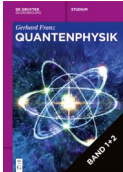


Gernot Münster

Von der Quantenfeldtheorie zum Standardmodell

De Gruyter Studium

Weitere empfehlenswerte Titel



Quantenphysik

Gerhard Franz, 2024

Set ISBN 978-3-11-125363-3

Quantenmechanik

ISBN 978-3-11-123798-5, e-ISBN (PDF) 978-3-11-123867-8

Festkörperphysik

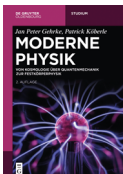
ISBN 978-3-11-124075-6, e-ISBN (PDF) 978-3-11-124157-9



Festkörperphysik

Siegfried Hunklinger, Christian Enss, 2023

ISBN 978-3-11-102708-1, e-ISBN 978-3-11-102722-7



Moderne Physik

Von Kosmologie über Quantenmechanik zur Festkörperphysik

Jan Peter Gehrke, Patrick Köberle, 2023

ISBN 978-3-11-125881-2, e-ISBN (PDF) 978-3-11-126057-0



Quantenmechanik

Hugo Reinhardt, 2026

Set ISBN 978-3-11-131987-2

Funktionalintegralformulierung und Operatorformalismus

ISBN 978-3-11-126677-0, e-ISBN 978-3-11-126825-5

Zeitabhängige Prozesse, Symmetrien, Relativistische Teilchen

ISBN 978-3-11-126937-5, e-ISBN 978-3-11-127150-7

Vielteilchensysteme und Relativistische Felder

ISBN 978-3-11-162508-9, e-ISBN 978-3-11-162512-6



Quantentheorie

Gernot Münster, 2020

ISBN 978-3-11-047995-9, e-ISBN 978-3-11-047996-6

Gernot Münster

Von der Quantenfeldtheorie zum Standardmodell

Eine Einführung in die Teilchenphysik

2. Auflage

DE GRUYTER
OLDENBOURG

Mathematics Subject Classification 2020

70S05, 70S10, 70S15, 81-01, 81Q30, 81R40, 81S40, 81T10, 81T13, 81T15, 81T18, 81U20, 81V05, 81V10, 81V15, 81V22, 81V25

Autor

Prof. Dr. Gernot Münster
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
48149 Münster
munsteg@uni-muenster.de

ISBN 978-3-11-914246-5

e-ISBN (PDF) 978-3-11-222236-2

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-222265-2

Library of Congress Control Number: 2025949074

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2026 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, Genthiner Straße 13, 10785 Berlin

Coverabbildung: Higgs-Mechanism: ttsz / iStock / Getty Images Plus & Background: Liudmyla Lishchyshyna / iStock / Getty Images Plus

Satz: VTeX UAB, Lithuania

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyterbrill.com

Fragen zur allgemeinen Produktsicherheit:
productsafety@degruyterbrill.com

Vorwort

Dieses Buch enthält den Stoff einer zweisemestrigen Vorlesung im Umfang von insgesamt acht Semester-Wochenstunden, in denen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie und des Standardmodells der Elementarteilchenphysik vermittelt werden. Die Zielgruppe der Vorlesung sind Studierende im Masterstudium und Doktoranden, die sich auf Teilchenphysik spezialisieren. Es gibt bereits eine Reihe von Lehrbüchern über die hier behandelte Thematik, insbesondere in englischer Sprache. In den meisten Fällen steigen sie tief in die Materie ein und diskutieren ausführlich die zahlreichen interessanten Themen, die der fortgeschrittene Student oder Forscher kennen lernen möchte. Der Anspruch des vorliegenden Buches ist anders. Es soll sich um einen ersten Einstieg in das Gebiet handeln, der die Grundlagen verständlich vermittelt, und dem Leser, der mehr wissen möchte, die Basis für ein vertieftes Studium bereitet.

Gewöhnlich wird die Quantisierung von Feldern im Operator-Formalismus eingeführt. Ich halte das für sinnvoll und mache es ebenso. Im weiteren Verlauf jedoch führe ich baldmöglichst die Quantisierung mittels Funktionalintegralen ein, die für eine moderne Darstellung unverzichtbar ist, und leite die Störungstheorie und Feynman-Regeln in diesem Rahmen her. Dazu eignet sich besonders gut das skalare Feld. Aus diesem Grund ist dem skalaren Feld ein umfangreiches Kapitel gewidmet, welches viele Konzepte entwickelt, bevor diese nachfolgend auf andere Felder angewandt werden.

Voraussetzung für das Verständnis der Thematik dieses Buches ist die Kenntnis der Quantenmechanik. Speziell werden die in meinem Lehrbuch „Quantentheorie“ (Münster, 2020) behandelten relativistischen Wellengleichungen und die Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik vorausgesetzt. Verweise auf dieses Buch sind im hier vorliegenden Text mit „QT“ gekennzeichnet.

Dem leider früh verstorbenen Dr. Burkhard Echtermeyer bin ich dankbar für die Erstellung von Vorlesungsskripten, welche den Ausgangspunkt für dieses Buch bildeten. Herrn Fabian Joswig danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Münster, im März 2019

Gernot Münster

Vorwort zur 2. Auflage

Nachdem dieses Lehrbuch einen erfreulichen Zuspruch erfahren hat, ist es Zeit geworden für eine zweite Auflage. Dies bietet die Gelegenheit für Ergänzungen und Korrekturen. Da in diesem Buch den begrifflichen und strukturellen Grundlagen der Quantenfeldtheorie ein besonderes Augenmerk gilt, war es angebracht, einen neuen Abschnitt über die Dyson-Schwinger-Gleichungen einzufügen. Diese Gleichungen drücken den Inhalt der Feldgleichungen im Kontext der Green'schen Funktionen aus. Sie fließen auch in die Herleitung von Ward-Identitäten der QED ein, und folglich wurde auch der entsprechende Abschnitt ergänzt. Die Abschnitte über masselose Fermionen und Majorana-Fermionen wurden merklich erweitert und dem letzten Kapitel über die Physik jenseits des Standardmodells wurde ein neuer Abschnitt über Majorana-Neutrinos, die als Option für massive Neutrinos diskutiert werden, hinzugefügt.

Jedes Kapitel wurde mit einer Kapiteleinstiegsseite versehen. Eine Reihe neuer Übungsaufgaben und Fragen zum Nachdenken wurde eingefügt, die Literaturliste aktualisiert und ein paar Druckfehler berichtigt. Das Layout wurde durch farbige Unterlegung mehrerer Elemente und Logos im Seitenrand aufgewertet.

Münster, im Dezember 2025

Gernot Münster

Inhalt

Vorwort — V

Vorwort zur 2. Auflage — VII

1 Einleitung — 1

- 1.1 Teilchen — 2
- 1.2 Wechselwirkungen — 5
- 1.3 Theorien — 8

2 Feldtheorie — 13

- 2.1 Die Grenzen der Quantenmechanik — 13
- 2.2 Relativistische Feldgleichungen — 15
 - 2.2.1 Grundelemente der speziellen Relativitätstheorie — 15
 - 2.2.2 Feldgleichungen — 19
- 2.3 Lagrange-Formalismus für Felder — 26
 - 2.3.1 Reelles Skalarfeld — 31
 - 2.3.2 Komplexes Skalarfeld — 32
 - 2.3.3 Diracfeld — 33
 - 2.3.4 Maxwellfeld — 34
 - 2.3.5 Massives Vektorfeld — 35
- 2.4 Quantisierung — 37

3 Symmetrien und Erhaltungssätze — 39

- 3.1 Das Noether-Theorem — 39
- 3.2 Symmetrie-Transformationen — 41
- 3.3 Raumzeit-Symmetrien — 44
 - 3.3.1 Translationen — 44
 - 3.3.2 Lorentz-Transformationen — 46
- 3.4 Innere Symmetrien — 49
 - 3.4.1 $U(1)$ -Symmetrie und elektrische Ladung — 51
 - 3.4.2 $SU(2)$ -Symmetrie und Isospin — 52
 - 3.4.3 $SU(3)$ -Flavoursymmetrie — 59

