DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
DEUTSCHE AKADEMIE
DER LANDWIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

ARCHIV FÜR GARTENBAU

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

BAND 18 · 1970 · HEFT 8

Arch. Gartenbau · Bd. 18 1970 · H. 8 · S. 415–490 · Berlin

Das Archiv für Gartenbau erscheint in Heften mit einem Umfang von je 5 Druckbogen (80 Seiten). Die innerhalb eines Jahres herausgegebenen 8 Hefte bilden einen Band. Das letzte Heft eines Bandes enthält Inhalts-, Autoren- und Sachverzeichnis.

Der Bezugspreis je Heft beträgt 10,– M, Doppelheft 20,– M. Sonderpreise für die DDR: Einfachheft 5,– M, Doppelheft 10,– M.

Die Schriftleitung nimmt nur Manuskripte an, deren Gesamtumfang 25 Schreibmaschinenseiten nicht überschreitet und die bisher noch nicht, auch nicht in anderer Form, im In- oder Ausland veröffentlicht wurden. Jeder Arbeit ist eine Zusammenfassung mit den wichtigsten Ergebnissen (nicht länger als 20 Zeilen), wenn möglich auch in russischer und englischer bzw. französischer Sprache, beizufügen. Gegebenenfalls erfolgt die Übersetzung in der Akademie.

Manuskripte sind zu senden an den Chefredakteur, Prof. Dr. Dr. h. c. G. FRIEDRICH, Institut für Obstbau, 8057 Dresden.

Die Autoren erhalten Umbruchabzüge zur Korrektur mit befristeter Terminstellung. Bei Nichteinhaltung der Termine erteilt die Redaktion Imprimatur.

Für jede Arbeit werden unentgeltlich 100 Sonderdrucke geliefert. Das Honorar beträgt 40,– M je Druckbogen und schließt auch die Urheberrechte für das Bildmaterial ein. Dissertationen, auch gekürzte bzw. geänderte, werden nicht honoriert.

Verlag. Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3–4, Fernruf: 22 04 41. Telex-Nr. 11 2020. Postscheckkonto: Berlin 350 21. Bestellnummer dieses Heftes: 1039/XVIII/8. Karten: Nr. 692/70

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1276 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Herstellung: IV/2/14 · VEB Werkdruck, 445 Gräfenhainichen · 1039.

DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
DEUTSCHE AKADEMIE
DER LANDWIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

ARCHIV FÜR GARTENBAU

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

BAND 18 · 1970 · HEFT 8

Arch. Gartenbau · Bd. 18 1970 · H. 8 · S. 415–490 · Berlin

INHALTSVERZEICHNIS

Arch. Gartenbau · Bd. 18 · 1970 · H. 8 · S. 417–426 · Berlin

Institut für Obstbau Dresden-Pillnitz der DAL zu Berlin

DIETER LEUSCHNER

Operatoren bei der biokybernetischen Modellbildung an Pflanzen

Eingegangen 4. Mai 1970

Einleitung

In einer früheren Arbeit [LEUSCHNER (i. Druck)] wurde der Begriff des Systems in mathematisch präzisierter Form auf die Dynamik von Pflanzen angewendet. Dabei spielten die Relationen eine grundlegende Rolle. In dieser Arbeit soll die Problematik der Modellbildung bei Pflanzen von einem anderen mathematischen Standpunkt her gesichtet werden. Grundlage ist der Begriff der Operation. Wir stoßen dabei wie bei der Relationenalgebra in [LEUSCHNER (i. Druck)] auf eine topologische Interpretation der algebraischen Sachverhalte: Kategorien lassen sich wie Systeme durch Graphen darstellen.

1. Räume

Um zum Begriff des Operators zu gelangen, ist es nötig, einiges zu den Räumen der Funktionalanalysis zu sagen. Es ist für die Belange dieser Arbeit gerechtfertigt, von den allgemeinsten Räumen der Mathematik, den topologischen Räumen (vgl. z. B. KLAUA [1964]), abzusehen. Für die naturwissenschaftliche Anwendung, speziell in der Dynamik der Pflanzenbiologie, scheint es zunächst sinnvoll, einen bestimmten HILBERT-Raum zu benutzen. Deshalb soll etwas zu den metrischen Räumen bemerkt werden, damit eine weitere Spezialisierung zum HILBERT-Raum führen kann.

