Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik

Von

Dr. Josef Lense

o. ö. Professor der Technischen Hochschule München

Mit 30 Abbildungen

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig.

1933

Archiv-Nr. 12 07 33

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10

Vorwort.

Ziel dieses Buches ist, die bei den wichtigsten Reihenentwicklungen der mathematischen Physik verwendeten Funktionen eingehender in ihren wesentlichen Eigenschaften zu behandeln, soweit die betreffenden Reihen nicht Potenz- oder Fouriersche Reihen sind. Es kommen also in erster Linie Bessel-, Kugel- und Lamésche Funktionen in Betracht, daneben auch wegen ihrer Anwendungen in der Wellenmechanik Laguerresche und Hermitesche Funktionen. Alle schließen sich wegen ihrer Orthogonalitätseigenschaften unmittelbar an die Fourierschen Reihen an.

Es gibt gewiß viele ausgezeichnete Darstellungen über jede einzelne dieser Funktionsklassen, doch sind sie gewöhnlich so umfangreich, daß sich der Leser nur mit großen Schwierigkeiten über die wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Funktion ein Bild machen kann. Diese werden daher in den ersten vier Abschnitten des vorliegenden Buches ausführlich behandelt. Dabei habe ich mich mit Rücksicht auf die physikalischen Anwendungen immer auf das reelle Gebiet beschränkt, ausgenommen die Besselschen Funktionen. Während nämlich alle erwähnten Funktionen, die in der Physik verwendet werden, im wesentlichen Polynome, also in ihrem funktionentheoretischen Verhalten leicht zu übersehen sind, ist dies bei den Besselschen Funktionen nicht der Fall. Hier sind schon die einfachsten dieser Funktionen ganze transzendente Funktionen. Sie werden daher in vollster Allgemeinheit für komplexe Veränderliche und Zeiger behandelt, wodurch man gleich einen allgemeinen Überblick über ihr funktionentheoretisches Verhalten gewinnt. Die für die Anwendungen wichtigen Fälle ergeben sich dann durch Aussonderung. Die Darstellung schließt sich hauptsächlich an Watson (vgl. S. 35), im ersten Abschnitt an Courant (vgl. S. 12) an.

Warum nicht auch die Kugelfunktionen in ähnlicher Weise behandelt werden, hat darin seinen Grund, daß sie im wesentlichen hypergeometrische Funktionen sind und die Theorie dieser Funktionen nicht vorausgesetzt wird, während sich die für physikalische Anwendungen wichtigen Fälle reeller Veränderlicher und ganzzahliger positiver Zeiger leicht ohne eine derartige Theorie entwickeln lassen. Es wird daher auch nicht auf die Legendreschen Kugelfunktionen zweiter Art eingegangen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Laméschen Funktionen. Hier ist die Behandlung im Anschluß an Hobson (vgl. S. 98) und im Gegensatz zu Poincaré (vgl. S. 133) so gehalten, daß die Kenntnis der elliptischen Funktionen entbehrt werden kann, doch mußte die Darstellung bei Hobson und Poincaré in einigen Punkten vervollständigt werden, um volle Strenge zu erzielen.

Der fünfte Abschnitt bringt das Wichtigste über asymptotische Reihen im Anschluß an Knopp (vgl. S. 152), der sechste die wesentlichen Eigenschaften der Gammafunktion mit Rücksicht darauf, daß im zweiten Abschnitt verschiedene Eigenschaften dieser Funktion gebraucht werden, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung und Funktionentheorie meistens nicht behandelt werden, und die Theorie der Gammafunktion nicht vorausgesetzt werden soll. Am nächsten kommt dem Buch wohl das erwähnte Werk von Courant, doch da dieses infolge seiner ganz anderen Zielrichtung über die in den Abschnitten 4—6 behandelten Dinge fast gar nichts bringt, dürfte auch das vorliegende Buch daneben in Ehren bestehen.

