- Häsel-Weide, U. (2016): *Vom Zählen zum Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer.
- Izard, V./Pica, P./Spelke, E. S./Dehaene, S. (2008): Exact Equality and Successor Function: Two Key Concepts on the Path Towards Understanding Exact Numbers. In: *Philosophical Psychology* 21, S. 491–505.
- Jordan, N. C./Hanich, L. B./Kaplan, D. (2003): Arithmetic Fact Mastery in Young Children: A Longitudinal Investigation. In: *Journal of Experimental Child Psychology* 85, S. 103–119.
- Jordan, N. C./Kaplan, D./Ramineni, C./Locuniak, M. N. (2008): Development of Number Combination Skill in the Early School Years: When Do Fingers Help? In: *Developmental Science* 11, S. 662–668.
- Kaufmann, L./Wood, G./Rubinsten, O./Henik, A. (2011): Meta-analyses of Developmental fMRI Studies Investigating Typical and Atypical Trajectories of Number Processing and Calculation. In: *Developmental Neuropsychology* 36, 763–787.
- KMK – Kultusministerkonferenz (2007): Grundsätze zur Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten im Lesen und Rechtschreiben oder im Rechnen. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04. 12. 2003 i. d. F. vom 15. 11. 2007.
- Kohn, J./Wyschkon, A./Esser, G. (2013): Psychische Auffälligkeiten bei Umschriebenen Entwicklungsstörungen: Gibt es Unterschiede zwischen Lese-Rechtschreib- und Rechenstörungen? In: *Lernen und Lernstörungen* 2, S. 7–20.
- Krajewski, K./Schneider, W. (2009): Exploring the Impact of Phonological Awareness, Visual-spatial Working Memory, and Preschool Quantity-number Competencies on Mathematics Achievement in Elementary School: Findings From a 3-year Longitudinal Study. In: *Journal of Experimental Child Psychology* 103, S. 516–531.
- Kuhn, J.-T./Ise, E./Raddatz, J./Schwenk, C./Dobel, C. (im Druck): Basic Numerical Processing, Calculation, and Working Memory in Children With Dyscalculia and/or ADHD Symptoms. In: *Zeitschrift für Kinder- und Jugendpsychiatrie und Psychotherapie*.
- Lambert, K. (2015): *Rechenschwäche: Grundlagen, Diagnostik und Förderung*. Göttingen: Hogrefe.
- Landerl, K./Fussenegger, B./Moll, K./Willburger, E. (2009). Dyslexia and Dyscalculia: Two Learning Disorders With Different Cognitive Profiles. In: *Journal of Experimental Child Psychology* 103, S. 309–324.
- Le Corre, M./Carey, S. (2007): One, Two, Three, Four, Nothing More: An Investigation of the Conceptual Sources of the Verbal Counting Principles. In: *Cognition* 105, S. 395–438.
- Lourenco, S. F./Longo, M. R. (2010): General Magnitude Representation in Human Infants. In: *Psychological Science* 21, S. 873–881.
- Ma, X. (1999): A Meta-analysis of the Relationship Between Anxiety Towards Mathematics and Achievement in Mathematics. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 30, S. 520–540.
- Mazzocco, M. M./Räsänen, P. (2013): Contributions of Longitudinal Studies to Evolving Definitions and Knowledge of Developmental Dyscalculia. In: *Trends in Neuroscience and Education* 2, S. 65–73.

- Moll, K./Göbel, S. M./Snowling, M. J. (2015): Basic Number Processing in Children With Specific Learning Disorders: Comorbidity of Reading and Mathematics Disorders. In: *Child Neuropsychology* 21, S. 399–417.
- Moll, K./Kunze, S./Neuhoff, N./Bruder, J./Schulte-Körne, G. (2014): Specific Learning Disorder: Prevalence and Gender Differences. *Plos ONE*, 9, e103537.
- Moser Opitz, E. (2008): Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. 3. Aufl. Bern: Haupt.
- Mulligan, J. (2011): Towards Understanding the Origins of Children's Difficulties in Mathematics Learning. In: *Australasian Journal of Learning Difficulties* 16, S. 19–39.
- Murphy, M. M./Mazzocco, M. M./Hanich, L. B./Early, M. C. (2007): Cognitive Characteristics of Children With Mathematics Learning Disability (MLD) Vary as a Function of the Cutoff Criterion Used to Define MLD. In: *Journal of Learning Disabilities* 40, S. 458–478.
- Ostad, S. A. (1997): Developmental Differences in Addition Strategies: A Comparison of Mathematically Disabled and Mathematically Normal Children. In: *British Journal of Educational Psychology* 67, S. 345–357.
- Parsons, S./Bynner, J. (2005): *Does Numeracy Matter More?* London: National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy.
- Peng, P./Fuchs, D. (2016): A Meta-analysis of Working Memory Deficits in Children With Learning Difficulties: Is There a Difference Between Verbal Domain and Numerical Domain? In: *Journal of Learning Disabilities* 49, S. 3–20.
- Piazza, M./Facoetti, A./Trussardi, A. N./Berteletti, I./Conte, S./Lucangeli, D./Zorzi, M. (2010): Developmental Trajectory of Number Acuity Reveals a Severe Impairment in Developmental Dyscalculia. In: *Cognition* 116, S. 33–41.
- Qin, S./Cho, S./Chen, T./Rosenberg-Lee, M./Geary, D. C./Menon, V. (2014): Hippocampal-neocortical Functional Reorganization Underlies Children's Cognitive Development. In: *Nature Neuroscience* 17, S. 1263–1269.
- Reeve, R./Reynolds, F./Humberstone, J./Butterworth, B. (2012): Stability and Change in Markers of Core Numerical Competencies. In: *Journal of Experimental Psychology: General* 141, S. 649–666.
- Resnick, L. B. (1992): From Protoquantities to Operators: Building Mathematical Competence on a Foundation of Everyday Knowledge. In: Leinhardt, G./Putnam, R./Hatrup, R. A. (Hrsg.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, S. 373–429.
- Ritchie, S. J./Bates, T. C. (2013). Enduring Links From Childhood Mathematics and Reading Achievement to Adult Socioeconomic Status. In: *Psychological Science* 24, S. 1301–1308.
- Rivera, S. M./Reiss, A. L./Eckert, M. A./Menon, V. (2005): Developmental Changes in Mental Arithmetic: Evidence for Increased Functional Specialization in the Left Inferior Parietal Cortex. In: *Cerebral Cortex* 15, S. 1779–1790.
- Rotzer, S./Kucian, K./Martin, E./Aster, M. v./Klaver, P./Loenneker, T. (2008): Optimized Voxel-based Morphometry in Children With Developmental Dyscalculia. In: *NeuroImage* 39, S. 417–422.
- Rousselle, L./Noël, M. (2007): Basic Numerical Skills in Children With Mathematics Learning Disabilities: a Comparison of Symbolic vs. Non-symbolic Number Magnitude Processing. In: *Cognition* 102, S. 361–395.
- Sarnecka, B. W./Goldman, M. C./Slusser, E. B. (2015): How Counting Leads To Children's First Representations of Exact, Large Numbers. In: Cohen Cadosh, R./Dowker, A. (Hrsg.): *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford: Oxford University Press, S. 291–309.
- Sasanguie, D./Göbel, S. M./Moll, K./Smets, K./Reynvoet, B. (2013): Approximate Number Sense, Symbolic Number Processing or Number-space Mappings: What Underlies Mathematics Achievement? In: *Journal of Experimental Child Psychology* 114, S. 418–431.
- Schleifer, P./Landerl, K. (2011): Subitizing and Counting in Typical and Atypical Development. In: *Developmental Science* 14, S. 280–291.

- Starkey, P./Cooper, R. G. (1980): Perception of Numbers by Human Infants. In: *Science* 210, S. 1033–1035.
- Swanson, H. L./Alloway, T. P. (2012): Working Memory, Learning and Academic Achievement. In: Harris, K. R./Graham, S./Urdan, T. C./McCormick, C. B./Sinatra, G. M./Sweller, J. (Hrsg.): *APA Educational Psychology Handbook, Vol. 1: Theories, Constructs, and Critical Issues*. Washington, DC: American Psychological Association, S. 327–366.
- Swanson, H. L./Jerman, O. (2006): Math Disabilities: A Sselective Meta-analysis of the Literature. In: *Review of Educational Research* 76, S. 249–274.
- Toll, S. M./Viersen, S. v./Kroesbergen, E. H./Luit, J. H. v. (2015): The Development of (Non-)symbolic Comparison Skills Throughout Kindergarten and Their Relations With Basic Mathematical Skills. In: *Learning and Individual Differences* 38, S. 10–17.
- Tosto, M. G./Momi, S. K./Asherson, P./Malki, K. (2015): A Systematic Review of Attention Deficit Hyperactivity Disorder (ADHD) and Mathematical Ability: Current Findings and Future Implications. In: *BMC Medicine* 13, S. 204.
- van der Ven, S. H. G./Boom, J./Kroesbergen, E. H./Leseman, P. P. M. (2012): Microgenetic Patterns of Children's Multiplication Learning: Confirming the Overlapping Waves Model by Latent Growth Modeling. In: *Journal of Experimental Child Psychology* 113, S. 1–19.
- Wartha, S./Schulz, A. (2011): Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Kiel: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik.
- Willcutt, E. G./Petrill, S. A./Wu, S./Boada, R./DeFries, J. C./Olson, R. K./Pennington, B. F. (2013): Comorbidity Between Reading Disability and Math Disability: Concurrent Psychopathology, Functional Impairment and Neuropsychological Functioning. In: *Journal of Learning Disabilities* 46, S. 500–516.
- WHO – World Health Organization (2005): ICD: Classification of mental and behavioural disorders: Clinical descriptions and diagnostic guidelines. 10., überarb. Aufl. Genf, Schweiz: Author.
- Wynn, K. (1992): Children's Acquisition of Number Words and the Counting System. In: *Cognitive Psychology* 24, S. 220–251.