4 Quantisiertes Skalarfeld — 67

- 4.1 Reelles Skalarfeld — 68
 - 4.1.1 Kanonische Quantisierung — 68
 - 4.1.2 Fock-Raum — 71
- 4.2 Komplexes Skalarfeld — 75
 - 4.2.1 Kanonische Quantisierung — 75
 - 4.2.2 Fock-Raum — 77

4.3	Kommutator und Propagator — 80
4.4	Yukawa-Potenzial — 84
4.5	Das Quanten-Noether-Theorem — 88
4.5.1	Darstellung von Symmetrien in der Quantentheorie — 88
4.5.2	Diskrete Transformationen — 91
4.5.3	PCT-Theorem — 96
4.6	Wechselwirkungen — 97
4.7	Green'sche Funktionen und S-Matrix — 98
4.7.1	Green'sche Funktionen — 98
4.7.2	S-Matrix — 103
4.7.3	Reduktionsformeln — 107
4.7.4	Erzeugende Funktionale — 110
4.8	Funktionalintegral-Quantisierung — 112
4.8.1	Funktionalintegral für erzeugende Funktionale — 114
4.8.2	Funktionalintegral für das freie Feld — 115
4.8.3	Wick'sches Theorem — 117
4.9	Störungstheorie — 119
4.9.1	Entwicklung der Green'schen Funktionen — 119
4.9.2	Feynman-Regeln — 123
4.9.3	Feynman-Regeln im Impulsraum — 125
4.10	Vertexfunktionen und effektive Wirkung — 128
4.10.1	Vertexfunktionen — 128
4.10.2	Effektive Wirkung und spontane Symmetriebrechung — 136
4.10.3	Goldstone-Theorem — 142
4.11	Renormierung — 143
4.11.1	Divergenzen — 143
4.11.2	Regularisierung — 145
4.11.3	Renormierung — 145
4.11.4	Dimensionelle Regularisierung — 149
4.12	Funktionalintegral für das komplexe Skalarfeld — 152
4.13	Ward-Identitäten — 154
4.14	Dyson-Schwinger-Gleichungen — 157
5	Diracfeld — 161
5.1	Lösungen der Diracgleichung — 161
5.2	Kovarianz der Diracgleichung — 163
5.2.1	Lorentz-Transformationen — 163
5.2.2	Raumspiegelungen — 166
5.2.3	Bilineare Kovarianten — 167
5.3	Spin — 170
5.4	Erhaltungsgrößen — 173
5.5	Kanonische Quantisierung des Diracfeldes — 174

5.5.1	Propagator — 178
5.5.2	Mikrokausalität und Antikommutator — 179
5.5.3	Spin-Statistik-Theorem — 180
5.5.4	Diskrete Transformationen — 181
5.6	Masselose Fermionen — 185
5.7	Majorana-Fermionen — 189
5.8	Funktionalintegral-Quantisierung — 190
5.8.1	Grassmann-Variable — 191
5.8.2	Funktionalintegral für das Diracfeld — 195
5.9	Yukawa-Wechselwirkung — 197
6	Elektromagnetisches Feld — 199
6.1	Kanonische Quantisierung — 199
6.2	Kovariante Eichfixierung und Funktionalintegral — 205
7	Quantenelektrodynamik — 209
7.1	Lokale $U(1)$ -Eichsymmetrie — 209
7.2	Störungstheorie — 212
7.3	Møller-Streuung — 217
7.4	Ward-Identitäten — 220
8	Nichtabelsche Eichtheorie — 225
8.1	Lokale Eichinvarianz — 225
8.1.1	Eichfelder — 225
8.1.2	Feldstärken und Yang-Mills-Lagrangedichte — 228
8.1.3	Feldgleichungen — 230
8.1.4	Historische Bemerkungen zu den Eichtheorien — 231
8.2	Geometrie der Eichfelder — 232
8.2.1	Differenzialgeometrie — 232
8.2.2	Eichtheorien — 236
8.3	Funktionalintegral-Quantisierung — 240
8.3.1	Ein Spielzeug-Integral — 241
8.3.2	Faddeev-Popov-Determinante — 243
8.3.3	Faddeev-Popov-Geister — 247
8.3.4	Feynman-Regeln — 249
8.3.5	Renormierung zur Ordnung g^2 — 250
8.3.6	Jenseits der Störungstheorie — 258
9	Quantenchromodynamik — 261
9.1	Lagrangedichte und Symmetrien — 261
9.1.1	Lokale $SU(3)$ -Farbsymmetrie und Lagrangedichte — 261
9.1.2	Globale Flavoursymmetrie — 263

9.1.3	Globale Baryonen-U(1)-Symmetrie —	265
9.1.4	Chirale Symmetrie —	266
9.1.5	Axiale U(1)-Symmetrie —	270
9.2	Laufende Kopplung —	272
9.2.1	Quark-Quark-Streuung —	273
9.2.2	Renormierung —	276
9.2.3	Laufende Kopplung —	277
9.2.4	Diskussion —	281
9.3	Confinement —	284
9.4	Gitter-QCD —	288
9.5	Evidenz für die QCD —	293
10	Elektroschwache Theorie —	295
10.1	Schwache Wechselwirkungen —	295
10.1.1	Fermi-Theorie —	296
10.1.2	V-A-Theorie —	297
10.2	Higgs-Mechanismus —	302
10.2.1	Spontane Brechung einer globalen Symmetrie —	302
10.2.2	Higgs-Mechanismus —	305
10.3	Glashow-Weinberg-Salam-Modell —	308
10.3.1	Leptonen und Eichfelder —	308
10.3.2	Higgs-Mechanismus —	310
10.3.3	Fermionmassen —	315
10.3.4	Quarks —	316
10.3.5	Eigenschaften der GWS-Theorie —	316
10.3.6	Wechselwirkungs-Vertices —	318
10.3.7	Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM)-Mechanismus —	319
10.3.8	Higgs-Teilchen —	322
11	Jenseits des Standardmodells —	325
11.1	Majorana-Neutrinos —	325
11.2	Große Vereinigung der Wechselwirkungen —	327

Literatur —	337
--------------------	------------

Stichwortverzeichnis —	341
-------------------------------	------------

1 Einleitung

Gibt es fundamentale physikalische Gesetze? Gibt es eine umfassende Beschreibung der physischen Bausteine der Welt und der Wechselwirkungen zwischen ihnen, also eine Art von „Weltformel“? Wir wissen es nicht. Der Teilbereich der Physik, der sich mit den kleinsten Teilchen, den Elementarteilchen, beschäftigt, versucht, Erkenntnisse zu gewinnen, die uns den obigen Fragen näherbringen.

In diesem Abschnitt soll ein erster grober Überblick über den Zoo der Teilchen und ihre Wechselwirkungen gegeben werden. Weitere Einzelheiten werden in späteren Kapiteln behandelt. Die Vielfalt von Phänomenen und experimentellen Erkenntnissen im Bereich der Elementarteilchenphysik ist nicht Gegenstand dieses Buches. Stattdessen soll es um die theoretischen Grundlagen ihrer Beschreibung im Rahmen des Standardmodells mit den Mitteln der Quantenfeldtheorie gehen.

Die heute bekannten fundamentalen Teilchen und deren Wechselwirkungen (bis auf die Gravitation) werden vom *Standardmodell* der Teilchenphysik auf hervorragende Weise beschrieben. Unzählige experimentelle Ergebnisse stimmen mit den theoretischen Aussagen des Standardmodells bestens überein. Grundlage des Standardmodells sind Eichtheorien. Diese beschreiben die Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen auf der Grundlage eines Symmetrieprinzips, nämlich der lokalen Eichinvarianz, welche eine unendlich-dimensionale Symmetriegruppe beinhaltet.

Das theoretische Fundament des Standardmodells bilden quantisierte Felder. Sowohl die fundamentalen Konstituenten der Materie als auch die Wechselwirkungen werden durch Felder beschrieben. Ihre quantentheoretische Behandlung erfolgt im Rahmen der Quantenfeldtheorie. Dort zeigt sich ihre Doppelnatur: Die grundlegenden physikalischen Objekte lassen sich sowohl als Wellen als auch als Teilchen beschreiben.