An mathematischen Kenntnissen setzt es Vertrautheit mit den Grundlehren der Funktionentheorie und Differentialgleichungen voraus. Von besonderen Funktionen ist nur eine genaue Kenntnis der sogenannten elementaren Transzendenten, d. h. also im wesentlichen des Logarithmus im komplexen Gebiet erforderlich. Häufig verwendet wird die Integration im Komplexen. Um dem hierin ungeübten Leser die Sache zu erleichtern, sind immer die einzelnen Schritte möglichst ausführlich angegeben. Gelegentlich wird einmal der sogenannte Sturmsche Satz aus der Lehre von den Gleichungen verwendet. Um die Integraleigenschaften der Kugel- und Laméschen Funktionen abzuleiten und die Randwertaufgaben für Kugel und Ellipsoid zu lösen, werden die grundlegenden Sätze der Potentialtheorie benützt.

Das Buch ist in sechs Abschnitte, jeder Abschnitt in Ziffern eingeteilt. Von den Formeln sind nur jene mit Nummern bezeichnet, auf die im Text verwiesen wird. Ihre Bezifferung beginnt in jeder Ziffer von neuem. Bei Verweisen auf Formeln anderer Ziffern werden diese angegeben. So bedeutet z. B. (3) Gleichung (3) derselben Ziffer, (2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 desselben Abschnittes, (I, 2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 des ersten Abschnittes, (I, 2) Ziffer 2 des ersten Abschnittes. Definitionen und Lehrsätze sind durch gesperrten Druck hervorgehoben.

Es war meine Absicht und auch der Wunsch des Verlages, das Buch auf einen mäßigen Umfang zu beschränken und ihm damit vielleicht leichter eine weitere Verbreitung zu sichern. Zu diesem Zweck mußte der Text kurz und straff gefaßt und auf frühere Formeln soviel als möglich verwiesen werden. Letzteres trägt gewiß nicht dazu bei, das Lesen des Buches zu erleichtern, doch mußte dieser Übelstand aus dem angegebenen Grund in Kauf genommen werden.

Die Niederschrift des Manuskriptes hat meine Frau besorgt, die Abbildungen Herr Dr. Nikol gezeichnet. Bei der Durchsicht des Manuskriptes stand mir Herr Dr. Winkler mit wertvollen Ratschlägen zur Seite. Die Korrekturen haben die Herren Prof. Dr. Sauer, Privatdozent Dr. Duschek, Dr. Baier, Dr. Lehr, Dr. Nikol und meine Frau mitgelesen. Ihnen allen sei hier mein herzlicher Dank für ihre treue Hilfe ausgesprochen.

München, im Juli 1933.

J. Lense.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

IV. Abschnitt. **Laméscbe Funktionen.**

V. Abschnitt. **Asymptotische Reihen.**

VI. Abschnitt. **Gammafunktion.**

Einleitung.

1. Reihenentwicklung. Annäherung durch Polynome. Die Reihenentwicklung einer Funktion einer reellen Veränderlichen $f(x)$ in einem bestimmten Intervall führt zu folgender Frage: Gegeben sei eine Folge von Funktionen der Veränderlichen x

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ldots, \quad \varphi_n(x), \ldots$$

Man bestimme die Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ so, daß der Ausdruck

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x) \right|$$

für jedes x des Intervalls bei passender Wahl von r beliebig klein gemacht werden kann. Die Wahl von r wird dabei im allgemeinen von x abhängen. Man sagt in diesem Fall, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

konvergiert gegen $f(x)$, und schreibt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Die Kenntnis der Koeffizienten c_n gestattet dann, die Funktion $f(x)$ aus den bekannten Funktionen $\varphi_n(x)$ mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Um die Rechenarbeit so weit als möglich abzukürzen, wird man die Funktionen $\varphi_n(x)$ möglichst einfach wählen.

Als solche bieten sich vor allem die einzelnen Potenzen von $x - b$ dar, wo b im betrachteten Intervall liegt:

$$(1) \qquad 1, \; x - b, \; (x-b)^2, \; (x-b)^3, \ldots, \; (x-b)^n, \ldots,$$

also eine Darstellung von der Gestalt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n.$$