# **Entwicklung des Zahlenverständnisses aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven**

*Helga Krinzinger*

## **Entwicklung des Zahlenverständnisses aus neurokognitiver Sicht**

### **Debatte um die Rolle von Bildgebungsstudien für die Pädagogik**

In den letzten Jahren entstand eine intensive Debatte über die mögliche Bedeutung der Neurowissenschaften für die Gestaltung von Lehren und Lernen. Dies wurde möglich durch bedeutende technische Fortschritte hinsichtlich bildgebender Verfahren, mit denen sich die Struktur des Gehirns sowie dessen Funktionen bei der Informationsverarbeitung nicht-invasiv abbilden lassen. Die Diskussion wurde sicherlich auch teilweise durch internationale Schulleistungsvergleichsstudien wie z. B. die PISA-Studie motiviert, welche belegten, dass Deutschlands Schüler/innen trotz hoher Kosten im Bildungswesen nicht zu den Besten gehören (Baumert 2001).

Dies hat die Forderung lauter werden lassen, Schulreformdebatten weniger ideologisch zu untermauern, sondern stärker auf Grundlage empirisch gewonnener Erkenntnisse zu führen. Ob und inwieweit die bunten Bilder vom lernenden Gehirn dies ermöglichen, wird allerdings kontrovers diskutiert. Auf der einen Seite betonen manche Gehirnforschende mit Nachdruck, wie unerlässlich ein am Gehirn orientiertes schulisches Lehren ist, um die kognitiven Kapazitäten der Schüler bestmöglich zu fördern (z. B. Spitzer 2004).

Im Gegenzug betonen Lehr-Lern-Forschende, dass die Neurowissenschaften prinzipiell viel zu allgemein ausgerichtet sind, um Lehrenden überhaupt konkrete Anleitungen zu Lerngelegenheiten geben zu können (z. B. Schumacher/Stern 2012) und fürchten insbesondere, dass Theorien zur Verbesserung schulischen Lernens der psychologischen Lehr- und Lernforschung ignoriert werden (Stern 2005).

Im Jahr 2009 wurden im Zuge dieser Debatte von Vertretenden der Neurowissenschaften und Erziehungswissenschaften Gefahren, Grenzen, Möglichkeiten und notwendige Voraussetzungen der im Entstehen begriffenen neuen Disziplin »educational neuroscience« (in etwa bildungsbezogene Neurowissenschaften oder Neurodidaktik, Goswami 2004) bzw. »mind, brain and education« (Geist, Gehirn und Bildung) in einem Diskussionsforum der renommierten neurowissenschaftlichen Zeitschrift *Cortex* (Band 45) aufgezeigt. Danach sei die größte Gefahr, dass Ergebnisse der Neurowissenschaften übergeneralisiert und vereinfacht werden und als sogenannte Neuromythen die Unterrichtsmethoden von Lehrenden beeinflussen (Christodoulou/Gaab 2009). Dazu zählen die Annahme verschiedener Lernstile (visuell, auditiv oder

kinästhetisch) oder einer rechts- vs. linkshemisphärischen Dominanz bei Verarbeitungsstrategien. Ein Beispiel für einen immer noch einflussreichen Neuromythos ist die Kinesiologie, welche im englischen Sprachraum auch als Brain Gym® vermarktet wird und entwickelt wurde, um die Aktivierung der beiden Hirnhemisphären auszubalancieren und zu integrieren und somit den Lernprozess zu fördern (Howard-Jones 2009). Positive Effekte der Kinesiologie auf das Lernen konnten bisher in keiner wissenschaftlichen Studie gezeigt werden, trotzdem ist ihre Popularität bei Lehrenden seit Jahrzehnten ungebrochen. Wie kommt es, dass sich derartige Annahmen im Schulbereich behaupten, während die aktuelle neurowissenschaftliche Befundlage offensichtlich kaum wahrgenommen wird? Die universitären Lehramtsstudiengänge sowie auch die weitere Lehrerbildung sehen bislang kaum Veranstaltungen vor, in denen sich angehende Lehrkräfte mit entsprechendem neurowissenschaftlichem Wissen auseinandersetzen können. Bei Fachtagungen und Lehrerfortbildungen referieren selten Neurowissenschaftler, die zu dem jeweiligen Thema forschen und damit klar umrissene, wissenschaftlich fundierte Erkenntnisse vorstellen könnten. Gleichzeitig finden wissenschaftlich umstrittene Konzepte mancherorts sogar Unterstützung durch staatliche Schulbehörden und Eingang in die Lehrerbildung (z. B. Beigel et al. 2005). Bereits 2005 wurde in der Zeitschrift *Nature* diskutiert, dass politische Hürden generell oft die Umsetzung evidenzbasierter (und vor allem auf neurowissenschaftlicher Evidenz basierender) Unterrichtsempfehlungen verhindern oder zumindest aufhalten (Gura 2005).

Um die Ausbreitung solcher Neuromythen in Zukunft zu vermeiden, braucht es einen interdisziplinären Dialog zwischen Neurowissenschaften, Erziehenden und Eltern sowie eine verantwortungsbewusste Mediendarstellung von Forschungsergebnissen (Howard-Jones 2009). Ein solcher Dialog und vor allem auch eine interdisziplinäre Zusammenarbeit stößt jedoch naturgemäß an Grenzen (Willingham 2009): So ist es z. B. für die Neurowissenschaften teilweise unmöglich, Antworten auf bestimmte Ziele der Didaktik (z. B. Moral, Gruppendynamik in der Klasse) zu liefern.

Generell ist es überraschend, welche starken Emotionen bei der Diskussion dieses Themas häufig aufkommen. Aussagen über unser Gehirn scheinen generell als wichtiger und relevanter gewertet zu werden als Aussagen über die meisten anderen Aspekte unseres Lebens. Eine Studie konnte zeigen, dass sowohl Laien als auch Studenten auf dem Gebiet der Neurowissenschaften schlechte Erklärungen von psychologischen Phänomenen nicht als solche erkannten, sobald eine völlig irrelevante Information über Gehirnfunktionen hinzugefügt wurde (Weisberg et al. 2008). Nur Experten ließen sich dadurch nicht nur nicht irreführen, sondern bewerteten solche schlechten Erklärungen mit zusätzlicher irrelevanter neurowissenschaftlicher Information als besonders unbefriedigend.

Innerhalb der Neurowissenschaften selbst gibt es jedoch einige (vor allem technische und methodische) Schwierigkeiten, die ihre Aussagekraft beschränken (Szucs/Goswami 2007). So liefert z. B. das Elektroenzephalogramm (EEG) eine gute zeitliche Auflösung, jedoch nur eine sehr schlechte räumliche Auflösung neuronaler Prozesse,

wohingegen bildgebende Verfahren eine relativ gute (im Millimeterbereich befindliche) räumliche Auflösung, jedoch nur eine im Sekundenbereich liegende zeitliche Auflösung bieten können.

Eine weitere Schwierigkeit für den Dialog zwischen den beiden Disziplinen stellt dar, dass die Analyseebenen unterschiedlich sind. Während sich die Neurowissenschaften auf der Ebene von kognitiven Funktionen und deren Beziehung zu bestimmten Gehirnarealen bewegen, ist für die Erziehungswissenschaften das einzelne Kind die niedrigste Analyseebene, wobei höhere Ebenen wie Klassenzimmer, Schule, soziales Umfeld und Länder mit einbezogen werden (Anderson/Reid 2009).

So ist hinlänglich bekannt, dass Wiederholung das Lernen verbessert – Lehrende müssen jedoch auch den Einfluss ständigen Wiederholens auf die Motivation miteinbeziehen (Willingham 2009). Damit wird klar, dass sehr wenige neurowissenschaftliche Erkenntnisse direkt in einem erzieherischen Kontext anwendbar sind. Auch wenn dies der Fall wäre, müssten diese erst gründlich im erzieherischen Kontext überprüft werden, bevor tatsächlich von einer Anwendbarkeit für die Erziehungswissenschaften ausgegangen werden kann (Coch/Ansari 2009).

Doch welche Möglichkeiten bestehen tatsächlich, durch die Neurowissenschaften anwendbares Wissen für die Erziehungswissenschaften zu generieren? Mittlerweile besteht innerhalb der Neurodidaktik weitgehend Konsens, dass das Ziel dieser neuen Disziplin weniger das Hervorbringen neuer Lehrmethoden, als eine Möglichkeit zum tieferen Verständnis von Lernprozessen und Lernstörungen ist. Sie soll als Argumentations- und Entscheidungsgrundlage für bestimmte Lehrmethoden, erziehungswissenschaftliche Theorien und didaktische Prinzipien verwendet werden (Christodoulou/Gaab 2009; Goswami 2006).

Eine der wichtigsten Rollen der Neurowissenschaften innerhalb der Pädagogik und der Kognitionswissenschaften besteht darin, Evidenzen für oder gegen Modelle und Theorien zu liefern zwischen denen aufgrund rein behavioraler Daten nicht entschieden werden kann (Willingham/Lloyd 2007). So bekräftigten z. B. in der Debatte um ein eher phonologisches oder visuell-perzeptives Grunddefizit der Lese-Rechtsschreib-Störung (LRS) erste neurowissenschaftliche Ergebnisse die phonologische Theorie (Willingham 2009).