Gegenstand dieses Buches sind Quantenfeldtheorie und Standardmodell. Diese Gebiete der theoretischen Physik sind sehr vielfältig und ihr vertieftes Studium führt zu zahlreichen interessanten und anspruchsvollen Themen, die in diesem Buch nicht berührt werden können. Hierin soll es um eine Einführung in die Grundlagen gehen. Weiterführende Betrachtungen müssen der Spezialliteratur, insbesondere der englischsprachigen, überlassen werden.

Das Standardmodell der Teilchenphysik stellt sicher nicht die endgültige Beschreibung der fundamentalen Physik dar. So beinhaltet es beispielsweise nicht die Gravitation, die im Mikrokosmos keine wichtige Rolle spielt. Weiterhin gibt es eine Reihe offener theoretisch-struktureller Fragen. Insbesondere aber weisen experimentelle Entdeckungen auf eine Physik jenseits des Standardmodells. Es hat sich gezeigt, dass Neutrinos eine von null verschiedene Masse besitzen, während sie im Standardmodell als masselose Teilchen beschrieben werden. Zudem haben astrophysikalische Beobachtungen gezeigt, dass es im Universum eine noch unbekannte Form von Materie gibt, die sogenannte *dunkle Materie*, die keinen Platz im Standardmodell hat.

1.1 Teilchen

Seit Mitte des vorigen Jahrhunderts wurde sowohl in der Höhenstrahlung als auch in Beschleunigeranlagen eine immer größer werdende Zahl von Elementarteilchen entdeckt. Fast alle von ihnen sind instabil und zerfallen nach sehr kurzer Zeit. In die große Zahl der Teilchen kann eine Ordnung gebracht werden, indem sie hinsichtlich ihrer Eigenschaften klassifiziert werden. Dazu zählen

- Masse und Spin,
(entsprechend den Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe),
- Lebensdauer,
- weitere Quantenzahlen,
die mit Erhaltungssätzen verknüpft sind,
- Teilnahme an Wechselwirkungen.

Daraus hat sich die Einteilung der Teilchen in Tabelle 1.1 ergeben.

Tab. 1.1: Klassifizierung der Elementarteilchen.

Leptonen		
halbzahliger Spin, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung		
	Teilchen	Quantenzahl
	Elektron e^-	Elektronenzahl
	Elektron-Neutrino ν_e	
	Myon μ^-	Myonenzahl
	Myon-Neutrino ν_μ	
	Tau τ^-	Tauonenzahl
	Tau-Neutrino ν_τ	
Hadronen		
starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung		
Mesonen		
ganzzahliger Spin, Baryonenzahl $B = 0$		
$\pi^+, \pi^-, \pi^0, K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0, \eta, \eta', \rho^+, \rho^-, \rho^0, J/\psi$ etc.		
Baryonen		
halbzahliger Spin, Baryonenzahl $B = \pm 1$		
$n, p, \Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \Xi^0, \Xi^-, \Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-, \Omega^-, \Upsilon$ etc.		

Quark-Modell der Hadronen

Das Quark-Modell, das auf Gell-Mann und Zweig zurückgeht, betrachtet die Hadronen als aus jeweils zwei oder drei der sogenannten Quarks zusammengesetzt. Diese besitzen den Spin $1/2$. Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark, symbolisch gekennzeichnet als $q\bar{q}$, während Baryonen aus drei Quarks bestehen, symbolisch qqq . Man kennt sechs Sorten von Quarks und deren Antiteilchen. Diese Sorten werden als **Flavours** (Geschmack) bezeichnet. Sie heißen up, down, charm, strange, top und bottom und werden abgekürzt als

u, c, t,
d, s, b.

Einige Beispiele für die Zusammensetzung von Hadronen aus u, d und s-Quarks sind in den Abbildungen 1.1 und 1.2 gegeben. Dabei handelt es sich um Multipletts, die zur Gruppe SU(3) gehören. Dies wird später noch erklärt werden.

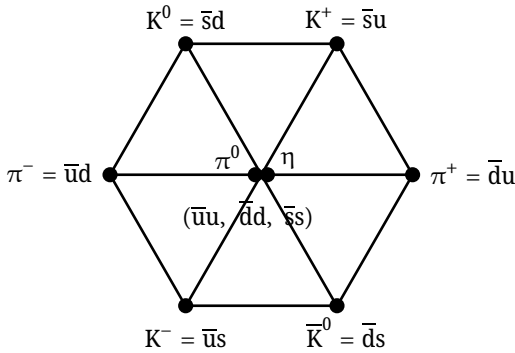


Abb. 1.1: Oktett der pseudoskalaren Mesonen.

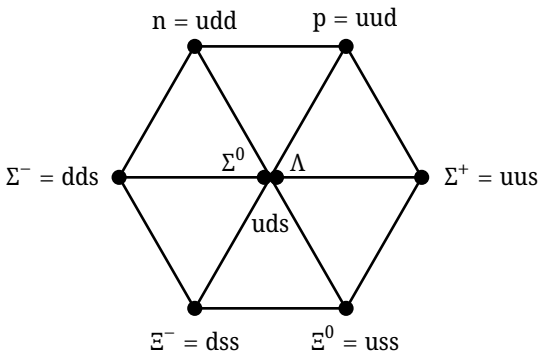


Abb. 1.2: Baryonen-Oktett.

Quark-Confinement

Jedes der sechs Quarks und der sechs Antiquarks tritt in drei Varianten auf, die durch die Quantenzahl **Colour** (Farbe) gekennzeichnet sind und als r , g und b bezeichnet werden können. Diese Quantenzahl wurde ursprünglich im Zusammenhang mit dem Ω^- -Baryon postuliert. Das $\Omega^- = sss$ besteht aus drei s-Quarks und besitzt Spin 3/2. Seine Wellenfunktion ist daher symmetrisch in den Spin-Koordinaten. Da es sich um den Grundzustand im Sektor mit seinen Quantenzahlen handelt, ist die Wellenfunktion ebenfalls symme-

trisch in den Ortskoordinaten. Das Pauli-Prinzip kann nur erfüllt sein, wenn sich die drei Strange-Quarks in einer weiteren Quantenzahl unterscheiden, die als Colour bezeichnet wird. Auf die Rolle von Colour für die starken Wechselwirkungen der Quarks wird im Kapitel über die Quantenchromodynamik genauer eingegangen.

Quarks treten in der Natur offenbar nicht als einzelne, ungebundene Teilchen auf. Diese Beobachtung hat zur Hypothese des **Quark-Confinement** (Einschluss) geführt: Alle Hadronen sind farblose (colour-neutrale) Kombinationen von Quarks.

Drei Generationen von Konstituenten

Leptonen und Quarks stellen im Standardmodell die fundamentalen Konstituenten der Materie dar. Aufgrund ihrer deutlich unterschiedlichen Massen und der Quantenzahlen Ladung Q und Baryonenzahl B teilt man sie in drei Generationen ein, welche die gleiche Struktur aufweisen. Diese sind in der Tabelle 1.2 zusammengestellt. Der Grund, warum z. B. (ν_e, e^-) und (u, d) zur gleichen Generation gehören, und nicht etwa (ν_e, e^-) und (c, s) , wird später im Kapitel über die schwache Wechselwirkung gegeben.

Tab. 1.2: Die drei Generationen von Leptonen und Quarks (die Massen der Quarks sind die sogenannten Stromquarkmassen).

	Masse [MeV]	Q	B
ν_e	≈ 0	0	0
e^-	0,511	-1	0
u	≈ 2	2/3	1/3
d	≈ 5	-1/3	1/3
ν_μ	≈ 0	0	0
μ^-	105,66	-1	0
c	≈ 1270	2/3	1/3
s	≈ 93	-1/3	1/3
ν_τ	≈ 0	0	0
τ^-	1777,0	-1	0
t	$\approx 173\,100$	2/3	1/3
b	$\approx 4\,180$	-1/3	1/3

Eine charakteristische Eigenschaft der Generationen von Leptonen und Quarks besteht darin, dass die Summe der Ladungen null beträgt:

$$\sum Q_i = 0,$$

wie in Abb. 1.3 dargestellt ist. Dabei ist zu beachten, dass die Quark-Flavours jeweils noch in drei Colours auftreten.