Eine Menge X von Elementen $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ heißt eine lineare Menge, wenn gilt

$$x_1, x_2 \in X \Rightarrow x_1 + x_2 \in X$$
$$x_1 \in X \Rightarrow \lambda x_1 \in X \; (\lambda = \text{reelle oder komplexe Zahl})$$

so daß folgende Axiome erfüllt sind:

L 1: $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ assoziatives Gesetz der Addition

L 2: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ kommutatives Gesetz der Addition

L 3: $\exists\, o \in X$, so daß $\forall\, x \in X \Rightarrow 0 \cdot x = o$

(Es bedeutet: $\exists$ = „es existiert", $\forall\, x$ = „für jedes X", $p \Rightarrow q$ = „aus p folgt q", $\in$ „enthalten in")

L 4: $(\varkappa + \lambda)\, x = \varkappa x + \lambda\, x$
$\lambda (x_1 + x_2) = \lambda\, x_1 + \lambda\, x_2$ distributive Gesetze
L 5: $(\varkappa\, \lambda)\, x = \varkappa (\lambda\, x)$ assoziatives Gesetz der Multiplikation
L 6: $1 \cdot x = x$

Eine lineare Menge heißt normiert, wenn jedem $x \in X$ eine nichtnegative reelle Zahl $\|x\|$, die Norm von x, zugeordnet wird bei Gültigkeit folgender Axiome

N 1: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$ ($A \Leftrightarrow B$ bedeutet: „genau dann A, wenn B")
N 2: $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$
N 3: $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Damit auf die bisher behandelten Mengen der funktionalanalytische Raumbegriff sauber angewendet werden kann, muß noch eine Bemerkung über die Konvergenz von Elementfolgen eingeschaltet werden, die bei der praktischen Anwendung meist nicht in den Vordergrund tritt: Eine Folge (x_n) von Elementen aus X heißt konvergent gegen $x_o \in X$ (geschrieben: $x_n \to x_o$), wenn $\|x_n - x_o\| \to 0$ gilt. Damit kann in nunmehr mathematisch einwandfreier Weise in folgenden von Räumen gesprochen werden.
Als nächstes wird mit dem Begriff der Vollständigkeit der BANACH-Raum eingeführt. Dazu definiert man: Eine CAUCHY-Folge (manchmal auch Fundamentalfolge genannt) ist eine Folge $x_n \in X$ mit

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Ein Raum X heißt vollständig, wenn zu jeder CHAUCHY-Folge (x_n) aus X ein Element $x_o \in X$ mit $x_n \to x_o$ existiert.
Nunmehr kann die Definition „Ein linearer normierter vollständiger Raum ist ein BANACH-Raum" angegeben werden. Durch Einführung des eine Norm definierenden Skalarprodukts entsteht ein HILBERT-Raum, indem formuliert wird: Ein vollständiger linearer Raum mit Skalarprodukt heißt ein HILBERT-Raum. Für das Skalarprodukt (x, y) zweier Elemente $x, y \in X$ (HILBERT-Raum) gilt dabei:

H 1; $(x, y) = \overline{(x, y)}$
(Die Überstreichung bedeutet den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl)

H 2: $(\lambda\, x_1 + \varkappa\, x_2,\, y) = \lambda (x_1, y) + \varkappa (x_2, y)$
H 3: $(x, x) \geqq 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o$

Die mittels des Skalarprodukts definierte Norm lautet:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Weil wir später die Kategorie der metrischen Räume einführen wollen, soll jetzt noch gezeigt werden, inwiefern wir es bei HILBERT-Räumen mit metrischen Räumen zu tun haben.

Ein metrischer Raum R liegt genau dann vor, wenn es eine Menge M und eine Funktion f von $M \times M$ in die Menge P der reellen Zahlen gibt, so daß $R = [M, f]$ ist und für beliebige $a, b, c \in M$ gilt:

$$\text{M 1}: f(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$
$$\text{M 2}: f(a, b) = f(b, a)$$
$$\text{M 3}: f(a, b) + f(b, c) \geq f(a, c)$$

(Die eckige Klammer bedeutet dabei „geordnetes Paar" und die Menge $M \times M$ ist die Produktmenge von M mit sich, d. h. die Menge der geordneten Paare aus M).

Es ist leicht ersichtlich, daß durch die Norm des HILBERT-Raumes eine Abstandsfunktion definiert werden kann, die dann den drei eben aufgeschriebenen Grundaxiomen einer Metrik genügt, indem gesetzt wird:

$$f(a, b) = \|a - b\|$$

Durch Anwendung von N1 bis N3 wird gezeigt, daß die so definierte Metrik M1 bis M3 genügt.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch ein Beispiel für einen HILBERT-Raum gegeben werden, das dann für die Anwendung in der Pflanzenbiologie wichtig sein wird. Der Raum $L^p[a, b]$ $(p = 2)$ der auf dem Intervall $[a, b]$ meßbaren Funktionen mit

$$\int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty \text{ ist ein HILBERT-Raum.}$$

Es gelten die Linearitätseigenschaften für Funktionen und die Eigenschaften des Skalarprodukts werden mit

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \, \bar{y}(t) \, dt$$

erfüllt. Die Beschränkung auf eindimensionale Funktionen geschah nur aus Gründen der Einfachheit.