In einer aktuellen Meta-Analyse (Richlan et al. 2011) mit sehr sorgfältiger Trennung zwischen Studien mit betroffenen Kindern und Erwachsenen konnte jedoch eine Unteraktivierung jenes Gehirnareals, in welchem Laute und Buchstaben verknüpft werden (Graphem-Phonem-Korrespondenz: Gyrus angularis in jenem Bereich des Parietal- bzw. Scheitellappens, welcher an den Temporal- bzw. Schläfenlappen angrenzt), nicht wie erwartet schon bei Kindern sondern erst bei Erwachsenen nachgewiesen werden. Bei sehr jungen Kindern wurde allerdings eine unerwartete Unteraktivierung jenes Areals im Übergangsbereich zwischen Okzipitallappen (bzw. Hinterhauptslappen) und Temporallappen gefunden, in welchem Buchstaben und ganzheitlich lesbare Wörter identifiziert werden (»visual word form area«). Daraus folgernd postulierte Richlan (2012) nun ein frühes, noch geringes occipito-temporales Defizit, welches eher mit automatisierter Wortverarbeitung in Zusammenhang

gebracht wird, sich im Verlauf ausweitet und erst später von einem linksseitigen temporo-parietalen Defizit begleitet wird.

Diese Befunde des bereits früh bestehenden occipito-temporalen Defizits könnten eine Erklärung dafür darstellen, warum ein rein phonologisches Training nicht die Lesegeschwindigkeit verbessert (Eden/Moats 2002), was durch reine Verhaltensstudien bisher nicht erklärt werden konnte. Es soll also generell in der Neurodidaktik eher um das *warum* und *wie* bestehender Erziehungspraktiken als um die Erschaffung neuer Methoden gehen (Christodoulou/Gaab 2009). Eine weitere Möglichkeit besteht zudem darin, im interdisziplinären Dialog durch das Stellen neuer Fragen die Grenzen unseres Wissens zu erweitern (Christodoulou/Gaab 2009) und bestehende Hypothesen zu verfeinern (Coch/Ansari 2009).

Ein Beispiel für die Verfeinerung von Hypothesen durch neurowissenschaftliche Ergebnisse, welche potenzielle Implikationen für die pädagogische Praxis haben könnten, gibt es auch aus der Erforschung der Zahlenverarbeitung. Sowohl Verhaltensstudien als auch bildgebende Studien haben bisher Hinweise für einen funktionellen Zusammenhang zwischen Fingerzählen und Rechnen erbracht (Kaufmann et al. 2008), wobei bisher ungeklärt ist, ob es sich dabei eher um einen förderlichen Zusammenhang handelt (wie von den meisten neurokognitiven Forschern angenommen, s. Kaufmann 2008) oder ob (wie oft von Lehrenden angenommen) das Fingerzählen die Abstrahierung von konkreten Mengen zu abstrakten Zahlen sogar behindert (s. Moeller/Nuerk 2012 für eine Zusammenfassung dieser Debatte).

Noch unklarer ist in diesem Zusammenhang, welchen Aspekten des Fingerzählens (Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Fingern und Mengen, zusätzliche somatosensorische Wahrnehmung, Symbolcharakter von Fingerkonfigurationen) dabei die wichtigste Rolle zukommt. In einer Bildgebungsstudie mit Schulkindern zwischen sechs und zehn Jahren wurde ein gesamtes Netzwerk von Arealen entdeckt, welches während nicht-symbolischer, exakter Addition spezifische finger-relatierte Aktivierung zeigte (Krinzinger et al. 2011). Besonders hervorzuheben war in diesem Zusammenhang jedoch eine unerwartete spezifisch finger-relatierte Aktivierung in einem prämotorischen Areal, welches für die Verarbeitung von Punktmengen und nicht von Zahlen aktiviert war. Es wurde als zuständig für die symbolhafte Verarbeitung von Fingerkonfigurationen interpretiert (Di Luca et al. 2010), eventuell das »missing link« zwischen der ungenauen Verarbeitung von Punktmengen und der exakten Mengenverarbeitung mit arabischen Zahlen (Krinzinger et al. 2011). Um diese Hypothese zu überprüfen, werden derzeit in unserer Arbeitsgruppe die Ergebnisse einer längsschnittlichen Verhaltensstudie bei Kindern von der Einschulung bis zur zweiten Klasse ausgewertet.

Gerade jene Neurowissenschaftler/innen, die sich für pädagogische Fragen interessieren, sind jedoch häufig diejenigen, die versuchen die engen methodischen Grenzen ihres Faches zu sprengen oder zumindest auszudehnen, um die Aussagekraft ihrer Studien für die Lehr-Lern-Forschung zu erhöhen. Ein aktuelles Beispiel hierfür ist eine Studie, die Sesamstraßen-Videos verwendet hat, um die neuronalen Aktivierungsmuster bei der Zahlenverarbeitung zu untersuchen (Cantlon/Li 2013).

Im Feld der Neurowissenschaften ist die Verwendung solcher komplexen Stimuli, bei denen sehr viele Aspekte nicht gut kontrollierbar sind (z. B. genauer visueller und akustischer Input, Blickbewegungen der Kinder), als ausgesprochen mutig und innovativ zu werten.

Eine weitere Verbindungsstelle zwischen Neurowissenschaften und Pädagogik könnten eventuell Biomarker (z. B. ereignisrelatierte Potentiale im EEG) darstellen. Diese könnten vor jeder möglichen systematischen Verhaltensuntersuchung Risikokinder für Aufmerksamkeits- und Lernstörungen identifizieren (Goswami 2009). Bisher ist ein bekanntes genetisches Risiko durch betroffene Eltern bzw. Geschwister noch der beste Prädiktor für die Entwicklung einer solchen Störung. Alle bisherigen neurokognitiven und neurophysiologischen Prädiktoren gemeinsam scheinen für die Vorhersage der Entwicklung einer LRS derzeit nicht besser zu sein als die einfache Frage nach einer familiären Belastung (Schulte-Körne et al. 2007).

Auch für die Entwicklung einer Rechenstörung gibt es eine hohe genetische Komponente (Kovas et al. 2007), bisher wurden allerdings noch keine eindeutigen behavioralen oder neurokognitiven Risikofaktoren dafür gefunden. Man könnte aus diesen Befunden ableiten, dass durch individualisierte Frühförderprogramme mit hoher Wahrscheinlichkeit viele später betroffene Kinder übersehen würden. Besser wäre wohl der flächendeckende Einsatz von evidenzbasierten Gruppenfrühförderprogrammen, wie es in vielen deutschen Bundesländern für die Vorläuferfertigkeiten des Lesens schon längst der Fall ist.

Im Folgenden werden wir nun jedoch versuchen, relevante neurowissenschaftliche Befunde und deren mögliche Implikationen für die pädagogische Praxis hinsichtlich des Rechnerwerbs zusammenzufassen. Dabei handelt es sich hier nicht um eine systematische Übersichtsarbeit, sondern um eine selektive Darstellung von neurowissenschaftlichen Befunden im Kindesalter, die für schulisches Lernen besonders relevant erscheinen.

## **Die evolutionären Grundlagen von Zahlenverarbeitung und Rechnen**

Lesen und Rechnen haben als Kulturfähigkeiten gemeinsam, dass die Evolution keine Zeit hatte, Gehirnareale auszubilden, die sich ausschließlich auf die dafür notwendigen kognitiven Prozesse spezialisiert hätten. Sowohl für das Lesen als auch für das Rechnen trägt es also zu einem tieferen Verständnis der beteiligten kognitiven Prozesse bei, wenn man um die generellen Funktionen der Gehirnareale weiß, welche kulturübergreifend bei allen Menschen dem Lesen bzw. Rechnen zugrunde liegen. Um diese auf den ersten Blick paradoxe Homogenität funktioneller Neuroanatomie zu erklären, wurde u. a. die Theorie eines »cultural recycling« entwickelt (Dehaene/Cohen 2007).

Dieser Theorie zufolge übernahmen kulturell entstandene Fähigkeiten bereits bestehende Gehirnareale, weshalb sie durch die Einschränkungen und Charakteristika der Funktionsweisen dieser speziellen Gehirnareale geprägt wurden. Damit dieses

»cultural recycling« überhaupt möglich ist, müssen die neuen Fähigkeiten innerhalb der funktionellen Neuroanatomie Nischen finden, welche der gewünschten Funktion bereits ähnlich genug sind und eine gewissen Plastizität aufweisen, um neue Funktionen mit übernehmen zu können. Die Ähnlichkeit zur Vorläuferfähigkeit sollte somit typische Schwierigkeiten im Erwerb erklären. Ein Beispiel dafür ist das altbekannte Problem der Differenzierung von Buchstaben, welche rotiert oder spiegelbildlich aus denselben Elementen zusammengesetzt sind (z. B. b, d, q, p).

Das Areal zur Buchstabenerkennung liegt unmittelbar neben demjenigen zur Objekterkennung im Übergangsbereich zwischen Okzipital- und Temporallappen (s. Kapitel »Debatte um die Rolle von Bildgebungsstudien für die Pädagogik), hat sich aller Wahrscheinlichkeit nach daraus entwickelt und besitzt deshalb auch grundlegende Eigenschaften dieses Areals, welche sich aufgrund eines evolutionären Vorteils entwickelt haben. Im Falle des Objekterkennungsareals ist es das Wiedererkennen eines Objektes in jeglicher Position und Lage – was gleichbedeutend ist mit dem Ignorieren von Rotation und Spiegelung (Dehaene/Cohen 2007).