Diese unter dem Namen der Potenzreihenentwicklung einer Funktion bekannte Reihenentwicklung soll uns hier nicht näher beschäftigen. Es möge nur auf einen Umstand hingewiesen werden. Funktionen, welche eine derartige Entwicklung gestatten, heißen bekanntlich in der Umgebung der Stelle b analytisch. Bei ihnen wird die Annäherung durch Polynome entsprechend hohen Grades bewerkstelligt. Sie setzen unter anderem die Existenz sämtlicher Ableitungen der Funktionen an der betreffenden Stelle voraus. Nun hat Weierstraß[1]) gezeigt, daß man bei einer viel größeren Funktionenklasse eine Annäherung durch Polynome erreichen kann, nämlich bei jeder stetigen Funktion. Der Unterschied zwischen beiden Arten von Annäherungen ist folgender: Bei den analytischen Funktionen erfolgt die Annäherung so, daß bei der Berechnung jedes neuen Koeffizienten die schon vorhandenen Koeffizienten unverändert bleiben. Hat man also einen bestimmten Grad der Annäherung durch ein Polynom n-ten Grades

$$a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n$$

erreicht, so erfolgt der nächste Annäherungsschritt dadurch, daß dieses Polynom durch ein solches $(n+1)$-ten Grades ersetzt wird, das sich vom vorhergehenden nur durch Hinzufügung des Gliedes $a_{n+1}(x-b)^{n+1}$ unterscheidet, während die schon berechneten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dieselben bleiben. Im Falle der Annäherung einer nicht analytischen stetigen Funktion jedoch erfolgt die Annäherung so, daß in diesem Fall auch die schon berechneten Koeffizienten durch neue zu ersetzen sind.

2. Fouriersche Reihen. Orthogonalfunktionen. Eine zweite Art der Reihenentwicklungen einer willkürlichen Funktion, die besonders bei periodischen Funktionen am Platze ist, besteht darin, daß man für die Funktionen $\varphi_n(x)$ die Funktionen

$$(1) \quad 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

wählt, also eine Darstellung von der Gestalt

$$(2) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

versucht. Man nennt die Entwicklung (2) eine Fouriersche Reihe, weil sich Fourier[2]) zum erstenmal mit derartigen Reihen beschäftigt hat. Die Grundeigenschaften dieser Entwicklung sind gegenwärtig fast in allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung enthalten, so daß wir uns damit begnügen können, sie für das Folgende kurz zusammenzustellen. Eine über die gewöhnliche Darstellung hinausgehende, aber dennoch nicht zu ausgedehnte Behandlung findet man in dem Büchlein von W. Rogosinski[3]).

Vor allem ist aus Gleichung (2) klar, daß sich nur periodische Funktionen mit der Periode 2π in dieser Art darstellen lassen. Will man eine im

[1]) K. Weierstraß, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1885, S. 633—639, S. 789—805 wie auch Werke Bd. 3, S. 1—37, Berlin 1903.

[2]) J. B. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822 (Werke Bd. 1, deutsch von R. Weinstein, Berlin 1884).

[3]) W. Rogosinski, Fouriersche Reihen, Samml. Göschen Bd. 1022, Berlin und Leipzig 1930, W. de Gruyter & Co.

Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte nicht periodische Funktion in eine solche Reihe entwickeln, so hat man anzusetzen:

$$(3) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat die Periode $b - a$. Die Gleichung ist also sicher außerhalb des Intervalls ungültig, falls nicht auch die Funktionswerte von $f(x)$ dort als periodische Wiederholung der innerhalb des Intervalles gelegenen Werte definiert werden. Da man durch Einführung einer neuen Veränderlichen immer von Gleichung (3) auf Gleichung (2) zurückgehen kann, genügt es, Entwicklungen von der Gestalt (2) zu betrachten. Durch Einführung der neuen Veränderlichen wird das Intervall auf die Länge 2π gestreckt oder verkürzt.

Setzt man die Gültigkeit der Gleichung (2) und gleichmäßige Konvergenz der Reihe voraus, so erhält man die Koeffizienten a_k, b_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) in folgender Weise: Man multipliziert die Gleichung mit $\cos kx$, bzw. $\sin kx$ und integriert von $-\pi$ bis $+\pi$. Berücksichtigt man die Beziehungen

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos nx\, dx = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{,, } n \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin nx\, dx = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{,, } n \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin nx\, dx = 0,$$

so erhält man die bekannten Formeln

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Die erste gilt auch für $k = 0$, wie durch direkte Integration der Gleichung (2) von $-\pi$ bis $+\pi$ folgt.