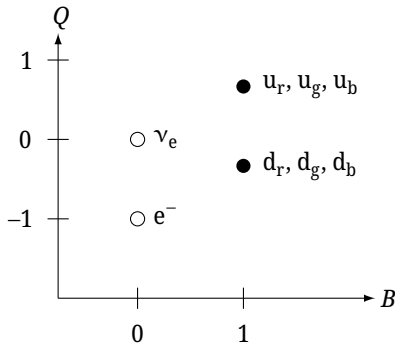


Abb. 1.3: Elektrische Ladungen und Baryonenzahlen in einer Generation.

Fragen zum Nachdenken.

Nukleonen sind aus Quarks zusammengesetzt und haben eine innere Struktur und Ausdehnung. Elektronen werden hingegen als punktförmig bezeichnet. Wie verträgt sich das mit der Heisenberg'schen Unschärfere-lation?



Übungen.

1. Beschreiben Sie die Reaktion $\bar{p} + n \rightarrow \pi^- + \pi^0$ im Quark-Modell!
2. Was sind die Antiteilchen von π^0 und Ξ^0 ?



1.2 Wechselwirkungen

Eine wichtige Leitidee in der fundamentalen Physik ist die Vereinheitlichung. Dabei geht es darum, in der Fülle der physikalischen Erscheinungen gemeinsame Prinzipien und Ursachen zu finden. Insbesondere zieht sich das Bemühen, die verschiedenen Arten von Kräften auf gemeinsame Wurzeln zurückzuführen, wie ein roter Faden durch die Geschichte der Physik. Das Postulat Newtons, dass die Schwerkraft, die uns am Boden hält, und die Kraft, die den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält, verschiedene Instanzen der gleichen Kraft sind, war ein wichtiger Schritt zur Vereinigung der grundlegenden Kräfte in der Natur. Ebenso war es die Vereinigung von Magnetismus und Elektrizität durch Faraday und Maxwell, die zu einem neuen Verständnis des Wesens von Licht führte, und ein Jahrhundert später die Vereinigung von Elektromagnetismus und schwachen Wechselwirkungen der Elementarteilchen.

Heute unterscheiden wir vier fundamentale Wechselwirkungen:

(a) Elektromagnetische Wechselwirkungen.

Sie wirken auf elektrisch geladene Teilchen. Da die elektrostatische Kraft mit dem Abstand proportional zu $1/r^2$ abfällt, und nicht exponentiell, spricht man davon, dass die *Reichweite* der elektromagnetischen Wechselwirkungen unendlich ist. Ein weiteres Charakteristikum von Wechselwirkungen ist ihre *relative Stärke* im Ver-

gleich zu anderen Wechselwirkungen. Beim Elektromagnetismus ist sie durch Sommerfelds **Feinstrukturkonstante** α gegeben.

$$\text{Reichweite} = \infty \quad (1.1)$$

$$\text{relative Stärke} = \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (1.2)$$

(b) **Schwache Wechselwirkungen.**

Sie sind für den β -Zerfall und andere Elementarteilchen-Prozesse verantwortlich.

$$\text{Reichweite} \approx 10^{-18} \text{ m} \quad (1.3)$$

$$\text{relative Stärke} \approx 10^{-5} \quad (1.4)$$

(c) **Starke Wechselwirkungen.**

Sie sind u. a. für die Bindung der Quarks zu Hadronen und für hadronische Wechselwirkungen verantwortlich. Die Kernkräfte sind indirekte Auswirkungen der starken Wechselwirkungen.

$$\text{Reichweite} \approx 10^{-15} \text{ m} \quad (1.5)$$

$$\text{relative Stärke} \approx 1 \quad (1.6)$$

(d) **Gravitation.**

Die Schwerkraft wirkt auf jegliche Art von Materie. Sie ist immer anziehend. Während es positive und negative elektrische Ladungen gibt, gibt es keine negativen Massen und folglich kann die Schwerkraft nicht abgeschirmt werden. Die Reichweite dieser Kraft ist unendlich, wie diejenige des Elektromagnetismus. Wenn man die Schwerkraft zwischen Proton und Elektron im H-Atom mit deren elektrostatischer Anziehung vergleicht, findet man, dass die Schwerkraft außerordentlich schwach ist.

$$\text{Reichweite} = \infty \quad (1.7)$$

$$\text{relative Stärke} \approx 10^{-39} \quad (1.8)$$

Austauschteilchen

In QT, Kapitel 20, haben wir gesehen, dass das elektromagnetische Feld im Rahmen der Quantentheorie äquivalent zu einem System von masselosen Teilchen, den Photonen, ist. Die elektromagnetischen Wechselwirkungen können beschrieben werden als Vorgänge, bei denen Photonen zwischen Ladungsträgern ausgetauscht werden. Die Photonen werden daher als Austauschteilchen dieser Wechselwirkungen bezeichnet.

Dieses Konzept wurde von Yukawa 1935 auf die Kernkräfte zwischen Nukleonen angewandt. Als Austauschteilchen postulierte er massive Teilchen mit Spin 0. Es zeigt sich, dass die Reichweite der Wechselwirkung durch die Compton-Wellenlänge der Austauschteilchen gegeben ist,

$$\text{Reichweite } R \approx \frac{\hbar}{m c}. \quad (1.9)$$

Zu den oben genannten fundamentalen Wechselwirkungen gehören ebenso jeweils Austauschteilchen. Sie haben ganzzahligen Spin und sind somit Bosonen. In Tabelle 1.3 sind diese Bosonen zusammengestellt.

Tab. 1.3: Austauschteilchen der Wechselwirkungen.

Wechselwirkung	Bosonen	Spin	Masse, Reichweite
elektromagnetisch	Photon γ	1	$m = 0, R = \infty$
schwach	W^+, W^-, Z^0	1	$m_W = 80,4 \text{ GeV}, m_Z = 91,2 \text{ GeV}, R \neq 0$
stark	Gluonen G	1	$m = 0, R \neq 0$
gravitativ	Graviton	2	$m = 0, R = \infty$

Im Fall der Gluonen gilt der Zusammenhang zwischen Reichweite und Masse nicht. Dies liegt daran, dass Gluonen ebenso wie Quarks dem Confinement unterliegen und nicht als freie Teilchen vorkommen. Daraus resultiert eine endliche Reichweite der starken Wechselwirkungen.

Dass die Austauschteilchen für die ersten drei Wechselwirkungen den Spin 1 besitzen, ist eine Konsequenz der Eichtheorien und wird später noch ausführlicher behandelt. Der Spin der Austauschteilchen hängt mit der Frage zusammen, ob die zugehörige Kraft nur anziehend oder sowohl anziehend als auch abstoßend sein kann. Für Spin 1 gibt es Anziehung und Abstoßung, während im Fall von Spin 0 oder 2 nur anziehende Kräfte auftreten.

Die Existenz des masselosen Gravitons ist eine theoretische Vorhersage, die möglicherweise nie experimentell bestätigt wird. Die Entdeckung von Gravitationswellen war eine außerordentlich schwierige technische Meisterleistung, aber der Nachweis der zugehörigen Quanten würde noch ungleich schwieriger sein.

Fragen zum Nachdenken.

Das Pauli-Prinzip verbietet gleichartigen Fermionen, den gleichen Zustand einzunehmen. Bedeutet das, dass außer den oben genannten Wechselwirkungen eine weitere abstoßende Kraft im Spiel ist?





Übungen.

1. Wie groß ist das Verhältnis der Coulombkraft zur Gravitationskraft zwischen Proton und Elektron, wenn sie als klassische Punktteilchen betrachtet werden?
2. Welche Reichweite hat eine Kraft, die durch den Austausch von (a) Z-Bosonen, (b) Pionen vermittelt wird?

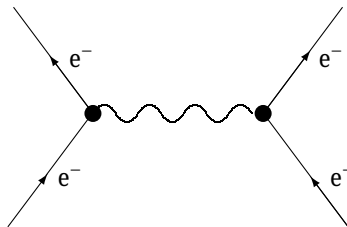
1.3 Theorien

Die Theorien zur Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen werden in diesem Buch noch detailliert eingeführt. An dieser Stelle soll bereits ein erster knapper Blick darauf geworfen werden.