Für die Zahlenverarbeitung und das Rechnen haben zahlreiche Bildgebungsstudien aus allen Kulturen bisher gezeigt, dass ein Areal im sogenannten intraparietalen Sulcus (IPS: jene Furche, die sich mitten durch den Paritallappen bzw. Scheitellappen zieht) immer aktiv ist, wenn Menschen arabische Zahlen, Punktmengen oder andere Darstellungsformen von Mengen (römische Zahlen, Würfelmuster, Zahlwörter, akustische Abfolgen von Tönen ...) vergleichen, manipulieren oder auch nur sehen. Leichte kulturelle Unterschiede lassen sich durch bevorzugte Darstellungsformen von Zahlen erklären, so z. B. stärkere zusätzliche Aktivierung motorischer Areale bei Chinesen, welche in ihrer Schullaufbahn die Verwendung des Abakus automatisieren.

Das Areal innerhalb des intraparietal Sulcus, welches bei Menschen auf der ganzen Welt für die Verarbeitung von Zahlen und somit auch für das Rechnen verwendet wird, liegt inmitten von Arealen, welche für Greifen, Zeigen, räumliche Ausrichtung von Aufmerksamkeit, Blickbewegungssteuerung und Bildung von Assoziationen zuständig sind (Dehaene/Cohen 2007). Es gehört zum sogenannten dorsalen Strom, welchen man sich als Datenverarbeitungsautobahn im Gehirn vorstellen kann, der die visuellen Informationen hinsichtlich ihrer relevanten räumlichen Aspekte für unsere Aktionen in der Außenwelt verarbeitet. Im dorsalen Strom werden somit Lage, Entfernung, Größe, Abstände etc. von Objekten bestimmt und verglichen, um sich wie bei Nahrung auf sie zuzubewegen und sie zu greifen oder wie bei einer Gruppe von Feinden vor ihnen fliehen zu können.

Aus diesen neuroanatomischen Erkenntnissen lässt sich schließen, dass Zahlen zwar eine amodale kulturelle Erfindung sind, um Mengen exakt bestimmen und manipulieren zu können, sie jedoch tief im Handeln in der Welt verwurzelt und somit keineswegs *abstrakt* (im Gegensatz zu gegenständlich) im Gehirn verarbeitet werden. Zahlen stellen somit ein Beispiel von »embodied cognition« dar (Wilson 2002), also der Prägung unserer kognitiven Fähigkeiten durch ihre ursprüngliche Ausführung an Objekten und mithilfe unseres Körpers (wie der Finger: s. S. 35), auch nachdem diese schon lange durch rein mentale Prozesse möglich sind.

Die neurokognitive Forschung verdeutlicht die Wichtigkeit der Verknüpfung von Zahlen mit konkreten Mengen in der Erwerbsphase, bis die Bedeutung von Zahlen automatisiert ist. Die Entstehung der Zahlen aus der Mengenverarbeitung erklärt auch, warum ein Unterschied zwischen zwei kleinen Zahlen bzw. Mengen viel deutlicher wahrgenommen wird als derselbe Unterschied bei großen Zahlen bzw. Mengen. So werten wir den Preisunterschied von einem Euro beim Preisvergleich von zwei Schokoladetafeln als wesentlich bedeutsamer als beim Preisvergleich von zwei Autos, obwohl es sich um dieselbe Geldsumme handelt.

## **Neurowissenschaftliche Befunde zur typischen Entwicklung von Kognition**

Um die Entwicklung der neuronalen Korrelate des Rechenerwerbs zu verstehen, muss man einige generelle Prinzipien der Gehirnentwicklung kennen. Eines der wichtigsten ist die Tatsache, dass sich die Gehirnaktivierung bei allen kognitiven Fähigkeiten von der frühen zur späten Kindheit und weiter ins Erwachsenenalter von einem sehr diffusen Netzwerk hin zu fokaleren Aktivierungsmustern entwickelt (Durstun/Casey 2005). Das bedeutet, dass sich die meisten Gehirnareale für höhere kognitive Funktionen erst im Laufe der Entwicklung spezialisieren bzw. dass ein jüngeres Kind für dieselbe wesentlich mehr Areale seines Gehirns verwenden muss, bis sich dort eine gewisse Arbeitsteilung etabliert hat.

Diese ressourcenschonende Arbeitsteilung wird durch ein weiteres Grundprinzip der Funktion unseres Gehirns möglich, welches bereits Ende der 1940er Jahre mithilfe neuronaler Netzwerkmodelle durch den Kognitionswissenschaftler Hebb entdeckt wurde (Hebb 1949). Er erkannte, dass die Plastizität (also Veränderbarkeit) der Neuronenverbindungen in unserem Gehirn durch den Grundsatz »what fires together, wires together« erklärbar ist. Dies bedeutet, dass jede gemeinsame Aktivierung von zwei Neuronen (bzw. auf einer höheren Ebene von zwei Gehirnarealen) dazu führt, dass die physiologische Verbindung dieser beiden Neurone (bzw. Areale) gestärkt wird.

Dieses Phänomen erklärt, wie sich aus anfänglich eher chaotischen und sehr unökonomischen großen funktionellen Netzwerken im Gehirn nach und nach kleinere, spezialisierte funktionelle Netzwerke entwickeln können. Es betont implizit auch die Rolle der Umwelt bzw. des »learning by doing«, da Verbindungen erst durch ihre (durch Erleben oder Handeln erzeugte) Aktivierung gebildet oder gestärkt werden können. Und vor allem zeigt es die Wichtigkeit des fehlerfreien Lernens vor allem bei der Automatisierung (z. B. beim Auswendiglernen des Einmaleins), da jede falsche Assoziation (z. B. jedes falsch genannte Rechenergebnis) sich physiologisch in einer Stärkung dieser Verbindung niederschlägt.

Diese Erkenntnisse haben allgemeine Relevanz für die Gestaltung von Lernprozessen. Sie betonen die Wichtigkeit von Wiederholung von Gelerntem auch nach längerer Zeit, da nicht genutzte Verbindungen auch wieder abgebaut werden. Und es

lässt sich daraus ableiten, dass beim Automatisieren bzw. Auswendiglernen (z. B. von Englischvokabeln oder eben dem Einmaleins) die effektivste Methode ist, nicht nur die altbekannten Karteikarten zu verwenden. Man sollte dabei auch beachten, sie sofort umzudrehen und sich die richtige Lösung anzusehen, wenn man sich nicht absolut sicher ist, da jede Nennung einer falschen Lösung die Wahrscheinlichkeit erhöht, sich diese falsche Nennung einzuprägen. Für das Erlernen von Musikstücken kennen die meisten dieses Prinzip, und es gilt genauso für kognitives wie für motorisches Lernen (Geake/Cooper 2003).

Ein drittes Prinzip der Gehirnentwicklung ist, dass sich die funktionalen Netzwerke normalerweise in ihrer Lokalisierung während der Entwicklung von vorne nach hinten verschieben. Ursächlich hierfür ist, dass vorne in unserem Gehirn (Frontal- oder Stirnlappen) jene Funktionen zu finden sind, welche allgemein für unsere Handlungssteuerung und Selbstkontrolle zuständig sind (sogenannte Exekutivfunktionen). Diese Funktionen haben sich im Laufe der Evolution als letztes entwickelt, wodurch unser Gehirn vor allem im Stirnbereich an Volumen zugenommen hat, und entwickeln sich auch bei jedem einzelnen Menschen als Letztes, nämlich bis ins frühe Erwachsenenalter hinein (Casey et al. 2005).

Zu diesen Funktionen gehören die Aufmerksamkeitssteuerung, das Arbeitsgedächtnis und das Fehlermonitoring, jedoch auch höhere kognitive Funktionen wie Motivationssteuerung, Strategiewahl und Metakognition (Anderson 2002). Die Tatsache, dass die neuronalen Korrelate dieser Fähigkeiten sich relativ spät entwickeln und bis ins späte Teenageralter oder sogar die frühen 20er Jahre reifen, erklärt, warum Grundschüler mit der Verwendung von Lernstrategien (außer der Wiederholung) oft noch überfordert sind oder auch, warum kleine Kinder so große Schwierigkeiten damit haben, auf etwas zu warten.

Die Verlagerung der Gehirnaktivierung von vorne hin zu weiter hinten gelegenen Arealen während des Erwerbs von Fähigkeiten scheint dieser allgemeinen Entwicklung auf den ersten Blick zu widersprechen. Dies ist aber nur der Fall, weil es in dem einen Fall um die Entwicklung von Gehirnarealen und deren Funktion im Allgemeinen geht, wobei die frontalen Areale als letztes reifen, und im anderen Fall um die relative Aktivierung verschiedener Areale bzw. Verwendung verschiedener Funktionen für die Ausführung von bestimmten Fähigkeiten.

Jeder von uns kennt die Tatsache, dass man beim Erlernen neuer Fähigkeiten zuerst wesentlich mehr allgemeine kognitive Ressourcen (Aufmerksamkeit, Fehlermonitoring, Arbeitsgedächtnis etc.) aufwenden muss als zu einem späteren Zeitpunkt, wenn die neue Fähigkeit bereits erlernt ist. Ein Beispiel dafür, dass diese Verschiebung von allgemeinen kognitiven Funktionen hin zu spezialisierten (im Falle der Zahlenverarbeitung und des Rechnens: vor allem der intraparietale Sulcus, s. S. 37) wesentlich länger dauert als angenommen, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Zuletzt soll an dieser Stelle jedoch noch eine weitere neurowissenschaftliche Erkenntnis erwähnt werden, die zu einem erweiterten Grundverständnis von generellen Lernprozessen beitragen kann. Dabei handelt es sich um die Tatsache, dass Emotion und Kognition bei weitem nicht so stark voneinander zu trennen sind wie in der west-

lichen Welt seit Jahrhunderten angenommen. Es konnte im Gegenteil in den letzten Jahren gezeigt werden, dass das Belohnungsnetzwerks des Gehirns bzw. die Motivation eine weitaus tiefere Beteiligung an sämtlichen Lernvorgängen aufweist, als bis vor kurzem bekannt war (Munakata/Casey/Diamond 2004).