2. Operatoren

Der Raumbegriff macht eine Typisierung mathematischer Objekte möglich, während zur dynamischen Systematisierung einer Pflanze, d. h. zur Typisierung biologischer Objekte, der von der Mathematik bereitgestellte Operatorenbegriff unerläßlich scheint. Die verbale Formulierung des Operators, die sich auf Räume bezieht, lautet: Eine definierte Zuordnung, die jedes Element x eines Raumes X eindeutig auf ein Element y eines i. a. von X verschiedenen Raumes Y abbildet. Auf dem Wort Abbildung liegt hierbei der Ton. Es besteht nun in der Mathematik keine einheitliche Meinung bei der Definition der Abbildung. Einmal kann man den Abbildungsbegriff als den allgemeinen auffassen und daraus den Relationsbegriff aussondern, zum anderen wird die Relation als das Allgemeine und die Abbildung als eine spezielle Relation verstanden. Da wir in LEUSCHNER (1970) schon einen mengentheoretischen Relationsbegriff verwendet haben, soll hier der

zweite Weg gegangen werden. Es wird wiederholt, was unter einer zweistelligen (nur diese sind zunächst von Interesse) Relation zu verstehen ist. Es seien M_1 und M_2 zwei i. a. verschiedene Mengen. Dann heißt jede Teilmenge R (nicht zu verwechseln mit dem Symbol für Raum) von $M_1 \times M_2$ eine zweistellige oder binäre Relation zwischen M_1 und M_2.
Man schreibt dann $[x_1, x_2] \in R$, d. h. das geordnete Paar ist Element von R, oder $R\{x_1, x_2\}$ und sagt „x_1, x_2 stehen zueinander in der Relation R".
Damit kann man folgendermaßen definieren: Eine Abbildung A von M_1 in M_2 ist eine *eindeutige* Relation A zwischen M_1 und M_2, Es gilt also für A:

$$O\,1\colon\ \forall x\, \forall y_1\, \forall y_2([x, y_1] \in A \ \wedge [x, y_2] \in A \Rightarrow y_1 = y_2)$$
$$\text{mit } x \in M_1;\ y_1, y_{22} \in M$$
$$O\,2\colon \forall x(x \in M_1 \Rightarrow \exists\, y([x, y] \in A),\ y \in M_2)$$

Das bisher Gesagte gilt auch für die Räume X und Y als spezielle Mengen. Man nennt dann A in der Funktionalanalysis einen Operator und schreibt bei $x \in X$, $y \in Y$ (X und Y seien zwei metrische Räume):

$$y = A(x) \quad \text{(funktionale Schreibweise)}$$
$$y = A\,x \quad \text{(Operatorschreibweise)}$$
$$y = A_x \quad \text{(Indexschreibweise)}$$

Die Operatorschreibweise wird von uns verwendet. Der Operator muß sich nicht unbedingt auf alle Elemente der Räume X und Y beziehen. Man nennt die Teilmengen ($\subset$ heißt „Teilmenge von")

$$D_A \subseteqq X$$
$$W_A := A(D_A) = \{y = A\,x : x \in D_A\},\ W_A \subseteqq Y$$

($:=$ bedeutet „per definitionem"), für die der Operator gilt, den Definitionsbereich D_A und den Wertebereich W_A. Auch bei Anwendungen in der Biologie kann vorausgesetzt werden, daß D_A eine lineare Menge ist. Zusätzlich ist zu bedenken, daß in verschiedenen Fällen X mit Y zusammenfallen kann.
Jetzt wird ein einfaches Beispiel für einen Operator A angegeben. X sei der Raum der Polynome höchstens n-ten Grades, Y sei der Raum der Polynome höchstens $3\,n$-ten Grades, wobei $x \in X$ und $y \in Y$ die entsprechenden Polynome sind. Es ist dann durch

$$y = A\,x = a_1\,x^3(t) - 3a_2\,x\,(t)$$

ein Operator von X in Y definiert.
Eine praktisch wichtige Gruppe von Operatoren muß noch herausgestellt werden. Es sind die linearen Operatoren, die sowohl homogen als auch additiv sind, d. h. es gilt

$$A(\alpha\,x) = \alpha A\,x \quad (x \in D_A,\ \alpha \text{ komplex oder reell})$$
$$A(x_1 + x_2) = A\,x_1 + A\,x_2$$

Zu dieser Gruppe zählt z. B. die in LEUSCHNER (1970) aufgeschriebene Integraltransformation.