Quantenelektrodynamik

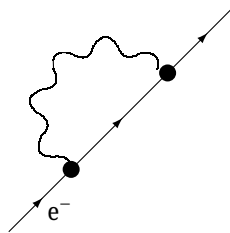
Der Ursprung der Quantenelektrodynamik (QED) liegt im Jahr 1927, als Jordan in einem Anhang der Arbeit von Born, Heisenberg und Jordan über die Matrizenmechanik das freie elektromagnetische Feld nach den Regeln der Quantentheorie behandelte. Die Theorie wurde von Dirac, Jordan, Pauli, Heisenberg und anderen weiterentwickelt und gipfelte vor 1950 im Werk von Tomonaga, Schwinger, Feynman und Dyson. Die Berechnung der Lamb-Verschiebung und des genauen Wertes des gyromagnetischen Faktors g des Elektrons waren Glanzleistungen der QED.

In der QED wird die elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch von virtuellen Photonen beschrieben. Graphisch kann das durch Feynman-Diagramme visualisiert werden, die Beiträge zur störungstheoretischen Entwicklung nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten $\alpha \approx 1/137$ darstellen. Zum Beispiel sieht das führende Diagramm für die Streuung zweier Elektronen aneinander durch den Austausch eines Photons so aus:



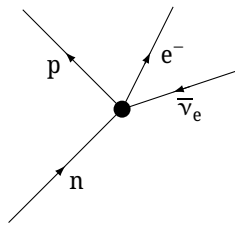
Jeder Vertex trägt einen Faktor e (elektrische Ladung) bei, sodass dieses Diagramm zu einem Beitrag proportional zu $e^2 \propto \alpha$ gehört.

Auch die Ausbreitung eines einzelnen Elektrons ist durch die Emission und Absorption virtueller Photonen beeinflusst, wie beispielsweise in diesem Diagramm gezeigt ist:



Schwache Wechselwirkung

Die Theorie der schwachen Wechselwirkungen nahm ihren Anfang 1932 in Fermis Theorie des β -Zerfalls. Das Feynman-Diagramm für den Zerfall eines Neutrons enthält eine Vier-Fermionen-Kopplung:



Verbesserungen der Theorie des β -Zerfalls von Kernen, welche die Paritätsverletzung berücksichtigen, wurden mit der V-A-Theorie gemacht, allerdings waren diese Ansätze mit schweren theoretischen Problemen behaftet. Während in der QED die störungstheoretische Entwicklung nach Potenzen von α hervorragende Resultate liefert, führt die Störungsrechnung in der Fermi-Theorie zu unendlichen Ausdrücken, die nicht mit dem Verfahren der Renormierung in endliche Ergebnisse überführt werden können.

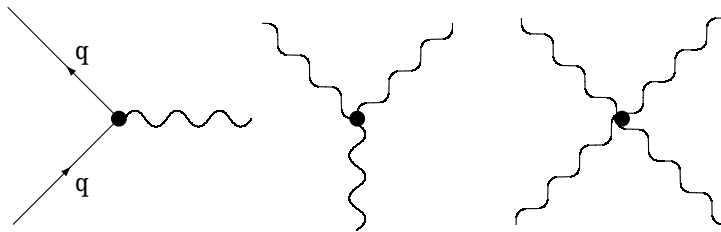
Die Probleme der Fermi- und V-A-Theorie wurden in den Jahren 1961–1968 durch Glashow, Weinberg, Salam und anderen in der vereinigten Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen gelöst. Die Austauschteilchen in dieser Theorie sind

Vektorbosonen $W^\pm$, Z^0 und Photon γ .

Starke Wechselwirkung

Die starken Wechselwirkungen zwischen Quarks werden durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben, die 1973 von Fritzsch, Gell-Mann und Leutwyler formuliert wurde, und von 't Hooft, Gross, Wilczek, Politzer und anderen weiterentwickelt wurde. Ihr Name bezieht sich darauf, dass die Ladungen der starken Kräfte durch die Quantenzahl Colour gegeben sind. Die Austauschteilchen der starken Wechselwirkungen sind die Gluonen. Im Unterschied zu den elektrisch neutralen Photonen der QED tragen die Gluonen selbst Farbladung und wechselwirken untereinander. Aufgrund ihrer Selbstwechselwirkung sind sie in der Lage, sogenannte Gluebälle als gebundene Zustände zu bilden. Eine reine Gluonen-Theorie ohne Quarks ist bereits nichttrivial und stellt ein kompliziertes physikalisches System dar.

In den Feynman-Diagrammen der QCD treten drei Arten von Vertices auf, welche die fundamentalen Wechselwirkungen der Quarks mit den Gluonen und die Wechselwirkungen der Gluonen untereinander darstellen:



Gravitation

Die Gravitation wird in sehr guter Übereinstimmung mit den Erkenntnissen der Astrophysik und Kosmologie durch die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) Einsteins beschrieben. Die ART ist eine nichtlineare Theorie, deren Gleichungen bis auf wenige Ausnahmen nur näherungsweise oder mit numerischen Methoden gelöst werden können. Eine anerkannte Quantentheorie der Gravitation ist noch nicht bekannt. Mögliche Kandidaten dafür sind die Stringtheorie und die sogenannte Schleifen-Gravitation. Da die Gravitation im Bereich der Elementarteilchenphysik keine Rolle spielt, wird sie im Folgenden nicht weiter behandelt werden.

Das Standardmodell

Mit dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist die vereinigte elektroschwache Theorie von Glashow, Weinberg und Salam (GWS-Theorie) plus die Quantenchromodynamik (QCD) gemeint. Die Lagrangefunktionen für die elektroschwachen und für

die starken Wechselwirkungen mischen nicht miteinander, sodass wir nicht von einer Vereinigung dieser Wechselwirkungen sprechen. Das Standardmodell hat sich außerordentlich gut bewährt und steht in bester Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, bis auf die bereits erwähnten Hinweise auf die Physik jenseits des Standardmodells.

Allen Teilen des Standardmodells ist gemeinsam, dass die Wechselwirkungen durch Austauschteilchen vermittelt werden, die zu Eichfeldern gehören. Die entsprechenden Eichtheorien weisen lokale Eichsymmetrien auf, die wir noch genauer betrachten werden. (Übrigens kann auch die Gravitation als auf einer lokalen Symmetrie basierend betrachtet werden.) Die Eichsymmetrien gehören zu bestimmten Gruppen, den Eichgruppen. Die Eichgruppe, die das Standardmodell kennzeichnet, ist das direkte Produkt von drei Eichgruppen, die zu den Wechselwirkungen gehören:

$$\underbrace{\text{SU}(3)}_{\text{QCD}} \otimes \underbrace{\text{SU}(2) \otimes \text{U}(1)}_{\text{GWS}} . \quad (1.10)$$

Die zentralen Prinzipien des Standardmodells sind

- lokale Eichsymmetrie,
- Higgs-Mechanismus.

Der Higgs-Mechanismus geht auf eine Reihe von Physikern zurück, nämlich Anderson, Englert, Brout, Higgs, Guralnik, Hagen und Kibble. Er ist hauptsächlich relevant für den elektroschwachen Sektor. Durch ihn erhalten die Austauschteilchen $W^\pm$, Z^0 , aber auch die Quarks und Leptonen ihre Masse. Der Higgs-Mechanismus erfordert die Existenz des Higgs-Feldes. Das zugehörige Teilchen, das Higgs-Boson, wurde im Jahr 2012 am Teilchenbeschleuniger CERN experimentell nachgewiesen.

Während das Standardmodell ansonsten fermionische Materieteilchen und bosonische Austauschteilchen enthält, fügt sich das Higgs-Feld nicht recht in diese Struktur ein und ist darin so eine Art „hässliches Entlein“, dessen Daseinszweck darin besteht, anderen Teilchen Masse zu geben. Einige Physiker spekulieren, dass das Higgs-Teilchen nicht elementar, sondern ein gebundener Zustand von noch unbekannten Fermionen ist.