## **Neurowissenschaftliche Befunde zur typischen und atypischen Entwicklung von Zahlenverarbeitung und Rechnen**

Einen bislang eher vernachlässigten Bereich der Entwicklungsneuropsychologie stellt die Störung des Rechenerwerbs (Rechenstörung bzw. Dyskalkulie) dar. Der bisherige wissenschaftliche Konsens geht bei der Rechenstörung – analog zur LRS – von einem Grundlagendefizit aus (zum Grundlagendefizit der Rechenstörung s. Ise/Schulte-Körne 2013 für eine aktuelle Übersicht). Dieses Grundlagendefizit, welches in einer unreifen oder atypischen Größenvorstellung von Zahlen und Mengen besteht, führt bereits in einfachen Reaktionszeitaufgaben (z. B. Größenvergleich von Zahlen oder Punktmengen) zu abweichenden Mustern (z. B. größerer Distanzeffekt, s. Szucs/Goswami 2007).

Eine Metaanalyse (Kaufmann et al. 2011) zur neurofunktionellen Entwicklung von Größenverarbeitung und Rechnen konnte 19 bildgebende Studien mit aufnehmen und erzielte großteils ähnliche Ergebnisse für den Vergleich von typisch entwickelten Kindern mit Erwachsenen wie für dyskalkulische Kinder im Vergleich zu Kontrollkindern. Erstens gingen besser entwickelte Fähigkeiten mit stärkerer Aktivierung des intraparietalen Sulcus (IPS) einher, welcher bereits in zahlreichen Erwachsenenstudien als neuronales Korrelat für die Größenverarbeitung von Zahlen und Mengen gezeigt wurde (s. S. 37), was als entwicklungsbedingte Spezialisierung dieses Areals gesehen wird.

Zweitens wurden sowohl für Kinder im Vergleich mit Erwachsenen als auch für dyskalkulische im Vergleich zu normal entwickelten Kindern stärkere außer-parietale Aktivierungen gefunden, die trotz guter Performanz als Hinweis auf den Einsatz von Kompensationsstrategien (v. a. Einsatz von fingerbasierten Strategien: postzentraler Sulcus im Übergangsbereich zum IPS) und/oder einen höheren Einsatz von aufgabenunspezifischen kognitiven Kapazitäten (Aufmerksamkeit, Arbeitsgedächtnis, exekutive Funktionen: vor allem frontale Aktivierungen) gedeutet werden (Kaufmann et al. 2011). Diese Ergebnisse stehen, wie bereits beschrieben, im Einklang mit bildgebenden Studien aus anderen kognitiven Bereichen.

Es scheint somit innerhalb der Zahlenverarbeitung und des Rechnens der kognitive Aufwand selbst für einfache Aufgaben in der Erwerbsphase und über eine erste Automatisierung hinaus wesentlich höher zu sein, als es Verhaltensdaten vermuten lassen würden. So konnte z. B. auch in einer Trainingsstudie mit dyskalkulischen Kindern gezeigt werden, dass erwartete Veränderungen der IPS-Aktivierung nach einem Training der Größenverarbeitung von Zahlen erst einige Monate nach Abschluss des Trainings zu beobachten waren (Kucian et al. 2011). Es sprechen also

sowohl die neurokognitiven Ergebnisse von Studien zur typischen als auch zur atypischen Entwicklung von Zahlenverarbeitung und Rechnen für die wichtige Rolle von Konsolidierungsprozessen.

Eine Überblicksarbeit zu neurokognitiven Trainingsstudien (Zamarian et al. 2009) zeigte außerdem eine weitere Spezialisierung innerhalb des Parietallappens auf. Mit der Zunahme von Faktenabruf und der Abnahme von prozeduralen Strategien wechselt die Gehirnaktivierung vom für die Größenverarbeitung zuständigen intraparietalen Sulcus hin zum für Assoziationen zuständigen Gyrus angularis. Auch eine aktuelle Bildgebungsstudie (Price/Mazzocco/Ansari 2013) zeigte, dass bei älteren Schüler/innen jene mit den besten Mathematiknoten eine stärkere Aktivierung des Gyrus angularis und eine weniger starke Aktivierung des intraparietalen Sulcus zeigten.

Bei Grundschulkindern konnten aktuelle Studien (z. B. Cho et al. 2012) nachweisen, dass in der Erwerbsphase des mathematischen Faktenabrufs jene Kinder erfolgreicher sind, die den für Lern- und Gedächtnisleistungen zuständigen Hippocampus stärker aktivierten. Diese Hippocampusaktivierung konnte bisher nur für die Erwerbsphase des Faktenabrufs, nicht jedoch bei älteren Kindern und bei Erwachsenen nachgewiesen werden. Diese Ergebnisse können als ein weiterer Hinweis für die besondere Wichtigkeit von Automatisierungsprozessen für den erfolgreichen Erwerb von mathematischen Fähigkeiten gesehen werden.

Eine weitere Aktivierungsveränderung innerhalb des Parietalkortex für die Zahlenverarbeitung tritt noch früher in der Entwicklung auf. Es handelt sich dabei um eine Zunahme der Aktivierung des linken intraparietalen Sulcus für die Verarbeitung von Zahlen und kleinen, exakten Mengen (Emerson/Cantlon 2015), wohingegen der rechte intraparietale Sulcus von früher Kindheit an für die approximative Verarbeitung von Punktmengen aktiv ist (Cantlon et al. 2006). Dies ist wohl im Zusammenhang mit dem Symbolerwerb, welcher sowohl sprachlich als auch bildhaft links lateralisiert ist, zu erklären. Erst der Erwerb von Symbolen ermöglicht es uns überhaupt, Mengen von über drei, vier oder fünf exakt wahrzunehmen und zu manipulieren.

Was ist jedoch das Besondere an der Gehirnaktivierung von Kindern mit Rechenstörung? Wie weiter oben in der Meta-Analyse schon beschrieben (Kaufmann et al. 2011), scheinen Kinder mit Rechenstörung im Vergleich zu nicht betroffenen Kindern sehr ähnliche Muster wie Kinder im Vergleich zu Erwachsenen zu zeigen. Auch nach Trainingsstudien mit rechenschwachen und dyskalkulischen Kindern (Kucian et al. 2011; Iuculano et al. 2015) konnten bisher hauptsächlich Normalisierungsprozesse für Aktivierungsmuster beobachtet werden. Nach bisheriger Erkenntnis scheint es sich also eher um eine Entwicklungsverzögerung als um qualitativ abweichende Entwicklungsformen zu handeln. Es ist jedoch in diesem Zusammenhang zu erwähnen, dass bisher wegen der hohen Komorbiditätsraten kaum Bildgebungsstudien mit dyskalkulischen Kindern durchgeführt wurden, bei denen Kinder mit Aufmerksamkeitsstörungen ausgeschlossen wurden. Die bisher berichteten Ergebnisse zu Unterschieden in frontalen Aktivierungsmustern sind derzeit also noch mit großer Vorsicht zu interpretieren. Eine der wenigen Ausnahmen einer neurokognitiven Studie mit

einer Stichprobe von rein dyskalkulischen Kindern (Dinkel et al. 2013) beobachtete heterogene Aktivierungsmuster, die jedoch von einer Unteraktivierung basaler visueller Verarbeitungsareale und einer Überaktivierung von höheren visuellen Verarbeitungsarealen im dorsalen Strom (s. S. 37) gekennzeichnet war. Ob es sich hierbei tatsächlich – wie von den Autoren postuliert – um die neuronalen Korrelate von kompensatorischen Prozessen zum Ausgleich eines visuellen Verarbeitungsdefizites handelt, bleibt im Moment aus Mangel an vergleichbaren Studien noch rein spekulativ. Es wird jedoch in mehreren Gruppen weltweit zum Thema neuronaler Grundlagen von Rechenstörung geforscht. Man darf also gespannt sein, welche weiterführenden Erkenntnisse zu eventuellen Ursachen der Rechenstörung in den nächsten Jahren noch zu erwarten sind.

### »Neuroenhancement« zur Trainingsunterstützung?

In den letzten Jahren waren immer wieder Artikel in den Medien zu lesen, die sich mit Möglichkeiten eines »neuroenhancements« beschäftigten. Als aktuelles Beispiel dazu lassen sich Studien anführen, denen zufolge die transkranielle Gleichstromstimulation (tDCS) bei Erwachsenen die Ergebnisse von Rechentrainings verbessern können (Snowball et al. 2013; Cohen Kadosh et al. 2010). Besonders für Lernstörungen, die durch relativ hohe Therapieresistenz gekennzeichnet sind, sollte man manchen Forscher/innen zufolge diese kostengünstige und sichere Möglichkeit in Betracht ziehen und stärker erforschen (Cohen Kadosh 2012).