Die in den Formeln (4) festgelegte Tatsache, auf der diese Berechnung der Koeffizienten beruht, läßt sich in Worten so ausdrücken: Multipliziert man irgend zwei verschiedene der Funktionen in der Folge (1) miteinander und integriert das Produkt von $-\pi$ bis $+\pi$, so ergibt sich immer Null. Man bezeichnet diese Eigenschaft als O r t h o g o n a l i t ä t und sagt: I r g e n d z w e i v e r s c h i e d e n e F u n k t i o n e n d e r F o l g e (1) s i n d z u e i n a n d e r o r t h o g o n a l. Es wird sich herausstellen, daß diese Eigenschaft nicht auf die Folge (1) allein beschränkt ist, sondern einer sehr allgemeinen Klasse von Funktionen zukommt, die man passend als orthogonale Funktionen bezeichnet.

Die Frage, welche Eigenschaft eine im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ definierte und darüber hinaus periodisch fortgesetzte Funktion haben muß, damit Gleichung (2) möglich sei, ist seit Dirichlet[1]) in zahlreichen Abhandlungen untersucht worden. Für die physikalischen Anwendungen seien folgende hinreichenden (aber keineswegs notwendigen) Bedingungen hier ohne Beweis angegeben:

1. Die Funktion sei samt ihrer ersten Ableitung stetig bis auf eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen mit endlichen Sprüngen, so daß jedesmal an einer Sprungstelle links- und rechtsseitiger Grenzwert der Funktion beziehungsweise der Ableitung vorhanden ist. In diesem Fall konvergiert die Reihe in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen der Funktion gleichmäßig und stellt dort die Funktion dar. An den Sprungstellen der Funktion konvergiert die Reihe ebenfalls und stellt dort das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion dar.

2. Dasselbe gilt, wenn die erste Ableitung der Funktion eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen hat, aber absolut integrierbar bleibt. Näheres siehe in dem erwähnten Buch von Rogosinski.

Wir haben bis jetzt sowohl bei der Entwicklung in eine Potenzreihe als auch in eine Fourierreihe immer eine Funktion einer reellen Veränderlichen zugrunde gelegt. In ähnlicher Weise kann man aber auch vorgehen, wenn eine Funktion von mehreren Veränderlichen vorliegt, oder wenn die Veränderliche als komplex vorausgesetzt wird. Im Fall der komplexen Veränderlichen zeigt sich bei der Potenzreihenentwicklung erst die ganze Tragweite der betreffenden Theorie, indem sich die differenzierbaren Funktionen als identisch mit jenen herausstellen, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen, eine der Grunderkenntnisse der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

---

[1]) L. Dirichlet, J. f. M. 4 (1829), S. 157—169 oder Werke 1, S. 117—132, Berlin 1889.

I. Abschnitt.

Orthogonalfunktionen.

1. Definitionen. Normierung. Wir knüpfen an die in der Einleitung gegebene Definition der Orthogonalfunktionen an und betrachten die Folge der Funktionen

$$(1)\qquad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \varphi_3(x),\ldots$$

Sie seien im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert und stetig. Wir sagen, die Funktionen sind Orthogonalfunktionen oder je zwei verschiedene sind zueinander orthogonal bezüglich des zugrunde gelegten Intervalles, wenn die Beziehung gilt:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n;\ m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Um die Schreibweise abzukürzen, wollen wir im folgenden nach einem Vorschlag von R. Courant[1]) immer

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = (\varphi_m, \varphi_n)$$

setzen. Wir nennen die Folge (1) ein normiertes Orthogonalsystem, wenn die Gleichungen erfüllt sind:

$$(2)\qquad (\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{,, } m \neq n. \end{cases}$$

(φ_n, φ_n) nennt man die Norm von φ_n. Sie kann nur Null sein, wenn die Funktion an jeder Stetigkeitsstelle Null ist, d. h. also gemäß den über die Funktionen $\varphi_n(x)$ gemachten Voraussetzungen, wenn $\varphi_n(x)$ identisch verschwindet. Identisch verschwindende Funktionen nehmen wir aber in die Folge gar nicht auf.