Ausblick

Die Wechselwirkungen sind im Standardmodell nicht wirklich vereinigt, was sich darin widerspiegelt, dass die Eichgruppe ein direktes Produkt von einfachen¹ Lie-Gruppen ist. Eine Vereinigung der Wechselwirkungen wird in Ansätzen zu vereinig-

¹ Eine Lie-Gruppe heißt einfach, wenn sie keinen nichttrivialen zusammenhängenden Normalteiler besitzt.

ten Theorien, **Grand Unified Theories** (GUT), versucht. In ihnen wird die Gruppe $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ zu einer einfachen Lie-Gruppe erweitert, beispielsweise $SU(5)$, $SO(10)$ oder die Ausnahme-Lie-Gruppe E_6 . Vereinigte Theorien der Wechselwirkungen sagen den Zerfall der Protonen mit einer sehr großen Halbwertszeit voraus, und weiterhin die Existenz mehrerer Higgs-Teilchen.

**Fragen zum Nachdenken.**

1. Die Gravitation ist extrem viel schwächer als die anderen Wechselwirkungen. Woran liegt es aber, dass wir im Alltag hauptsächlich die Schwerkraft spüren?
 2. Wieso zerfällt das Neutron über die schwache Wechselwirkung, obwohl Neutron und eines seiner Zerfallsprodukte, das Proton, stark wechselwirken?
-

2 Feldtheorie

Die Quantenfeldtheorie ist die Theorie quantisierter Felder. Im Unterschied zur Quantenmechanik bilden nicht Teilchen sondern Felder den fundamentalen Gegenstand der Theorie. In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Feldtheorie behandelt. Zunächst wird ein Überblick über die Grenzen und Probleme der Quantenmechanik gegeben, welche in der relativistischen Quantenfeldtheorie ihre Lösung finden. Nach einer Rekapitulation der Konzepte der speziellen Relativitätstheorie werden die wichtigsten relativistischen Feldgleichungen eingeführt: die Klein-Gordon-Gleichung, die Diracgleichung und die Maxwell-Gleichungen. Sodann folgt der Lagrange-Formalismus für Felder, der für ihre theoretische Behandlung eine zentrale Rolle spielt. Hierbei werden die Felder zunächst als klassisch, d. h. nicht quantisiert, betrachtet. Das Kapitel schließt mit einem ersten Blick auf die Quantisierung von Feldern.

2.1 Die Grenzen der Quantenmechanik

Bei nicht zu großen Energien wird das Verhalten von Teilchen im Rahmen der Quantenphysik sehr gut durch die nichtrelativistische Quantenmechanik beschrieben. Der Zustand eines einzelnen Teilchens wird repräsentiert durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$, deren zeitliche Entwicklung durch die Schrödingergleichung bestimmt ist. Systeme mit mehreren Teilchen, z. B. mit einer *festen Teilchenzahl* N erfordern dagegen eine Wellenfunktion mit N Ortsvariablen

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t). \quad (2.1)$$

Systeme, die auf diese Weise gut beschrieben werden können, sind beispielsweise

- die Atomhülle,
- Moleküle,
- Festkörper (Phononen, Magnonen, Exzitonen),
- Atomkerne.

Es zeigen sich Grenzen für den Gültigkeitsbereich der nichtrelativistischen Quantenmechanik z. B. bei der Atomhülle, wie wir in der Quantentheorie (QT) gesehen haben. Die Feinstruktur der Spektrallinien, die Spin-Bahn-Kopplung, der Darwin-Term und Energiekorrekturen $\sim p^4$ sind relativistische Effekte. In der relativistischen Quantenmechanik wird versucht, diese Effekte zu berücksichtigen, indem die relativistische Energie-Impulsbeziehung, die für ein freies Teilchen

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (2.2)$$

lautet, zum Ausgangspunkt von Wellengleichungen herangezogen wird und zur Klein-Gordon-Gleichung und Diracgleichung führt. In QT wird beschrieben, dass in der re-

lativistischen Quantenmechanik grundlegende Probleme auftreten. Die Klein-Gordon-Gleichung lässt Lösungen mit negativen, nach unten unbeschränkten Energien zu, was die Existenz eines Grundzustandes verhindert. Als weiteres Problem führt die Klein-Gordon-Gleichung sogar zu negativen Wahrscheinlichkeiten. Überdies können in der relativistischen Quantenmechanik mit fester Teilchenzahl offenbar keine Teilchen-Erzeugungs- und -Vernichtungs-Prozesse behandelt werden, die jedoch in der Elementarteilchenphysik eine wichtige Rolle spielen. Im Fall der Diracgleichung konnte das Problem der negativen Energien zwar durch Diracs geniale Idee des vollbesetzten Sees der negativen Zustände gelöst werden, aber in gewissen Situationen treten ebenfalls negative Wahrscheinlichkeiten auf (Klein'sches Paradoxon).

Die genannten Probleme erfahren erst in der relativistischen Quantenfeldtheorie eine befriedigende Lösung. Wie wir sehen werden, gehören negative Frequenzen nicht zu negativen Energien, sondern zu Antiteilchen. Die Existenz der Antiteilchen hat zur Folge, dass die Teilchenzahl N als variabel zu betrachten ist.

Die wichtigsten Phänomene, die von der Quantenfeldtheorie beschrieben werden, sind

- Die Existenz von Antiteilchen. (Allerdings kann ein Teilchen, das keine Ladungen trägt, auch sein eigenes Antiteilchen sein, z. B. das Photon oder das hypothetische Majorana-Neutrino.)
- Variable Teilchenzahl N . In einer Theorie, die Wechselwirkungen beinhaltet, können Teilchen erzeugt und vernichtet werden. Die Möglichkeit variabler Teilchenzahlen löst auch das Problem negativer Wahrscheinlichkeiten und von Wahrscheinlichkeiten, die den Wert 1 übersteigen.
- Statistik. Die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Statistik werden begründet, ebenso der Spin-Statistik-Zusammenhang.

Das Teilchen-Feld-Konzept in der Quantenfeldtheorie

Die klassische Physik kennt als fundamentale physikalische Einheiten zwei grundsätzlich verschiedene Systeme: auf der einen Seite die Teilchen und auf der anderen Seite die Felder – insbesondere als elektromagnetisches Feld (Maxwellfeld). Während ein Teilchen durch die Angabe seines Ortes $\vec{r}(t)$ als Funktion der Zeit festgelegt ist, ist ein Feld ein kontinuierliches System mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden, welches mathematisch durch eine oder mehrere Funktionen $\phi_i(\vec{r}, t)$ beschrieben wird.

In der Quantenmechanik ist diese Zweiteilung nicht aufgehoben. Ein Teilchen wird durch eine Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ beschrieben, die nicht als klassische Größe interpretiert wird, sondern die Wahrscheinlichkeiten für das Verhalten des Teilchens liefert. Felder hingegen treten als äußere Felder, z. B. als Maxwellfeld, auf und werden als klassische Größen interpretiert.

In der Quantenfeldtheorie werden die Regeln der Quantentheorie auf Felder angewandt. Das historisch erste Beispiel eines quantisierten Feldes war das Maxwellfeld.

Die Quantisierung des Maxwellfeldes führt dazu, dass dieses System sich als äquivalent zu einer Gesamtheit von Teilchen, den Photonen, erweist. Es kann also sowohl als quantisiertes Feld als auch als quantisierte Theorie vieler Teilchen betrachtet werden. Auf diese Weise findet der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht seinen vollständigen Ausdruck.

In analoger Weise gelangt man durch die Quantisierung des klassischen Schrödinger-Materiefeldes zu einer Mehrteilchen-Quantentheorie mit beliebiger Teilchenzahl N , was eine nichtrelativistische Quantenfeldtheorie darstellt.

Die relativistische Quantenfeldtheorie kann schließlich Objekte der Hochenergiephysik, also Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen, in einheitlicher Weise beschreiben.