Es ist mittlerweile hinreichend bekannt, dass der Einsatz transkranieller Stimulationstechniken (z. B. »transcranial direct current stimulation (tDCS)«, Nitsche et al. 2002; »transcranial random noise stimulation (tRNS)«, Paulus 2011) den Trainingserfolg in vielfältigen kognitiven Bereichen wie verbales Lernen (Flöel et al. 2008) signifikant erhöhen kann. Eine aktuelle Studie konnte auch zeigen, dass transkranielle Stimulation (tDCS bei gesunden Erwachsenen) das implizite Erlernen von Zahlvorstellungen verbesserte (Cohen Kadosh et al. 2010). Bei dieser Methode kann man die Schwelle für neuronale Signale lokal steuern; unter der Anode wird die Konzentration des inhibitorischen Neurotransmitters GABA (»gamma-aminobutyric acid«) verringert, während unter der Kathode die Konzentration des exzitatorischen Neurotransmitters Glutamat verringert wird (Nitsche et al. 2002). Erste Erfahrungen in der Anwendung von nicht-invasiver transkranieller Gleichstromstimulation haben gezeigt, dass diese Methode für Proband/innen und Untersucher/innen leicht anzuwenden ist. Darüber hinaus wurde diese Methode an über 3 000 Patienten evaluiert, ohne dass schwerwiegende Nebenwirkungen berichtet wurden (Vandermeeren et al. 2010). Diese Methode wurde in den letzten Jahren auch bei Kindern mit so unterschiedlichen Diagnosen wie Lernstörungen (Pinchuk et al. 2012), Epilepsie (Auvichayapat et al. 2013) oder Autismus (Schneider/Hopp 2011) erfolgreich im Zuge von kognitiven Trainingsstudien angewendet. In keiner dieser international publizierten Studien wurde von Nebenwirkungen der Methode berichtet.

Noch weniger aversiv bei vergleichbarer oder sogar stärkerer (Fertonani et al., 2011) Wirkung ist die sogenannte »transcranial random noise stimulation (tRNS)«, bei der durch die Stimulation mit ständig wechselnden hohen (über dem EEG-Frequenzband liegenden) Frequenzen (100–640 Hz) ebenfalls eine Senkung der neuronalen Erregungsschwelle erreicht und somit eine gesteigerte Langzeitpotenzierung von Neuronen erleichtert wird.

Im Bereich der Zahlenverarbeitung wurde diese Methode im letzten Jahr in zwei Studien erfolgreich bei gesunden Erwachsenen zur Verbesserung der approximativen Größenrepräsentation von Zahlen (stärkere und länger anhaltende Trainingserfolge, Cappelletti et al. 2013) sowie der Verwendung von arithmetischen Strategien (schnelleres Rechnen auch noch 6 Monate nach Training, Snowball et al. 2013) verwendet. Ob und inwiefern solche vielversprechenden Ergebnisse bei gesunden Erwachsenen jedoch Möglichkeiten zur Trainingsunterstützung bei Kindern mit Rechenstörung erwarten lassen, ist bisher noch völlig ungeklärt.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass die Neurowissenschaften bestimmt weiterhin zur Validierung verschiedener pädagogischer und kognitiver Theorien beitragen und umgekehrt pädagogische Fragestellungen die Grenzen der Neurowissenschaften erweitern werden. Wie soeben dargestellt, könnte es in Zukunft eventuell sogar möglich sein, neurowissenschaftliche Methoden direkt zur Trainingsunterstützung einzusetzen. Dies lässt uns hoffnungsvoll die weiteren Früchte der Zusammenarbeit dieser beiden, auf den ersten Blick konträren Disziplinen erwarten.

## Literatur

- Anderson, M./Reid, C. (2009): Don't forget about levels of explanation. In: *Cortex* 45, S. 560–561.
- Anderson, V. (2002): Executive functions in children: Introduction. In: *Child Neuropsychology* 8, S. 69–70.
- Auvichayapat, N./Rotenberg, A./Gersner, R./Ngodklang, S./Tiamkao, S./Tassaneevakul, W./Auvichayapat, P. (2013). Transcranial direct stimulation for the treatment of refractory childhood focal epilepsy. In: *Brain Stimulation* 6, S. 696–700.
- Baumert, J. (Hrsg.) (2001): PISA 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.
- Beigel, D./Steinbauer, W./Zink, K. (2005): Das bewegte Klassenzimmer: Ein Projekt zeigt Wirkung. Ergebnisse und Anregungen für die Praxis. Kirchzarten: VAK Verlags GmbH.
- Cantlon, J.F./Brannon, E.M./Carter, E.J./Pelphrey, K.A. (2006): Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. In: *PLOS Biology* 4, DOI: 10.1371/journal.pbio.0040125.
- Cantlon, J.F./Li, R. (2013): Neural Activity during Natural Viewing of Sesame Street Statistically Predicts Test Scores in Early Childhood. In: *PLOS Biology* 11, DOI: 10.1371/journal.pbio.1001462.
- Cappelletti, M./Gessaroli, E./Hithersay, R./Mitolo, M./Didino, D./Kanai, R./Cohen Kadosh, R./Walsh, V. (2013): Transfer of cognitive trainings across magnitude dimensions achieved with concurrent brain stimulation of the parietal lobe. In: *The Journal of Neuroscience* 33, S. 14899–14907.
- Casey, B.J./Tottenham, N./Liston, C./Durstun, S. (2005): Imaging the developing brain: what have we learned about cognitive development? In: *Trends in Cognitive Sciences* 9, S. 104–110.

- Cho, S./Metcalfe, A. W. S./Young, C. B./Ryali, S./Geary, D. C./Menon, V. (2012): Hippocampal-prefrontal engagement and dynamic causal interactions in the maturation of children's fact retrieval. In: *Journal of Cognitive Neuroscience* 24, S. 1849–1866.
- Christodoulou, J. A./Gaab, N. (2009): Using and misusing neuroscience in education-related research. In: *Cortex* 45, S. 555–557.
- Coch, D./Ansari, D. (2009): Thinking about mechanisms is crucial to connecting neuroscience and education. In: *Cortex* 45, S. 546–547.
- Cohen Kadosh, R. (2012): The neuroethics of non-invasive brain stimulation. In: *Current Biology* 22, S. 108–111.
- Cohen Kadosh, R./Soskic, S./Iuculano, T./Kanai, R./Walsh, V. (2010): Modulating neuronal activity produces specific and long-lasting changes in numerical competence. In: *Current Biology* 20, S. 2016–2020.
- Dehaene, S./Cohen, L. (2007): Cultural recycling of cortical maps. In: *Neuron* 56, S. 384–398.
- Di Luca, S./Lefèvre, N./Pesenti, M. (2010): Place and summation coding for canonical and non-canonical finger numeral representations. In: *Cognition* 117, S. 95–100.
- Dinkel, P. J./Willmes, K./Krinzinger, H./Konrad, K./Koten, J. W. jr. (2013): Diagnosing Developmental Dyscalculia on the Basis of Reliable Single Case fMRI Methods: Promises and Limitations. In: *PLoS One* 8, DOI: 10.1371/journal.pone.0083722.
- Durston, S./Casey, B. J. (2006): What have we learned about cognitive development from neuroimaging? In: *Neuropsychologia* 44, S. 2149–2157.
- Eden, G. F./Moats, L. (2002): The role of neuroscience in the remediation of students with dyslexia. In: *Nature Neuroscience Review* 5, S. 1080–1084.
- Emerson, R. W./Cantlon, J. F. (2015): Continuity and change in children's longitudinal neural responses to numbers. In: *Developmental Science* 18, S. 314–326.
- Fertonani, A./Pirulli, C./Miniussi, C. (2011): Random Noise Stimulation Improves Neuroplasticity in Perceptual Learning. In: *The Journal of Neuroscience* 31, S. 15416–15423
- Flöel, A./Rösser, N./Michka, O./Knecht, S./Breitenstein, C. (2008): Non-invasive brain stimulation improves language learning. In: *Journal of Cognitive Neuroscience* 20, S. 1415–1422.
- Geake, J./Cooper, P. (2003): Cognitive neuroscience: implications for education? In: *Westminster Studies in Education* 26, S. 7–20.
- Goswami, U. (2004): Neuroscience and education. In: *British Journal of Educational Psychology* 74, S. 1–14.
- Goswami, U. (2006): Neuroscience and education: from research to practice? In: *Nature Reviews Neuroscience* 7, S. 406–411.
- Goswami, U. (2009): Mind, brain, and literacy: biomarkers as usable knowledge for education. In: *Mind, Brain and Education* 3, S. 176–184.
- Gura, T. (2005): Educational research: big plans for little brains. In: *Nature* 435, S. 1156–1158.
- Hebb, D. O. (1949): *The organization of behavior*. New York: Wiley.
- Howard-Jones, P. A. (2009): Scepticism is not enough. In: *Cortex* 45, S. 550–551.
- Ise, E./Schulte-Körne, G. (2013): Symptomatik, Diagnostik und Behandlungen der Rechenstörung. In: *Zeitschrift für Kinder- und Jugendpsychiatrie und Psychotherapie* 41, S. 271–282.
- Iuculano, T./Rosernberg-Lee, M./Richardson, J./Tenison, C./Fuchs, L./Supekar, K./Menon, V. (2015): Cognitive tutoring induces widespread neuroplasticity and remediates brain function in children with mathematical learning disabilities. In: *Nature Communications*, DOI: 10.1038/ncomms9453.
- Kaufmann, L. (2008): Dyscalculia: neuroscience and education. In: *Educational Research* 50, S. 163–175.
- Kaufmann, L./Vogel, S. E./Wood, G./Kremser, C./Schocke, M./Zimmerhackl, L. B./Koten, J. W. (2008): A developmental fMRI study of nonsymbolic numerical and spatial processing. In: *Cortex* 44, S. 376–385.