Ein nicht normiertes System von Orthogonalfunktionen läßt sich immer normieren. Ist nämlich $(\varphi_n, \varphi_n) = N_n$ (N_n ist seiner Bedeutung nach immer positiv), so betrachten wir die Folge $\psi_n(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}}$; sie besteht aus lauter normierten Orthogonalfunktionen.

r Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ nennen wir linear abhängig, wenn sie identisch in x einer homogenen linearen Gleichung $\sum\limits_{n=1}^{r} c_n f_n(x) = 0$ genügen, wo die c_n Konstante sind, die nicht sämtlich verschwinden. Sonst heißen die Funktionen linear unabhängig. Funktionen eines Orthogonalsystems sind immer linear

[1]) R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, I, 2. Auflage, Berlin 1931, J. Springer, S. 40.

unabhängig. Denn aus einer Beziehung $\sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x) = 0$ würde durch Multiplikation mit $\varphi_k(x)$ und Integration zwischen a und b folgen:

$$c_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots r).$$

2. Orthogonalisierung. Aus einer Folge (1, 1) läßt sich durch einen Orthogonalisierungsprozeß immer ein Orthogonalsystem herstellen, falls von den Funktionen $\varphi_n(x)$ für beliebiges r je r linear unabhängig sind. Man ersetzt nämlich die $\varphi_n(x)$ durch geeignete Linearkombinationen und zwar so: Wir bestimmen zwei nicht gleichzeitig verschwindende Koeffizienten c_1, c_2 so, daß $\psi_2 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ zu φ_1 orthogonal ist, d. h. aus der Gleichung

$$c_1(\varphi_1, \varphi_1) + c_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Da φ_1 und φ_2 linear unabhängig sind, verschwindet ψ_2 nicht identisch. Der Gleichförmigkeit halber schreiben wir noch $\psi_1 = \varphi_1$.

Nun bilden wir (wieder mit drei nicht gleichzeitig verschwindenden Zahlen c_1', c_2', c_3') die Funktion

$$\psi_3 = c_1'\psi_1 + c_2'\psi_2 + c_3'\varphi_3$$

und zwar so, daß $(\psi_1, \psi_3) = 0$ und $(\psi_2, \psi_3) = 0$, also wegen $(\psi_1, \psi_2) = 0$ die Gleichungen

$$c_1'(\psi_1, \psi_1) + c_3'(\psi_1, \varphi_3) = 0$$
$$c_2'(\psi_2, \psi_2) + c_3'(\psi_2, \varphi_3) = 0$$

erfüllt sind. ψ_3 kann nicht identisch verschwinden, weil ψ_1, ψ_2, φ_3 linear unabhängig sind. Wären sie nämlich linear abhängig, so müßte sich φ_3 als Linearkombination von ψ_1 und ψ_2 darstellen lassen, weil diese beiden als Orthogonalfunktionen linear unabhängig sind. Dann ließe sich φ_3 aber auch als Linearkombination von φ_1 und φ_2 darstellen, gegen die Voraussetzung, daß φ_1, φ_2, φ_3 linear unabhängig sind. In dieser Weise fahren wir fort, d. h. wir bestimmen jetzt vier Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, so daß die mit ihnen gebildete Linearkombination aus ψ_1, ψ_2, ψ_3, φ_4 orthogonal zu ψ_1, ψ_2, ψ_3 ist usw. So wird die Folge (1) schrittweise orthogonalisiert.

Ein Beispiel eines normierten Orthogonalsystems für das Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ ist durch die Folge

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

gegeben, wie sofort aus den Gleichungen (2, 4) der Einleitung folgt.

Orthogonalisiert man das System (1, 1) der Einleitung im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ mit $b = 0$, so erhält man die sogenannten Legendreschen Polynome (vgl. III, 15). Man kann auch das mit $\sqrt{p(x)}$ multiplizierte System $1, x, x^2, x^3, \ldots$ in einem bestimmten Intervall $a \leqq x \leqq b$ orthogonalisieren, wo $p(x) \geqq 0$ und stetig ist; man erhält so ein System von Polynomen $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots$, welche man die zur Belegungsfunktion $p(x)$ gehörigen Polynome nennt. Sie genügen bei passender Normierung den Beziehungen

$$\int_a^b p(x)\, Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{,, } m = n \end{cases}.$$