2.2 Relativistische Feldgleichungen

2.2.1 Grundelemente der speziellen Relativitätstheorie

Die wichtigsten Begriffe und Notationen der speziellen Relativitätstheorie, die in QT eingeführt wurden, sollen hier noch einmal zusammengefasst und ergänzt werden. Ereignisse in der Raumzeit werden durch Vektoren in einem Minkowski-Raum repräsentiert,

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\mu), \quad x^0 = ct. \quad (2.3)$$

Der metrische Fundamentaltensor ist

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

und das Minkowski-Skalarprodukt wird mit der Einstein'schen Summationskonvention geschrieben als

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu. \quad (2.5)$$

Das Herunterziehen eines Index mittels

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.6)$$

lässt die Zeitkomponente eines Vektors unverändert, während die räumlichen Komponenten ihr Vorzeichen umkehren,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}). \quad (2.7)$$

Eine Lorentz-Transformation $\Lambda: x \rightarrow x'$ wird durch eine 4×4 -Matrix beschrieben:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (2.8)$$

Sie soll das Minkowski-Skalarprodukt unverändert lassen. Durch die Bedingung

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}, \quad (2.9)$$

oder in Matrixschreibweise $\Lambda^T g \Lambda = g$, wird dies garantiert:

$$x' \cdot y' = \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} y^{\sigma} = x^{\rho} g_{\rho\sigma} y^{\sigma} = x \cdot y. \quad (2.10)$$

Die Menge der Lorentz-Transformationen Λ bildet die Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$, die sechs freie Parameter hat. Aufgrund von Gl. (2.9) gilt

$$|\det \Lambda| = 1. \quad (2.11)$$

Für die Physik ist die Menge der eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen wichtig:

$$\mathcal{L}^{\uparrow}_+ = \{ \Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda^0_0 \geq 1, \det \Lambda = +1 \}. \quad (2.12)$$

Dabei bedeutet $\Lambda^0_0 \geq 1$, dass nur Lorentz-Transformationen, welche die Zeitrichtung nicht umkehren, betrachtet werden, und $\det \Lambda = +1$ lässt nur solche Lorentz-Transformationen zu, die stetig aus der Identität hervorgehen – räumliche Spiegelungen sind damit ausgeschlossen.

Ein bekanntes Beispiel für Lorentz-Transformationen sind die **Boosts**, die den Übergang von einem Bezugssystem zu einem dazu geradlinig gleichförmig bewegten anderen Bezugssystem bewerkstelligen. Ein Lorentz-Boost in x -Richtung lautet:

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta ct), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x^1), \quad (2.13)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

In der Matrixdarstellung lautet diese Transformation

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe bilden die räumlichen Rotationen, die charakterisiert sind durch

$$t' = t, \quad \vec{r}' = R \cdot \vec{r} \quad (2.16)$$

mit einer 3×3 Rotationsmatrix R . Die entsprechende Matrix Λ ist

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (2.17)$$

Eine infinitesimale Lorentz-Transformation notieren wir als

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu + \epsilon \omega^\mu_\nu + O(\epsilon^2) \\ \Lambda &= \mathbf{1} + \epsilon \omega + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit einem infinitesimalen Parameter ϵ . Aus der definierenden Gl. (2.9) der Lorentz-Transformationen folgt

$$g_{\mu\sigma} \omega^\mu_\rho + g_{\rho\nu} \omega^\nu_\sigma = 0. \quad (2.19)$$

Durch Herunterziehen eines Index besagt dies, dass die Matrix $(\omega_{\sigma\rho})$ antisymmetrisch ist:

$$\omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}. \quad (2.20)$$

Das zeigt, dass ω – und damit die Lorentz-Transformationen – durch sechs reelle Parameter bestimmt ist. Die sechs Parameter entsprechen drei Freiheitsgraden für Lorentz-Boosts und drei Freiheitsgraden für die Rotation. Für eine infinitesimale Geschwindigkeit β ist die zugehörige ω -Matrix gegeben durch

$$(\omega^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Durch das Heraufziehen eines Index wird $(\omega^{\mu\nu})$ antisymmetrisch. Ein infinitesimaler Lorentz-Boost in einer beliebigen Richtung ist gegeben durch

$$\omega^{0j} = -\omega^{j0}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.22)$$

dabei sind $c \omega^{0j}$ die drei Komponenten der Geschwindigkeit.

Die infinitesimalen räumlichen Drehungen mit Drehwinkel ϵ sind

$$R = \mathbf{1}_{3 \times 3} + \epsilon \widetilde{\omega}. \quad (2.23)$$

Hierin ist $\widetilde{\omega}$ eine antisymmetrische 3×3 -Matrix, die als Parameter die drei Komponenten der Drehachse $\vec{n}$ enthält,

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega}_{ij} = -\epsilon_{ijk} n_k. \quad (2.24)$$

Für die Ableitungen verwenden wir die Konventionen:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (2.25)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad (2.26)$$

$$\square = -\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta. \quad (2.27)$$

 Der Wellenoperator oder d'Alembert-Operator $\square$ ist ebenfalls Lorentz-invariant: $\partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu$. Achtung: In einigen Büchern wird er mit dem entgegengesetzten Vorzeichen definiert.

Energie und Impuls eines Teilchens bilden die Komponenten des Vierer-Impulses oder Energie-Impuls-Vektors,

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (2.28)$$

Die Länge des Vierer-Impulses ist Lorentz-invariant:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.29)$$

Dies ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung.

In der Strömungsmechanik, der Elektrodynamik und der Quantenmechanik gibt es Kontinuitätsgleichungen von der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.30)$$

die lokale Erhaltungssätze formulieren. Mithilfe des Gauß'schen Satzes folgt die globale Erhaltung der Größe

$$Q = \int d^3r \rho(\vec{r}, t) = \text{konst}, \quad \frac{d}{dt} Q = 0. \quad (2.31)$$

In der Maxwell-Theorie bedeuten $\rho(\vec{r}, t)$ die Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ die Dichte des elektrischen Stromes, in der Quantenmechanik übernehmen Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstrom im Sinne der Born'schen statistischen Deutung diese Rollen.

Die relativistische Form der Kontinuitätsgleichungen erhält man mit

$$j^0 \doteq c\rho, \quad (2.32)$$

$$(j^\mu) \doteq (c\rho, \vec{j}) . \quad (2.33)$$

Damit ergibt sich die Kontinuitätsgleichung als Gleichung für Vierervektoren

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (2.34)$$

Man beachte, dass die globale Ladung Q zu einem festen Zeitpunkt t_0

$$Q = \int_{t_0 \text{ fest}} d^3x \rho(x) \quad (2.35)$$

nicht relativistisch kovariant geschrieben ist. Gleichwohl kann man mithilfe des Gauß'schen Satzes zeigen, dass die im transformierten Bezugssystem definierte Ladung

$$Q' = \int_{t'_0 \text{ fest}} d^3x' \rho(x') \quad (2.36)$$

denselben Wert $Q' = Q$ besitzt, also invariant ist.

2.2.2 Feldgleichungen

Im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik wurden in QT die Klein-Gordon-Gleichung und die Diracgleichung eingeführt und diskutiert. Wir wollen diese Gleichungen hier noch einmal ins Gedächtnis rufen. Ihre Interpretation im Rahmen der Quantenfeldtheorie ist jedoch eine andere: Sie werden zunächst als klassische Feldgleichungen betrachtet, die sodann der Quantisierung unterworfen werden.

2.2.2.1 Klein-Gordon-Gleichung

Bekanntlich führen die Substitutionsregeln

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} , \quad \vec{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (2.37)$$

von der nichtrelativistischen Energie-Impuls-Beziehung für ein einzelnes Teilchen in einem Potenzial V , nämlich $E = \frac{p^2}{2m} + V$, zur Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi(\vec{r}, t) . \quad (2.38)$$

Die obigen Substitutionsregeln führen im relativistischen Fall in gleicher Weise von der Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.39)$$

zur Wellengleichung

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \Delta \varphi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \varphi(\vec{r}, t) . \quad (2.40)$$

In Lorentz-kovarianter Schreibweise liest sich das als

$$p^\mu \longrightarrow i\hbar \partial^\mu , \quad (2.41)$$

$$(-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu - m^2 c^2) \varphi(x) = 0. \quad (2.42)$$

Dies ist die Klein-Gordon-Gleichung. Nun mögen Sie als Leser einwenden, dass diese Gleichung wohl nicht als Feldgleichung für ein klassisches Feld betrachtet werden könne, da in ihr die (reduzierte) Planck'sche Konstante $\hbar$ vorkommt. Dem ist aber nicht so. Wir könnten hier eine Konstante $\kappa = m/\hbar$ einführen und damit die Klein-Gordon-Gleichung ohne Verwendung von $\hbar$, sondern mit κ aufschreiben. Später würde sich dann herausstellen, dass die quantisierte Version der Gleichung mit Teilchen der Masse $m = \hbar\kappa$ zu tun hat. Dort erst würde $\hbar$ ins Spiel kommen. Aufgrund des historischen Ursprungs der Gleichung als quantenmechanische Wellengleichung ist es jedoch üblich, sie von Anfang an mit m und $\hbar$ zu formulieren.