- Kaufmann, L./Wood, G./Rubinsten, O./Henik, A. (2011): Meta-analyses of developmental fMRI studies investigating typical and atypical trajectories of number processing and calculation. In: *Developmental Neuropsychology* 36, S. 763–787.
- Kovas, Y./Petrill, S. A./Plomin, R. (2007): The origins of diverse domains of mathematics: Generalist genes but specialist environments. In: *Journal of Educational Psychology* 99, S. 128–139.
- Krinzinger, H./Koten, J. W./Horoufchin, H./Kohn, N./Arndt, D./Sahr, K./Konrad, K./Willmes, K. (2011): The role of finger representations and saccades for number processing: an fMRI study in children. In: *Frontiers in Psychology*, DOI: 10.3389/fpsyg.2011.00373.
- Kucian, K./Grond, U./Rotzer, S./Henzi, B./Schönmann, C./Plangger, F./Gälli, M./Martin, E./Aster, M. G. v. (2011): Mental number line training in children with developmental dyscalculia. In: *NeuroImage* 57, S. 782–795.
- Moeller, K./Nuerk, H.-C. (2012): Zählen und Rechnen mit den Fingern: Hilfe, Sackgasse oder bloßer Übergang auf dem Weg zu komplexen arithmetischen Kompetenzen? In: *Lernen und Lernstörungen* 1, S. 63–71.
- Munakata, Y./Casey, B. J./Diamond, A. (2004): Developmental cognitive neuroscience: progress and potential. In: *Trends in Cognitive Sciences* 8, S. 122–128.
- Nitsche, M. A./Liebetanz, D./Tergau, F./Paulus, W. (2002): Modulation kortikaler Erregbarkeit beim Menschen durch transkranielle Gleichstromstimulation. In: *Nervenarzt* 73, S. 332–335.
- Paulus, W. (2011): Transcranial electrical stimulation (tES – tDCS, tRNS, tACS) methods. In: *Neuropsychological Rehabilitation: An International Journal* 21, S. 602–617.
- Pinchuk, D./Vasserman, M./Sirbiladze, K./Pinchuk, O. (2012): Changes of of electrophysiological parameters and neuropsychological characteristics in children with psychic development disorders after transcranial direct current stimulation (tDCS). In: *Polish Annals of Medicine* 19, S. 9–14.
- Price, G./Mazzocco, M. M. M./Ansari, D. (2013): Why mental arithmetic counts: Brain activation during single-digit arithmetic predicts high school math scores. In: *The Journal of Neuroscience* 33, S. 156–163.
- Richlan, F. (2012): Developmental dyslexia: dysfunction of a left hemisphere reading network. In: *Frontiers in Human Neuroscience* 6, S. 1–5.
- Richlan, F./Kronbichler, M./Wimmer, H. (2011): Meta-analyzing brain dysfunctions in dyslexic children and adults. In: *Neuroimage* 56, S. 1735–1742.
- Schneider, H. D./Hopp, J. (2011): The use of the Bilingual Aphasia Test for assessment and transcranial direct current stimulation to modulate language acquisition in minimally verbal children with autism. In: *Clinical Linguistics and Phonetics* 25, S. 640–654.
- Schulte-Körne, G./Ludwig, K. U./Sharkawy, J./Nöthen, M./Müller-Myhsok, B./Hoffmann, P. (2007): Genetics and neuroscience in dyslexia: Perspectives for Education and Remediation. In: *Mind, Brain and Education* 1, S. 162–172.
- Schumacher, R./Stern, E. (2012): Neurowissenschaften und Lehr-Lern-Forschung: Welches Wissen trägt zu lernwirksamem Unterricht bei? In: *DDS – Die Deutsche Schule* 4, S. 383–396.
- Snowball, A./Tachtsidis, I./Popescu, T./Thompson, J./Delazer, M./Zamarian, L./Zhu, T./Cohen Kadosh, R. (2013): Long-term enhancement of brain function and cognition using cognitive training and brain stimulation. In: *Current Biology* 23, S. 987–992.
- Spitzer, M. (2004): Selbstbestimmen. Gehirnforschung und die Frage: Was sollen wir tun? Heidelberg/Berlin: Spektrum.
- Stern, E. (2005): Pedagogy meets neuroscience. In: *Science* 310, S. 745.
- Szucs, D./Goswami, U. (2007): Educational Neuroscience: defining a new discipline for the study of mental representation. In: *Mind, Brain and Education* 1, S. 114–127.
- Vandermeeren, Y./Jamart, J./Osseman, M. (2010): Effect of tDCS with an extracephalic reference electrode on cardio-respiratory and autonomic functions. In: *BMC Neuroscience* 11, S. 38.

- Weisberg, D./Keil, F.C./Goodstein, J./Rawson, E./Gray, J.R. (2008): The seductive allure of neuroscience explanations. In: *Journal of Cognitive Neuroscience* 20, S. 470–477.
- Willingham, D. T. (2009): Three problems in the marriage of neuroscience and education. In: *Cortex* 45, S. 544–545.
- Willingham, D. T./Lloyd, J. W. (2007): How educational theories can use neuroscientific data. In: *Brain Localization and Education* 1, S. 140–149.
- Wilson, M. (2002): Six views of embodied cognition. In: *Psychonomic Bulletin & Review* 9, S. 625–636.
- Zamarian, L./Ischebeck, A./Delazer, M. (2009): Neuroscience of learning arithmetic Evidence from brain imaging studies. In: *Neuroscience and Biobehavioral Reviews* 33, S. 909–925.

Sabine Peucker/Steffi Weißhaupt

## Entwicklung frühen numerischen Wissens

Beinahe ab Geburt zeigen Kinder bemerkenswerte Fähigkeiten im Umgang mit Mengen (*frühe Sensibilität für Anzahlen*). Kinder können Mengen vergleichen, und sie sind in der Lage, Veränderungen von Anzahlen wahrzunehmen. Sie sind exakt bei kleinen Mengen und schätzen zunehmend genauer bei großen Mengen. *Nonverbale mentale Modelle* werden genutzt, um Mengen von Elementen und Veränderungen von Mengen genau zu repräsentieren. Kinder wissen, dass Mengen größer werden, wenn Elemente hinzugefügt werden und Mengen kleiner werden, wenn Elemente weggenommen werden (*protoquantitative Schemata*). Kinder verfügen über grundlegendes Mengenwissen noch bevor sie Zahlwissen erwerben. Der *Simultanerfassung* (»subitizing«) – genaues Erfassen von ein bis vier Elementen ohne zu zählen – kommt in der Zahlkonzeptentwicklung eine wichtige Rolle zu. Es wird angenommen, dass Konzepte und Prozeduren zunächst bei kleinen Mengen entdeckt und genutzt werden. Die genaue Kenntnis kleiner Mengen (»subset-knowing«) führt zu kardinalen Wissen. Für eine genaue Anzahlbestimmung bei größeren Mengen von Elementen ist Zählen notwendig. Die *Eins-zu-Eins-Zuordnung* von Zahlen und Elementen stellt die Verbindung zwischen Mengenwissen und Zahlwissen her. Kinder haben das *Kardinalzahlkonzept* erworben, wenn sie verstanden haben, dass Zählen die Anzahl einer Menge von Elementen bestimmt. In der Folge können auch lediglich vorgestellte Elemente gezählt werden, schließlich können die Zahlen selbst gezählt werden. Protoquantitative Teile-Ganzes-Schemata können auf konkrete Mengen angewendet werden und dann auch auf Zahlen (*Teile-Ganzes-Konzept*). Fortgeschrittene Zählstrategien und Rechenstrategien bauen auf dem Teile-Ganzes-Konzept auf.

Kardinalzahlkonzept und Teile-Ganzes-Konzept sind Schlüsselkonzepte für die Entwicklung arithmetischer Konzepte und Prozeduren. Wenn Kinder diese Konzepte nicht erfolgreich erwerben, bleiben sie bei ineffizienten, meist zählenden Rechenstrategien stecken und haben Schwierigkeiten mit dem Stellenwertsystem und Brüchen.

Insgesamt kann die Entwicklung numerischen Wissens als hierarchische Organisation von Konzepten, Prozeduren und einer wachsenden Anzahl von Verbindungen dazwischen beschrieben werden.

## Zugrundeliegende Entwicklungsprinzipien

Als theoretischen Rahmen für die mathematische Entwicklung von Kindern schlagen Sarama/Clements (2009) einen »hierarchic interactionism« vor, einen konstruktivistischen Ansatz, dessen Prinzipien sich aus allgemeinen und domänenspezifischen Entwicklungstheorien ableiten lassen. In diesem Rahmen können die unterschiedlichen Theorien und Untersuchungen zur mathematischen Entwicklung eingeordnet werden. Das zentrale Prinzip des *Hierarchischen Interaktionismus* ist die hierarchische Entwicklung, in der spätere, fortgeschrittene Konzepte und Prozeduren notwendig auf früheren Konzepten und Prozessen aufbauen. Entwicklungsfortschritte sind daher mehr durch die Interaktion zwischen bereits bestehenden Konzepten und Prozeduren gekennzeichnet als durch die Entstehung völlig neuartiger (Resnick 1992; Fuson 1988). Die Entwicklung des Denkens ist ein kohärenter Prozess. Siegler charakterisiert spätere Konzepte und Prozeduren als zunehmend anspruchsvoll, komplexer, abstrakter und leistungsfähiger. Eine neue Strategie wird häufiger verwendet, wenn frühere Versuche erfolgreich waren. Weniger entwickelte, einfachere Strategien verschwinden aber nicht einfach. Sie werden immer noch in neuen oder komplexen Situationen angewendet, oder wenn es einfach der beste Weg ist, ein Problem zu lösen (Siegler/Alibali 2005). Siegler beschreibt dies in seiner »*overlapping waves theory*« (Chen/Siegler 2000).