3. Besselsche Ungleichung. Vollständigkeitsbeziehung. Konvergenz im Mittel. Wir nehmen jetzt an, die Folge (1, 1) sei orthogonalisiert und normiert, d. h. es gelten die Beziehungen (1, 2). $f(x)$ sei eine im selben Intervall definierte stetige Funktion. Wir wollen für sie einen Näherungsausdruck von der Gestalt $\sum_{n=1}^{r} \gamma_n \varphi_n(x)$ mit festem r derart finden, daß die Annäherung im Sinn der Methode der kleinsten Quadrate ein möglichst kleines mittleres Fehlerquadrat

$$M = \int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^{r} \gamma_n \varphi_n(x)]^2\, dx$$

liefert. Wir haben also die Koeffizienten γ_n so zu bestimmen, daß

$$\frac{\partial M}{\partial \gamma_n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots r)$$

ist. Die Rechnung ergibt:

Man hat für die γ_n die Zahlen $c_n = (f, \varphi_n)$ zu setzen. Aus der Umformung

$$\begin{aligned} (1) \qquad M &= \int_a^b f(x)^2\, dx - 2 \sum_{n=1}^{r} \gamma_n c_n + \sum_{n=1}^{r} \gamma_n^2 \\ &= \int_a^b f(x)^2\, dx - \sum_{n=1}^{r} c_n^2 + \sum_{n=1}^{r} (\gamma_n - c_n)^2 \end{aligned}$$

folgt, daß tatsächlich M für $\gamma_n = c_n$ seinen kleinsten Wert annimmt. Man nennt die Zahlen γ_n die (Fourierschen) Entwicklungskoeffizienten oder Komponenten von $f(x)$ bezüglich des Orthogonalsystems. Die gewöhnlichen Fourierschen Koeffizienten erhält man in dem besonderen Fall, daß die Folge (2, 1) als Orthogonalsystem zugrunde liegt.

Aus der Gleichung (1) folgt, weil $M \geqq 0$ ist, für $\gamma_n = c_n$ die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{r} c_n^2 \leqq \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung von r nicht abhängt, die Ungleichung daher für jeden beliebigen Wert von r gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ und man erhält die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqq \int_a^b f(x)^2\,dx. \tag{2}$$

Sie wird die Besselsche Ungleichung [1]) genannt.

Wenn es möglich ist, für jede stetige Funktion das kleinste mittlere Fehlerquadrat

$$\int_a^b \Big[f(x) - \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x)\Big]^2 dx$$

durch passende Wahl von r unter jede noch so kleine positive Zahl herunterzudrücken, oder mit anderen Worten, jede stetige Funktion durch eine Linearkombination $\sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x)$ mit genügend vielen Gliedern im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate („im Mittel", wie man sagt) beliebig genau darzustellen, so nennt man die Folge (1, 1) ein vollständiges, normiertes, orthogonales Funktionensystem.

Weil in diesem Fall M für genügend großes r und $\gamma_n = c_n$ beliebig klein gemacht werden kann, gilt statt (2) und zwar nur in diesem Fall die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f), \tag{3}$$

die sogenannte Vollständigkeitsbeziehung.

Hat man noch eine zweite, im selben Intervall definierte, stetige Funktion $g(x)$ mit den Entwicklungskoeffizienten

$$d_n = (g, \varphi_n),$$

so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = (g, g),$$

und da auch $f(x) + g(x)$ stetig ist und die Entwicklungskoeffizienten $c_n + d_n = (f + g, \varphi_n)$ hat, ebenso

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = (f + g, f + g).$$

Aus der letzten Gleichung aber folgt

$$\begin{aligned}(f + g, f + g) &= (f, f) + 2(f, g) + (g, g)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + 2c_n d_n + d_n^2),\end{aligned}$$

daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (f, g). \tag{4}$$

[1]) F. W. Bessel, Astr. Nachr. 6 (1828), S. 333—348.

Die Gleichungen (3) und (4) sind infolgedessen gleichwertig; denn aus (4) folgt auch umgekehrt für $f(x) = g(x)$ wieder (3).

Wir sehen also, daß die Aussagen

1. Vollständigkeit des Orthogonalsystems $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... oder

$$\lim_{r\to+\infty}\int_a^b\Big[f(x)-\sum_{n=1}^{r}c_n\varphi_n(x)\Big]^2=0\,,$$

2. Gültigkeit der Vollständigkeitsbeziehung in einer der beiden Formen (3) oder (4) gleichwertig sind.

Aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\lim_{r\to+\infty}\int_a^b\Big[f(x)-\sum_{n=1}^{r}c_n\varphi_n(x)\Big]^2=0 \tag{5}$$

darf man aber keineswegs auf die Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine nach den Funktionen $\varphi_n(x)$ fortschreitende Reihe schließen, d. h. auf die Gültigkeit der Gleichung

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\varphi_n(x).$$

Diese Gleichung ist selbstverständlich gesichert, falls die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\varphi_n(x)$ feststeht. Denn dann kann man in (5) unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen.