Für ein elektrisch geladenes Teilchen mit Ladung q in den äußeren elektromagnetischen Potenzialen $\Phi(x)$ und $\vec{A}(x)$ sind in obigen Formeln Energie und Impuls folgendermaßen zu ersetzen:

$$E \longrightarrow E - q\Phi , \quad \vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A} , \quad (2.43)$$

bzw. in kovarianter Form

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu . \quad (2.44)$$

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet damit

$$(E - q\Phi)^2 = (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4 . \quad (2.45)$$

In kovarianter Form ist das

$$(p - qA)^2 = m^2 c^2 . \quad (2.46)$$

Für die Wellengleichung müssen wir entsprechend

$$i\hbar \partial^\mu \longrightarrow i\hbar \partial^\mu - qA^\mu \quad (2.47)$$

setzen und erhalten so die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$(i\hbar \partial_\mu - qA_\mu)(i\hbar \partial^\mu - qA^\mu) \varphi = m^2 c^2 \varphi . \quad (2.48)$$

2.2.2.2 Diracgleichung

Dirac stellte 1928 eine relativistische Wellengleichung auf, die linear in den Ableitungen ∂_μ ist. In der Schreibweise, die analog zur Schrödingergleichung ist,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi, \quad (2.49)$$

lautet der Dirac'sche Hamiltonoperator

$$H_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta mc^2 = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2. \quad (2.50)$$

Hierin sind α_k , $k = 1, 2, 3$, und β hermitesche Matrizen. Diese genügen den Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 2\delta_{jk}, \\ \alpha_k \beta + \beta \alpha_k &= 0, \\ \beta^2 &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

um die Gültigkeit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung in der Form

$$H_D^2 = c^2 \vec{P}^2 + m^2 c^4 \quad (2.52)$$

zu gewährleisten. Die von Dirac gefundene Lösung durch 4×4 -Matrizen kann in Blockform mit den Pauli-Matrizen σ_k geschrieben werden als

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Die Wellenfunktionen haben entsprechend vier Komponenten

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

und die Diracgleichung ist ein System von vier linearen Gleichungen. Die sogenannte kovariante Schreibweise der Diracgleichung verwendet die γ -Matrizen

$$\gamma^0 \doteq \beta, \quad \gamma^k \doteq \beta \alpha_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.55)$$

und lautet

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\gamma^\mu p_\mu - mc) \psi = 0. \quad (2.56)$$

Die γ -Matrizen erfüllen die Antikommutationsregeln

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (2.57)$$

Diese Relationen definieren die Basis einer sogenannten **Clifford-Algebra**. In der Dirac'schen Darstellung haben wir explizit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Der Viererstrom j^μ , der die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt, kann mit den Definitionen

$$\psi^\dagger \doteq (\psi^*)^T = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*), \quad (2.59)$$

$$\bar{\psi} \doteq \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \quad (2.60)$$

geschrieben werden als

$$j^\mu = c \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.61)$$

In gleicher Weise wie bei der Klein-Gordon-Gleichung erfolgt die Ankopplung an ein äußeres elektromagnetisches Feld $A_\mu(x)$ durch die Ersetzungsvorschrift (2.47) und führt auf

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - q \gamma^\mu A_\mu - mc) \psi = 0. \quad (2.62)$$

Wie bereits bei der Klein-Gordon-Gleichung betont, wollen wir $\psi(x)$ hier als klassisches Feld betrachten, in diesem Fall mit vier Komponenten.

2.2.2.3 Maxwell-Gleichungen

Ein weiteres wichtiges System von Feldgleichungen sind die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld. Bei Anwesenheit von Ladungen und Strömen lauten sie

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.63)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.64)$$

wobei $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ gilt. In der Elektrodynamik haben wir gelernt, dass die Feldstärken sich durch die Potentiale $\vec{A}$ und Φ mittels

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.65)$$

ausdrücken lassen. Die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen sind dann automatisch erfüllt.

In der relativistischen Feldtheorie wird gerne das Heaviside-Lorentz-System verwendet, in dem die Konstanten μ_0 und ε_0 nicht vorkommen, und in dem Raum und Zeit in den Gleichungen explizit gleichberechtigt behandelt werden. Die Umrechnung geschieht mit

$$\vec{E}_H = \sqrt{\varepsilon_0} \vec{E}, \quad \vec{B}_H = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad \Phi_H = \sqrt{\varepsilon_0} \Phi, \quad \vec{A}_H = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \vec{A}, \quad (2.66)$$

$$\rho_H = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \rho, \quad \vec{j}_H = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \vec{j}. \quad (2.67)$$

Den Index H werden wir im Folgenden fortlassen. Die Maxwell-Gleichungen und der Zusammenhang mit den Potenzialen lauten in diesem System

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.68)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.69)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.70)$$

Die relativistisch kovariante Formulierung der Potenziale und Feldstärken ist

$$(A^\mu) \doteq (\Phi, \vec{A}), \quad (2.71)$$

$$F^{\mu\nu} \doteq \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.72)$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

bzw.

$$E_i = F^{i0}, \quad B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} \quad (i, j, k \in \{1, 2, 3\}). \quad (2.74)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten kovariant

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu. \quad (2.75)$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind identisch erfüllt und nehmen die Form

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.76)$$

an. Die Potenziale werden durch die Feldstärken nicht eindeutig festgelegt. Eichtransformationen der Potenziale von der Form

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu} \Lambda(x) \quad (2.77)$$

lassen die Feldstärken unverändert:

$$F'^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x) . \quad (2.78)$$

Durch geeignete Eichtransformationen kann man erreichen, dass die Potenziale gewisse Bedingungen erfüllen. Häufig verwendete Eichungen sind

$$\begin{aligned} \text{Lorenz-Eichung:} \quad & \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 , \\ \text{Coulomb-Eichung:} \quad & \nabla \cdot \vec{A} = 0 , \\ \text{Strahlungseichung:} \quad & \nabla \cdot \vec{A} = 0 , \quad \Phi = 0 , \quad \text{für } j^{\mu} = 0 . \end{aligned}$$

Wenn wir eine Feldtheorie des elektromagnetischen Feldes studieren wollen, stellt sich die Frage, ob die Potenziale $A^{\mu}(x)$ oder die Feldstärken $F^{\mu\nu}(x)$ als grundlegende Felder betrachtet werden soll. Es hat sich als günstig erwiesen, die Potenziale $A^{\mu}(x)$ zu wählen. Wir bezeichnen dieses vierkomponentige Feld daher als Maxwellfeld. Zunächst gilt es allerdings festzustellen, dass die Zahl der Komponenten nicht der Zahl der Freiheitsgrade entspricht. Die sechs Feldstärken $F^{\mu\nu}$ erfüllen vier homogene Maxwell-Gleichungen, die identisch erfüllt sind. Daher werden durch sie nur zwei Freiheitsgrade beschrieben. Diese Freiheitsgrade entsprechen den beiden Polarisierungen von elektromagnetischen Wellen. Folglich müssen in den Potenzialen, aus denen man die Felder durch Ableiten gewinnt, zwei unphysikalische Freiheitsgrade enthalten sein. Diese können durch Eichtransformationen fixiert werden. Betrachten wir das freie Maxwellfeld, d. h. bei Abwesenheit von Ladungen und Strömen. Die Freiheitsgrade lassen sich dann gut in der Strahlungseichung aufzeigen, da diese die unphysikalischen Freiheitsgrade völlig eliminiert. Das sehen wir auf folgende Weise. In der Strahlungseichung gilt

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 , \quad \Phi = 0 . \quad (2.79)$$

Die Feldgleichungen des Maxwellfeldes sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) = 0 , \quad \text{bzw.} \quad \square A^{\nu} + \partial^{\nu} \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 . \quad (2.80)$$

In der Strahlungseichung, in der $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$ gilt, reduzieren sie sich auf die Wellengleichungen

$$\square A_{\mu} = 0 , \quad (\mu = 0, \dots, 3) . \quad (2.81)$$

Ihre Lösungen sind die ebenen Wellen