Konzepte und Prozeduren werden häufig an kleinen Anzahlen entdeckt und genutzt und dann auf größere Anzahlen übertragen (Fuson 1988). Sarama/Clements (2009) bezeichnen dies als »cyclic concretisation«. *Zyklische Konkretisierung* bedeutet auch, dass Konzepte sich zunächst auf die wahrnehmbare oder konkrete Ebene beziehen und dann abstrakter und allgemeiner werden. Mentale Repräsentationen können als mentale Modelle dienen.

Konzepte und Prozeduren beeinflussen einander gegenseitig in der Entwicklung (Baroody 2004). Eine angemessene Strategie auszuwählen oder Prozeduren korrekt auszuführen setzt konzeptuelles Verständnis voraus (»mutual dependency« – *wechselseitige Abhängigkeit*). Verbindungen zwischen Konzepten und Prozeduren entstehen schrittweise und eine hierarchische kognitive Struktur wird aufgebaut (»*progressive hierarchisation*«) (s. auch Resnick 1992; Rittle-Johnson/Schneider 2015; Schneider/Stern 2010).

Hypothetische Entwicklungslinien nachzuzeichnen (Sarama/Clements 2009) könnte ein Ausgangspunkt für *entwicklungsangemessenes* Lehren und Lernen sein.

Eine Abbildung solcher Entwicklungslinien findet sich im empirisch gestützten Niveaustufenmodell der numerischen Entwicklung von Fritz und Ricken (Ricken/Fritz/Balzer 2011).

Aber wie kann der Beginn der mathematischen Entwicklung bestimmt werden? Sarama/Clements (2009) beziehen sich auf Karmiloff-Smith (1992) und beschreiben die »initial bootstraps« als Prädispositionen (Vorprägungen) und Pfade die die Entwicklung des Wissens leiten (nicht jedoch als angeborene Repräsentationen oder angeborenes Wissen). Prädispositionen unterstützen und beschränken (»constrain«)

den nachfolgenden Erwerb von mathematischem Wissen, aber sie bestimmen die Entwicklung des Wissens nicht.

## Frühes Mengenwissen

### *Frühe Sensibilität für Anzahlen*

Wenige Monate alte Kinder zeigen bereits eine bemerkenswerte Sensibilität für Anzahlen. Bei ein bis drei Elementen bemerken Kinder, ob zwei Mengen sich in der Anzahl ihrer Elemente unterscheiden, unabhängig davon, ob es sich um Objekte, Bewegungen oder Töne handelt.

Kinder sind überrascht, wenn sie unmögliche Ergebnisse für einfache Additionen und Subtraktionen mit ein oder zwei Elementen sehen.

Frühe Sensibilität für Anzahlen wird häufig mit Habituationsexperimenten (*»habitation paradigm«*) untersucht. Kindern wird eine Sequenz von Bildern gezeigt, die sich in irgendeiner Weise unterscheiden, aber immer dieselbe Anzahl von Objekten zeigen, z. B. zwei. Nach einiger Zeit gewöhnen die Kinder sich daran und ihre Aufmerksamkeit nimmt ab. Sobald jedoch ein Bild von drei Objekten erscheint, hat es ihre volle Aufmerksamkeit (*»preference for novelty«*) (Starkey/Cooper 1980; Antell/Keating 1983; Farzin/Charles/Rivera 2009).

Kinder antworten mit gesteigerter Aufmerksamkeit, wenn ihnen ein unmögliches Ereignis gezeigt wird (*»violation of expectation«*). Wenn zu einer Puppe eine zweite Puppe hinzukommt und als Ergebnis eine Puppe zu sehen ist, schauen Kinder länger auf dieses unmögliche Ergebnis als auf das mögliche Ergebnis. Umgekehrt sind Kinder überrascht, wenn eine von zwei Puppen verschwindet, und immer noch zwei Puppen übrigbleiben (Wynn 1992a) (Abb. 1 zeigt die Handlungsabfolge).

Wenn drei Elemente neu für Kinder sind, nachdem sie sich an zwei Elemente gewöhnt haben, müssen die Kinder auf irgendeine Weise in der Lage sein, diese beiden Mengen von Elementen miteinander zu *vergleichen*. Da die beiden Mengen nacheinander gezeigt werden, müssen die Kinder eine mentale Repräsentation der zwei Elemente (*habituiertes Reiz*) aufbauen. Sie müssen ihre Repräsentation der zwei Elemente mit den drei Elementen (*neuer Reiz*) vergleichen.

Nun könnte argumentiert werden, dass Kinder nicht die Anzahl der Elemente unterscheiden, sondern lediglich deren räumliche oder zeitliche Ausdehnung (Feigenson/Carey/Spelke 2002). Das wäre richtig, wenn Punkte mit Punkten verglichen würden und Töne mit Tönen. Aber was damit nicht erklärt werden kann, ist die Übereinstimmung zwischen Elementen unterschiedlicher Sinnesmodalität, wie Objekte und Töne (Starkey/Spelke/Gelman 1990). So bevorzugen sieben Monate alte Kinder die Übereinstimmung zwischen der Anzahl von Frauen, die sie sehen können, und Stimmen, die sie hören können (Jordan/Brannon 2006). Es ist also wahrscheinlicher, dass eine Repräsentation diskreter Elemente oder Ereignisse eine Eins-zu-Eins-Zuordnung erlaubt, unabhängig von ihrer Art.

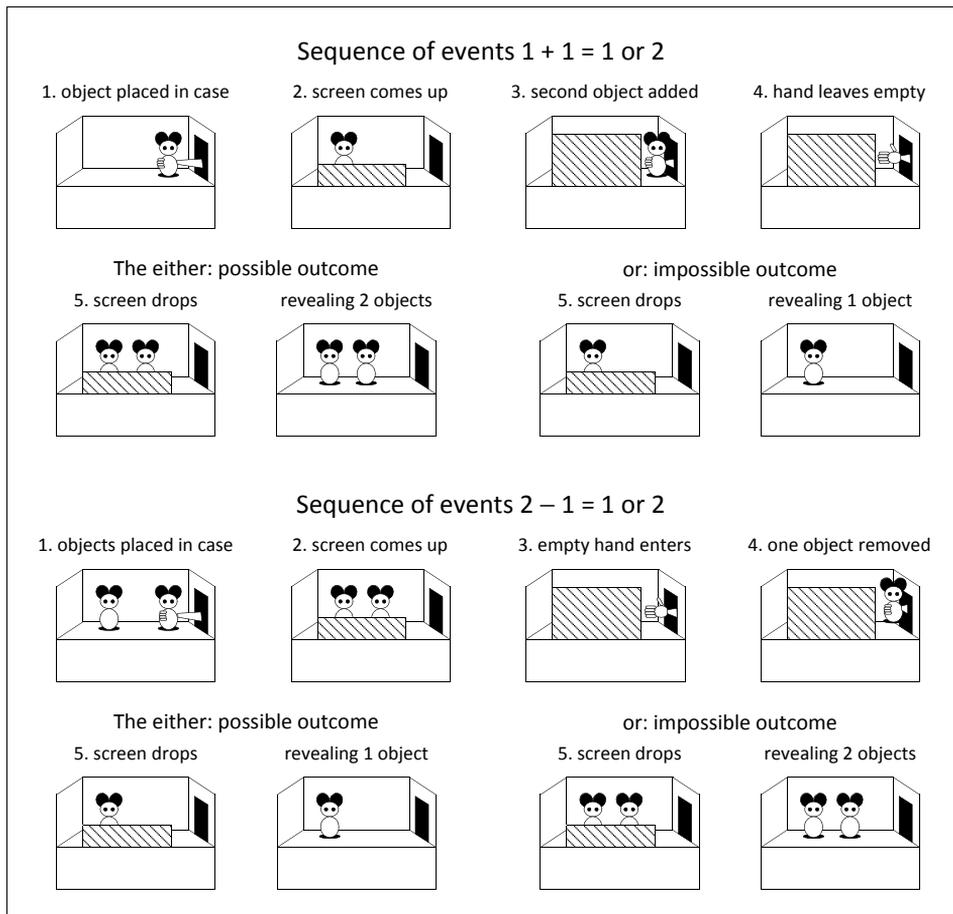


Abb. 1: Sequence of events for  $1 + 1$  and  $2 - 1$  situations (Wynn 1992a, S. 749)

Um die *Veränderungen der Anzahl* festzustellen, benötigen die Kinder nicht nur Repräsentationen diskreter Elemente (s. auch nonverbale mentale Modelle), sie müssen auch die Handlungsabfolge verstehen. Die Kinder müssen sich die ursprüngliche Anzahl der Objekte (eins oder zwei) vorstellen, da die Objekte versteckt sind. Die Repräsentation muss dann entsprechend der tatsächlichen Veränderung (ein Objekt wird hinzugefügt oder weggenommen) verändert werden (s. auch Feigenson/Carey/Spelke 2002). Das könnte das Erstaunen (die erhöhte Aufmerksamkeit) der Kinder erklären, wenn sie ein unmögliches und unerwartetes Ergebnis sehen

Die Kinder können nicht nur Veränderungen an Mengen und Unterschiede zwischen Mengen wahrnehmen, sie können auch beurteilen, welche Menge mehr und welche Menge weniger Elemente umfasst. Feigenson/Carey/Hauser (2002) stellten etwas ältere Kinder (zehn und zwölf Monate) vor eine Wahl: Vor den Augen der Kinder wurden zwei Kekse in eine Dose und ein Keks in eine andere Dose gelegt. Die Kinder