Ein vollständiges Orthogonalsystem ist abgeschlossen, d. h. es gibt keine stetige, nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(x)$, die zu allen $\varphi_n(x)$ orthogonal ist. Denn ihre Entwicklungskoeffizienten wären alle Null, während $(\varphi,\varphi)\neq 0$ ist, d. h. die Vollständigkeitsbeziehung wäre nicht erfüllt. Die Umkehrung dieses Satzes gilt allgemein nur dann, wenn statt des Riemannschen Integralbegriffes der Lebesguesche zugrunde gelegt wird und soll daher hier nicht besprochen werden.

Läßt man aus einem vollständigen System eine der Funktionen $\varphi_n(x)$, z. B. $\varphi_k(x)$ weg, so ist die übrigbleibende Folge nicht mehr vollständig. Denn $\varphi_k(x)$ wäre zu allen übrigbleibenden Funktionen orthogonal, ohne identisch zu verschwinden, d. h. das Restsystem wäre nicht mehr abgeschlossen und daher auch nicht mehr vollständig. Bei einem unvollständigen System läßt sich also sicher nicht jede stetige Funktion in eine Reihe nach den Funktionen des Systems entwickeln (sonst müßte ja z. B. $\varphi_k(x)$ identisch verschwinden, weil alle seine Entwicklungskoeffizienten bezüglich des Restsystems Null sind), aber bei einem vollständigen ebenfalls nicht, wie die feinere Theorie der Fourierschen Reihen zeigt. Wir können nur die Gültigkeit der Gleichung (5) behaupten, oder wie man sich auszudrücken pflegt, die Funktion $\sum_{n=1}^{r}c_n\,\varphi_n(x)$ konvergiert „im Mittel“ gegen $f(x)$.

Jede stetige Funktion ist durch ihre Entwicklungskoeffizienten in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem eindeutig festgelegt, d. h. zwei stetige Funktionen sind miteinander identisch, wenn sie dieselben Entwicklungskoeffizienten haben. Denn ihre Differenz hat die Entwicklungskoeffizienten Null, daher auch die Form Null und verschwindet somit identisch.

4. Laguerresche Funktionen. Wir führen die am Schluß von Ziffer 2 angedeutete Orthogonalisierung für alle $x \geqq 0$ mit $p(x) = e^{-x}$ durch. Wir erhalten dadurch im Intervall 0 bis ∞ ein System von Orthogonalfunktionen von der Gestalt $e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, wo $L_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades bedeutet. Man nennt sie die Laguerreschen Orthogonalfunktionen bzw. Laguerreschen Polynome[1]). Wir werden im folgenden ein derartiges System von Polynomen angeben; weil aber der Orthogonalisierungsvorgang gemäß Ziffer 2 die Funktionen bis auf konstante Faktoren eindeutig liefert, und zwar, vom Faktor $e^{-\frac{x}{2}}$ abgesehen, der Reihe nach als Polynome steigenden Grades, wobei jeder Grad vertreten ist, muß unser System mit dem gesuchten übereinstimmen.

Wir entwickeln zu diesem Zweck

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \tag{1}$$

nach Potenzen von t. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}{1.2\ldots m} t^m\right] t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n,
\end{aligned} \tag{2}$$

indem wir

$$L_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

---

[1]) E. Laguerre, Bull. Soc. Math. France 7 (1879), S. 72—81 oder Werke 1, S. 428—437, Paris 1898.

setzen. Nun ist aber nach der Multiplikationsregel der Differentialrechnung

$$(3)\qquad e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\ldots(k+1)\, x^k = L_n(x)$$

oder auch

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} [n(n-1)\ldots(n-k+1)]^2 x^{n-k} \\ &= (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\right]. \end{aligned}$$

Für die ersten dieser Polynome ergibt sich so

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= -x + 1, \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2, \\ L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \\ L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Polynome $L_n(x)$ wirklich die gesuchten sind, haben wir die Orthogonalität der Funktion $e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ nachzuweisen. Wir erhalten nach (3), wenn wir teilweise integrieren, für $n > k$

$$\begin{aligned} (4)\qquad \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x)\, dx &= \int_0^\infty x^k \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}\, dx \\ &= -k \int_0^\infty x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}\, dx \\ &= k(k-1) \int_0^\infty x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x^n e^{-x})}{dx^{n-2}}\, dx \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{d^{n-k}(x^n e^{-x})}{dx^{n-k}}\, dx = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x)\, L_m(x)\, dx = 0 \qquad \text{für} \quad n > m,$$

weil sich dieses Integral als eine Summe von Integralen der Gestalt (4) mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ähnlich ergibt sich, wenn wir (3) und (4) zu Hilfe nehmen,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} L_n(x)^2\,dx &= \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}\,dx \\ &= n!\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \\ &= n!\,n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx \\ &= n!\,n(n-1)\int_0^\infty x^{n-2} e^{-x}\,dx \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (n!)^2.\end{aligned}$$

Die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_{n-1}(x)}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bilden also das normierte Orthogonalsystem.

5. Eigenschaften der Laguerreschen Funktionen. Aus (4, 1) erhalten wir

$$(1-t)^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (1-t-x)\,\psi(x,t),$$

also

$$(1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = (1-t-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n,$$

somit, wenn wir die Koeffizienten von t^n vergleichen,

$$(1) \qquad L_{n+1}(x) - (2n+1-x)\,L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \qquad (n \geqq 1),$$

also eine Rekursionsformel für die $L_n(x)$.

Ähnlich ergibt sich aus (4, 1)

$$(1-t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = -t\,\psi(x,t),$$

hiermit

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n'(x)}{n!} t^n = -t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n$$

oder

$$(2) \qquad L_n'(x) - n\,L_{n-1}'(x) = -n\,L_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 1).$$

Wenn wir die Rekursionsformel differenzieren, erhalten wir

$$(3) \quad L_{n+1}'(x) - (2n+1-x)\,L_n'(x) + L_n(x) + n^2 L_{n-1}'(x) = 0.$$

Ferner ist nach (2), wenn wir n durch $n+1$ ersetzen,

$$L'_{n+1}(x) - (n+1)\,L'_n(x) + (n+1)\,L_n(x) = 0, \tag{4}$$

daher, wenn (3) von (4) abgezogen wird,

$$(n-x)\,L'_n(x) + n\,L_n(x) - n^2 L'_{n-1}(x) = 0$$

oder nach (2)

$$x\,L'_n(x) = n\,L_n(x) - n^2\,L_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 1), \tag{5}$$

somit nach (2) und (5)

$$\begin{aligned}\frac{d[x\,L'_n(x)]}{dx} &= n\,L'_n(x) - n^2\,L'_{n-1}(x)\\ &= -\,n^2\,L_{n-1}(x)\\ &= x\,L'_n(x) - n\,L_n(x),\end{aligned}$$

d. h. $L_n(x)$ genügt der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$xy'' + (1-x)\,y' + ny = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzen wir

$$y = ze^{\frac{x}{2}},$$

also

$$y' = \left(\frac{z}{2} + z'\right)e^{\frac{x}{2}},$$

$$y'' = \left(\frac{z}{4} + z' + z''\right)e^{\frac{x}{2}},$$

so wird

$$xz'' + z' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + n\right)z = 0 \; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dieser Differentialgleichung genügen also die Laguerreschen Funktionen $e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$.

6. Hermitesche Funktionen. Wählen wir $p(x) = e^{-x^2}$ und lassen sämtliche reellen Werte von x zu, so erhalten wir im Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ ein System von Orthogonalfunktionen der Gestalt $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$, wo $H_n(x)$ ebenfalls ein Polynom n-ten Grades bedeutet. Man nennt sie die Hermiteschen Orthogonalfunktionen bzw. Hermiteschen Polynome [1]). Wir gehen wieder von einer erzeugenden Funktion aus, nämlich

---

[1]) Ch. Hermite, C. R. Acad. sc. Paris 58, S. 93—100, 266—273; 60 (1865), S. 370—377, 432—440, 461—466, 512—518 oder Werke 2 (Paris 1908), S. 293—312, 319—346.